Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.М. НАЗАРОВА, В.В. ХАБЛОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО РЯДАМ И ИНТЕГРАЛАМ ФУРЬЕ, ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2009

УДК 517.53(075.8)
Н 192

Рецензенты: *В. Г. Чередниченко,* д-р физ.-мат. наук, проф. СибУКП;
А. Г. Пинус, д-р физ.-мат. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов технических специальностей

Назарова Т.М.

Н 192 Сборник задач по рядам и интегралам Фурье, теории функций комплексного переменного и операционному исчислению : учеб. пособие / Т. М. Назарова, В. В. Хаблов — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. — 44 с.

ISBN 978-5-7782-1199-5

Настоящая разработка подготовлена в условиях острой нехватки в библиотеке НГТУ задачника по разделам математики, приведенных в заглавии. Задачи по анализу Фурье подобраны из технически простых — упор сделан на смысловое наполнение. Отобранные задачи других разделов не являются оригинальными — большинство взято из проверенного временем пособия М. Л. Краснова, А. И. Киселева, Г. И. Макаренко «Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости».

УДК 517.53(075.8)

ISBN 978-5-7782-1199-5

Оглавление

§1. Ряды Фурье.

1. Построить график суммы ряда, ограничиваясь главной гармоникой.

а) $f(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n}$; *б*) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin \frac{\pi n x}{2}$.

2. Чему равен период функции $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x}{n^2}$?

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

а) $f(x) = \cos x$;

б) $f(x) = \sin^3 x$;

в) $f(x) = \sin 3x \cos^2 7x$;

г) $f(x) = |\cos x|$.

4. Найти ряд Фурье 2π–периодической функции $f(x)$, если

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \pi, \\ -1, & \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$ *б*) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

Изобразите график суммы ряда Фурье.

5. Найти ряд Фурье 2π–периодической функции $f(x)$, если

а) $f(x) = \begin{cases} h, & 0 \le x < l, \\ -h, & l \le x < 2l. \end{cases}$ *б*) $f(x) = \begin{cases} h, & -\frac{l}{2} \le x < \frac{l}{2}, \\ -h, & \frac{l}{2} \le x < \frac{3l}{2}. \end{cases}$

6. *а*) Разложить в ряд Фурье 2π–периодическую функцию $f(x) = \cos^2 x$;

б) Разложить в ряд Фурье π–периодическую функцию $f(x) = \cos^2 x$.

7. Разложить функцию $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$ в ряд Фурье с наименьшим периодом суммы.

8. Разложить функцию $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi)$ в ряд Фурье с наименьшим периодом суммы.

9. Разложить функцию $f(x) = x^2$, $x \in (-1, 1)$ в ряд Фурье с наименьшим периодом суммы.

10. Разложить функцию $f(x) = 1 - x$, $x \in (0, 1)$ в ряд Фурье с наименьшим периодом суммы.

11. Разложить функцию $f(x) = 1 - x$, $x \in (0, 1)$ с наименьшим периодом суммы *а*) в ряд Фурье по синусам; *б*) в ряд Фурье по косинусам.

12. Изобразить график суммы ряда $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, если

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{3\pi/2} (1 - x) \cos nx dx, \qquad n \geq 0.$$

13. Изобразить график суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, если

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (1 - x) \sin nx dx, \qquad n \geq 1.$$

14. Изобразить график суммы ряда $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, если коэффициенты a_n и b_n вычислены по формулам:

а) $a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin x \cos nx dx, \quad n \geq 0; \qquad b_n = 0, \quad n \geq 1.$

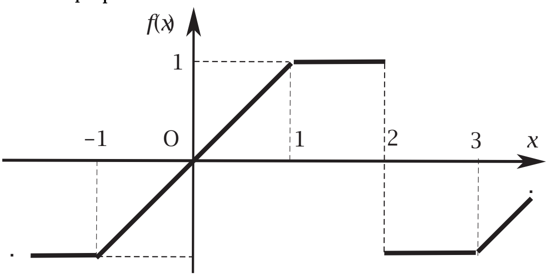
б) $a_n = 0, \quad n \geq 0; \qquad b_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x dx; \qquad b_n = 0, \quad n = 2, 3, \ldots$

в) $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos nx dx, \quad n \geq 0; \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin x \sin nx dx, \quad n \geq 1.$

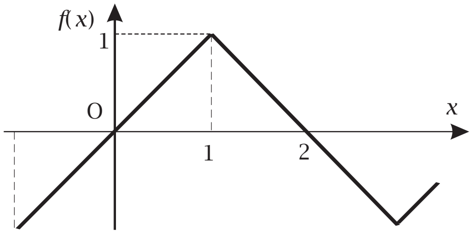
г) $a_n = 0, \quad n \geq 0; \qquad b_n = \frac{1}{3} \left(\int\limits_{-1}^{1} x \sin \frac{\pi n x}{3} dx + \int\limits_{1}^{2} \sin \frac{\pi n x}{3} dx \right), \quad n \geq 1.$

15. Ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi n x$. Построить график суммы ряда, если $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$, $x \in (0, 1)$.

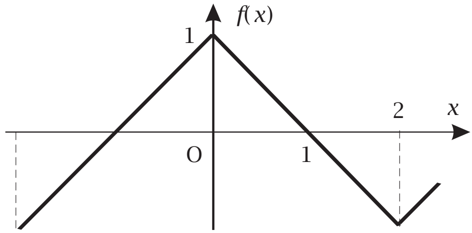
16. Выписать формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$, заданной графически



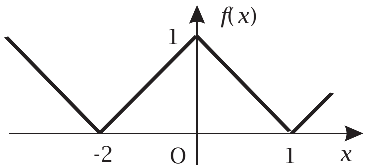
17. Выписать формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$, заданной графически.



а)



б)



в)

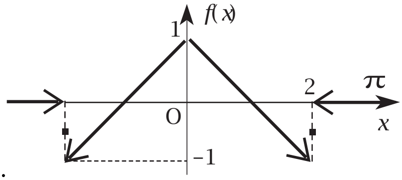
18. Исходя из разложения в ряды Фурье «ступенчатых» функций (задачи 4 и 5), разложить в ряд Фурье функции задачи 17. Используйте для этого теорему о почленном интегрировании ряда Фурье и свойство линейности.

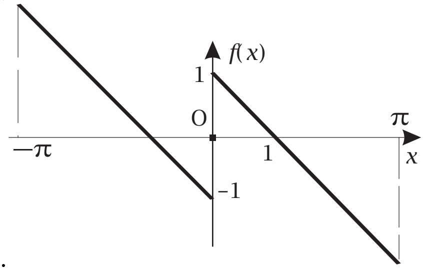
Ответы. 1. а) график $y = 1 - \cos x$; б) график $y = \sin\frac{\pi x}{2}$. 2. Период $T = 2$. 3. а) $f(x) \sim \cos x$; б) $f(x) \sim \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$; в) $f(x) \sim \frac{1}{4}\sin 17x - \frac{1}{4}\sin 11x$; г) $f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$. 4. а) $f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; б) $f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(2n-1)x}{2n-1}$. 5. а) $f(x) \sim 4\frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi x}{l}}{2n-1}$;

б) $f(x) \sim 4\frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(2n-1)\frac{\pi x}{l}}{2n-1}$. 6. а) $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$; б) $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$. 7. $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. 8. $f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

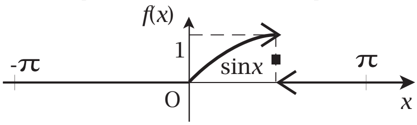
9. $x^2 \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\pi nx}{n^2}$. 10. $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$.

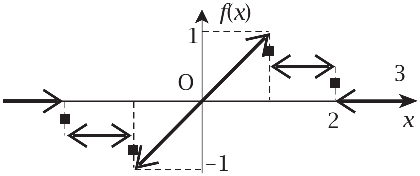
11. а) $f(x) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi nx}{n}$ б) $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$.

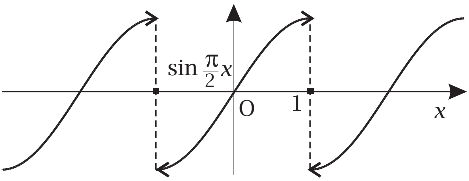
12.


13.


14. *а*) график $y = |\sin x|$; *б*) график $y = \sin x$;

в)


г)


15.


16. $b_n = \int\limits_0^1 x \sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int\limits_1^2 \sin\frac{\pi n x}{2}dx$; $n \geq 1$; $a_n = 0$; $n \geq 0$ 17. *а*) $b_n = \int\limits_0^2 (1 - |1 - x|)\sin\frac{\pi n x}{2}dx$; $n \geq 1$; $a_n = 0$; $n \geq 0$.

б) $a_n = \int\limits_0^2 (1 - x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx$; $n \geq 0$; $b_n = 0$; $n \geq 1$. *в*) $a_n = \int\limits_0^1 (1 - x)\cos \pi n x dx$; $n \geq 0$; $b_n = 0$; $n \geq 1$. 18. *а*) $f(x) \sim \frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi x}{2}}{(2n-1)^2}$; *б*) $f(x) \sim \frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi x}{2}}{(2n-1)^2}$;

в) $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$

§2. Интегралы Фурье. Преобразование Фурье.

1. Представить функцию $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

а) вещественным интегралом Фурье; *б*) комплексным интегралом Фурье; *в*) найти преобразование Фурье $\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx$ функции $f(x)$.

Являются ли найденные интегралы Фурье представлениями *для всех* значений x ?

2. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-a|x|}$.

3. Представить функцию $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ интегралом Фурье, продолжив ее на $\mathbb{R}$ *а*) четным образом; *б*) нечетным образом.

4. Найти

а) синус-преобразование функции $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x > \pi; \end{cases}$

б) косинус-преобразование этой функции.

5. Проверить, что функция $f(x) = e^{-x^2/2}$ является решением задачи Коши для уравнения 1-го порядка: $f' + xf = 0; \quad f(0) = 1$. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет преобразование Фурье $\hat{f}(\xi)$ этой функции? Чему равно значение $\hat{f}(0)$ (вспомните интеграл Пуассона)? Почему отсюда следует, что $\hat{f}(\xi) \equiv e^{-\xi^2/2}$?

6. Исходя из свойств преобразования Фурье и того, что $\mathcal{F}[e^{-x^2/2}] = e^{-\xi^2/2}$, найти преобразование Фурье функции $\varphi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

7. Найти свертку функций (см. задачу 6) φ_{a_1,σ_1} и φ_{a_2,σ_2} применив к ней прямое и обратное преобразования Фурье и используя ответ задачи 6.

8. Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{2t} e^{\frac{-x^2}{4t}}, \quad t > 0.$$
$$u(x,0) = 0.$$

Указание: примените к обеим частям уравнения преобразование Фурье по переменной x, рассматривая t, как параметр. Решите полученное уравнение для преобразования $\hat{u}(\xi,t)$. Найдите обратное преобразование Фурье $\hat{u}(\xi,t) \to u(x,t) = e^{\frac{-x^2}{4t}}$ — ответ.

9. Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0.$$
$$u(x,0) = u_0(x).$$

Здесь $a > 0, \quad u_0(x)$ — заданная функция.

Указание: примените к обеим частям уравнения преобразование Фурье по переменной x, рассматривая t, как параметр. Решите полученное уравнение для преобразования $\hat{u}(\xi,t)$. Найдите обратное преобразование Фурье $\hat{u}(\xi,t) \to$ $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} u_0(\xi)d\xi$ — ответ (формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности).

10. Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0.$$
$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Здесь $u_0(x)$ — заданная функция.

Указание: примените к обеим частям уравнения преобразование Фурье по переменной x, рассматривая t, как параметр. Решите полученное уравнение для преобразования $\hat{u}(\xi,t)$. Найдите обратное преобразование Фурье $\hat{u}(\xi,t) \to u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x - at) + u_0(x+at)]$ — ответ.

Ответы. 1. *а*) $f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{a\cos\xi a + \xi\sin\xi x}{a^2+\xi^2} d\xi$; *б*) $f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{a+i\xi} d\xi$; *в*) $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a+i\xi}$. 2. $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2+\xi^2}$. 3. *а*) $f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{1-\cos\xi}{\xi^2}\cos\xi x d\xi$; *б*) $f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\xi - \sin\xi}{\xi^2}\sin\xi x d\xi$. 4. *а*) $\int\limits_0^{\infty} f(x)\sin\xi x dx = \frac{\xi\sin\pi\xi}{\xi^2-1}$; *б*) $\int\limits_0^{\infty} f(x)\cos\xi x dx = -\frac{1+\cos\pi\xi}{\xi^2-1}$. 6. $\hat{\varphi}_{a,\sigma}(\xi) = \frac{e^{-i\xi x}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}$. 7. $\varphi_{a_1,\sigma_1} * \varphi_{a_2,\sigma_2} \equiv \varphi_{a,\sigma}$, где $a = a_1 + a_2$, а $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

§3. Комплексные числа.

1. Найти действительные решения уравнения
$(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i$

2. Найти модуль и главные значения аргументов комплексных чисел

а) $z=4+3i$; г) $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$;

б) $z=-2+2\sqrt{3}$; д) $z=4-3i$;

в) $z=-7-i$; е) $z=\cos\alpha-i\sin\alpha$; $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

3. Следующие числа представить в тригонометрической форме:

а) -2; д) i;

б) $2i$; е) $-i$;

в) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; ж) $-1-i\sqrt{3}$;

г) 2; з) $\sin\alpha-i\cos\alpha$, $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$

4. В следующих задачах найти все значения корня:

а) $\sqrt[4]{-1}$; д) $\sqrt[4]{1}$;

б) $\sqrt{i}$; е) $\sqrt[3]{-1+i}$;

в) $\sqrt[3]{i}$; ж) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$;

г) $\sqrt[4]{-i}$;

5. Найти множества точек на плоскости, удовлетворяющие условиям:

а) $|z|\geq 2$; е) $1<|z+i|<2, \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{1}{|z|}\geq 1, z\neq 0$; ж) $2<|z|<3$;

в) $\left|\frac{1}{z}\right|\leq 2, z\neq 0$; з) $1\leq|z+2+i|\leq 2$;

г) $|z-5i|=8$; и) $|z-1|<|z-i|$;

д) $|z-1-i|\leq 4$; к) $1<\operatorname{Re} z<2$.

Какие линии определяются следующими уравнениями:

6. $\operatorname{Im} z^2=2$; 9. $|z-i|+|z+i|=4$;

7. $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=1$; 10. $|z-i|-|z+i|=2$;

8. $z^2+\overline{z}^2+1$; 11. $|z-z_1|=|z-z_2|$.

Ответы. 1. $x=\frac{12}{17}$; $y=-\frac{36}{17}$. 2. а) $\rho=5$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; б) $\rho=4$; $\varphi=\frac{2\pi i}{3}$; в) $\rho=5\sqrt{2}$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}-\pi$; г) $\rho=1$; $\varphi=\frac{4\pi}{5}$; д) $\rho=5$; $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; е) $\rho=1$; $\varphi=2\pi-\alpha$. 3. а) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; б) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; в) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $2(\cos 0+i\sin 0)$; д) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; е) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; ж) $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; з) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$. 4. а) $\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$; б) $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3}+i\right)$; $-i$; г) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $\pm\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$; д) ±1; $\pm i$; е) $\frac{4^{1/3}}{2}(1+i)$; $2^{1/6}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; $12^{1/6}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$; ж) $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$.

6. Гипербола $xy = 1$. 7. Окружность $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{1}{4}$. 8. Гипербола $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$.
9. Эллипс $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. 10. Луч на оси Oy от -1 до $-\infty$.
11. Прямая, перпендикулярная отрезку z_1z_2, проходящая через его середину.

§4. Основные элементарные функции комплексного переменного

Выделить действительную и мнимую части функций.

1. а) $w = 2z - 1$; б) $w = z + z^2$; в) $w = z^{-1}$.

2. а) $w = e^{-z}$; б) $w = e^{z^2}$;
в) $w = \sin z$; г) $w = \operatorname{ch}(z - i)$.

3. а) $w = 2^{z^2}$; б) $\operatorname{sh} z$; в) $w = \operatorname{tg} z$.

В следующих задачах найти значения модуля и главные значения аргумента функций в указанных точках.

4. $w = \cos z$; а) $z_1 = -\frac{\pi}{2} + i\ln 2$; б) $z_2 = -\pi + i\ln 2$.

5. $w = \operatorname{sh} z$; $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$.

6. $w = ze^z$; $z_0 = \pi i$. 7. $w = \operatorname{ch}^2 z$; $z_0 = i\ln 3$.

8. Найти логарифмы следующих чисел
а) e; б) $-i$; в) i; г) $-1 - i$; д) $3 - 2i$; е) i^i.

9. Найти значения
а) i^i; б) $i^{\frac{1}{i}}$; в) 1^i; г) $(-1)^{\sqrt{2}}$; д) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$; е) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$; ж) $(1 - i)^{3-3i}$.

10. Найти модуль ρ и аргумент φ комплексных чисел
а) $\operatorname{th} \pi i$; б) 10^i; в) 3^{2-i}.

Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа.

11. а) $e^{\frac{\pi}{4}i}$; б) $\ln(1 - i)$.

12. а) $\sin \pi i$; б) $\cos \pi i$; в) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} i$.

13. а) $\operatorname{ctg} \pi i$; б) $\operatorname{Arcsin} i$; в) $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3}$.

14. а) $\operatorname{Arccos} i$; б) $\operatorname{sh} \frac{\pi i}{2}$; в) $\operatorname{th} \pi i$.

Решить уравнения.

15. $e^{-z} + 1 = 0$. 16. $e^z + i = 0$.

17. $4\cos z + 5 = 0$. 18. $\operatorname{sh} iz = -i$.

19. $\sin z = \pi i$. 20. $e^{ix} = \cos \pi x$, x — действительные.

21. $e^{2z} + 2e^z = 3$. 22. $\operatorname{ch} z = i$. 23. а) $\ln(z + i) = 0$;
б) $\ln(i - z) = 1$.

Ответы. 1. а) $u = 2x - 1$, $v = 2y$; б) $u = x^2 - y^2 + x$, $v = (2x + 1)y$; в) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$. 2. а) $u = e^{-x}\cos y$, $v = -e^{-x}\sin y$; б) $u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$; в) $u = \sin x \operatorname{ch} y$, $v = \cos x \operatorname{sh} y$;
г) $u = \operatorname{ch} x \cos(y - 1)$, $v = \operatorname{sh} x \sin(y - 1)$. 3. а)

$$\begin{cases} u = e^{(x^2-y^2)\ln 2 - 4k\pi xy} \cdot (\cos 2k\pi\,(x^2 - y^2) + 2xy\ln 2)\,; \\ v = e^{(x^2-y^2)\ln 2 - 4k\pi xy} \cdot (\sin 2k\pi\,(x^2 - y^2) + 2xy\ln 2)\,, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

б) $u = \operatorname{ch} x \cos y$, $v = \operatorname{ch} x \sin y$; *в*) $u = \dfrac{\sin x \cos x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$, $v = \dfrac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$. 4. *а*) $\rho = \frac{3}{4}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$; *б*) $\rho = \frac{5}{4}$ $\varphi_0 = \pi$. 5. $\rho = \operatorname{ch} 1$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. 6. $\rho = \pi$, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. 7. $\rho = \cos^2(\ln 3)$, $\varphi_0 = 0$. 8. *а*) $1 + 2k\pi i$. Здесь и далее, если не оговорено противное, то $k \in \mathrm{Z}$;
б) $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$; *в*) $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$; *г*) $\ln\sqrt{2} + \left(2k - \frac{3}{4}\right)\pi i$; *д*) $\ln\sqrt{13} + \left(2k\pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)i$;
е) $-\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi + 2m\pi i$ $(m \in \mathrm{Z})$. 9. *а*) $e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$; *б*) $e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$;
в) $e^{-2k\pi}$; *г*) $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$; *д*) $e^{-\left(4k+\frac{1}{2}\right)\pi}$; *е*) $e^{(i-1)\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi}$;
ж) $2^{\frac{3}{2}} \cdot e^{3\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 3\left(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} - 2k\pi\right)i}$. 10. *а*) $\rho = 0$, φ не определен;
б) $\rho = e^{-2k\pi}$. $\varphi = \ln 10 + 2m\pi$ $(m \in \mathrm{Z})$; *в*) $\rho = 9e^{2k\pi}$, $\varphi = -\ln 3 + 2m\pi$.
11. *а*) $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$; *б*) $\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$. 12. *а*) $i \operatorname{sh}\pi$; *б*) $\operatorname{ch}\pi$; *в*) $i \operatorname{th}\frac{\pi}{2}$.
13. *а*) $-i \operatorname{cth}\pi$; *б*) $2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$, $(2k+1) - i\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$;
в) $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi - i\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$, $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi - i\ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$.
14. *а*) $k\pi + i\frac{\ln 2}{2}$; *б*) i; *в*) 0. 15. $z_k = (2k+1)\pi i$. 16. $z_k = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$.
17. $z_k = (2k+1)\pi i \pm i\ln 2$. 18. $z_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi$. 19. $z_{2k} = 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{\pi^2+1} - \pi\right)$, $z_{2k+1} = (2k+1)\pi - i\ln\left(\sqrt{\pi^2+1} + \pi\right)$. 20. $x = 0$. 21. $z_{2k} = 2k\pi i$, $z_{2k+1} = (2k+1)\pi i + \ln 3$. 22. $z_k = \ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $z_k = \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$. 23. *а*) $z = 1 - i$;
б) $z = -e + i$.

§5. Дифференцируемые и гармонические функции

Используя условия Коши-Римана, выяснить, какие из следующих функций являются дифференцируемыми хотя бы в одной точке, а какие — нет.

1. а) $w = z^2 \cdot \overline{z}$; б) $w = ze^z$; в) $w = |z|\,\overline{z}$;
г) $w = e^{z^2}$; д) $w = |z| \cdot \operatorname{Re}\overline{z}$; е) $w = \sin 3z - i$;

2. Показать, что функция $w = \ln z$ дифференцируема в области $\operatorname{Re} z > 0$.

3. Показать, что при переходе от декартовых координат (x, y) к полярным (ρ, φ) условия Коши-Римана $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right.$ принимают вид $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho} \end{array}\right.$

4. Показать, что если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в оласти D, то в этой области выполняется равенство $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

5. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0 по известной действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ части и значению $f(z_0)$.

а) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$; $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$;
б) $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $(x > 0)$, $f(1) = 0$;
в) $u = x^2 - y^2 + 2x$, $f(0) = 2i - 1$;
г) $v = -2\sin 2x \operatorname{sh} 2y + y$, $f(0) = 2$;
д) $v = 2\cos 2x \operatorname{ch} 2y - x^2 + y^2$, $f(0) = 2$.

6. Показать, что следующие функции являются гармоническими
а) $u = x^2 + 2x - y^2$; б) $u = 2e^x \cos y$; в) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$;
г) $u = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; д) $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; е) $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

7. В следующих примерах даны пары гармонических функций найти среди них сопряженные пары гармонических функций.

а) $u = 3\left(x^2 - y^2\right)$; $v = 3x^2 y - y^3$;
б) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$; $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$;
в) $u = x$; $v = -y$;
г) $u = e^x \cos y + 1$; $v = 1 + e^x \sin y$.

Ответы. 1. а) да, при $z = 0$; б) да $\forall z$; в) да, при $z = 0$; г) да $\forall z$; д) да, при $z = 0$; е) да $\forall z$. 5. а) $f(z) = \frac{1}{z}$; б) $f(z) = \ln z$; в) $f(z) = z^2 + 2z$; г) $f(z) = 2\cos 2z + z$; д) $f(z) = 2i(\cos 2z - 1) - iz^2 + 2$. 7. а) нет; б) да; в) нет; г) да.

§6. Интегрирование функции комплексного переменного

1. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$, $C: |z| = 1$ $\quad (-\pi \le \arg z \le 0)$.

2. $\int\limits_C e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z dz$, C — отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$; $z_2 = 1 + i$.

3. $\int\limits_C \ln z dz$, $\quad \ln z$ — главное значение логарифма, $C: |z| = 1$.

Начальная точка интегрирования *а*) $z_0 = 1$; *б*) $z_0 = -1$. Обход против часовой стрелки.

4. $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,z dz$, $C: |z| = 1$. Обход против часовой стрелки.

5. $\int\limits_C z\overline{z} dz$, $C: |z| = 1$. Обход против часовой стрелки.

6. $\int\limits_C \mathrm{Re}\,z dz$, $\quad$ C — *а*) отрезок $z = (2 + i)t$, $\quad (0 \le t \le 1)$; *б*) ломаная, состоящая из отрезка $[0; 2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 2 + i$.

7. $\int\limits_1^i z e^z dz$. $\quad$ 8. $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) dz$.

9. $\int\limits_0^{i+1} z^3 dz$. $\quad$ 10. $\int\limits_1^i \left(3z^4 - 2z^3\right) dz$.

11. $\int\limits_C e^z dz$; $\quad$ C — *а*) дуга параболы, $y = x^2$ соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$; *б*) отрезок прямой, соединяющий эти же точки.

12. $\int\limits_C \cos z dz$, C : — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = \frac{\pi}{2}$ и $z_2 = \pi + i$.

13. $\int\limits_{1+i}^{2i} (z^3 - z)\, e^{\frac{z^2}{2}} dz$. $\quad$ 14. $\int\limits_0^i z \cos z dz$.

15. $\int\limits_1^i z \sin z dz$. $\quad$ 16. $\int\limits_0^i (z - i)\, e^{-z} dz$.

17. $\int\limits_1^i \frac{\ln z}{z} dz$ $\;$ по отрезку, соединяющему точки $z_1 = 1$ и $z_2 = i$.

18. $\int\limits_0^{1+i} (z - i)\, e^{-z} dz$.

19. $\int\limits_1^i \frac{1 + \mathrm{tg}\,z}{\cos^2 z} dz$ $\quad$ по отрезку, соединяющему точки $z_1 = 1$ и $z_2 = i$.

20. $\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\left(z^2\right) dz$, $C: |\mathrm{Im}\,z| \le 1$, $\quad \mathrm{Re}\,z = 1$.

21. $\int\limits_C \cos z\,\mathrm{Re}\,(\sin z)\, dz$, $C: |\mathrm{Im}\,z| \le 1$, $\quad \mathrm{Re}\,z = \frac{\pi}{4}$.

Ответы. 1. $-\frac{\pi}{2}$. 2. $\frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right)(1 + i)$.3. *а*) $2\pi i$; *б*) $-2\pi i$. 4. 0. 5. 0.

6. *а*) $2+i$; *б*) $2+2i$. 7. $(i-1)e^i$. 8. $-2(1+i)$. 9. -1. 10. $\frac{3}{5}(i-1)$.
11. *а*) $e\cos 1-1+ie\sin 1$; *б*) $e\cos 1-1+ie\sin 1$. 12. $-(1+i\operatorname{sh}1)$.
13. $-7e^{-2}+(3-2i)e^i$. 14. $e^{-1}-1$. 15. $\cos 1-\sin 1-ie^{-1}$.
16. $1-\cos 1+i(\sin 1-1)$. 17. $-\frac{\pi^2}{8}$. 18. $\frac{1}{4}(1-\cos(2+2i))$.
19. $-\left(\operatorname{tg}1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 1+\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 1\right)+i\operatorname{th}1$. 20. $-\frac{4}{3}$. 21. $\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}2+\frac{1}{2}\right)i$.

§7. Интегральная формула Коши

С помощью интегральной формулы Коши вычислить следующие интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки)

1. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2+2z}$. 2. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{iz} dz}{z^2+i}$.

3. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2} dz}{z^2+2z-3}$. 4. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz dz}{z^2-4z+3}$.

5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z dz}{z e^{\frac{1}{z+2}}}$. 6. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i) dz}{z\,(e^z+2)}$.

7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$. 8. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)\,(z+9)}$.

9. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(z+i) dz}{z^2-2z}$. 10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z} dz$.

11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z^3}$. 12. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z dz}{z^3}$.

13. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4} dz}{(z-1)^2(z-3)}$. 14. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z dz}{(z^2-1)^2}$.

15. $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=6} \frac{z dz}{(z-2)^3(z+4)}$. 16. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z} dz}{z^3-4z^2}$.

17. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3} \cos\frac{\pi}{z+1} dz$. 18. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}} dz}{(z^2+4)^2}$.

19. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2} dz$. 20. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz$.

Ответы. 1. πi. 2. πe^{-1}. 3. $\frac{\pi i}{2}$. 4. $\pi \operatorname{sh} 1$. 5. 0. 6. $\frac{2}{3}\pi i \operatorname{ch}\pi$. 7. 0. 8. $-\frac{\pi i}{45}$. 9. π. 10. 0. 11. $-\pi i$. 12. 0. 13. $-\frac{i\pi(\pi+2)\sqrt{2}}{8}$. 14. 0. 15. $-\frac{\pi i}{27}$. 16. $-\frac{\pi^2}{2}\operatorname{sh} 1$. 17. $\pi^3 i$. 18. 0. 19. $-2\pi i$. 20. $-\frac{1+i}{2}e^i$.

§8. Степенные ряды и ряды Лорана

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$. 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n \operatorname{ch} \frac{i}{n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^n$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n \sin \frac{\pi i}{n}$.

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n$. 8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \cos in$.

В следующих задачах данные функции разложить в ряд Тейлора, используя разложения основных элементарных функций, и найти радиусы сходимости полученных рядов.

9. $\sin(2z+1)$ по степеням $z+1$. 10. e^z по степеням $2z-1$.

11. $\frac{1}{3z+1}$ по степеням $z+2$. 12. $\frac{z+1}{z^2+4z-5}$ по степеням z.

13. $\cos^2 \frac{iz}{2}$ по степеням z. 14. $\ln(2-z)$ по степеням z.

15. $\ln\left(2+z-z^2\right)$ по степеням z.

Разложить в ряд Лорана в проколотой окрестности нуля следующие функции.

16. $\frac{\sin z}{z^2}$. 17. $\frac{e^z}{z}$. 18. $z^3 e^{\frac{1}{z}}$. 19. $z^4 \cos \frac{1}{z}$.

20. $\frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z}$. 21. $\frac{e^z - 1}{z}$. 22. $\frac{1-e^{-z}}{z^3}$.

Разложить в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0 следующие функции.

23. $\frac{z}{(z+1)^2}$, $z_0 = -1$. 24. $\frac{\sin z}{z-2}$, $z_0 = 2$. 25. $z e^{\frac{1}{z+i}}$, $z_0 = -i$.

Разложить функции в ряд Лорана в указанных кольцах.

26. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, *а*) $2 < |z| < 3$; *б*) $3 < |z| < +\infty$.

27. $\frac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1 < |z| < 2$.

28. $\frac{2}{z^2-1}$, $1 < |z+2| < 3$.

29. $\frac{1}{z^2+2z-8}$, $1 < |z+2| < 4$.

30. $\frac{1}{z^2+1}$, $0 < |z-i| < 2$.

31. $\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, *а*) $|z| < 1$; *б*) $1 < |z| < 2$; *в*) $2 < |z| < \infty$.

Ответы. 1. $\mathrm{R} = 1$. 2. $\mathrm{R} = \sqrt{2}$. 3. $\mathrm{R} = 1$. 4. $\mathrm{R} = \infty$.
5. $\mathrm{R} = 1$. 6. $\mathrm{R} = 1$. 7. $\mathrm{R} = 1$. 8. $\mathrm{R} = e^{-1}$.

9. $-\sin 1 + 2(z+1)\cos 1 + \frac{2^2}{2!}(z+1)^2 \sin 1 - \frac{2^3}{3!}(z+1)^3 \cos 1 + \ldots$; $\mathrm{R} = \infty$.

10. $\sqrt{e}\left[1 + \frac{1}{2}(2z-1) + \frac{1}{2!2^2}(2z-1)^2 + \frac{1}{3!2^3}(2z-1)^3 + \ldots\right]$;
$\mathrm{R} = \infty$.

11. $-\frac{1}{5}\left[1 + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \ldots\right]$; $\mathrm{R} = \frac{5}{3}$.

12. $-\frac{1}{5}-\frac{9}{25}z-\frac{41}{125}z^2-\dots, \quad R=1.$

13. $1+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right), \quad R=\infty.$

14. $\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2\cdot 4}+\frac{z^3}{3\cdot 8}+\dots\right), \quad R=2.$

15. $\ln 2+\frac{z}{2}-\frac{5z^2}{2\cdot 4}+\frac{7z^3}{3\cdot 8}-\dots, \quad R=1.$

16. $\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\dots$

17. $\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\dots$

18. $z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\dots$

19. $z^4-\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!z^2}+\dots$

20. $\frac{4^2}{2!\cdot 2z^3}-\frac{4^4}{4!\cdot 2z^5}+\frac{4^6}{6!\cdot 2z^7}-\dots$

21. $1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\dots$

22. $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}-\frac{z}{4!}+\dots$ 23. $\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}.$

24. $\frac{\sin 2}{z-2}-\frac{\sin 2}{2!}(z-2)-\frac{\cos 2}{3!}(z-2)^2+\dots$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{i}{n!}\right](z+i)^{-n}.$

26. *а*) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n}{2^{n+1}}.$ 28. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}.$

29. Не разлагается. 30. $-\frac{1}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}\cdot(z-i)^n.$

31. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n-\frac{(-1)^n}{2^n}\right]z^{n-1}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot z^n$;

в) $\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-2)^n}{z^{n+1}}.$

§9. Нули аналитических функций. Изолированные особые точки и их классификация

Найти нули аналитических функций и определить их порядок.

1. *а*) $f(z) = z^4 + 4z^2$; *б*) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.
2. *а*) $f(z) = z^2 \sin z$; *б*) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh}^2 z}{z}$.
3. *а*) $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$; *б*) $f(z) = \dfrac{(1 - \operatorname{sh} z)^2}{z}$.
4. *а*) $f(z) = (z + \pi i) \operatorname{sh} z$; *б*) $f(z) = \cos z^3$.

Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для следующих функций

5. $f(z) = \dfrac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{z}{2}\right)^2}$. 6. $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

7. $f(z) = \dfrac{z^3}{1 + z - e^z}$. 8. $f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2$.

9. $f(z) = \dfrac{(1 - \cos 2z)^2}{z - \operatorname{sh} z}$. 10. $f(z) = \left(e^z - e^{z^2}\right)\ln(1 - z)$.

11. $f(z) = e^{z^2}\left(e^{z^2} - 1\right)$. 12. $f(z) = 6 \sin z^3 + z^3 (z^6 - 6)$.

Найти особые точки следующих функций и определить их характер

13. *а*) $\dfrac{1}{1 - \sin z}$; *б*) $\dfrac{1 - \cos z}{z^2}$. 14. *а*) $e^{\frac{1}{z+2}}$; *б*) $\cos\dfrac{1}{z}$.

15. *а*) $\dfrac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}$; *б*) $\dfrac{1}{e^{-z} - 1} + \dfrac{1}{z^2}$.

16. *а*) $e^{-\frac{1}{z^2}}$; *б*) $\sin\dfrac{\pi}{z+1}$; *в*) $\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

17. *а*) $\dfrac{z^2}{\cos z - 1}$; *б*) $\dfrac{1 - \sin z}{\cos z}$; *в*) $\dfrac{z - \pi}{\sin^2 z}$.

Определить характер указанных особых точек.

18. $\dfrac{1 + \cos z}{z - \pi}$, $z_0 = \pi$. 19. $\dfrac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}$, $z_0 = 1$.

20. $\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$. 21. $\dfrac{\operatorname{sh} z}{z}$, $z_0 = 0$.

22. $\cos\dfrac{1}{z + \pi}$, $z_0 = -\pi$. 23. $\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z_0 = 0$.

24. $\dfrac{e^{z+e}}{z + e}$, $z_0 = -e$. 25. $\cos\dfrac{1}{z} + \sin\dfrac{2 - \pi z}{2z}$, $z_0 = 0$.

Ответы. 1. *а*) $z = 0$ — второго порядка; $z_{1,2} = \pm 2i$ — простые; *б*) $z_n = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$ — простые. 2. *а*) $z = 0$ — третьего порядка; $z_n = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$ — простые; *б*) $z = 0$ — простой, $z_n = n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$ — второго порядка. 3. *а*) $z_n = (2n + 1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$ — второго порядка; *б*) $z_n = (4n + 1)\frac{\pi}{2} i$ $(n \in \mathbb{Z})$ — второго порядка. 4. *а*) $z = -\pi i$ — второго порядка; $z_n = n\pi i$ $(n = 0, +1, \pm 2, \dots)$ — простые; *б*) $z_{nk} = \sqrt[3]{(2n - 1)\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\frac{ik\pi}{3}}, k = 0, 1, \dots 6$; $n \in \mathbb{N}$ — простые. 5. Второго порядка. 6. Третьего порядка. 7. Простой ноль. 8. Четвертого порядка. 9. Первого порядка. 10. Второго порядка. 11. Второго порядка. 12. Пятнадцатого порядка. 13. $z_n = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ — полюсы второго порядка; *б*) $z = 0$ — устранимая особая точка. 14. *а*) $z = -2$ — существенно особая точка; *б*) $z = 0$ — существенно особая точка. 15. *а*) $z = 0$ — полюс второго порядка; $z = -1$ — полюс второго порядка;

б) $z = 0$ — полюс второго порядка; $z_n = 2n\pi i$ $(n \in Z, n \neq 0)$ — простые полюсы. 16. *а*) $z = 0$ — существенно особая точка; *б*) $z = -1$ — существенно особая точка; *в*) $z = 0$ — существенно особая точка. 17. *а*) $z = 0$ — устранимая особая точка; $z = 2\pi k$ $(k \in Z, k \neq 0)$ — полюсы второго порядка; *б*) $z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in Z)$ — устранимые особые точки; $z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in Z)$ — простые полюсы;
в) $z = \pi$ — простой полюс; $z = k\pi$ $(k = 0, -1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ — полюсы второго порядка. 18. Устранимая особая точка. 19. Простой полюс. 20. Простой полюс.
21. Устранимая особая точка. 22. Существенно особая точка. 23. Устранимая особая точка. 24. Простой полюс. 25. Устранимая особая точка.

§10. Вычеты аналитических функций

Найти вычеты функций во всех конечных особых точках.

1. $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z}$.
2. $f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$.
3. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.
4. $f(z) = \dfrac{e^z}{\frac{1}{4} - \sin^2 z}$.
5. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.
6. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$.
7. $f(z) = \dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}$.
8. $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z}$.
9. $f(z) = \cos \dfrac{1}{z} + z^3$.
10. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+i)\left(z - \frac{i}{2}\right)^2}$.
11. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$.
12. $f(z) = e^{z^2 + \frac{1}{z^2}}$.
13. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$.
14. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2} z^2}$.
15. $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$.
16. $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ $(n \in \mathrm{N}.)$
17. $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$.
18. $f(z) = \sin z \cos \dfrac{1}{z}$.
19. $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$.
20. $f(z) = \dfrac{\sin \frac{1}{z}}{1-z}$.
21. $f(z) = e^z \sin \dfrac{1}{z}$.
22. $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z}}$.

Ответы. 1. $\operatorname{res} f(0) = 0$, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}$, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{-8}{\pi^2(2n+1)(4n+1)}$ $(n \in \mathrm{Z})$. 2. $\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{24}$. 3. $\operatorname{res} f(-i) = -\frac{1+3i}{20}\cos 1$, $\operatorname{res} f(i) = -\frac{1-3i}{20}\cos 1$, $\operatorname{res} f(3) = \frac{\operatorname{ch} 3}{10}$. 4. $\operatorname{res} f\left[(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right] = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{6} + 2\pi n}, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{6} + (2n-1)\pi}; \end{cases}$ $\operatorname{res} f\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n\right] = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{6} + 2\pi n}, \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{6} + (2n-1)\pi}; \end{cases}$ $(n \in \mathrm{Z})$. 5. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{5}{2}$, $\operatorname{res} f(1) = e$. 6. $\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{27}$, $\operatorname{res} f(2) = -\frac{1}{27}$. 7. $\operatorname{res} f(0) = 0$, $\operatorname{res} f(z_1) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} e^i$, $\operatorname{res} f(z_2) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} e^{-i}$, $\operatorname{res} f(z_3) = \frac{1+i}{4\sqrt{2}} e^i$, $\operatorname{res} f(z_4) = -\frac{1-i}{4\sqrt{2}} e^{-i}$, где z_k $(k = 1,2,3,4)$ — корни уравнения $z^4 + 1 = 0$. 8. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}$. 9. $\operatorname{res} f(0) = 0$. 10. $\operatorname{res} f(-i) = \frac{4}{9} \operatorname{sh} 2 \cdot i$, $\operatorname{res} f(\frac{i}{2}) = -\frac{8}{9}\left(2e + \frac{1}{e}\right)$. 11. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}$, $\operatorname{res} f(3) = \frac{2}{27}\sin^2\left(\frac{3}{2}\right)$. 12. $\operatorname{res} f(0) = 0$. 13. $\operatorname{res} f(-3) = \frac{1}{8} e^{-3i}$, $\operatorname{res} f(1) = \frac{1}{8} e^i$, $\operatorname{res} f(-1) = -\frac{1}{4} e^{-i}$. 14. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{4}{\pi^2}$, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. 15. $\operatorname{res} f(i) = -1$. 16. $\operatorname{res} f(1) = \frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!}$. 17. $\operatorname{res} f(n\pi) = 0$ $(n \in \mathrm{Z})$. 18. $\operatorname{res} f(0) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)! \cdot (2n)!}$. 19. e в точке $z = 1$. 20. $\sin 1$ в точке $z = 0$; $-\sin 1$ в точке $z = 1$. 21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(2n+1)!}$ в точке $z = 0$. 22. $e^{-1} - 1$ в точке $z = 0$.

§ 11. Теорема Коши о вычетах

Вычислить интегралы, используя теорему Коши.

1. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{tg}\,\pi z dz.$

2. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{zdz}{(z-1)^2(z+2)},$ где $C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}.$

3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}.$

4. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=3} \frac{\left(e^{z^2}-1\right)dz}{z^3-iz^2}.$

5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin\frac{1}{z} dz.$

6. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z\cos z}.$

7. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=4} \frac{zdz}{e^z+3}.$

8. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\sqrt{13}} \frac{\sin\pi z}{z^2-z} dz.$

9. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}.$

10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z-\pi)^3}.$

11. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4} dz,$ где $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + 1.$

12. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{e^{2z}dz}{z^3-1},$ где $C: x^2+y^2-2x=0.$

13. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2} dz,$ где $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1.$

14. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{(z+1)dz}{z^2+2z-3},$ где $C: x^2+y^2=16.$

15. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z\sin z}{(z-1)^5} dz, = 1,$ где $C: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9},$

16. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{dz}{z^4+1},$ где $C: x^2+y^2-2x=0.$

17. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^3\sin\frac{1}{z} dz.$

18. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)e^{\frac{1}{z}} dz.$

19. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin\frac{1}{z^2} + e^{z^2}\cos z\right) dz.$

Ответы. 1. 0. 2. 0. 3. $(1-2e^{-1})\pi i$. 4. $2(1-e^{-1})\pi i$. 5. $-\frac{1}{3}\pi i$. 6. 0. 7. $-\frac{4}{3}\ln 3\cdot\pi i$. 8. 0. 9. $[\cos 1+\sin 1+i(\sin 1-\cos 1)]\,\frac{\pi}{2}$.10. πi.11. 0.12. $2\pi i\frac{e^2}{3}$. 13. $-\pi^2 i$. 14. $2\pi i$.15. $\frac{\sin 1-4\cos 1}{12}\pi i$.16. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$.17. 0.18. $3\pi i$.19. 0.

§12. Приложение вычетов к вычислению определенных интегралов

Определить характер бесконечно удаленной особой точки для следующих функций.

1. $f(z) = \dfrac{z^3 - z^2 + z + 6}{z^2}$.
2. $f(z) = \dfrac{z+1}{z^4}$.
3. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$.
4. $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$.
5. $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$.
6. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

Используя вычет относительно бесконечно удаленной особой точки, вычислить интегралы.

7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3}dz.$
8. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{12}}.$
9. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1000z+2}{1+z^{1224}}dz.$
10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z-1}.$
11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}dz.$
12. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1}dz.$

Найти интегралы с помощью вычетов.

13. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$
14. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a > 0, b > 0)$.
15. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$
16. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$
17. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}.$
18. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$
19. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6+1}.$
20. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\cos xdx}{x^2-2x+10}.$
21. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\sin xdx}{x^2+4x+20}.$
22. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos xdx}{x^2+a^2}$ $(a > 0)$.
23. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^3\sin axdx}{(x^2+1)^2}$ $(a > 0)$.
24. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}$ $(0 < p < 1)$.
25. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 xdx}{1-2p\cos 2x+p^2}$ $(0 < p < 1)$.
26. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2xdx}{1-2p\cos x+p^2}$ $(p > 1)$.
27. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos xdx}{1-2p\sin x+p^2}$ $(0 < p < 1)$.
28. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}$ $(a > 1)$.

29. $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x-a)\,dx$ $\quad(\operatorname{Im} a > 0)$.

30. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{a+b\cos x}$ $\quad(a > b > 0)$.

31. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x}$ $\quad(0 < a < 1)$.

32. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$ $\quad(a > b > 0)$.

Ответы. 1. ∞ — простой полюс. 2. ∞ — устранимая особая точка. 3. ∞ — существенно особая точка. 4. ∞ — устранимая особая точка. 5. ∞ — устранимая особая точка. 6. ∞ — полюс третьего порядка. 7. $2\pi i$. 8. 0. 9. 0. 10. $2\pi e i$. 11. $-\frac{\pi i}{3}$. 12. $2\pi i$. 13. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 14. $\frac{\pi}{ab(a+b)}$. 15. $\frac{\pi}{2}$. 16. $\frac{(2n)!}{(n!)^2}2^{-2n}\cdot\pi$. 17. $-\frac{\pi}{27}$. 18. $\frac{2\pi}{3}$.
19. $\frac{2\pi}{3}$. 20. $\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$. 21. $\frac{\pi}{2}e^{-4}(2\cos 2 + \sin 2)$. 22. $\frac{\pi}{2a}e^{-a}$. 23. $\frac{\pi}{4}(2-a)e^{-a}$. 24. $\frac{2\pi}{1-p^2}$. 25. $\frac{\pi}{2(1-p)}$. 26. $\frac{2\pi}{p^2\,(p^2-1)}$. 27. 0. 28. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 29. πi. 30. $\frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$. 31. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. 32. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

§13. Преобразование Лапласа. Изображения и оригиналы

1. Проверить, какие из приведенных функций являются оригиналами.

а) $f(t) = b^t \eta(t) \quad (b > 0, b \neq 1)$; *б*) $f(t) = e^{(2+4i)t}\eta(t)$;

в) $f(t) = \frac{1}{t-3}\eta(t)$; *г*) $f(t) = t^2\eta(t)$;

д) $f(t) = \operatorname{ch}(3-i)t \cdot \eta(t)$; *е*) $f(t) = \operatorname{tg} t \cdot \eta(t)$;

ж) $f(t) = t^t \cdot \eta(t)$; *з*) $f(t) = e^{-t}\cos t \cdot \eta(t)$;

и) $f(t) = e^{t^2}\eta(t)$; *к*) $f(t) = e^{-t^2}\eta(t)$;

л) $f(t) = \frac{1}{t^2+2}\eta(t)$; *м*) $f(t) = \eta(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta(t-k)\cdot(-1)^k$.

Пользуясь определением, найти изображения функций.

2. $f(t) = t$. 3. $f(t) = \sin 3t$.

4. $f(t) = te^t$. 5. $f(t) = t^\alpha \quad (\alpha > -1)$.

6. Может ли функция $\varphi(p) = \frac{1}{\cos p}$ служить изображением некоторого оригинала?

Найти изображения функций.

7. $1 + t$. 8. $2\sin t - \cos t$. 9. $t + \frac{1}{2}e^{-t}$.

Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций

10. $f(t) = e^{\alpha t}$. 11. $f(t) = \sin 4t$.

12. *а*) $f(t) = \cos \omega t$; *б*) $f(t) = \operatorname{sh} 3t$.

Пользуясь теоремами линейности и подобия, найти изображения следующих функций

13. $f(t) = \sin^2 t$. 14. $f(t) = \sin mt \cdot \cos nt$.

15. $f(t) = \cos^3 t$. 16. $f(t) = \sin mt \cdot \sin nt$.

17. $f(t) = \sin^4 t$. 18. $f(t) = \cos mt \cdot \cos nt$.

Ответы. 1. *а*) да; *б*) да; *в*) нет; *г*) да; *д*) да; *е*) нет; *ж*) нет; *з*) да; *и*) нет; *к*) да; *л*) да; *м*) да. 2. $\frac{1}{p^2}$. 3. $\frac{3}{p^2+9}$. 4. $\frac{1}{(p-1)^2}$. 5. $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$. 6. нет. 7. $\frac{p+1}{p^2}$. 8. $\frac{2-p}{p^2+1}$.
9. $\frac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$. 10. $\frac{1}{p-a}$. 11. $\frac{4}{p^2+16}$. 12. *а*) $\frac{p}{p^2+\omega^2}$; *б*) $\frac{3}{p^2-9}$. 13. $\frac{2}{p(p^2+4)}$.
14. $\frac{m\left(p^2+m^2-n^2\right)}{\left(p^2+m^2+n^2\right)^2-4m^2n^2}$. 15. $\frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$. 16. $\frac{2mnp}{\left(p^2+m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2}$.
17. $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}+\frac{p}{p^2+16}-\frac{4p}{p^2+1}\right)$. 18. $\frac{p\left(p^2+m^2+n^2\right)}{\left(p^2+m^2+n^2\right)^2-4m^2n^2}$.

§14. Теоремы о дифференцировании и интегрировании

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения следующих функций

1. $f(t) = \cos^2 t$. 2. $f(t) = \sin^3 t$.
3. $f(t) = t \sin \omega t$. 4. $f(t) = \cos^4 t$.
5. $f(t) = t \cos \omega t$. 6. $f(t) = te^t$.

Найти изображения функций.

7. $f(t) = t^2 \cos t$. 8. $f(t) = t\left(e^t + \operatorname{ch} t\right)$.
9. $f(t) = (t+1)\sin 2t$. 10. $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$.
11. $f(t) = \int\limits_0^t \sin \tau d\tau$. 12. $f(t) = \int\limits_0^t (\tau + 1)\cos \omega\tau d\tau$.
13. $f(t) = \int\limits_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau$. 14. $f(t) = \int\limits_0^t \cos^2 \omega\tau d\tau$.
15. $f(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch} \omega\tau d\tau$. 16. $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.
17. а) $\frac{e^t - 1}{t}$; б) $\frac{1 - e^{-t}}{t}$; в) $\frac{\sin^2 t}{t}$.
18. а) $\frac{1 - \cos t}{t}$; б) $\frac{\cos t - \cos 2t}{t}$.
19. а) $\frac{e^t - 1 - t}{t}$; б) $\frac{e^t - e^{-t}}{t}$.

Вычислить интегралы

20. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt, \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$.
21. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} \sin at}{t} dt, \quad (\alpha > 0, a > 0)$.
22. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \sin mt dt, \quad (\alpha > 0, \beta > 0, m > 0)$.
23. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt, \quad (a > 0, b > 0)$.
24. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin at \cdot \sin bt}{t} dt, \quad (a > 0, b > 0)$.

Ответы. 1. $\frac{p^2 + 2}{p\left(p^2 + 4\right)}$. 2. $\frac{6}{\left(p^2 + 1\right)\left(p^2 + 9\right)}$. 3. $\frac{2\omega p}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}$. 4. $\frac{p^4 + 16p^2 + 24}{p\left(p^2 + 4\right)\left(p^2 + 16\right)}$. 5. $\frac{p^2 - \omega^2}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}$. 6. $\frac{1}{(p-1)^2}$. 7. $\frac{2p^3 - 6p}{\left(p^2 + 1\right)^3}$. 8. $\frac{2\left(p^2 + p + 1\right)}{\left(p^2 - 1\right)^2}$. 9. $\frac{2p^2 + 4p + 8}{\left(p^2 + 4\right)^2}$. 10. $\frac{6p}{\left(p^2 - 9\right)^2}$. 11. $\frac{1}{p\left(p^2 + 1\right)}$. 12. $\frac{p^3 + p^2 + p\omega^2 - \omega^2}{p\left(p^2 + \omega^2\right)^2}$. 13. $\frac{4}{\left(p^2 - 4\right)^2}$. 14. $\frac{p^2 + 2\omega^2}{p^2\left(p^2 + 4\omega^2\right)}$. 15. $\frac{1}{p^2 - \omega^2}$. 16. $\frac{2}{p(p+1)^3}$. 17. а) $\ln \frac{p}{p-1}$; б) $\ln \frac{p+1}{p}$; в) $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{p}$.

18. *а*) $\ln \frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$; *б*) $\frac{1}{2}\ln \frac{p^2+4}{p^2+1}$. 19. *а*) $\ln \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p}$; *б*) $\ln \frac{p+1}{p-1}$. 20. $\ln \frac{\beta}{\alpha}$. 21. $\operatorname{arctg} \frac{a}{\alpha}$. 22. $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m}$. 23. $\ln \frac{b}{a}$. 24. $\frac{1}{2}\ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|$.

§15. Теоремы смещения и запаздывания

Найти изображения функций

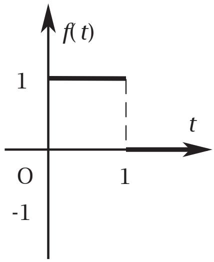
1. а) $e^{2t}\sin t$; б) $e^{t}\cos nt$. 2. $e^{-t}t^{3}$. 3. $e^{t}\operatorname{sh} t$.

4. $te^{t}\cos t$. 5. $e^{3t}\sin^{2} t$. 6. $e^{-\alpha t}\cos^{2}\beta t$.

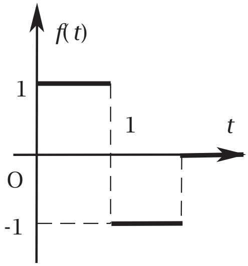
7. $\sin(t-b)\cdot\eta(t-b)$. 8. $\cos^{2}(t-b)\cdot\eta(t-b)$. 9. $e^{t-2}\cdot\eta(t-2)$.

Найти изображения функций, заданных графически.

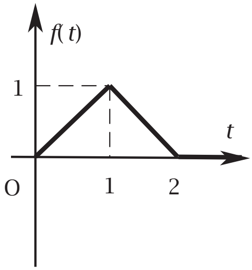
10.



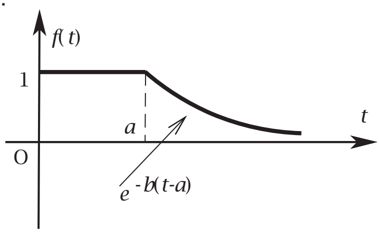
11.



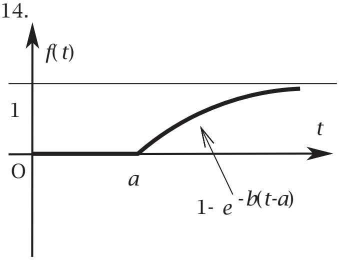
12.



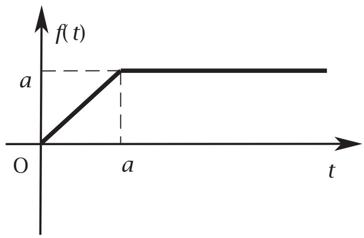
13.



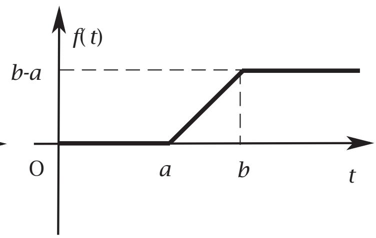
14.



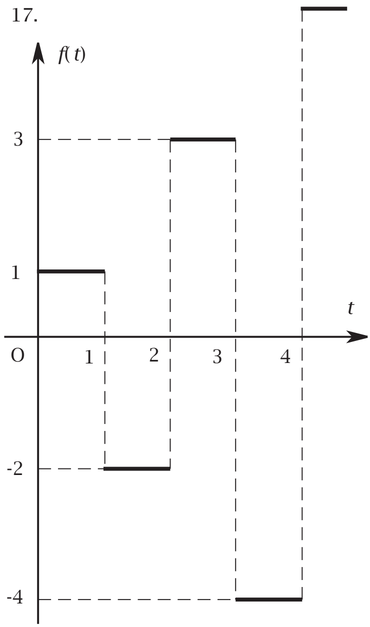
15.



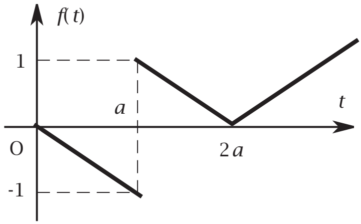
16.



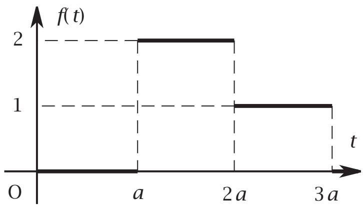
17.



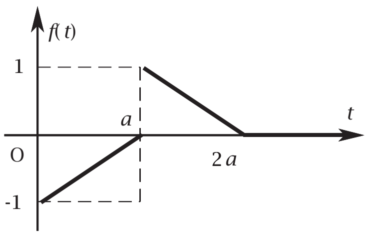
18.



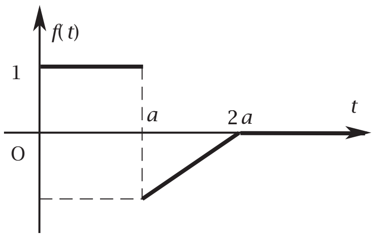
19.



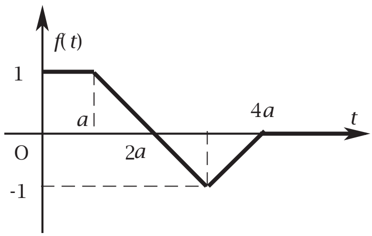
20.



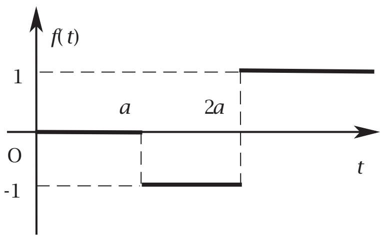
21.



22.



23.



Ответы. 1. *а*) $\frac{1}{(p-2)^2+1}$; *б*) $\frac{p-m}{(p-m)^2+n^2}$. 2. $\frac{3!}{(p+1)^4}$. 3. $\frac{1}{(p-1)^2-1}$.

4. $\dfrac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}$. 5. $\dfrac{1}{2(p-3)}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4}$. 6. $\dfrac{1}{2(p+\alpha)}+\dfrac{p+\alpha}{2\left[(p+\alpha)^2+4\beta^2\right]}$. 7. $\dfrac{e^{-bp}}{p^2+1}$.
8. $\dfrac{e^{-bp}}{2p}+\dfrac{pe^{-bp}}{2\left(p^2+4\right)}$. 9. $\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$. 10. $\dfrac{1-e^{-p}}{p}$. 11. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$. 12. $\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$. 13. $\dfrac{e^{-ap}}{p+b}$.
14. $\dfrac{be^{-ap}}{p\,(p+b)}$. 15. $\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$. 16. $\dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$. 17. $\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k(2k+1)}{e^{kp}}$.
18. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{ap^2}\left(2e^{-2ap}-1\right)+\dfrac{2}{p}e^{-ap}$. 19. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-ap}}{p}\left(2-e^{-ap}-e^{-2ap}\right)$.
20. $\mathrm{F}(p)=-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{ap^2}\left(1+e^{-2ap}\right)+\dfrac{ap-2}{ap^2}e^{-ap}$. 21. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1-2ap}{ap^2}e^{-ap}-\dfrac{1}{ap^2}e^{-2ap}$.
22. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{ap^2}e^{-ap}+\ +\dfrac{2}{ap^2}e^{-3ap}$. 23. $\mathrm{F}(p)=-\dfrac{b}{p}e^{-ap}+\dfrac{2b}{p}e^{-2ap}$.

§16. Теорема умножения изображений. Нахождение оригиналов по изображению

Найти изображения следующих функций

1. $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau$. 2. $\int\limits_0^t e^{2\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau$.

3. $\int\limits_0^t (t-\tau)^2\operatorname{ch}\tau d\tau$. 4. $\int\limits_0^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau$.

5. $\int\limits_0^t e^{2(t-\tau)}\tau^2 d\tau$.

Для данных изображений найти оригиналы и построить их графики.

6. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^3}$. 7. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2}$.

8. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$. 9. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p+3}$.

Найти оригиналы по изображениям.

10. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$. 11. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

12. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{p}{(p+1)^2}$. 13. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

14. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$. 15. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{7-p+p^2}$.

16. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$. 17. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

18. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

19. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$.

20. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$.

21. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

22. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$. 23. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{2p+3}{p3+4p^2+5p}$.

24. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$. 25. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

26. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$. 27. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

28. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$. 29. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

30. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\left(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}\right)$.

31. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

32. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-p/2}}{p(p+1)(p^2+4)}$.

33. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

34. $\mathrm{F}(p)=\dfrac{e^{-p/3}}{p(p^2+1)}$.

Ответы. 1. $\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$. 2. $\dfrac{p}{(p-2)(p^2+1)}$. 3. $\dfrac{2}{p^2(p^2-1)}$. 4. $\dfrac{n!\mathrm{F}(p)}{p^{n+1}}$. 5. $\dfrac{2}{p^3(p+2)}$. 6.

$(t-1)^2\,\eta(t-1)$. 7. $(t-2)\,\eta(t-2)$. 8. $e^{t-2}\eta(t-2)$. 9. $e^{3(t-3)}\eta(t-3)$. 10. $e^{-2t}\sin t$.
11. $\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)$. 12. $(1-t)e^{-t}$. 13. $\frac{1}{2}t\sin t$. 14. $1-e^{-t}-te^{-t}$.15. $\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{t/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t$.
16. $\frac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$. 17. $t-\sin t$. 18. $\frac{e^{2t}}{6}-\frac{e^{-t}}{15}-\frac{\cos 2t}{10}-\frac{\sin 2t}{5}$. 19. $1-ne^{-t}+\frac{1}{2}n(n-1)e^{-2t}+\ldots+(-1)ne^{-nt}$. 20. $\frac{2}{3}e^{-t/2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-t\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$. 21. $e^{-t}\left(1-t^2\right)$.
22. $\frac{1}{3}e^{t/2}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]-\frac{1}{3}e^{-t}$. 23. $\frac{3}{5}+\frac{e^{-2t}}{5}\left(4\sin t-3\cos t\right)$.
24. $\frac{1}{9}\left(e^{-2t}-e^{t}+3te^{t}\right)$. 25. $2e^{t}+e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.
26. $\frac{1}{3}te^{t}-\frac{1}{3}te^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. 27. $\frac{1}{2}e^{t-1}\cdot\sin 2(t-1)\cdot\eta(t-1)+\cos 3(t-2)\cdot\eta(t-2)$.
28. $(t-3)e^{-(t-3)}\eta(t-3)$. 29. $\left(e^{t-1}-1\right)\eta(t-1)$. 30. $\sin(t-2)\cdot\eta(t-2)+2\sin(t-3)\cdot\eta(t-3)+3\sin(t-4)\cdot\eta(t-4)$. 31. $\mathrm{sh}(t-1)\cdot\eta(t-1)+\mathrm{ch}\,2(t-2)\cdot\eta(t-2)$. 32. $\frac{1}{4}\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\cdot\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{20}\cos 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{10}\sin 2\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)$.
33. $(t-1)\cdot\eta(t-1)+(t-2)^2\cdot\eta(t-2)+(t-3)^3\cdot\eta(t-3)$. 34. $\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)-\cos\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot\eta\left(t-\frac{1}{3}\right)$.

§17. Операционный метод для обыкновенных дифференциальных уравнений. Случай постоянных коэффициентов

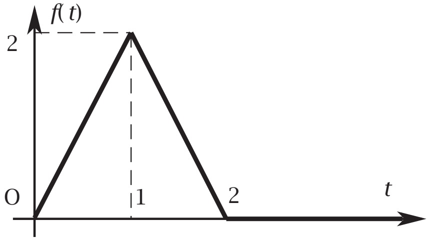
Найти решение задачи Коши.

1. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$
2. $x' + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0.$
3. $x'' + x' = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
4. $x'' + 3x' = e^{t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$
5. $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
6. $x''' + x' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
7. $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$
8. $x''' + x' = t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad x''(0) = 0.$
9. $x''' + 2x'' + 5x' = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 0.$
10. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$
11. $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$
12. $x'' + 2x' + 5x = 3, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
13. $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
14. $x^{\mathrm{IV}} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x''' = 0.$
15. $x'' - x' = te^{t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
16. $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
17. $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
18. $x'' + 4x = 2\cos t \cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
19. $x'' - 4x = \sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
20. $x''' + 3x'' - 4x = 0, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 2.$
21. $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
22. $x'' + \omega^2 x = a\,[\eta(t) - \eta(t-b)], \quad x(0) = x'(0) = 0.$
23. $x'' + x = 0, \quad x(\pi) = 1, \quad x'(\pi) = 0.$
24. $x'' + x' = 2t, \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = -1.$
25. $x'' - x' = -2t, \quad x(2) = 8, \quad x'(2) = 6.$
26. $x'' + x = -2\sin t, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Решить задачи Коши для уравнений, правые части которых заданы графически

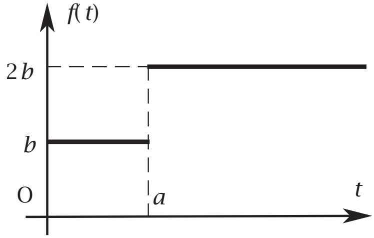
27. $x'' + 4x = f(t)$;

$x(0) = x'(0) = 0.$



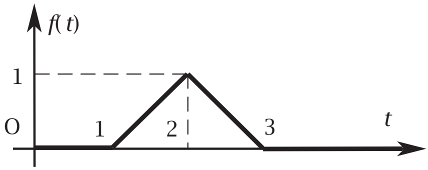
28. $x'' + x = f(t)$;

$x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$



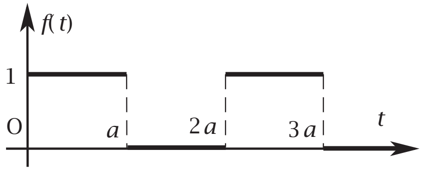
29. $x'' + 9x = f(t)$;

$x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$



30. $x'' - 2x' + x = f(t)$;

$x(0) = x'(0) = 0.$



Решить системы уравнений.

31. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t, \quad x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \qquad x(0) = y(0) = x'(0) = 1. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \quad x(0) = x'(0) = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \quad x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \quad x(0) = x'(0) = 1, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, \\ z' = x + y + z + 4, \qquad x(0) = y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$

$$39.\begin{cases} x' = -y - z, & x(0) = -1,\\ y' = -x - z, & y(0) = 0,\\ z' = -x - y, & z(0) = 1. \end{cases}$$

Ответы. 1. $x(t) = (t+1)e^{-t}$. 2. $x(t) = \frac{1}{5}(e^{-2t} - \cos t + \ +2\sin t)$. 3. $x(t) = t$. 4. $x(t) = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3}$.5. $x(t) = \frac{1}{8}\left(3e^{t} - e^{-3t} - 2e^{-t}\right)$.6. $x(t) = t - \sin t$.7. $x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - te^{-t} - \cos t)$.8. $x(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t - \sin t$.9. $x(t) = \frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t - \frac{4}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{5}$.
10. $x(t) = 2 + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - \cos t + \sin t\right)$.11. $x(t) = 2t + \frac{1}{2}\left(e^{-t} + \cos t - \sin t\right)$.12. $x(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$.13. $x(t) = \frac{t}{4} + \cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t$.14. $x(t) = \operatorname{ch} t - \frac{t^2}{2} - 1$.15. $x(t) = e^{t}\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)$.16. $x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - 3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$. 17. $x(t) = 1 - \frac{22}{25}e^{-t} - \frac{6}{5}te^{-t} - \frac{3}{25}\cos 2t + \frac{4}{25}\sin 2t$.18. $x(t) = \frac{t}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}\left(\cos 2t - \cos 4t\right)$. 19. $x(t) = \frac{83}{80}\operatorname{ch} 2t - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{16}\cos 2t$.20. $x(t) = \frac{2}{9}\left[e^{t} - e^{-2t}(3t+1)\right]$.2
$x(t) = 1 - \ e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)$.
22. $x(t) = \frac{2a}{\omega^2}[\sin^2\frac{\omega t}{2}\cdot\eta(t) - \ \sin^2\frac{\eta(t-b)}{2}\cdot\eta(t-b)]$.23. $x(t) = -\cos t$.24. $x(t) = (t-1)^2 + e^{1-t}$.25. $x(t) = t^2 + 2t$.26. $x(t) = \left(t - 1 - \frac{\pi}{2}\right)\cos t$.27. $x(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\cdot\eta(t) - \left[(t-1) - \frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\cdot \eta(t-1) + \frac{1}{2}\left[(t-2) - \frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\cdot\eta(t-2)$.28. $x(t) = [b + (1-b)\cos t]\eta(t) + [b - b\cos(t-a)]\,\eta(t-a)$.
29. $x(t) = \frac{1}{3}\sin 3t\cdot\eta(t) + \frac{1}{9}\left[(t-1) - \frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right]\cdot\eta(t-1) - \frac{2}{9}\left[(t-2) - \frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right]\cdot\eta(t-2) + \frac{1}{9}\left[(t-3) - \frac{1}{3}\sin 3(t-3)\right]\cdot\eta(t-3)$.
30. $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{3}(-1)^k\left[1 - e^{t-ka} + e^{t-ka}(t-ka)\right]\eta(t-ka)$.31. $x(t) = e^{t}, y(t) = -e^{t}$.
32. $x(t) = e^{t}, y(t) = e^{t}$.33. $x(t) = 2\left(1 - e^{-t} - te^{-t}\right), y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}$.
34. $\frac{1}{4}\left(e^{t} - e^{3t} + 2te^{3t}\right)$, $y(t) = \frac{1}{4}\left(5e^{t} - e^{3t} - 2te^{3t}\right)$.35. $x(t) = e^{t}\left(\cos t - 2\sin t\right), y(t) = e^{t}\left(\cos t + 3\sin t\right)$.36
$x(t) = \frac{1}{3}\left(e^{t} + 2\cos 2t + \sin 2t\right), y(t) = \frac{2}{3}\left(e^{t} - \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$.
37. $x(t) = e^{t} - \frac{11}{34}e^{4t} - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t - \frac{1}{2}, y(t) = -\frac{2}{3}e^{t} + \frac{22}{51}e^{4t} + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t$.
38. $x(t) = -\frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{13}{12}e^{-t} - 2 + \frac{1}{6}e^{t} + \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{3}{20}e^{3t}; y(t) = \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{13}{12}e^{-t} - 2 - \frac{1}{6}e^{t} + \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{7}{20}e^{3t}; z(t) = -\frac{13}{12}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}$. 39. $x(t) = -e^{t}, y(t) = 0, z(t) = e^{t}$.

§18. Интеграл Дюамеля. Формула Дюамеля

Найти решения задач с помощью интеграла Дюамеля.

1. $x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
2. $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{t+1}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
3. $x'' - x' = \frac{e^{2t}}{2+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
4. $x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
5. $x'' + x = \frac{1}{2+\cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
6. $x'' + x = \frac{1}{4+\operatorname{tg}^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
7. $x'' + x = \frac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
8. $x'' + x = \frac{1}{1+\sin^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
9. $x'' - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
10. $x''' + x' = \frac{1}{2+\sin t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

Ответы. 1. $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - 1) - \ln\frac{1+e^t}{2}$. 2. $e^{-t}[(t+1)\cdot \ln(t+1) - t]$. 3. $x(t) = (e^t+2)\ln\frac{e^t+2}{3} - e^t + 1$. 4. $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t+1) + (e^t+1)\ln(e^t+1)$. 5. $x(t) = \sin t\left(t - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\sqrt{3}}\right) + \cos t \cdot \ln(2+\cos t) - \ln 3 \cdot \cos t$. 6. $x(t) = \frac{1}{3} - \frac{9-\pi\sqrt{3}}{27}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{36}\sin t \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{3}\sin t - 2}{\sqrt{3}\sin t + 2}\right| - \frac{\sqrt{3}}{9}\cos t \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cos t\right)$. 7. $x(t) = \cos t \cdot \operatorname{arctg}(\cos t) - \frac{\pi}{4}\cos t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t \cdot \ln\left|\frac{\sin t - \sqrt{2}}{\sin t + \sqrt{2}}\right|$. 8. $x(t) = \sin t \cdot \operatorname{arctg}(\sin t) + \cos t \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left[\ln\left|\frac{\cos t + \sqrt{2}}{\cos t - \sqrt{2}}\right| - \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right]$. 9. $x(t) = -\operatorname{sh} t + 2\operatorname{ch} t \cdot \left(\operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{4}\right)$. 10. $x(t) = \ln 2 \cdot \cos t - \cos t \cdot \ln(2+\sin t) - t\sin t + \frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t + 1)\left(\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$.

§19. Операционный метод для уравнений с переменными коэффициентами и уравнений в частных производных

Найти решения уравнений с переменными коэффициентами.

1. $tx'' + (2t-1)x' + (t-1)x = 0.$
2. $tx'' + 2x' = 0.$
3. $x'' + (t+1)x' + tx = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = -1.$
4. $x'' + (t+b)x' = 0, \quad x(0) = -1,\ x'(0) = 0.$ (b — любое действительное число)
5. $x'' + tx' - (t+1)x = 0, \quad x(0) = x'(0) = 1.$
6. $x'' - tx' + nx = 0, \quad n \in \mathrm{N}$ (уравнение Чебышева-Эрмита):

   а) $x(0) = 1, \quad x'(0) = 0; \quad n = 2k;$

   б) $x(0) = 0, \quad x'(0) = 1; \quad n = 2k+1.$

Решить граничные задачи:

7. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0),$

   $u(0,t) = u_0, \quad u(x,0) = 0.$

8. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0),$

   $u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = u_1.$

9. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0),$

   $u(0,t) = a\cos\omega t, \quad u(x,0) = 0.$

10. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0),$

    $u(0,t) = a\sin\omega t, \quad u(x,0) = 0.$

11. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0),$

    $u(0,t) = \omega(t), \quad u(x,0) = 0.$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l) \quad (l > x > 0, t > 0),$

    $u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$

Ответы. 1. $x(t) = (c_1 + c_2t^2)\,e^{-t}$. 2. $x(t) = c_1$. 3. $x(t) = e^{-t}$. 4. $x(t) \equiv -1$. 5. $x(t) = e^t$. 6. *а*) $x(t) = \sum\limits_{s=0}^{k}(-1)^s 2^s s! C_k^s \dfrac{t^{2s}}{(2s)!}$; *б*) $x(t) = \sum\limits_{s=0}^{k}(-1)^s 2^s s! C_k^s \dfrac{t^{2s+1}}{(2s+1)!}$.

7. $u(x,t) = u_0\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\,dz\right).$

8. $u(x,t) = u_1\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \displaystyle\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\,dz.$

9. $u(x,t) = ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}\cos\left(\omega t - x\sqrt{\dfrac{\omega}{2k}}\right) - \dfrac{a}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\sin x\sqrt{\dfrac{\rho}{k}}\,\dfrac{\rho\,d\rho}{\rho^2+\omega^2}$. 10. $u(x,t) =$

$$= a\left[e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}\sin\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) + \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\sin x\sqrt{\frac{\rho}{k}}\,\frac{d\rho}{\rho^2+\omega^2}\right].$$

11. $u(x,t) =$

$= \dfrac{x}{2\sqrt{\pi k}}\displaystyle\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,\frac{e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau$. 12. $u(x.t) = -\dfrac{bx}{12}\,(x^3 - 2lx^2 + l^3) +$

$$+\frac{8bl^4}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi t}{l}\,\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^5}.$$

Приложение. Таблица оригиналов и их изображений

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	$t^n \quad (n \in N)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$t^\alpha \quad (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4.	$e^{\lambda t} \quad (\lambda \in C)$	$\frac{1}{p-\lambda}$
5.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7.	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8.	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
9.	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
10.	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
11.	$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
12.	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
13.	$J_n(t) \quad (n \in N)$	$\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
14.	$\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-x^2}dx$	$\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$
15.	$\sqrt{\frac{\pi}{2t^3}} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$e^{-\alpha\sqrt{p}}$

Таблица оригиналов и их изображений (Ваши дополнения)

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $\mathrm{F}(p) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$
16.		
17.		
18.		
19.		
20.		
21.		
22.		
23.		
24.		
25.		
26.		
27.		
28.		
29.		
30.		

Список литературы

1. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц А.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление.Теория устойчивости.— М.: Физматгиз, 1960.

2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.— М.: Физматгиз, 1974.

3. Диткин В.А. и Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.

Татьяна Михайловна Назарова
Владислав Владимирович Хаблов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО РЯДАМ И ИНТЕГРАЛАМ ФУРЬЕ, ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Учебное пособие

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *В.В. Хаблов*

Подписано в печать 03.07.09. Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 300 экз.
Уч.-изд. л. 2,55. Печ. л. 2,75. Изд. № 183. Заказ № . Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20