Условия задач

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. **Варианты 1–4.** Найти угол между векторами.

Варианты 5–10. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Варианты 11–18. Вычислить проекцию одного вектора на другой.

Варианты 19–24. Вычислить величину момента силы $\overrightarrow{F}$, приложенной к точке A, относительно точки O, если $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$.

Варианты 25–28. Вычислить работу силы $\overrightarrow{F}$, если ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается вдоль вектора $\vec{a}$.

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти:

2. угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

3. площадь грани $A_1A_2A_3$;

4. проекцию вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на $\overrightarrow{A_1A_4}$;

5. объем пирамиды.

6. Условие задачи в варианте.

7. Построить линию.

8. Построить линию.

9. Построить линию, заданную параметрически. Исключив параметр t, получить уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат.

10. Построить линию, заданную в полярной системе координат.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую α и точку A.

12. Даны координаты четырех точек A_1, A_2, A_3 и A_4. Составить:

1) уравнение плоскости β, проходящей через три точки A_1, A_2, A_3;
2) каноническое уравнение прямой, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости β.

13. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1–15) или относительно плоскости (для вариантов 16–28).

Линейная алгебра

1. Даны матрицы A и B. Найти произведение AB.

2. Найти матрицу, обратную данной. Сделать проверку.

3. Решить систему с помощью обратной матрицы.

4. Найти ранг матрицы.

5. Решить систему с помощью алгоритма Гаусса.

6. Условие задачи в варианте (символ $\oplus$ — операция сложения векторов, символ $\odot$ — операция умножения вектора на число).

7. Найти размерность и базис пространства решений однородной системы.

8. Проверив, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, найти разложение вектора $\vec{d}$ по этому базису.

9. Условие задачи в варианте.

10. Даны два линейных преобразования. Найти преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3, и преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через x_1'', x_2'', x_3''.

11. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A.

12. Дано уравнение кривой второго порядка. Используя теорию квадратичных форм:

1) найти новый базис и направление осей;

2) написать матрицу перехода и проверить, что она является ортогональной;

3) получить матрицу квадратичной формы в новом базисе;

4) изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Вариант № 1.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{p} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} - \vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{\pi}{3}$.

2–5. $A_1(8, 6, 4)$, $A_2(10, 5, 5)$, $A_3(5, 6, 8)$, $A_4(8, 10, 7)$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(-6, -4)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $A(-10, -1)$ и $C(6, 1)$.

7. $x = 2 + \sqrt{4 - y^2 - 6y}$.

8. $y = -2 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$.

9. $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \arccos t. \end{cases}$

10. $\rho = \varphi$.

11. $\alpha : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{3}$; $A(4, 5, 1)$.

12. $A_1(1, 1, 3)$, $A_2(4, 1, 5)$, $A_3(2, 2, 1)$, $A_4(5, 2, 3)$.

13. $M(0, -3, -2)$; $\alpha : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -4; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$, координаты которых — целые числа? $a \oplus b = a + b$; $\lambda \odot a = \lambda a$.

7. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\,; \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 = 0\,; \\ 5x_1 - 8x_2 - 6x_3 + x_4 = 0\,; \\ -x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{1, 3, 2\}\,; \\ \vec{b} &= \{2, 2, 3\}\,; \\ \vec{c} &= \{3, 1, 1\}\,; \\ \vec{d} &= \{3, 5, 2\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^2 есть симметрия относительно прямой $y = -x$. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{4, 2\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + x_3\,; \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 + x_3\,; \\ x_3' = 3x_1 + 3x_2 + x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 6x_1' - 4x_2' + 5x_3'\,; \\ x_2'' = 3x_1' - x_2' + 4x_3'\,; \\ x_3'' = 3x_1' - 2x_2' + 2x_3'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. $$15x^2 - 2\sqrt{55}\,xy + 9y^2 = 20\,.$$

Вариант № 2.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}\,,\ \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}\,,\ |\vec{p}\,| = 1\,,\ |\vec{q}\,| = 2\,,\ \angle(\vec{p}, \vec{q}\,) = \dfrac{\pi}{3}\,.$

2–5. $A_1(4,4,10)\,,\ A_2(7,10,2)\,,\ A_3(2,8,4)\,,\ A_4(4,6,9)\,.$

6. На прямой $2x + y + 11 = 0$ найти точку, равноудаленную от двух заданных точек $A(1,1)$ и $B(3,0)$.

7. $y = -1 + \sqrt{2 - x^2 - 5x}\,.$

8. $y = \dfrac{x+1}{x+2}\,.$

9. $\begin{cases} x = \cos t\,; \\ y = \sin^2 t\,. \end{cases}$

10. $\rho = \dfrac{\pi}{\varphi}\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2}\,;\quad A(0,2,1)\,.$

12. $A_1(4,1,6)\,,\ A_2(1,1,3)\,,\ A_3(5,2,3)\,,\ A_4(2,2,1)\,.$

13. $M(2,-1,1)\,;\quad \alpha : \dfrac{x-4{,}5}{1} = \dfrac{y+3}{-0{,}5} = \dfrac{z-2}{1}\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6\,; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3\,; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 16 & -13 & 11 & 5 \\ 1 & -12 & 11 & -5 & -3 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2\,; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 3\,; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 4\,; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех векторов из $\mathbb{R}^3$, лежащих на оси Ox? $a \oplus b = a + b\,;\quad \lambda \odot a = \lambda a\,.$

7. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\,; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\,; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\,; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{1, 3, 4\}\,; \\ \vec{b} &= \{2, 2, -1\}\,; \\ \vec{c} &= \{3, 1, -1\}\,; \\ \vec{d} &= \{2, -6, -9\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 есть симметрия относительно координатной плоскости Oxy. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{3, -1, 2\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3\,; \\ x_2' = x_1 + 2x_2 - 3x_3\,; \\ x_3' = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 5x_1' - 4x_2' + 2x_3'\,; \\ x_2'' = -4x_1' + x_2' - 2x_3'\,; \\ x_3'' = 6x_1' - 3x_2' + 2x_3'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. $$15x^2 + 6\sqrt{3}\,xy + 9y^2 = 36\,.$$

Вариант № 3.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}\,,\ \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}\,,\ |\vec{p}\,| = 2\,,\ |\vec{q}\,| = 1\,,\ \angle(\vec{p}, \vec{q}\,) = \dfrac{2\pi}{3}\,.$

2–5. $A_1(4,6,5)\,,\ A_2(6,9,4)\,,\ A_3(2,10,10)\,,\ A_4(7,5,9)\,.$

6. Найти точку, симметричную точке $(2,-4)$ относительно прямой $4x+3y+1=0$.

7. $x = 2 - \sqrt{4 - y^2 - 6y}\,.$

8. $y = -3\sqrt{(x+1)^2+1}\,.$

9. $\begin{cases} x = \cos 2t\,; \\ y = \cos^2 t\,. \end{cases}$

10. $\rho = e^{\pi/\varphi}\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+1}{1}\,;\quad A(4,2,-1)\,.$

12. $A_1(2,2,1)\,,\ A_2(5,2,3)\,,\ A_3(1,1,3)\,,\ A_4(4,1,6)\,.$

13. $M(1,1,1)\,;\quad \alpha : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{-2} = \dfrac{z-1}{1}\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4\,; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1\,; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0\,; \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3\,; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -9\,; \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей Ox или Oy? $a \oplus b = a + b\,;\quad \lambda \odot a = \lambda a\,.$

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0\,; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0\,; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0\,; \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{1, 3, 5\}\,; \\ \vec{b} &= \{1, 2, 3\}\,; \\ \vec{c} &= \{1, 1, 3\}\,; \\ \vec{d} &= \{2, 7, 14\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^2 есть симметрия относительно оси Ox. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{-1, 4\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' &= 5x_1 - 4x_2 + 2x_3\,; \\ x_2' &= 2x_1 - 2x_2 + x_3\,; \\ x_3' &= 6x_1 - 3x_2 + 3x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' &= 5x_1' - 4x_2' - 3x_3'\,; \\ x_2'' &= 2x_1' - 2x_2' - x_3'\,; \\ x_3'' &= 2x_1' - x_2' - x_3'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. $$5x^2 + 4\sqrt{6}\,xy + 7y^2 = 22\,.$$

Вариант № 4.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}\,,\ \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}\,,\ |\vec{p}\,| = |\vec{q}\,| = 1\,,\ \angle(\vec{p}, \vec{q}\,) = \dfrac{\pi}{3}\,.$

2–5. $A_1(3, 5, 4)\,,\ A_2(8, 7, 4)\,,\ A_3(5, 10, 4)\,,\ A_4(4, 7, 8)\,.$

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 7)$ и середину отрезка, соединяющего точки $B(3, 4)$ и $C(15, 8)$.

7. $x = \dfrac{1}{2} - \sqrt{-y^2 - 2y - \dfrac{1}{4}}\,.$

8. $x = 1 + \dfrac{4}{3}\sqrt{13 + y^2 + 4y}\,.$

9. $\begin{cases} x = 1\,; \\ y = \sin t\,. \end{cases}$

10. $\rho^2 = 2a\varphi\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z}{5}\,; \quad A(2, 4, -1)\,.$

12. $A_1(5, 2, 3)\,,\ A_2(2, 2, 1)\,,\ A_3(4, 1, 6)\,,\ A_4(1, 1, 3)\,.$

13. $M(1, 2, 3)\,; \quad \alpha : \dfrac{x - 0{,}5}{0} = \dfrac{y + 1{,}5}{-1} = \dfrac{z - 1{,}5}{1}\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}\,; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2\,; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1\,; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -4\,; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12\,; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2\,; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -10\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех векторов из $\mathbb{R}^3$? $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}\,; \quad \lambda \odot \vec{a} = \lambda\vec{a}\,.$

7. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\,; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\,; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 0\,; \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{-1, 1, 3\}\,; \\ \vec{b} &= \{3, -2, -1\}\,; \\ \vec{c} &= \{-1, 3, 2\}\,; \\ \vec{d} &= \{2, 6, 7\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в E^3 есть растяжение по оси Ox в 2 раза, по оси Oy в 3 раза, по оси Oz в 4 раза. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{1, -3, 5\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 3x_3\,; \\ x_2' = x_1 - 4x_2 + 2x_3\,; \\ x_3' = 2x_1 - x_2 + 2x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 3x_1' + 2x_2' - 2x_3'\,; \\ x_2'' = 3x_1' + 4x_2' - 4x_3'\,; \\ x_3'' = x_1' + x_2' - 2x_3'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. $$4xy + 3y^2 = 36\,.$$

Вариант № 5.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = 3\vec{n} + \vec{m}$, $\vec{b} = \vec{n} - 2\vec{m}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{\pi}{4}$.

2–5. $A_1(10, 6, 6)$, $A_2(-2, 8, 2)$, $A_3(6, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -1)$ параллельно прямой, проходящей через точки $B(8, 7)$ и $C(-10, 4)$.

7. $y = -1 - 2\sqrt{2 - x^2 - 5x}$.

8. $x = 3 - \dfrac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$.

9. $\begin{cases} x = \sqrt{\cos t}; \\ y = \sqrt{\sin t}. \end{cases}$

10. $\rho = \sec^2 \dfrac{\varphi}{2}$.

11. $\alpha : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$; $A(5, 0, 4)$.

12. $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(2, 5, 1)$, $A_4(6, 3, 4)$.

13. $M(1, 0, -1)$; $\alpha : \dfrac{x - 3{,}5}{2} = \dfrac{y - 1{,}5}{2} = \dfrac{z}{0}$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 15; \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -8; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -1; \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 = -12; \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех векторов, лежащих на одной оси? $a \oplus b = a + b$; $\lambda \odot a = \lambda|a|$.

7. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 & = & 0\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0\,; \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 & = & 0\,; \\ 7x_1 + 12x_2 - 7x_3 - 7x_4 & = & 0\,. \end{array}\right.$

8. $\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & \{2, 1, 4\}\,; \\ \vec{b} & = & \{2, -2, 5\}\,; \\ \vec{c} & = & \{1, -1, 3\}\,; \\ \vec{d} & = & \{1, 5, 1\}\,. \end{array}$

9. Линейное преобразование в пространстве E^2 есть симметрия относительно прямой $y = x$. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{-2, -3\}$.

10. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1 + x_2 + 2x_3\,; \\ x_2' & = & x_1 + 2x_2 + 2x_3\,; \\ x_3' & = & x_1 + 3x_2 + 3x_3\,. \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} x_1'' & = & x_1' - 3x_2' + 3x_3'\,; \\ x_2'' & = & x_1' - 4x_2' + 2x_3'\,; \\ x_3'' & = & 2x_1' - 4x_2' + 2x_3'\,. \end{array}\right.$

11. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\,.$

12. $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9\,.$

Вариант № 6.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}\,,\ \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}\,,\ |\vec{p}\,| = 1\,,\ |\vec{q}\,| = 2\,,\ \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{6}\,.$

2–5. $A_1(1,8,2)\,,\ A_2(5,2,6)\,,\ A_3(5,7,4)\,,\ A_4(4,10,9)\,.$

6. Составить уравнение диаметра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-1,1)$, $B(2,-1)$ и $C(4,0)$, проходящего через точку A.

7. $y = 1 + \dfrac{3}{4}\sqrt{15 - x^2 - 2x}\,.$

8. $y = -1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x + 5}\,.$

9. $\begin{cases} x = \sin t\,; \\ y = \ln \sin t\,. \end{cases}$

10. $\rho = \dfrac{2}{2 + \cos\varphi}\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{1}\,;\quad A(3,0,2)\,.$

12. $A_1(4,2,1)\,,\ A_2(1,8,3)\,,\ A_3(0,1,-4)\,,\ A_4(5,2,6)\,.$

13. $M(2,1,0)\,;\quad \alpha : \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z+0{,}5}{1}\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3\,; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 3 & -3 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -6\,; \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -7\,; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6\,; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 2\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов из $\mathbb{R}^3$?
$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\quad \lambda \odot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$.

7. $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0\,; \\ x_1 + x_2 - 3x_4 & = & 0\,; \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 & = & 0\,; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

8. $$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & \{3, 1, 4\}; \\ \vec{b} & = & \{2, 2, -1\}; \\ \vec{c} & = & \{1, 3, 1\}; \\ \vec{d} & = & \{8, 12, 6\}. \end{array}$$

9. Линейное преобразование в пространстве $\mathbf{E}^3$ есть симметрия относительно оси $\mathbf{Ox}$. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{2, -3, 4\}$.

10. $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & 5x_1 - 4x_2 + 2x_3\,; \\ x_2' & = & -4x_1 + x_2 - 2x_3\,; \\ x_3' & = & 6x_1 - 3x_2 + 2x_3\,. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_1'' & = & x_1' + x_2' - x_3'\,; \\ x_2'' & = & x_1' + 2x_2' - 3x_3'\,; \\ x_3'' & = & 2x_1' + 2x_2' - 3x_3'\,. \end{array}\right.$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. $$13x^2 - 48xy + 27y^2 = 45\,.$$

Вариант № 7.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}\,,\ \ \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}\,,\ \ |\vec{p}\,| = 4\,,\ \ |\vec{q}\,| = 1\,,\ \ \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}\,.$

2–5. $A_1(6,6,5)\,,\ A_2(4,9,5)\,,\ A_3(4,6,11)\,,\ A_4(6,9,3)\,.$

6. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,1)$ под углом $45°$ к данной прямой $(k > 0)$.

7. $y = 2 - \dfrac{5}{3}\sqrt{8 - x^2 + 2x}\,.$

8. $x = 1 - \dfrac{4}{3}\sqrt{13 + y^2 + 4y}\,.$

9. $\begin{cases} x = t\,; \\ y = e^t\,. \end{cases}$

10. $\rho = \dfrac{2}{1 - \cos\varphi}\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{5}\,;\quad A(4,3,1)\,.$

12. $A_1(2,0,2)\,,\ A_2(1,3,5)\,,\ A_3(2,4,4)\,,\ A_4(5,3,-2)\,.$

13. $M(-2,-3,0)\,;\quad \alpha : \dfrac{x+0{,}5}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{0} = \dfrac{z-0{,}5}{1}\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2\,; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -6\,; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = -9\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\,; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4\,; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -4\,; \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 = -26\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех функций, принимающих положительные значения на сегменте $[0,1]$? $f(t) \oplus g(t) = f(t) \cdot g(t)$; $\lambda \odot f(t) = (f(t))^{\lambda}$.

7. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0; \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 10x_4 = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{2,1,1\}; \\ \vec{b} &= \{1,3,1\}; \\ \vec{c} &= \{1,1,5\}; \\ \vec{d} &= \{1,4,-12\}. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^2 есть симметрия относительно оси Oy. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{4,5\}$.

10. $$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + x_3; \\ x'_2 = 2x_1 + 2x_2 - x_3; \\ x'_3 = -x_1 - x_2 + x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x''_1 = x'_1 + x'_2 - x'_3; \\ x''_2 = 2x'_1 + x'_2 + 3x'_3; \\ x''_3 = -x'_1 + 2x'_2 - x'_3. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. $4x^2 + 24xy + 11y^2 = 20$.

Вариант № 8.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}\,,\ \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}\,,\ |\vec{p}\,| = 2\,,\ |\vec{q}\,| = 3\,,\ \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{3\pi}{4}\,.$

2–5. $A_1(7,2,2)\,,\ A_2(5,7,7)\,,\ A_3(5,3,1)\,,\ A_4(2,3,7)\,.$

6. На продолжении отрезка AB, где $A(-5,5)$, $B(1,-4)$ найти точку, абсцисса которой равна 9.

7. $x = -1 - \dfrac{2}{3}\sqrt{5 - y^2 - 4y}\,.$

8. $y = 2 + \dfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 63}\,.$

9. $\begin{cases} x = 2^t\,; \\ y = 2^{2t}\,. \end{cases}$

10. $\rho = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{2}\,;\quad A(2,3,0)\,.$

12. $A_1(2,0,3)\,,\ A_2(3,2,2)\,,\ A_3(2,2,5)\,,\ A_4(1,1,1)\,.$

13. $M(-1,-2,1)\,;\quad \alpha : \dfrac{x+0{,}5}{1} = \dfrac{y-0{,}5}{-1} = \dfrac{z}{1}\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 15\,; \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7\,; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 14\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2\,; \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1\,; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1\,; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех непрерывных функций, заданных на $[0, 1]$?
$f(t) \oplus g(t) = f(t) + g(t)\,; \quad \lambda \odot f(t) = \lambda \cdot f(t)\,.$

7. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\,; \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0\,; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 = 0\,; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\,. \end{cases}$$

8. $$\vec{a} = \{2, 1, 4\}; \quad \vec{b} = \{1, 3, 1\}; \quad \vec{c} = \{1, 1, 1\}; \quad \vec{d} = \{2, 5, 4\}\,.$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 есть симметрия относительно координатной плоскости Oxz. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{1, 2, 3\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2 + x_3\,; \\ x_2' = x_1 + x_2 + 4x_3\,; \\ x_3' = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = x_1' + x_2' + x_3'\,; \\ x_2'' = x_1' + 2x_2' + x_3'\,; \\ x_3'' = x_1' + x_2' + 2x_3'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. $$3x^2 - 2\sqrt{5}\,xy - y^2 = 8\,.$$

Вариант № 9.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}\,| = 4$, $|\vec{q}\,| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

2–5. $A_1(8, 6, 4)$, $A_2(10, 5, 5)$, $A_3(5, 6, 8)$, $A_4(8, 10, 7)$.

6. Дан треугольник с вершинами $A(-2, 3)$, $B(1, 2)$, $C(5, 4)$. Найти уравнение его высоты, опущенной из вершины C.

7. $x = -2 + \dfrac{1}{7}\sqrt{48 - y^2 - 2y}$.

8. $y = 2 + \dfrac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$.

9. $\begin{cases} x = 3^t; \\ y = 9^t - 3^t. \end{cases}$

10. $\rho = 2\cos 3\varphi$.

11. $\alpha : \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$; $A(6, 2, 0)$.

12. $A_1(2, -2, 3)$, $A_2(6, 2, -3)$, $A_3(3, 1, 4)$, $A_4(2, -4, 3)$.

13. $M(0, -2, 3)$; $\alpha : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y + 0{,}5}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8; \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 20; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество четных функций, заданных на $[-1, 1]$?
$f(t) \oplus g(t) = f(t) + g(t)\,; \quad \lambda \odot f(t) = \lambda \cdot f(t)\,.$

7. $$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &=& 0\,; \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 7x_4 &=& 0\,; \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 &=& 0\,; \\ 2x_1 + x_2 - 32x_3 - 19x_4 &=& 0\,. \end{array} \right.$$

8. $$\begin{array}{rcl} \vec{a} &=& \{2, 3, 2\}\,; \\ \vec{b} &=& \{1, -2, -3\}\,; \\ \vec{c} &=& \{-1, 2, 1\}\,; \\ \vec{d} &=& \{4, 1, -6\}\,. \end{array}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^2 есть растяжение по оси Ox в 3 раза, по оси Oy в 2 раза Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{-2, 5\}$.

10. $$\left\{ \begin{array}{rcl} x'_1 &=& 2x_1 + x_2 + 3x_3\,; \\ x'_2 &=& 2x_1 - x_2 + x_3\,; \\ x'_3 &=& 2x_1 - 2x_2 + x_3\,. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x''_1 &=& x'_1 - 2x'_2 + 3x'_3\,; \\ x''_2 &=& 3x'_1 + x'_2 - x'_3\,; \\ x''_3 &=& -x'_1 + 2x'_2 - 2x'_3\,. \end{array} \right.$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. $$6x^2 - 4\sqrt{14}\,xy + 5y^2 = 26\,.$$

Вариант № 10.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}\,,\ \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}\,,\ |\vec{p}\,| = 2\,,\ |\vec{q}\,| = 3\,,\ \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{2}\,.$

2–5. $A_1(7,7,3)\,,\ A_2(6,5,8)\,,\ A_3(3,5,8)\,,\ A_4(8,4,1)\,.$

6. При каком значении c прямая $15x + 17y + c = 0$ будет проходить через точку пересечения прямых $2x + 3y - 5 = 0$ и $7x - 8y + 1 = 0$?

7. $x = 3 + \dfrac{3}{5}\sqrt{20 - 5y^2 + 10y}\,.$

8. $y = 2 - \dfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 63}\,.$

9. $\begin{cases} x = 2t\,; \\ y = \cos t\,. \end{cases}$

10. $\rho = a\varphi^2\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{5}\,;\quad A(-2,4,2)\,.$

12. $A_1(4,6,4)\,,\ A_2(-1,12,-4)\,,\ A_3(2,3,5)\,,\ A_4(1,7,5)\,.$

13. $M(-1,3,-1)\,;\quad \alpha : \dfrac{x-0{,}5}{1} = \dfrac{y+0{,}5}{-2} = \dfrac{z+1{,}5}{3}\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} 6x_1 - x_3 = 2\,; \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -1\,; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 8\,; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 12\,; \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -5\,; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех нечетных функций, заданных на $[-1, 1]$?
$f(t) \oplus g(t) = f(t) + g(t)\,; \quad \lambda \odot f(t) = \lambda \cdot f(t)\,.$

7. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 0\,; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 & = & 0\,; \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 & = & 0\,; \\ 3x_1 - 4x_2 - 12x_3 + 18x_4 & = & 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{1, 2, 2\}\,; \\ \vec{b} &= \{2, -1, -1\}\,; \\ \vec{c} &= \{-3, 1, 3\}\,; \\ \vec{d} &= \{2, 1, 3\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 есть симметрия относительно координатной плоскости Oyz. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{4, -2, -1\}$.

10. $$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + 3x_3\,; \\ x'_2 = x_1 - 2x_2 + 2x_3\,; \\ x'_3 = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x''_1 = x'_1 - x'_2 + 2x'_3\,; \\ x''_2 = -x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3\,; \\ x''_3 = x'_1 - 3x'_2 + 3x'_3\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. $$x^2 - 2\sqrt{21}\,xy + 5y^2 = 24\,.$$

Вариант № 11.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$, $\left|\vec{c}\right| = 2$, $\angle\left(\vec{a}, \vec{c}\right) = \angle\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$. Найти $пр_{\vec{c}}\left(3\vec{a} - \vec{b}\right)$.

2–5. $A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,6,1)$, $A_3(1,7,3)$, $A_4(8,5,8)$.

6. Зная уравнения сторон параллелограмма $y = 2x + 1$, $y = 2x - 5$, $y = x - 2$, $y = x + 2$, найти уравнение его диагонали, при которой $k > 0$.

7. $x = 1 + \dfrac{1}{4}\sqrt{144 - 12y^2 - 48y}$.

8. $y = 7 - \dfrac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

9. $\begin{cases} x = 5^{t+1}; \\ y = 5^{2t+1} + 3. \end{cases}$

10. $\rho = a \sin\dfrac{\varphi}{2}$.

11. $\alpha : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$; $A(-1,2,3)$.

12. $A_1(6,3,4)$, $A_2(4,-1,2)$, $A_3(2,5,1)$, $A_4(1,1,1)$.

13. $M(-3,0,1)$; $\alpha : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 10; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -9 & -13 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 17 & 12 & 11 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -5; \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех линейных функций трех переменных x_1, x_2, x_3 с произвольными коэффициентами? $f \oplus g = f + g\,; \quad \lambda \odot f = \lambda \cdot f\,.$

7. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0\,; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0\,; \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0\,; \\ -2x_1 - x_3 + 7x_4 &= 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{1, 2, 3\}\,; \\ \vec{b} &= \{3, -2, -1\}\,; \\ \vec{c} &= \{-4, 3, 1\}\,; \\ \vec{d} &= \{4, 5, 9\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^2 есть симметрия относительно начала координат $O(0, 0)$. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{2, -1\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' &= 3x_1 - x_2 + x_3\,; \\ x_2' &= 2x_1 + 2x_2 + x_3\,; \\ x_3' &= x_1 - 3x_2 + 2x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' &= 2x_1' + 2x_2' - x_3'\,; \\ x_2'' &= x_1' + x_2' - 2x_3'\,; \\ x_3'' &= -2x_1' + x_2' + x_3'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

12. $$4x^2 + 2\sqrt{6}\,xy + 3y^2 = 24\,.$$

Вариант № 12.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\left|\vec{c}\right| = 3$, $\left|\vec{d}\right| = \left|\vec{a}\right| = 1$, $\angle\left(\vec{a}, \vec{c}\right) = \angle\left(\vec{a}, \vec{d}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$. Найти $пр_{\vec{a}}\left(\vec{c} - 2\vec{d}\right)$.

2–5. $A_1(3, 3, 9)$, $A_2(6, 9, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$.

6. Какую ординату имеет точка C с абсциссой $x = 5$, лежащая на одной прямой с точками $A(-8, -6)$ и $B(-3, -1)$?

7. $y = -1 + \dfrac{1}{3}\sqrt{-5x^2 + 30x}$.

8. $x = -1 + \dfrac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y + 20}$.

9. $\begin{cases} x = 2^{\sin t}; \\ y = \sin t. \end{cases}$

10. $\rho = \dfrac{1}{3 - \cos\varphi}$.

11. $\alpha : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{3}$; $A(-2, 4, 2)$.

12. $A_1(2, 5, 1)$, $A_2(6, 3, 4)$, $A_3(1, 1, 1)$, $A_4(4, -1, 2)$.

13. $M(0, -2, -5)$; $\alpha : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} 9x_1 - 9x_2 - x_3 = 37; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех многочленов степени 3 от одной переменной x?
$f(x) \oplus g(x) = f(x) + g(x)\,;\ \ \lambda \odot f(x) = \lambda \cdot f(x)\,.$

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0\,; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0\,; \\ 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{1, 1, 1\}\,; \\ \vec{b} &= \{-2, 2, -3\}\,; \\ \vec{c} &= \{3, 5, -1\}\,; \\ \vec{d} &= \{-5, -5, 2\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 есть симметрия относительно оси Oy. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{2, -4, -3\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' &= 4x_1 + 3x_2 + 2x_3\,; \\ x_2' &= -2x_1 + x_2 - x_3\,; \\ x_3' &= 3x_1 + x_2 + x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' &= x_1' - 2x_2' - x_3'\,; \\ x_2'' &= 3x_1' + x_2' + 2x_3'\,; \\ x_3'' &= x_1' + 2x_2' + 2x_3'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. $$6x^2 + 2\sqrt{5}\,xy + 2y^2 = 21\,.$$

Вариант № 13.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Найти $пр_{\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)} \vec{a}$.

2–5. $A_1(3,5,4)$, $A_2(5,8,3)$, $A_3(1,9,9)$, $A_4(6,4,8)$.

6. Через точку пересечения прямых $x + 2y - 6 = 0$ и $2x - y - 5 = 0$ провести прямую, параллельную прямой $3x - 4y + 9 = 0$.

7. $y = -2 + \dfrac{1}{3}\sqrt{96 - 12x^2 + 24x}$.

8. $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$.

9. $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = t^{-1}. \end{cases}$

10. $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2} + \cos\varphi}$.

11. $\alpha : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{2}$; $A(2,-3,0)$.

12. $A_1(1,1,1)$, $A_2(6,3,4)$, $A_3(4,-1,2)$, $A_4(2,5,1)$.

13. $M(-1,3,-2)$; $\alpha : \dfrac{x+0{,}5}{2} = \dfrac{y+0,5}{1} = \dfrac{z+2}{0}$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -5; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -7; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех многочленов степени меньшей или равной 3 от переменных x, y? $a \oplus b = a + b$; $\lambda \odot a = \lambda \cdot a$.

7. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0\,; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0\,; \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0\,; \\ 3x_1 - 17x_2 + 19x_3 - 14x_4 &= 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{3, 2, 1\}\,; \\ \vec{b} &= \{-4, 4, 2\}\,; \\ \vec{c} &= \{2, -2, -1\}\,; \\ \vec{d} &= \{5, -10, -5\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 есть симметрия относительно начала координат $O(0, 0, 0)$. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{1, -2, 3\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + 4x_2 + x_3\,; \\ x_2' &= -2x_1 + x_2 - x_3\,; \\ x_3' &= x_1 + 2x_2\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' &= x_1' - 2x_2' - x_3'\,; \\ x_2'' &= 4x_1' - x_2' + x_3'\,; \\ x_3'' &= 3x_1' - 2x_2'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

12. $$5x^2 + 4\sqrt{2}\,xy + 3y^2 = 14\,.$$

Вариант № 14.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\left|\vec{p}\right| = 2\,,\ \left|\vec{q}\right| = 1\,,\ \angle\left(\vec{p},\vec{q}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Найти $np_{\vec{q}}\left(2\vec{p}+\vec{q}\right)$.

2–5. $A_1(2,4,3)\,,\ A_2(7,6,3)\,,\ A_3(4,9,3)\,,\ A_4(3,6,7)$.

6. Через точку пересечения прямых $4x-5y+9=0$ и $x+4y-3=0$ провести прямую, перпендикулярную прямой $3x-4y+9=0$.

7. $x = 3 - \dfrac{3}{5}\sqrt{20-5y^2+10y}$.

8. $x = -1 - \dfrac{3}{4}\sqrt{y^2+4y+20}$.

9. $\begin{cases} x = \cos t\,; \\ y = (\cos t)^{-1}\,. \end{cases}$

10. $\rho = \dfrac{2}{3\sin\varphi + \cos\varphi}$.

11. $\alpha : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-6}{-1}\,;\quad A(-1,0,1)$.

12. $A_1(1,-2,3)\,,\ A_2(3,0,-2)\,,\ A_3(1,-1,1)\,,\ A_4(7,2,5)$.

13. $M(2,-4,7)\,;\quad \alpha : \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-2}$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2\,; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3\,; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 3\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\,; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5\,; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5\,; \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех упорядоченных наборов из n чисел $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$? $x \oplus y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}$; $\lambda \odot x = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\}$.

7. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{3, 3, 1\}; \\ \vec{b} &= \{4, -2, 3\}; \\ \vec{c} &= \{2, -1, 1\}; \\ \vec{d} &= \{17, 5, 8\}. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 есть симметрия относительно оси Oz. Составить матрицу преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{-3, 2, -4\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 2x_2 - x_3; \\ x_2' = x_1 + 2x_2; \\ x_3' = 3x_1 + x_2 + x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = -x_1' - 2x_2' - 3x_3'; \\ x_2'' = 4x_1' + x_2' + 3x_3'; \\ x_3'' = 3x_1' + 2x_2' + 4x_3'. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. $$7x^2 + 6\sqrt{2}xy + 4y^2 = 15.$$

Вариант № 15.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\left|\vec{p}\right| = 4$, $\left|\vec{q}\right| = 3$, $\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$. Найти $np_{\vec{p}}\left(6\vec{p} - \vec{q}\right)$.

2–5. $A_1(9, 5, 5)$, $A_2(-3, 7, 1)$, $A_3(5, 7, 8)$, $A_4(6, 9, 2)$.

6. Дан треугольник с вершинами в точках $A(3, 2)$, $B(5, -2)$, $C(1, 0)$. Составить уравнение медианы, проведенной из вершины **B**.

7. $x = 1 - \dfrac{1}{4}\sqrt{144 - 12y^2 - 48y}$.

8. $x = 5 - \dfrac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

9. $\begin{cases} x = 2t; \\ y = \sin t. \end{cases}$

10. $\rho = 2\sin 3\varphi$.

11. $\alpha : \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$; $A(2, 3, 3)$.

12. $A_1(2, -1, 3)$, $A_2(1, -1, 2)$, $A_3(4, -1, 2)$, $A_4(9, -6, 5)$.

13. $M(-3, 5, 3)$; $\alpha : \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 17; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 29; \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех упорядоченных наборов из n чисел $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$? $x \oplus y = \{x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n\}$; $\lambda \odot x = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\}$.

7. $$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0\,; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 & = & 0\,; \\ 4x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 & = & 0\,; \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 & = & 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{3, 2, 1\}; \\ \vec{b} &= \{-3, -1, 1\}; \\ \vec{c} &= \{2, 1, 1\}; \\ \vec{d} &= \{10, 5, -1\}. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^2 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{2, -1\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' & = & x_1 - x_2 - x_3\,; \\ x_2' & = & -x_1 + 4x_2 + 2x_3\,; \\ x_3' & = & 3x_1 + x_2 - x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' & = & 9x_1' + 3x_2' + 5x_3'\,; \\ x_2'' & = & 2x_1' + 2x_3'\,; \\ x_3'' & = & x_1' - x_3'\,. \end{cases}$$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $3x^2 + 2\sqrt{14}\,xy + 8y^2 = 10$.

Вариант № 16.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}\,,\ \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}\,,\ |\vec{p}\,| = 3\,,\ |\vec{q}\,| = 2\,,\ \angle(\vec{p}, \vec{q}\,) = \dfrac{\pi}{2}$. Найти $пр_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

2–5. $A_1(0,7,1)\,,\ A_2(4,1,5)\,,\ A_3(4,6,3)\,,\ A_4(3,9,8)\,.$

6. Определить, при каком значении m прямые $mx + 8y - 7 = 0$ и $2x + my - 1 = 0$ параллельны ($m > 0$).

7. $y = -1 - \dfrac{1}{3}\sqrt{-5x^2 + 30x}\,.$

8. $y = -2 + \dfrac{4}{3}\sqrt{x^2 + 2x - 8}\,.$

9. $\begin{cases} x = \cos t\,; \\ y = \cos 2t\,. \end{cases}$

10. $\rho = 3\sin 2\varphi\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}\,;\quad A(1,2,0)\,.$

12. $A_1(7,5,-1)\,,\ A_2(6,5,2)\,,\ A_3(5,4,0)\,,\ A_4(11,-2,3)\,.$

13. $M(1,-1,3)\,;\quad \alpha :\ 2x - 3y + z - 1 = 0\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7\,; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5\,; \\ -2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 10\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6\,; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3\,; \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -4\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех сходящихся последовательностей $\{u_n\}$?
$\{u_n\} \oplus \{v_n\} = \{u_n + v_n\}\,;\ \ \lambda \odot \{u_n\} = \{\lambda \cdot u_n\}\,.$

7. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 0\,; \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4 &=& 0\,; \\ x_2+2x_3+2x_4 &=& 0\,; \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4 &=& 0\,. \end{array}\right.$

8. $\begin{array}{rcl} \vec{a} &=& \{1,2,-1\}\,; \\ \vec{b} &=& \{-1,1,2\}\,; \\ \vec{c} &=& \{2,-1,1\}\,; \\ \vec{d} &=& \{0,10,8\}\,. \end{array}$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{1,2,3\}$.

10. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1' &=& -x_1+7x_2+3x_3\,; \\ x_2' &=& -x_1+4x_2+2x_3\,; \\ x_3' &=& 2x_1+5x_2+x_3\,. \end{array}\right.$ $\quad\left\{\begin{array}{rcl} x_1'' &=& 5x_1'+3x_2'+x_3'\,; \\ x_2'' &=& 2x_1'+2x_3'\,; \\ x_3'' &=& -2x_1'+x_2'-3x_3'\,. \end{array}\right.$

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

12. $7x^2 + 2\sqrt{6}\,xy + 2y^2 = 24\,.$

Вариант № 17.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}\,,\ \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}\,,\ |\vec{p}\,| = 4\,,\ |\vec{q}\,| = 1\,,\ \angle(\vec{p}, \vec{q}\,) = \dfrac{\pi}{3}$. Найти $np_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

2–5. $A_1(5, 5, 4)\,,\ A_2(3, 8, 4)\,,\ A_3(3, 5, 10)\,,\ A_4(5, 8, 2)$.

6. Определить, при каком значении m прямые $mx + 2y + 5 = 0$ и $2x + my - 3 = 0$ перпендикулярны.

7. $y = -2 - \dfrac{1}{3}\sqrt{96 - 12x^2 + 24x}$.

8. $y = \dfrac{x - 1}{x - 2}$.

9. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t\,; \\ y = \dfrac{2}{1 + \cos 2t}\,. \end{cases}$

10. $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

11. $\alpha : \dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 1}{3} = \dfrac{z + 1}{0}\,;\quad A(0, 4, -2)$.

12. $A_1(0, 0, -2)\,,\ A_2(1, 1, -1)\,,\ A_3(2, 0, 3)\,,\ A_4(7, -12, 1)$.

13. $M(2, -1, 1)\,;\quad \alpha:\ 3x + y - z + 7 = 0$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2\,; \\ -2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -7\,; \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 3\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -9 & 5 & 11 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -11\,; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4\,; \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 - x_4 = 2\,; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 13\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех положительных действительных чисел? $a \oplus b = a \cdot b\,;\ \lambda \odot a = a^{\lambda}$.

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\,; \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0\,; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 = 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{2, 1, 3\}\,; \\ \vec{b} &= \{3, 1, -2\}\,; \\ \vec{c} &= \{-4, -1, 3\}\,; \\ \vec{d} &= \{-17, -4, 17\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^2 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{-2, 3\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 5x_3\,; \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + 4x_3\,; \\ x_3' = 3x_1 + 2x_2 + 7x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 3x_2' + x_3'\,; \\ x_2'' = 3x_1' + 4x_2' + 2x_3'\,; \\ x_3'' = x_1' + 2x_2' + x_3'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. $$9x^2 + 4\sqrt{2}\,xy + 2y^2 = 20\,.$$

Вариант № 18.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$. Найти $np_{\vec{b}}\left(3\vec{a} - \vec{b}\right)$.

2–5. $A_1(6,1,1)$, $A_2(4,6,6)$, $A_3(4,2,0)$, $A_4(1,2,6)$.

6. Определить, при каком значении m прямые $(m-1)x + my - 5 = 0$ и $mx + (2m-1)y + 7 = 0$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.

7. $x = 1 + \dfrac{7}{3}\sqrt{-y^2 - 4y + 5}$.

8. $y = -2 - \dfrac{4}{3}\sqrt{x^2 + 2x - 8}$.

9. $\begin{cases} x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right); \\ y = \sin(\pi + t). \end{cases}$

10. $\rho^2 = 36\cos 2\varphi$.

11. $\alpha: \dfrac{x}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{7}$; $A(1,1,-2)$.

12. $A_1(2,5,-1)$, $A_2(1,1,-2)$, $A_3(2,-1,-1)$, $A_4(5,-1,0)$.

13. $M(0,1,-2)$; $\alpha: 2x + y - 3z + 7 = 0$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -10; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -13; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -4. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех матриц размера $n \times m$? $a \oplus b = ||a_{ik} + b_{ik}||$;
$\lambda \odot a = ||\lambda \cdot a_{ik}||$.

7. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{1, 2, 2\}; \\ \vec{b} &= \{-2, -1, 3\}; \\ \vec{c} &= \{2, 1, 1\}; \\ \vec{d} &= \{-4, 1, 9\}. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 имеет матрицу
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{-4, 2, -1\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3; \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + x_3; \\ x_3' = x_1 + x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2' + x_3'; \\ x_2'' = 2x_1' + x_2' + 2x_3'; \\ x_3'' = x_1' + 2x_2' + 3x_3'. \end{cases}$$

11. $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

12. $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 40$.

Вариант № 19.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\overrightarrow{F} = 6\vec{p} - \vec{q}\,,\ \vec{r} = 5\vec{q} + \vec{p}\,,\ \left|\vec{p}\right| = \dfrac{1}{2}\,,\ \left|\vec{q}\right| = 4\,,\ \angle\left(\vec{p},\vec{q}\right) = \dfrac{5\pi}{6}\,.$

2–5. $A_1(7,5,3)\,,\ A_2(9,4,4)\,,\ A_3(4,5,7)\,,\ A_4(7,9,6)\,.$

6. Определить, при каком значении a прямая

$$(a+2)x + (a^2-9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

параллельна оси ординат, и написать ее уравнение.

7. $y = -2 - \dfrac{3}{7}\sqrt{-x^2+2x+48}\,.$

8. $y = \dfrac{2x}{3-x}\,.$

9. $\begin{cases} x &= \cos t\,; \\ y &= \pi \sin t\,. \end{cases}$

10. $\rho = 1 - \cos\varphi\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z+1}{2}\,;\quad A(3,0,-2)\,.$

12. $A_1(-4,1,3)\,,\ A_2(-5,1,0)\,,\ A_3(2,-1,3)\,,\ A_4(-5,7,4)\,.$

13. $M(-1,1,0)\,;\quad \alpha :\ 5x - 2y + z - 8 = 0\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \\ -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0\,; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 10\,; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 14 & -8 & -6 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 18 & 7 \\ 1 & 6 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -6\,; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -13\,; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= -5\,; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 &= 17\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех диагональных матриц $a = \|a_{ik}\|$ порядка n?
$a \oplus b = \|a_{ik} + b_{ik}\|$; $\lambda \odot a = \|\lambda \cdot a_{ik}\|$.

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{1, -2, -1\}; \\ \vec{b} &= \{-2, 3, -1\}; \\ \vec{c} &= \{1, 1, 1\}; \\ \vec{d} &= \{-2, 9, 3\}. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^2 имеет матрицу
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{3, -5\}$.

10. $$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3; \\ x'_2 = -2x_1 + 3x_2 - 3x_3; \\ x'_3 = 4x_1 - 4x_2 + 5x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x''_1 = x'_1 + x'_2 + x'_3; \\ x''_2 = -x'_2 + 2x'_3; \\ x''_3 = -2x'_1 + 3x'_2 - 3x'_3. \end{cases}$$

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $2x^2 + 10xy + 2y^2 = 21$.

Вариант № 20.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\overrightarrow{F} = 3\vec{p} + \vec{q}\,,\ \vec{r} = \vec{p} - 3\vec{q}\,,\ \left|\vec{p}\right| = 7\,,\ \left|\vec{q}\right| = 2\,,\ \angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \dfrac{\pi}{4}\,.$

2–5. $A_1(6,6,2)\,,\ A_2(5,4,7)\,,\ A_3(2,4,7)\,,\ A_4(7,3,0)\,.$

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-3)$ параллельно прямой $2x + 3 = 0$.

7. $y = 1 + \dfrac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}\,.$

8. $x = 1 + \dfrac{3}{2}\sqrt{y^2 + 4y + 8}\,.$

9. $\begin{cases} x = 1 + \operatorname{tg} t\,; \\ y = \operatorname{ctg}^2 t\,. \end{cases}$

10. $\rho = a\cos 2\varphi\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z}{7}\,;\quad A(2,2,1)\,.$

12. $A_1(-1,0,0)\,,\ A_2(2,-1,1)\,,\ A_3(-1,0,1)\,,\ A_4(6,-5,3)\,.$

13. $M(2,-3,0)\,;\quad \alpha:\ 3x + y - z + 8 = 0\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -35\,; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4\,; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 20\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 19\,; \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -20\,; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 10\,; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех невырожденных квадратных матриц n–го порядка? $a \oplus b = \|a_{ik} \cdot b_{ik}\|\,;\ \ \lambda \odot a =$

$\|\lambda \cdot a_{ik}\|$.

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ -x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\vec{a} = \{1, 2, 2\}$; $\vec{b} = \{1, 0, -1\}$; $\vec{c} = \{1, 2, 3\}$; $\vec{d} = \{-5, -6, -3\}$.

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{-2, -3, 4\}$.

10. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_3; \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 + x_3; \\ x_3' = x_1 - 3x_2 - 2x_3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2' + 3x_3'; \\ x_2'' = x_1' - x_2' - x_3'; \\ x_3'' = x_1' - 3x_2' - 2x_3'. \end{cases}$

11. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 27$.

Вариант № 21.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\overrightarrow{F} = 7\vec{p} - 2\vec{q}\,,\ \vec{r} = \vec{p} + 3\vec{q}\,,\ \left|\vec{p}\right| = \dfrac{1}{2}\,,\ \left|\vec{q}\right| = 2\,,\ \angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,.$

2–5. $A_1(1, 8, 0)\,,\ A_2(0, -4, 5)\,,\ A_3(-5, 7, 8)\,,\ A_4(1, 4, 3)\,.$

6. Дана прямая $5x - y + 7 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 1)$ под углом $45°$ к данной прямой ($k > 0$).

7. $x = 1 - \dfrac{7}{3}\sqrt{-y^2 - 4y + 5}\,.$

8. $y = \dfrac{-x + 4}{x - 1}\,.$

9. $\begin{cases} x &= 5\sin 2t\,; \\ y &= 2\cos 2t\,. \end{cases}$

10. $\rho = a\sin^3\varphi\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x + 1}{9} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z - 3}{5}\,;\quad A(-1, 1, 2)\,.$

12. $A_1(7, -5, 0)\,,\ A_2(6, -4, 1)\,,\ A_3(1, -1, 0)\,,\ A_4(-9, 11, 2)\,.$

13. $M(-1, 0, 3)\,;\quad \alpha :\ x - 2y + 5z + 1 = 0\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 13\,; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= -3\,; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 7\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 10 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & -28 & 3 & -7 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 9\,; \\ 3x_1 + 4_2 - 2x_3 - x_4 &= 6\,; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 12\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех собственных векторов матрицы 3–го порядка, относящихся к одном и тому же собственному числу? $x \oplus y = x + y\,;\ \lambda \odot x = \lambda \cdot x\,.$

7. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0\,;\\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0\,;\\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 &= 0\,;\\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{3, 1, 1\}\,;\\ \vec{b} &= \{-2, 3, -1\}\,;\\ \vec{c} &= \{1, -2, 2\}\,;\\ \vec{d} &= \{8, 4, 4\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{-2, 4, -5\}$.

10. $$\begin{cases} x'_1 &= -5x_1 + 4x_2 - 4x_3\,;\\ x'_2 &= 2x_1 - x_2 + x_3\,;\\ x'_3 &= 5x_1 - 2x_2 + 3x_3\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x''_1 &= -3x'_1 - 2x'_2 - 5x'_3\,;\\ x''_2 &= 2x'_1 + x'_2 + 2x'_3\,;\\ x''_3 &= x'_1 + x'_2 - x'_3\,. \end{cases}$$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

12. $5x^2 + 4xy + 8y^2 = 36\,.$

Вариант № 22.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\overrightarrow{F} = \vec{p} + 3\vec{q}\,,\ \ \vec{r} = 3\vec{p} - \vec{q}\,,\ \ \left|\vec{p}\right| = 3\,,\ \ \left|\vec{q}\right| = 5\,,\ \ \angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\,.$

2–5. $A_1(4,7,9)\,,\ A_2(-1,-4,-5)\,,\ A_3(-3,3,1)\,,\ A_4(5,-6,10)\,.$

6. Найти точку Q, симметричную точке $P(1,-2)$ относительно прямой $2x-3y-3 = 0$.

7. $y = -7 + \dfrac{2}{5}\sqrt{16 - 6x - x^2}\,.$

8. $x = 1 - \dfrac{3}{2}\sqrt{y^2 + 4y + 8}\,.$

9. $\begin{cases} x &= \operatorname{cosec} t\,; \\ y &= \sin t\,. \end{cases}$

10. $\rho = a \sin^2 \varphi\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z+1}{1}\,;\quad A(2,-3,-1)\,.$

12. $A_1(3,4,-2)\,,\ A_2(3,3,-2)\,,\ A_3(1,4,0)\,,\ A_4(7,-2,5)\,.$

13. $M(-1,3,2)\,;\quad \alpha :\ 5x - y + 2z - 11 = 0\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8\,; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= -4\,; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 13 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 11\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11\,; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= -9\,; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= -1\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех диагональных матриц n–го порядка?

$a \oplus b = ||a_{ik}|| \cdot ||b_{ik}||\,; \quad \lambda \odot a = ||\lambda \cdot a_{ik}||\,.$

7. $$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0\,; \\ 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 - x_4 &= 0\,; \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0\,; \\ x_1 - 13x_2 - x_3 - 5x_4 &= 0\,. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{6, -1, 1\}\,; \\ \vec{b} &= \{0, -1, -2\}\,; \\ \vec{c} &= \{-1, 1, 3\}\,; \\ \vec{d} &= \{2, -1, 5\}\,. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{10, -2, -3\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' &= x_1 + x_2 - x_3\,; \\ x_2' &= 2x_1 - x_2 + x_3\,; \\ x_3' &= -x_1 + x_2\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' &= 3x_1' + x_2' + x_3'\,; \\ x_2'' &= 2x_1' + x_2' + 2x_3'\,; \\ x_3'' &= 7x_1' + 4x_2' + 5x_3'\,. \end{cases}$$

11. $$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. $$5x^2 + 26xy + 5y^2 = 72\,.$$

Вариант № 23.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\overrightarrow{F} = \vec{p} + 4\vec{q}\,,\ \vec{r} = 2\vec{p} - \vec{q}\,,\ \left|\vec{p}\right| = 7\,,\ \left|\vec{q}\right| = 2\,,\ \angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \dfrac{\pi}{3}\,.$

2–5. $A_1(-1,0,7)\,,\ A_2(5,3,9)\,,\ A_3(3,8,5)\,,\ A_4(1,3,1)\,.$

6. Даны точки $P(-1,2)$ и $Q(0,3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно отрезку PQ.

7. $y = -2 + \dfrac{3}{7}\sqrt{-x^2 + 2x + 48}\,.$

8. $y = \dfrac{x-1}{2x-5}\,.$

9. $\begin{cases} x = \sec t\,; \\ y = \ln\cos t\,. \end{cases}$

10. $\rho = a(\sin\varphi + \cos\varphi)\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{7} = \dfrac{z-2}{3}\,;\quad A(-1,3,1)\,.$

12. $A_1(2,-7,5)\,,\ A_2(1,-6,4)\,,\ A_3(-1,-5,4)\,,\ A_4(2,-5,13)\,.$

13. $M(1,-1,1)\,;\quad \alpha :\ x + 3y - 5z - 28 = 0\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1\,; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 8\,; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8\,; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0\,; \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -4\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех операторов $\hat{A}(\varphi)$ поворота на угол φ?
$\hat{A}(\varphi_1) \oplus \hat{A}(\varphi_2) = \hat{A}(\varphi_1 + \varphi_2)$; $\lambda \odot \hat{A}(\varphi) = \hat{A}(\lambda\varphi)$.

7. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 15x_3 + 13x_4 = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{1, 1, 2\}; \\ \vec{b} &= \{2, -1, 2\}; \\ \vec{c} &= \{-4, 2, 1\}; \\ \vec{d} &= \{-7, 8, 16\}. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 имеет матрицу
$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{2, -1, 5\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 3x_3; \\ x_2' = x_1 - x_2 - x_3; \\ x_3' = -x_1 + 2x_2 + x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 3x_1' - 7x_2' - 5x_3'; \\ x_2'' = x_1' - 4x_2' - 3x_3'; \\ x_3'' = x_1' - 3x_2' - 2x_3'. \end{cases}$$

11. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

12. $7x^2 - 24xy = 144$.

Вариант № 24.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\overrightarrow{F} = 10\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{r} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\left|\vec{p}\right| = 4$, $\left|\vec{q}\right| = 7$, $\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

2–5. $A_1(1,5,7)$, $A_2(2,4,0)$, $A_3(0,-7,8)$, $A_4(3,3,4)$.

6. Дан треугольник с вершинами $A(1,-1)$, $B(-2,1)$, $C(3,5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на медиану, проведенную из вершины A.

7. $x = 2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$.

8. $y = -2 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 - 2x + 10}$.

9. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \ln\sec t. \end{cases}$

10. $\rho = 4\sin\varphi$.

11. $\alpha : \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+7}{3}$; $A(5,1,-6)$.

12. $A_1(1,-5,2)$, $A_2(2,-4,0)$, $A_3(6,-3,2)$, $A_4(11,-7,9)$.

13. $M(-2,3,1)$; $\alpha: 3x - 2y - z - 1 = 0$.

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3; \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 23; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = -18. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех векторов из $\mathbb{R}^3$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + x_3 = 1$? $a \oplus b = a + b$; $\lambda \odot a = \lambda \cdot a$.

7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 0\,; \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 8x_4 & = & 0\,; \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 5x_4 & = & 0\,; \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 & = & 0\,. \end{cases}$

8. $\begin{array}{lcl} \vec{a} & = & \{1,1,2\}\,; \\ \vec{b} & = & \{3,-1,4\}\,; \\ \vec{c} & = & \{1,2,-1\}\,; \\ \vec{d} & = & \{1,6,1\}\,. \end{array}$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{3, -2, -4\}$.

10. $\begin{cases} x_1' & = & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3\,; \\ x_2' & = & 3x_1 + 2x_2 + x_3\,; \\ x_3' & = & x_1 + 3x_2 + 6x_3\,. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' & = & 2x_2' - x_3'\,; \\ x_2'' & = & -2x_1' - x_2' + 2x_3'\,; \\ x_3'' & = & 3x_1' - 2x_2' - x_3'\,. \end{cases}$

11. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

12. $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18\,.$

Вариант № 25.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

1. $\overrightarrow{F} = 2\vec{p} + 3\vec{q}\,,\ \ \vec{a} = -\vec{p} + 2\vec{q}\,,\ \ \left|\vec{p}\right| = 2\,,\ \ \left|\vec{q}\right| = 3\,,\ \ \angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \dfrac{\pi}{4}\,.$

2–5. $A_1(3, 4, 0)\,,\ A_2(3, 10, 8)\,,\ A_3(0, 0, 5)\,,\ A_4(-1, 0, 2)\,.$

6. Определить точку пересечения прямой, проходящей через точки $M_1(2, -2)$ и $M_2(3, -5)$, с осью Oy.

7. $x = -5 + \dfrac{2}{5}\sqrt{8 + 2y - y^2}\,.$

8. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}\,.$

9. $\begin{cases} x = t\,; \\ y = e^{|t|-1}\,. \end{cases}$

10. $\rho = \dfrac{1}{2} + \sin\varphi\,.$

11. $\alpha : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z + 5}{-7}\,;\quad A(1, -1, -4)\,.$

12. $A_1(2, -1, 0)\,,\ A_2(4, 2, -1)\,,\ A_3(-1, -3, 0)\,,\ A_4(5, -11, 7)\,.$

13. $M(1, -2, 3)\,;\quad \alpha :\ 7x + y - z - 53 = 0\,.$

Линейная алгебра

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\,;\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\,.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\,.$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11\,; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2\,; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 13\,. \end{cases}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & -6 \end{pmatrix}\,.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -2\,; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 4\,; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 7\,; \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 12x_4 = 22\,. \end{cases}$

6. Образует ли линейное пространство над полем вещественных чисел множество всех векторов из $\mathbb{R}^3$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + x_3 = 0$?
$a \oplus b = a + b$; $\lambda \odot a = \lambda \cdot a$.

7. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 8x_4 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0; \\ -7x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{aligned} \vec{a} &= \{2, 3, 1\}; \\ \vec{b} &= \{1, -1, 3\}; \\ \vec{c} &= \{3, 2, 2\}; \\ \vec{d} &= \{3, -3, 11\}. \end{aligned}$$

9. Линейное преобразование в пространстве E^3 имеет матрицу
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\vec{b} = \{-2, 3, 8\}$.

10. $$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 3x_3; \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - 2x_3; \\ x_3' = 3x_1 - 2x_2 + x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = x_1' + x_2'; \\ x_2'' = x_1' - x_2'; \\ x_3'' = x_2' + x_3'. \end{cases}$$

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

12. $5x^2 - 4xy + 5y^2 = 63$.