Комплексные числа

Представить числа в тригонометрической форме:

1) $1+i$; 2) $-1+i$; 3) $-1-i$; 4) $1-i$; 5) $1+\sqrt{3}i$; 6) $1-\sqrt{3}i$; 7) $-1+\sqrt{3}i$; 8) $-1-\sqrt{3}i$;

9) $\sqrt{2}+i$; 10) $\sqrt{2}-i$; 11) $-\sqrt{2}+i$; 12) $-\sqrt{2}-i$; 13) $\sqrt{3}+i$; 14) $-\sqrt{3}+i$;

15) $\sqrt{3}-i$; 16) $-\sqrt{3}-i$; 17) $1+\sqrt{2}i$; 18) $1-\sqrt{2}i$; 19) $-1+\sqrt{2}i$; 20) $-1-\sqrt{2}i$.

Вычислить значения элементарных функций

1) $\sqrt[3]{27}$; 2) $\sqrt[3]{64i}$; 3) $\sqrt[3]{-64}$; 4) $\sqrt[4]{-16}$; 5) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$; 6) $\sqrt[3]{-27i}$; 7) $\cos i$; 8) $\sin i$;

9) $\ln(1+i)$; 10) $\operatorname{Ln}(1+i)$; 11) i^i; 12) 1^i; 13) $(-1)^{\sqrt{2}}$; 14) $\operatorname{sh}\dfrac{\pi i}{3}$; 15) $\operatorname{ch}\dfrac{2\pi i}{3}$.

Найти аналитическую функцию $f(z)$, если

1) $\operatorname{Re} f(z) = x+y; \quad f(0)=i.$

2) $\operatorname{Im} f(z) = 2x-y; \quad f(0)=2.$

3) $\operatorname{Re} f(z) = x-5y; \quad f(0)=i.$

4) $\operatorname{Im} f(z) = x+4y; \quad f(0)=-1.$

5) $\operatorname{Re} f(z) = xy; \quad f(0)=i.$

6) $\operatorname{Im} f(z) = 2xy; \quad f(0)=1.$

7) $\operatorname{Re} f(z) = y^2-x^2; \quad f(0)=2i.$

8) $\operatorname{Im} f(z) = x^2-y^2; \quad f(0)=1.$

9) $\operatorname{Re} f(z) = -x+3y; \quad f(0)=i.$

Вычислить интегралы

1) $\int\limits_C \bar{z}dz, \quad C: y=x^2$ от $M_0(0;0)$ до $M_1(1;1)$.

2) $\int\limits_C \operatorname{Im} z dz, \quad C: y=x$ от $M_0(0;0)$ до $M_1(-2;-2)$.

3) $\int\limits_C |z|^2\,dz,\quad C: y=-x$ от $M_0(0;0)$ до $M_1(-1;1)$.

4) $\oint\limits_C z\bar{z}dz,\quad C: |z|=1$ от $M_0(1;0)$ до $M_1(1;0)$ против часовой стрелки.

5) $\int\limits_C \operatorname{Im}\bar{z}dz,\quad C: y=2$ от $M_0(1;2)$ до $M_1(2;2)$.

6) $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz,\quad C: y=2x$ от $M_0(1;2)$ до $M_1(2;4)$.

7) $\int\limits_C \operatorname{Re}\bar{z}dz,\quad C: y=x$ от $M_0(1;1)$ до $M_1(2;2)$.

8) $\int\limits_C \bar{z}^2 dz,\quad C: y=\sqrt{x}$ от $M_0(1;1)$ до $M_1(4;2)$.

9) $\int\limits_C \sin z dz,\quad C: y=x$ от $M_0(0;0)$ до $M_1\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

10) $\int\limits_C e^z dz,\quad C: y=1$ от $M_0(0;1)$ до $M_1(1;1)$.

11) $\int\limits_C \cos 2z dz,\quad C: y=x^3$ от $M_0(0;0)$ до $M_1(1;1)$.

Вычислить интегралы

1) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z dz}{z(z-2)}$; 2) $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{e^{iz} dz}{z-i}$; 3) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos\frac{\pi z}{2} dz}{z}$; 4) $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin iz dz}{z-1}$; 5) $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos(z+\pi i)dz}{e^z-2}$;

6) $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z^2+1}$; 7) $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{e^z dz}{z^2+4}$; 8) $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{dz}{z^2+4}$; 9) $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos z dz}{z^2-2z}$; 10) $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{\sin z dz}{z^2-z}$

Вычислить интегралы

1) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{\sin z dz}{z^2}$; 2) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{\operatorname{sh}^2 z dz}{z^2}$; 3) $\int\limits_{|z-1|=1} \dfrac{\sin\frac{\pi z}{4} dz}{z+4}$; 4) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \sin\dfrac{2}{z} dz$; 5) $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{e^{\frac{1}{z}} dz}{z}$;

6) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}dz}{z+1}$; 7) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1+\cos z dz}{z^2}$; 8) $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}dz}{z^2-1}$; 9) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{ch} z dz}{z^2}$.

Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце с центром $z=0$.

1) $\frac{\sin z}{z^2}$; 2) $\frac{\cos^2 z}{z}$; 3) $\frac{1-e^z}{z^2}$; 4) $\frac{e^z}{z^2}$; 5) $e^{\frac{1}{z}} \cdot z^2$; 6) $z\cos\frac{1}{z}$; 7) $\frac{1}{z}\sin\frac{2}{z}$; 8) $\frac{1-\cos z}{z^3}$;

9) $\frac{e^z-1}{z^3}$; 10) $\frac{1+\cos z}{z^2}$.

Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце с центром $z=a$.

1) $\frac{z}{(z+1)^2}$; $a=-1$; 2) $\frac{z-2}{(z+1)^2}$; $a=-1$; 3) $\frac{z^2-2z+3}{(z+1)^2}$; $a=-1$; 4) $\frac{z}{z-2}$; $a=2$;

5) $\frac{z+1}{z-2}$; $a=2$; 6) $\frac{z^2}{z-2}$; $a=2$; 7) $\frac{z^2+3z}{z-2}$; $a=2$; 8) $\frac{z}{z-3}$; $a=3$;

9) $\frac{z^2-1}{z-3}$; $a=3$; 10) $\frac{z+1}{z-3}$; $a=3$.

Определить характер особой точки $z_0=0$ функции $f(z)$

1) $\frac{\ln(1+z)}{z^2}$; 2) $\frac{\sin z - z}{z^2}$; 3) $\frac{\cos z+1}{z^3}$; 4) $\frac{e^{-z}+1}{z^2}$; 5) $\frac{\mathrm{sh} z - z}{z^2}$; 6) $\frac{1-\cos z}{z^2}$;

7) $\sin\frac{\pi}{z^2}$; 8) $\mathrm{ch}\frac{1}{z}$; 9) $\cos\frac{1}{z}$.

Найти вычет функции

1) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\frac{e^z}{z(z-1)}$; 2) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\pi/6}\frac{e^z}{\sin z-\frac{1}{2}}$; 3) $\operatorname*{Res}\limits_{z=1}\frac{e^z}{z(z-1)}$; 4) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\frac{e^z-1}{z^2}$; 5) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\left(z^2\cdot\sin\frac{1}{z}\right)$;

6) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\cos\frac{1}{z}$; 7) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}e^{\frac{1}{z^2}}$; 8) $\operatorname*{Res}\limits_{z=-2}\frac{z^3+1}{z^2(z+2)}$; 9) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\pi/2}\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}$; 10) $\operatorname*{Res}\limits_{z=1}e^{\frac{1}{z-1}}$.

Вычислить интегралы, применяя основную теорему Коши о вычетах

1) $\int\limits_{|z|=1/2} \frac{\cos z dz}{z^2(z+1)}$; 2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{z^2}-1}{z^2} dz$; 3) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^2} dz$; 4) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z dz}{e^z+1}$; 5) $\int\limits_{|z|=1/2} \frac{\cos z dz}{z(z^4+1)}$;

6) $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z-2} dz$; 7) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3+1}$; 8) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin \pi z}{z-2} dz$; 9) $\int\limits_{|z|=2} \frac{z \sin z dz}{(z-1)^2}$; 10) $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z-\pi)^2}$.