

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2011

УДК 519.2(075.8)

ТЗЗ8

Рецензенты: *А. Г. Пинус*, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Т. М. Назарова, кандидат физ.-мат. наук, доц.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов технических специальностей

ТЗЗ8 **Теория вероятностей. Примеры и задачи:** учебное пособие /
М. Ю. Васильчик, Н. С. Аркашов, А. П. Ковалевский и др. — Новосибирск :
Изд-во НГТУ, 2011. — 128 с.

ISBN 978-5-7782-1833-8

Настоящее учебное пособие рассчитано на студентов всех технических специальностей и содержит материал семестрового курса теории вероятностей и математической статистики. Пособие состоит из двух глав и 13 параграфов. Каждый параграф начинается с основных определений и соответствующих формул, которые необходимы для решения задач. В каждом параграфе приведены решения типичных примеров. Ко всем задачам даны ответы, а к некоторым задачам — указания по их решению.

УДК 519.2(075.8)

ISBN 978-5-7782-1833-8

- © Васильчик М.Ю., Аркашов Н.С.,
Ковалевский А.П., Пупышев И.М.,
Тренева Т.В., Хаблов В.В.,
Шефель Г.С., 2011
- © Новосибирский государственный
технический университет, 2011

Оглавление

Глава 1. Случайные события	5
§ 1.1 Элементы комбинаторики	5
§ 1.2 Алгебра событий	11
§ 1.3 Вероятность. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчет вероятностей	18
§ 1.4 Геометрические вероятности	21
§ 1.5 Условная вероятность и теорема умножения	27
§ 1.6 Формула полной вероятности. Формула Байеса	32
§ 1.7 Повторение испытаний. Формула Бернулли	36
§ 1.8 Локальная и интегральная теоремы Муавра — Лапласа. Формула Пуассона	38
 Глава 2. Случайные величины	 41
§ 2.1 Случайные величины с дискретным распределением. Числовые характеристики случайных величин с дискретным распределением	41
2.1.1 Случайная величина и ее функция распределения	41
2.1.2 Случайные величины с дискретным распределением	42
2.1.3 Числовые характеристики случайных величин с дискретным распределением	43
2.1.4 Примеры случайных величин с дискретным распределением	45
§ 2.2 Случайные величины с абсолютно непрерывным распределением. Числовые характеристики случайных величин с абсолютно непрерывным распределением	54
2.2.1 Функция и плотность распределения случайной величины с абсолютно непрерывным распределением	54
2.2.2 Числовые характеристики случайных величин с абсолютно непрерывным распределением	55
2.2.3 Примеры случайных величин с абсолютно непрерывным распределением	56
2.2.4 Функции от случайных величин с абсолютно непрерывным распределением	61
§ 2.3 Случайные векторы с дискретным распределением	70
2.3.1 Случайные векторы. Случайные векторы с дискретным распределением. Независимость случайных величин с дискретным распределением	70

2.3.2 Числовые характеристики случайных векторов с дискретным распределением	71
§ 2.4 Случайные векторы с абсолютно непрерывным распределением	77
2.4.1 Случайные векторы с абсолютно непрерывным распределением. Плотность распределения	77
2.4.2 Числовые характеристики случайных векторов с абсолютно непрерывным распределением	78
2.4.3 Функции от случайных векторов с абсолютно непрерывным распределением	78
§ 2.5 Предельные теоремы	87
2.5.1 Закон больших чисел	90
2.5.2 Центральная предельная теорема	92

Приложение. Таблицы	i
----------------------------	----------

Литература	ix
-------------------	-----------

Глава 1

Случайные события

1.1 Элементы комбинаторики

СХЕМА ВЫБОРА БЕЗ ВОЗВРАЩЕНИЯ.

Во многих задачах классической теории вероятностей используется комбинаторика, т. е. область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух правил — правила умножения (правила произведения) и правила сложения (правила суммы).

Правило сложения. Пусть даны два непересекающихся множества: множество A , содержащее n элементов, и множество B , содержащее m элементов. Тогда число способов, которыми можно выбрать один элемент либо из множества A , либо из множества B , равно $m + n$.

Правило умножения. Если элемент из множества A можно выбрать n способами и, после произведенного выбора, можно выбрать элемент из множества B m способами, то выбор пары (a, b) ($a \in A, b \in B$) в указанном порядке можно осуще-

ставить $m \cdot n$ способами.

Правила сложения и умножения распространяются на случай трех и более множеств.

Пусть некоторое множество A содержит n элементов, т. е., $A = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Размещением из n элементов по k элементов ($0 \leq k \leq n$) называется любое упорядоченное подмножество множества A , содержащее k элементов. То есть размещение — это набор из k элементов $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, причем два размещения считаются различными, если либо в одном из них есть элементы, не входящие в другое, либо при одинаковом составе различен порядок следования элементов. Число размещений A_n^k из n по k вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = (n-1)! \cdot n$. Напомним, считается, что $0! = 1$.

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n «местам»: $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$. Две перестановки различаются порядком расположения элементов. Число разных перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Сочетанием из n элементов по k элементов ($0 \leq k \leq n$) называется подмножество $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ элементов из A (сочетания различаются только составом элементов, но не их порядком).

Число сочетаний из n по k элементов вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Свойства C_n^k : 1) $C_n^0 = C_n^n = 1$; 2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; 3) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

СХЕМА ВЫБОРА С ВОЗВРАЩЕНИЕМ.

Пусть множество A содержит n элементов. Будем составлять упорядоченные подмножества $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ из элементов A следующим образом: случайным (произвольным) образом выбирается первый элемент x_1 , фиксируется и возвращается обратно. Затем произвольно выбирается второй элемент, фиксируется на втором месте и возвращается обратно. Также выбирается третий элемент, фиксируется на третьем месте и возвращается обратно. Процесс продолжается k раз. Полученный набор $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ называется *размещением с повторениями*. Число таких размещений равно n^k .

Размещения с повторениями различаются либо составом элементов, либо порядком размещения элементов.

Сочетания с повторениями из n по k состоят из множеств $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$, которые могут различаться только по составу, порядок расположения не важен. Число $\overline{C}_n^k$ сочетаний с повторениями вычисляется по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Пусть множество A состоит из n элементов, причем в множестве A есть k различных типов элементов $S_1, S_2, \dots, S_k$, где множество S_1 содержит n_1 элементов одного первого типа, S_2 — n_2 элементов 2-го типа, $\dots$, S_k содержит n_k элементов k -го типа, и $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Число перестановок с повторениями $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ обозначается $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ и вычисляется по формуле

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Две перестановки с повторениями не различаются, если меняются местами два элемента из одного подмножества S_j .

Задачи.

1.1. Из пункта A в пункт B ведут три дороги, из B в C — четыре дороги. Сколькими способами можно проехать из A в C с заездом в пункт B ?

Решение. По правилу умножения $3 \cdot 4 = 12$.

1.2. Сколько трехзначных чисел можно получить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе повторять нельзя?

Решение. $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

1.3. Каким числом способов можно усадить 5 человек в пятиместную автомашину?

Решение. $P_n = 5! = 120$.

1.4. Для выполнения работы нужно выделить группу из четырех среди десяти человек. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$.

1.5. Группу из 20 человек нужно разбить на три подгруппы из 3, 5 и 12 человек. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. $C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 = C_{20}^{3,5,12} = \frac{20!}{3!5!12!} = 7054320$.

1.6. В студенческой группе 15 человек. Сколькими способами можно выбрать:

- а) троих студентов на конференцию;
- б) троих разных студентов на олимпиады по математике, физике и химии;
- в) старосту, профорга и культорга (должности можно совмещать)?

Решение. а) Будем составлять выборки по 3 человека. Порядок в выборке не важен, поэтому общее число таких выборок равно $C_{15}^3 = \frac{15!}{3!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{6} = 455$.

б) Как и в предыдущем случае, составляем выборки по 3 человека, но так как олимпиады разные, то выборки будут упорядоченные (порядок студентов в выборке соответствует выбранным предметам, например, математика – 1, физика – 2, химия – 3). Так как выбираем троих разных студентов, то имеем упорядоченные выборки без возвращения. Общее число таких выборок $A_{15}^3 = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$.

в) Здесь уже будут упорядоченные выборки с возвращением (должности можно совмещать). Их число $15^3 = 3375$.

1.7. Брошены 3 игральные кости. По исходам эксперимента составляем тройки чисел (i, j, k) , где i, j, k – число выпавших очков соответственно на 1, 2, 3 кости. Сколькими способами можно составить: а) такие тройки чисел; б) такие тройки, в которых нет числа «3»; в) тройки, в которых все числа различны?

Решение. а) Это будут упорядоченные выборки с возвращением, так как на разных костях могут выпасть одинаковые числа. Т. е. число таких троек равно $6^3 = 216$.

б) Цифру «3» убираем из рассматриваемой совокупности в 6 цифр. Тогда общее число таких троек $5^3 = 125$.

в) Так как цифры должны быть разные, то это будут размещения из 6 по 3 без возвращения. Их число $A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

1.8. В студенческой группе 5 девушек и 10 юношей. Для участия в смешанной эстафете группу разбивают на 5 равных подгрупп. Сколькими способами:

- а) можно получить эти подгруппы;
- б) можно получить подгруппы, в которых будет по одной девушке?

Решение. а) Всего 15 студентов, в каждой подгруппе по 3 человека. Общее число разбиений равно $\frac{15!}{(3!)^5}$.

б) Будем отдельно находить число разбиений множества юношей на 5 равных подгрупп: $\frac{10!}{(2!)^5}$, и также число разбиений множества девушек на 5 равных под-

групп: $\frac{5!}{(1!)^5} = 5!$. Тогда число всех разбиений, в которых будет по 1 девушке и 2 юноши в каждой подгруппе, по правилу умножения будет равно $\frac{10!}{(2!)^5} \cdot 5!$.

1.9. Семь пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из четырех вагонов. Каким числом различных способов они могут распределиться в вагонах? Решить задачу в предположении, что: а) нам важно, кто именно в каком вагоне находится; б) нас интересует только число пассажиров в каждом вагоне.

Решение. а) Это будут размещения с повторениями. Их число $4^7 = 16384$.

б) В этом случае — сочетания с повторениями. Их число $C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120$.

1.10. Каким числом способов 6 человек могут стоять в очереди?

1.11. а) В финальном забеге принимают участие 20 спортсменов. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест? б) В отборочном туре принимают участие 20 конкурсантов. Сколько существует вариантов определить тройку участников, прошедших отбор?

1.12. Доказать, что среди студентов НГТУ есть по крайней мере два человека с одинаковыми инициалами. Можно ли это утверждать для потока из 120 человек?

1.13. На вершину горы ведут 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дать ответ на тот же вопрос в предположении, что спуск и подъем осуществляется разными путями.

1.14. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 5?

1.15. Поезд должен состоять из двух багажных, четырех плацкартных и трех купейных вагонов. Сколькими способами можно сформировать состав, если купейные вагоны должны стоять в начале, а багажные — в конце?

1.16. Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 10 дней. Сколькими способами можно расставить в расписании эти экзамены (на день может приходиться только один экзамен)? Дать ответ на тот же вопрос в предположении, что десятый день обязательно должен быть занят экзаменом.

1.17. В автомобиле 5 мест. Сколькими способами пять человек могут расположиться в нем, если место водителя могут занять только трое из них?

1.18. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если среди них есть двухтомник, книги из которого должны стоять рядом?

1.19. В гостинице 9 свободных одноместных номеров. Сколькими способами можно расселить в них четырех человек?

1.20. В урне 10 красных и 8 синих шаров. Сколькими способами можно выбрать три шара так, чтобы среди них были два красных шара и один синий?

1.21. Сколько слов можно образовать из 8 карточек с буквами «ф», «р», «а», «г», «м», «е», «н», «т», если слова должны состоять а) из восьми букв, б) из семи букв, в) из трех букв? Под «словом» понимается любое сочетание букв в определенном порядке.

1.22. У англичан зачастую дают детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен 300, а дают ему не более трех имен?

1.23. Сколько различных маршрутов может избрать пешеход, решивший пройти 9 кварталов, 5 из них — на запад, и 4 — на север?

1.24. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра а) больше предыдущей? б) меньше предыдущей?

1.25. Сколькими способами можно выгрузить 10 одинаковых корзин с фруктами на 8 этажей дома?

1.26 В колоде 36 карт. Сколькими способами можно: а) вытянуть 3 карты; б) вытянуть 3 карты так, чтобы среди них была дама; в) вытянуть 3 карты так, чтобы среди них была дама «пик»; г) вытянуть 3 карты так, чтобы все они были одной масти?

1.27. Сколько различных пятизначных чисел можно написать при помощи цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

1.28. В буфете 4 го корпуса НГТУ в меню имеется 5 видов салатов, 6 видов первых блюд и 7 видов вторых блюд. Сколькими способами можно составить обед из трех блюд?

1.29. Колода карт состоит из 52 листов. Наудачу берут 6 карт без возвращения. Сколько способов получить эти 6 карт, чтобы: а) среди них было 5 карт одной масти; б) среди них присутствовали все масти; в) среди них оказался король «пик»?

1.30. Сколькими способами можно составить четырехзначный номер автомобиля так, чтобы: а) все цифры были разные; б) все цифры были одинаковые; в) было две пары одинаковых цифр; г) было только три одинаковых цифры? д) было только две одинаковых цифры?

1.31. Бросают 6 игральных костей. Сколькими способами можно получить шестерки чисел, соответствующие числу выпавших очков на гранях костей, так, чтобы: а) среди них было 3 единицы, 1 двойка и 1 тройка; б) среди них было 3 одинаковых цифры, а остальные — различные?

1.32. Восемь студентов, дополнительно зачисленных в университет, случайным образом распределяются по 4 группам. Сколькими способами их можно распределить по группам так, чтобы: а) они распределились поровну по 4 группам; б) все оказались в одной группе; в) по 4 студента попали в 2 группы?

1.33. Девять пассажиров наудачу рассаживаются в трех вагонах. Сколькими способами их можно рассадить так, чтобы: а) в каждом вагоне было по 3 пассажира; б) в одном вагоне было 4 пассажира, в другом – 3, в третьем – 2?

1.34. Сколько различных «слов» («слово» — любая комбинация букв) можно составить, переставляя буквы в слове АГА? в слове MISSISSIPPI?

1.35. Сколько существует шестизначных чисел, у которых на четных местах стоят четные цифры?

1.36. В классе изучается 7 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 5 различных предметов?

1.37. Двадцать студентов обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?

1.38. Из двадцати сотрудников лаборатории 5 человек должны выехать в командировку. Сколько может быть различных составов отъезжающей группы, если 3 руководителя лаборатории (зав. лаб., зам. зав. лаб., главный инженер) одновременно уезжать не должны?

1.39. Сколько прямых линий можно провести через 7 точек, из которых лишь 3 лежат на одной прямой?

1.40. Семь яблок, три апельсина и пять лимонов раскладываются в три пакета по пять фруктов в каждом. Сколькими способами это можно сделать?

1.2 Алгебра событий

В теории вероятностей множеству всех элементарных исходов эксперимента ставится в соответствие некоторое множество Ω , называемое *пространством элементарных событий*. Элементы ω множества Ω называют *элементарными событиями*. Например, при описании эксперимента «бросание игральной кости», где исходом является выпадение определенного количества очков, можно использовать пространство $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Здесь каждому исходу опыта, заключающемуся в том, что выпадет i очков, ставится в соответствие элемент ω_i . *Событием* будем называть любое подмножество $A \subset \Omega$. В рассмотренном примере

$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ – событие, соответствующее выпадению четного числа очков.

Суммой событий A и B называется такое событие $C = A + B$, которое состоит из всех элементарных событий, принадлежащих по крайней мере одному из событий A или B . На практике такое событие состоит в том, что выполняется событие A или событие B , или события A и B вместе.

Произведением событий A и B назовем событие $C = A \cdot B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и A , и B . Интерпретируется как событие, состоящее в совместном выполнении A и B .

Разностью событий A и B называется событие $C = A \setminus B$, состоящее из элементарных событий множества A , не принадлежащих B . Интерпретируется как выполнение события A и невыполнение B .

Событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ называется *противоположным* событию A .

Пример. Производят два выстрела. Событие A – попадание при первом выстреле, событие B – попадание при втором выстреле. Тогда события $A + B$ – хотя бы одно попадание при двух выстрелах, AB – два попадания, $\bar{A}$ – промах при первом выстреле, $A\bar{B}$ – попадание при первом выстреле и промах при втором.

События A и B называют несовместными, если $AB = \emptyset$ (пустое множество).

Пример. Бросается монета. Событие A – орел, B – решка. Тогда $AB = \emptyset$, так как выпадение одновременно орла и решки невозможно.

Пусть Ω – произвольное пространство элементарных событий. Класс его подмножеств $\mathcal{F}$ называется *алгеброй событий*, если

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$,
- 2) $A + B \in \mathcal{F}$ для любых $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$,
- 3) $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ – алгебра событий, то из приведенных трех условий можно получить следующие следствия: 1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, 2) $AB \in \mathcal{F}$, 3) $A \setminus B \in \mathcal{F}$, 4) $\sum_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$ для любых $A, B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$.

Если в определении алгебры событий заменить условие 2) на условие замкнутости сложения относительно счетного числа слагаемых, получим определение σ -алгебры событий.

Пусть Ω – произвольное пространство элементарных событий. Класс его подмножеств $\mathcal{F}$ называется *σ -алгеброй событий*, если

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

- 2) $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ для любых $A_i \in \mathcal{F}$ ($i = 1, 2, \dots$),
 3) $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Для σ -алгебры можно доказать следующее следствие: $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ для любых $A_i \in \mathcal{F}$ ($i = 1, 2, \dots$).

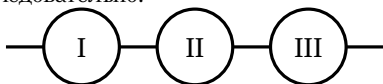
Все отношения между событиями в теории вероятностей могут быть описаны в терминах операций над множествами. Некоторые соответствия между понятиями теории вероятностей и теории множеств приведены в таблице.

теория вероятностей	теория множеств
пространство элементарных исходов (достоверное событие)	множество Ω
невозможное событие	пустое множество $\emptyset$
$A + B$ сумма событий	$A \cup B$
AB произведение событий	$A \cap B$
Событие A влечет B (т. е. событие B происходит всегда, когда происходит событие A , обозн. $A \subset B$)	$A \subset B$
A и B несовместны ($AB = \emptyset$)	$A \cap B = \emptyset$
Событие A не произошло	$\bar{A} = \Omega \setminus A$

Задачи.

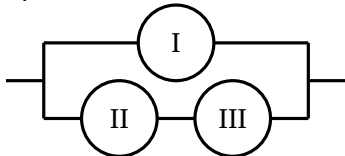
2.1. Пусть A_1, A_2, A_3 — попадания в мишень, соответственно, при первом, втором и третьем выстрелах. Тогда событие «произошло ровно одно попадание в мишень при трех выстрелах» можно записать так: $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$. Событие «ровно два попадания»: $A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$, а «не менее двух попаданий»: $A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$.

2.2. Пусть через A_1, A_2, A_3 обозначаются события, состоящие в том, что первый, второй и третий элемент в цепи пропускают ток. Пусть элементы соединены последовательно.



Тогда событие $A = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$ означает отказ цепи. Часто требуется записать событие в виде суммы попарно несовместных событий: $A = \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$.

Пусть цепь составлена таким образом:



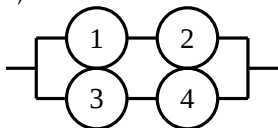
Тогда событие A – цепь пропускает ток (требуется записать в виде суммы попарно несовместных слагаемых) – выразится так:

$$A = A_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3.$$

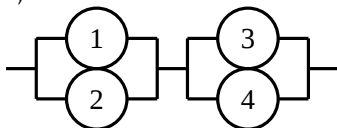
2.3. По мишени производится три выстрела. Пусть A_i ($i = 1, 2, 3$) – событие, состоящее в попадании при i -ом выстреле. Представить в виде сумм попарно несовместных событий следующие: A – три попадания, B – три промаха, C – хотя бы одно попадание, D – хотя бы один промах, E – не менее двух попаданий, F – не более одного попадания.

2.4. Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что исправен соответствующий элемент электрической цепи. Выразить в виде суммы попарно несовместных слагаемых событие, состоящее в том, что цепь пропускает ток.

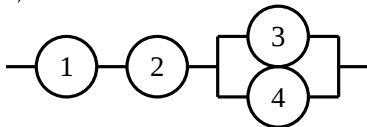
а)



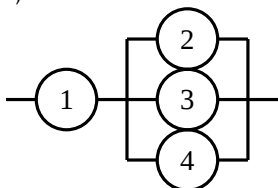
б)



в)



г)



2.5. Запись $A \subset B$ означает, что при наступлении события A происходит также событие B . Известны события A, B, C , причем $A \subset B$. Найти $AB, A + B, ABC, A + B + C$.

2.6. Совместны ли события A и $\overline{A + B + C}$?

2.7. Пусть $\Omega \neq \emptyset$ – некоторое множество. Можно ли класс $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, состоящий из двух элементов, рассматривать как алгебру событий?

2.8. Эксперимент состоит в бросании двух монет. События $A = \{\text{герб на первой монете}\}, B = \{\text{цифра на первой монете}\}, C = \{\text{герб на второй монете}\}, D = \{\text{цифра на второй монете}\}, E = \{\text{хотя бы один герб}\}, F = \{\text{хотя бы одна цифра}\}, G = \{\text{один герб и одна цифра}\}, H = \{\text{ни одного герба}\}, K = \{\text{два герба}\}$. Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: $A + C, AC, EF, C + E, CE, BD, E + K, \overline{K}, \overline{CH}, \overline{FK}$.

2.9. Доказать:

а) $\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$

б) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

в) $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$

г) $A(A + B) = A$

д) $\overline{A + BC} = \overline{A} (\overline{B} + \overline{C})$

2.10. Упростить выражения:

а) $A + (B \setminus A),$

б) $A + B\overline{A} + (C \setminus AB),$

в) $(A + B)(A \setminus B),$

г) $(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B),$

д) $A(B + C) + (A + B)C.$

2.11. Упростить выражения:

а) $\overline{\overline{A} + \overline{B}},$

$$\text{б) } \overline{\overline{AB}},$$

$$\text{в) } A\overline{B} + B\overline{C} + ABC,$$

$$\text{г) } (A + \overline{B})(\overline{A} + B) + (A + B)(\overline{A} + \overline{B}).$$

2.12. Доказать:

$$\text{а) } AB = \emptyset \implies (A + B)\overline{B} = A,$$

$$\text{б) } AB = \emptyset \implies \overline{AB} + B = \overline{A}.$$

2.13. Из пакета, содержащего 9 яблок, и из них 5 красных и 4 зеленых, наудачу по одному извлекаются яблоки до появления красного. Обозначим

$$A_i = \{\text{красное яблоко появится при } i\text{-м испытании}\}.$$

Записать в алгебре событий следующие события:

$$A = \{\text{пришлось произвести 4 извлечения}\},$$

$$B = \{\text{красное яблоко появится не более чем за 3 извлечения}\},$$

$$C = \{\text{красное яблоко появится более чем за 3 извлечения}\}.$$

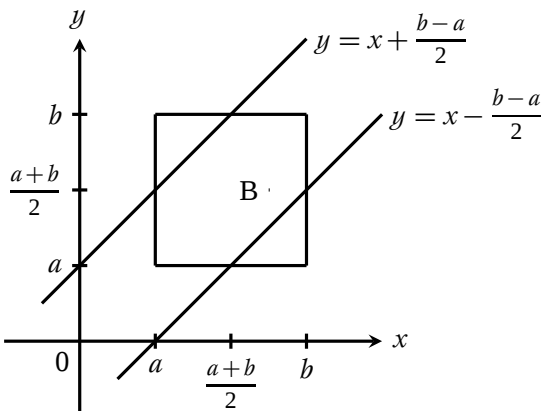
2.14. На отрезке $[a, b]$ наудачу ставятся 2 точки. Построить подходящее пространство элементарных исходов для описания следующих событий:

$$A = \{\text{вторая точка ближе к правому концу, чем к левому}\},$$

$$B = \{\text{расстояние между двумя точками меньше половины длины отрезка}\}.$$

Решение. Для описания события A важно только расположение второй точки. Обозначим через y ее координату, $y \in [a, b]$. Пространство элементарных исходов будет совпадать с множеством точек отрезка $[a, b]$. Событие A заключается в том, что точка расположена правее середины отрезка, то есть $A = \{y > (a + b)/2\}$.

Для описания события B важно расположение обеих точек. Пусть x — координата первой точки, y — координата второй точки. Так как обе точки выбираются наудачу на отрезке $[a, b]$, то в качестве пространства элементарных исходов можно рассмотреть квадрат $\{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$. Событие B заключается в том, что расстояние $|y - x|$ между точками x и y меньше половины длины отрезка, то есть $B = \{|y - x| < (b - a)/2\} = \{-(b - a)/2 < y - x < (b - a)/2\} = \{x - (b - a)/2 < y < x + (b - a)/2\}$.



2.15. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между 11 ч и 12 ч. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Построить подходящее пространство элементарных исходов Ω для описания следующих событий: $A = \{\text{Петр пришел после 11 ч 45 мин}\}$, $B = \{\text{Петр пришел после Ивана}\}$, $C = \{\text{Иван пришел до 11 ч 45 мин}\}$, $D = \{\text{встреча не состоялась}\}$, $E = \{\text{Петр пришел первым, ждал Ивана все обусловленное время и не дождался}\}$, $F = \{\text{Ивану не пришлось ждать Петра}\}$, $G = \{\text{встреча состоялась}\}$, $H = \{\text{встреча состоялась после 11 ч 30 мин}\}$, $I = \{\text{тот, кто пришел первым, пришел до 11 ч 30 мин}\}$, $J = \{\text{Иван опоздал на встречу}\}$, $K = \{\text{встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут}\}$. Построить подмножества Ω , соответствующие этим событиям.

2.16. Пусть A_1, A_2, A_3 – произвольные события. Найти выражения для следующих событий (в виде суммы попарно несовместных слагаемых):

- среди событий A_1, A_2, A_3 произошли все три;
- произошло хотя бы одно;
- произошло только A_1 ;
- произошли хотя бы два;
- произошли A_1 и A_2 , но A_3 не произошло;
- произошло только одно событие;
- произошли только два события;
- ни одно не произошло;
- произошло не более двух.

2.17. Два баскетболиста по очереди бросают мяч в корзину до первого попадания. Выигрывает тот, кто первым забросит мяч. Обозначим

$A_k = \{\text{первый баскетболист попадет при своем } k\text{-м броске}\},$

$B_k = \{\text{второй баскетболист попадет при своем } k\text{-м броске}\},$

$A = \{\text{выигрывает первый баскетболист}\},$

$B = \{\text{выигрывает второй баскетболист}\}.$

Выразить события A и B через события A_k и B_k .

1.3 Вероятность. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчет вероятностей

Определение. Числовая функция $\mathbf{P}$, определенная на σ -алгебре $\mathcal{F}$, называется *вероятностью*, если выполняются аксиомы:

1) $\mathbf{P}(A) \geq 0$ при любом $A \in \mathcal{F}$,

2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

3) $\mathbf{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$ для любых $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, таких, что $A_i A_j = \emptyset$

при $i \neq j$.

Замечание. Если вероятность определяется на алгебре событий, то третья аксиома заменяется на следующее условие: $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ для любых несовместных A и B , принадлежащих $\mathcal{F}$.

Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ называется *вероятностным пространством*.

Из определения вероятности вытекают следующие свойства:

1) $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$,

2) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$,

3) *теорема сложения вероятностей:* $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$

для любых A и $B \in \mathcal{F}$.

Для произвольного конечного числа слагаемых имеем

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A_1 A_2) - \mathbf{P}(A_1 A_3) - \dots - \mathbf{P}(A_{n-1} A_n) + \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3) + \dots + \mathbf{P}(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \dots + (-1)^n \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n).$$

При вычислении вероятности суммы удобно использовать формулу

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n}).$$

Пусть множество всех элементарных исходов конечно и все они равновозможны. Тогда вероятность события A есть число $P(A)$, равное отношению числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A (т. е. тех, которые образуют множество A), к числу n всех элементарных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность — это численная характеристика, которая показывает, насколько велика степень объективной возможности события.

Замечание. Введенная таким образом функция $P(A)$ удовлетворяет аксиомам вероятности, если в качестве алгебры событий $\mathcal{F}$ взять множество всех подмножеств множества элементарных исходов.

Задачи.

3.1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков равна 4.

Решение. Всего исходов 36 (6 вариантов на каждой кости, по принципу умножения всего исходов $6 \cdot 6 = 36$). Благоприятных — три: (1, 3), (3, 1), (2, 2). Пары чисел — это выпавшие очки на первой и второй костях соответственно. $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3.2. В урне 5 красных шаров и 3 белых. Случайным образом извлекают 2 шара. Какова вероятность того, что оба красные?

Решение. Так как порядок вынимания шаров не имеет значения, общее число исходов $n = C_8^2$, а число благоприятствующих $m = C_5^2$. Вероятность $P(A) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$.

3.3. Из урны, в которой содержится 10 белых шаров и 15 красных, выбирают 5 шаров. Какова вероятность того, что 3 из них белые?

Решение. Прежде всего определим число всех исходов вероятностного пространства, в итоге получим $n = C_{10+15}^{2+3} = C_{25}^5$, далее найдем число интересующих нас исходов: $m = C_{10}^3 \cdot C_{15}^2$. Используя определение вероятности, получаем $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{15}^2}{C_{25}^5} = \frac{60}{253}$.

Можно описать общую схему для решения подобных задач. Имеется совокупность из N элементов, среди которых M элементов первого вида и $N - M$ элементов

второго вида. Какова вероятность того, что при выборе совокупности n элементов из всей совокупности N элементов она состоит из m элементов первого вида и $n - m$ элементов второго вида?

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

3.4. В урне 5 шаров, на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Наудачу выбирают 2 шара. Какова вероятность того, что сумма чисел равна семи?

3.5. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших очков не больше 4?

3.6. Из 10 ответов к задачам, помещенным на странице, 2 имеют опечатки. Студент решает 5 задач. Какова вероятность, что ровно для одной из них ответ дан с опечаткой?

3.7. Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность, что 3 из них красной масти?

3.8. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

3.9. В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов, на которых написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры образуют определенную комбинацию. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

3.10. Какова вероятность выпадения герба по крайней мере один раз при трехкратном бросании монеты?

3.11. Из 33 карточек с буквами русского алфавита наудачу выбирается пять. Какова вероятность того, что из них можно составить слово «буква»?

3.12. В коробке пять одинаковых изделий, три из которых окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди извлеченных изделий а) одно окрашенное; б) два окрашенных; в) хотя бы одно окрашенное.

3.13. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номером серии может служить любое пятизначное число, начиная с 00001.

3.14. Каждая из букв слова «интеграл» написана на одной из восьми карточек. Карточки перемешивают. Найти вероятность того, что при вытягивании трех карточек в порядке их выхода появится слово «три».

3.15. Найти вероятность того, что взятый наудачу високосный год содержит 53 воскресенья.

3.16. В соревновании участвуют 20 человек, которые будут разбиты по жребию на две команды по 10 человек. Найти вероятность того, что двое наиболее сильных участников будут играть в разных командах.

3.17. Десять человек независимо друг от друга садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Найти вероятность того, что все они окажутся в разных вагонах.

3.18. Доказать, что $\mathbf{P}(AB) \geq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1$.

3.19. а) Доказать, что если $\mathbf{P}(A) = 0$, то $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(B)$. Верно ли обратное утверждение?

б) Доказать, что если $\mathbf{P}(A) = 1$, то $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B)$. Верно ли обратное утверждение?

Указание. $\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A + B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1 \leq \mathbf{P}(AB) \leq \mathbf{P}(B)$.

3.20. Имеется 7 пронумерованных шаров 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Из них поочередно выбирается 5 шаров: а) без возвращения; б) с возвращением. Какова вероятность того, что их номера образуют возрастающую последовательность?

3.21. Бросают 5 игровых костей. Найти вероятность, что на первой выпадет больше очков, чем на каждой из остальных.

3.22. 2 колоды карт по 36 листов и 2 колоды по 52 листа смешали. Какова вероятность, вытащив наугад 36 карт, составить колоду?

3.23. Из какого минимального числа подмножеств множества Ω состоит алгебра $\mathcal{F}$, если в нее входят подмножества A и B , причем $A \cup B \neq \Omega$, $AB \neq \emptyset$? Перечислить эти подмножества.

3.24. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — произвольное вероятностное пространство. Может ли подмножество, состоящее из одного элементарного исхода $\omega \in \Omega$, не являться случайным событием σ -алгебры $\mathcal{F}$?

1.4 Геометрические вероятности

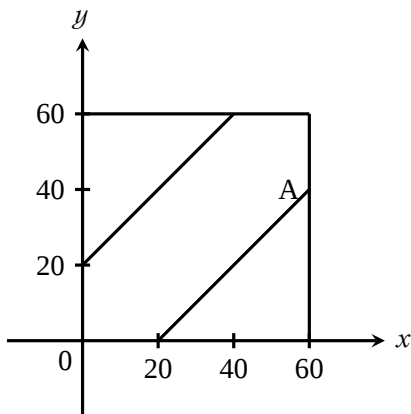
Пусть Ω — ограниченная область (на прямой, на плоскости или в пространстве). Пусть случайный эксперимент состоит в том, что точку бросают наудачу в эту область. Тогда вероятность попадания в подмножество A множества Ω определяется как

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где $m(A)$, $m(\Omega)$ — меры соответствующих областей (длина, площадь, объем). Предполагается, что $m(\Omega) > 0$.

Задачи.

4.1. Два человека договорились встретиться в определенном месте с 12^{00} до 13^{00} . Пришедший ждет другого в течение 20 минут и, если встреча не состоялась, уходит. Приход их не зависит друг от друга и равновозможен в любой момент из указанного промежутка времени. Найти вероятность того, что встреча состоится.



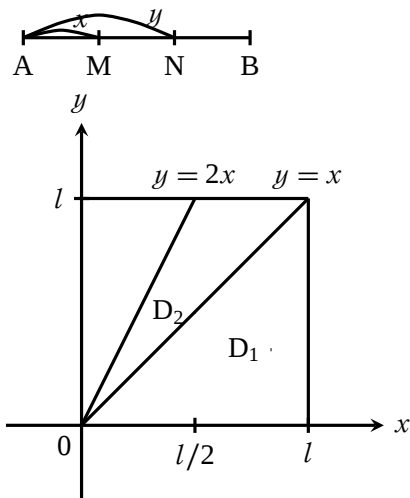
Решение. Пусть x — время прихода первого человека (считаем в минутах, начиная с 12^{00}), y — время прихода второго. Исход интерпретируем как точку с координатами (x, y) . Тогда $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$ — множество всех исходов. Множество благоприятствующих исходов

$$A = \{(x, y) : |x - y| \leq 20, 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\},$$

и $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}$.

4.2. На отрезке AB длины l поставлены наудачу две точки M и N . Какова вероятность того, что точка M ближе к точке N , чем к точке A ?

Решение. Пусть $x = |AM|$, $y = |AN|$. Исход интерпретируем как точку (x, y) . Множество всех элементарных исходов $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq l\}$. Если N ближе к A , чем M (т. е. $y < x$), то исход (x, y) благоприятен нашему событию. Пусть M ближе к A , чем N (см. рисунок).



Тогда нашему событию благоприятны исходы $x < y < 2x$ (так как $|MN|$ должно быть меньше AM , т. е. $y - x < x$). Итак, область D благоприятных исходов имеет вид $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \{(x, y) : y < x, 0 < x, y < l\}, D_2 = \{(x, y) : x < y < 2x, 0 < x, y < l\}.$$

$$\text{Вероятность } \mathbf{P(D)} = \frac{m(D)}{m(\Omega)} = \frac{l^2 - \left(\frac{l}{2} \cdot l\right) \cdot \frac{1}{2}}{l^2} = \frac{\frac{3}{4}l^2}{l^2} = \frac{3}{4}.$$

4.3. Телефонная линия, соединяющая два пункта, отстоящих на расстоянии 2 км, оборвалась в неизвестном месте. Найти вероятность того, что обрыв произошел не далее чем в 450 метрах от первого пункта.

4.4. Выбираются наудачу два действительных числа из отрезка $[0, 1]$. Какова вероятность того, что их сумма не больше 1, а их произведение не больше $\frac{2}{9}$?

4.5. На паркетный пол наудачу бросается монета диаметра d . Паркет имеет форму квадратов со стороной a ($a > d$). Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадратов паркета?

4.6. Стержень длины l ломается в выбранной наудачу точке. Найти вероятность того, что меньший из двух образовавшихся кусков будет иметь длину, превосходящую $\frac{l}{4}$.

4.7. Стержень разломан на три части; две точки излома выбраны наудачу. Какова вероятность того, что из трех образовавшихся частей можно будет сложить: а) треугольник? б) остроугольный треугольник?

Решение. а) Пусть l – длина стрежня. Обозначим через x длину одной части стрежня, через y – длину другой части, тогда длина третьей части равна $l - x - y$. Ясно, что $x \geq 0, y \geq 0, l - x - y \geq 0$, поэтому пространство элементарных исходов представляет собой прямоугольный треугольник

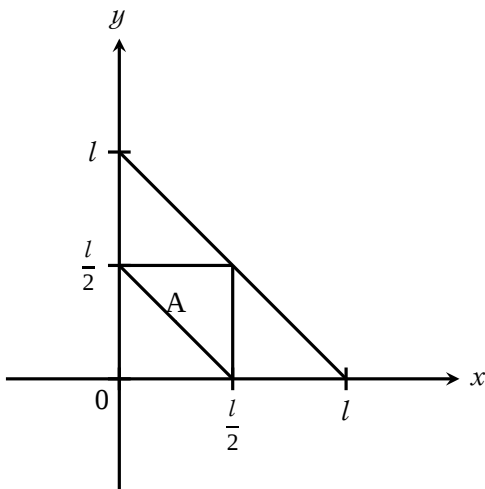
$$\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, l - x - y \geq 0\}$$

с катетами l и l .

Для того, чтобы из частей сломанного стержня можно было составить треугольник, сумма длин любых двух частей должна быть больше длины третьей (неравенство треугольника). Обозначим рассматриваемое событие через A . Таким образом,

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \Omega : x + y > l - x - y, x + (l - x - y) > y, y + (l - x - y) > x\} \\ &= \{(x, y) \in \Omega : x < l/2, y < l/2, x + y > l/2\} \end{aligned}$$

представляет собой прямоугольный треугольник с катетами $l/2$ и $l/2$.



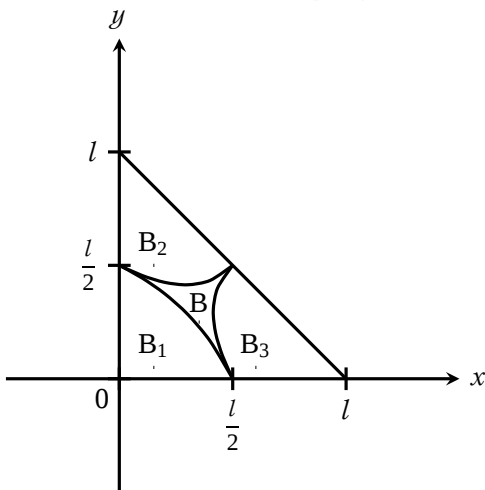
Вероятность события A равна $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}l^2} = \frac{1}{4}$.

б) Угол C в треугольнике ABC острый, если $\cos C > 0$, т. е., по теореме косинусов, $2AC \cdot BC \cdot \cos C = AC^2 + BC^2 - AB^2 > 0$, или $AB^2 < AC^2 + BC^2$.

Событие B , которое заключается в том, что из частей сломанного стержня можно составить остроугольный треугольник, можно следующим образом задать с помощью неравенств:

$$B = \{(x, y) \in \Omega : (l - x - y)^2 < x^2 + y^2, y^2 < x^2 + (l - x - y)^2, x^2 < y^2 + (l - x - y)^2\}.$$

Первое из неравенств: $(l - x - y)^2 < x^2 + y^2$ преобразуется к виду $2y(l - x) > l^2 - 2lx$ или $y > l + \frac{l^2}{2(x-l)}$. График функции $y = l + \frac{l^2}{2(x-l)}$ проходит через точки $(0, l/2)$ и $(l/2, 0)$, и эта функция убывает на промежутке $[0, l/2]$. Второе неравенство $y^2 < x^2 + (l - x - y)^2$ преобразуется к виду $2y(l - x) < 2x^2 - 2lx + l^2$, или $y < -x - \frac{l^2}{2(x-l)}$. График функции $y = -x - \frac{l^2}{2(x-l)}$ проходит через точки $(0, l/2)$ и $(l/2, l/2)$. Третье неравенство преобразуется к виду $x < -y - \frac{l^2}{2(y-l)}$, и график функции $x = -y - \frac{l^2}{2(y-l)}$ проходит через точки $(l/2, 0)$ и $(l/2, l/2)$.



Площадь фигуры В равна разности $m(\Omega) - (m(B_1) + m(B_2) + m(B_3))$, где $m(\Omega) = \frac{l^2}{2}$ — площадь всего треугольника, а B_1, B_2, B_3 — три фигуры, отсекаемые графиками рассматриваемых функций. Найдём эти площади:

$$m(B_1) = \int_0^{l/2} \left(l + \frac{l^2}{2(x-l)} \right) dx = \left(lx + \frac{l^2}{2} \ln |x-l| \right) \Big|_0^{l/2} = \frac{l^2}{2} \left(1 + \ln \frac{1}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Далее, } m(B_2) &= \int_0^{l/2} \left(l - x - \left(-x - \frac{l^2}{2(x-l)} \right) \right) dx = \\ &= \int_0^{l/2} \left(l + \frac{l^2}{2(x-l)} \right) dx = \frac{l^2}{2} \left(1 + \ln \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

и аналогично $m(B_3) = \frac{l^2}{2} \left(1 + \ln \frac{1}{2} \right)$. Таким образом, $m(B) = \frac{l^2}{2} - 3 \cdot \frac{l^2}{2} \left(1 + \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{l^2}{2} (3 \ln 2 - 2)$. Следовательно, $P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = 3 \ln 2 - 2$.

4.8. На окружности радиуса R взяты наудачу три точки A, B, C . Найти вероятность того, что треугольник ABC будет остроугольным.

Указание. Можно свести к решению задачи 4.7(а).

4.9. Берутся произвольно две точки на окружности. Найти вероятность того, что хорда, соединяющая их, меньше радиуса окружности.

4.10. Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух.

4.11. Даны две concentric окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). На большей окружности ставятся две точки A и B . Найти вероятность того, что отрезок AB не пересечет малую окружность.

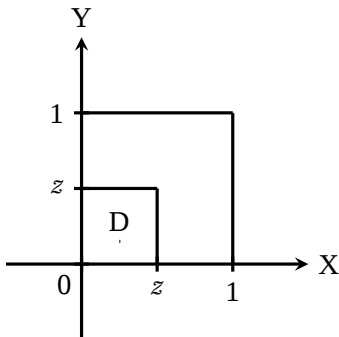
4.12. В прямоугольник со сторонами 1 и 2 брошена точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x .

4.13. Точка с координатами (p, q) выбирается из квадрата с вершинами $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$: а) действительны; б) мнимые; в) разных знаков; г) одного знака; д) положительные.

4.14. В квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ наудачу брошена точка. Пусть (X, Y) будут ее координаты. Доказать, что для любых $0 \leq x, y \leq 1$ выполнено: $P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y) = xy$. Для $0 < z < 1$ найти:

- а) $P(|X - Y| < z)$;
- б) $P(\min(X, Y) < z)$;
- в) $P((X + Y)/2 < z)$;

- г) $\mathbf{P}(XY < z)$;
 д) $\mathbf{P}(\max(X, Y) < z)$;
 е) $\mathbf{P}(X + 2Y < z)$.



Решение. д) Пространство элементарных исходов — квадрат

$$\Omega = \{(X, Y) : 0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1\}.$$

Вероятность рассматриваемого события

$$\mathbf{P}(\max(X, Y) < z) = \mathbf{P}(X < z, Y < z) = \frac{m(D)}{m(\Omega)} = \frac{z^2}{1} = z^2,$$

где D — квадрат $= \{(X, Y) : 0 \leq X < z, 0 \leq Y < z\}$.

1.5 Условная вероятность и теорема умножения

Условная вероятность события A при условии, что событие B произошло, определяется формулой

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

При этом предполагается, что $\mathbf{P}(B) > 0$. В случае, когда $\mathbf{P}(B) = 0$, $\mathbf{P}(A|B)$ не определена.

События A и B называются *независимыми*, если вероятность одного события не зависит от того, произошло или не произошло другое, т. е. $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$.

Теорема умножения: $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$. Для независимых событий $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Теорема умножения для n событий:

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2 | A_1) \mathbf{P}(A_3 | A_1 A_2) \dots \mathbf{P}(A_n | A_1 \dots A_{n-1}).$$

В случае, когда события независимы, т. е. появление любого числа из них не меняет вероятностей появления остальных –

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i).$$

Задачи.

5.1. В урне 5 белых и 7 черных шаров. Обозначим через A – появление белого шара при первом извлечении и B – появление белого шара при втором извлечении. Рассмотрим два варианта извлечения шара.

Способ 1 (выборка с возвратом). Вынутый первым шар возвращается в урну. Тогда при втором извлечении все условия появления белого шара остаются такими же, как и при первом извлечении и $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{5}{12}$ (события A и B независимы).

Способ 2 (выборка без возврата). Вынутый первым шар обратно не возвращается. В этом случае после первого извлечения состав шаров в урне изменился: если при первом извлечении появился белый шар, то вероятность появления белого шара при втором извлечении $\mathbf{P}(B|A) = \frac{4}{11}$; если же первым был извлечен черный шар, то $\mathbf{P}(B|\bar{A}) = \frac{5}{11}$. В этом случае вероятность события B зависит от наступления или ненаступления события A .

5.2. Завод изготавливает 95% годных изделий, причем из них 86% – первого сорта. Найти вероятность того, что изделие, изготовленное на этом заводе, окажется первого сорта.

Решение. $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A) = 0,95 \cdot 0,86 = 0,817$, где A – деталь годная, B – первого сорта.

5.3. По мишени производится три выстрела. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны: 0,4; 0,5; 0,7. Найти вероятности того, что в результате этих трех выстрелов будет

- а) ровно одно попадание,
- б) хотя бы одно попадание,
- в) ровно два попадания,
- г) хотя бы два попадания
- д) три попадания.

Решение. Пусть A_i – попадание при i -ом выстреле. Тогда $\bar{A}_i$ – промах при i -ом выстреле.

а) Событие A – ровно одно попадание – в виде суммы попарно несовместных слагаемых запишется так:

$$A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

Применяя теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, имеем

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) + \\ &+ P(\bar{A}_1) P(A_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(A_3) = 0,4 \cdot (1 - 0,5) \cdot (1 - 0,7) + \\ &+ (1 - 0,4) \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,7) + (1 - 0,4) \cdot (1 - 0,5) \cdot 0,7 = 0,36. \end{aligned}$$

б) Пусть B – хотя бы одно попадание. Тогда $\bar{B}$ – ни одного попадания. Имеем $\bar{B} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, поэтому

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) = \\ &= 1 - 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 1 - 0,09 = 0,91. \end{aligned}$$

в) Пусть C – ровно два попадания. Имеем $C = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$, $P(C) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,41$.

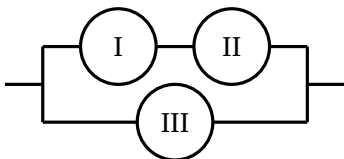
г) Пусть D – хотя бы два попадания. Тогда $D = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$, $P(D) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,55$.

д) Пусть E – ровно три попадания. Тогда $E = A_1 A_2 A_3$, $P(E) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14$.

5.4. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели; вероятность попадания для первого стрелка 0,9, для второго – 0,8. Определить вероятность поражения цели, т. е. вероятность того, что хотя бы один стрелок попадает в цель.

Решение. Пусть A – попадание первого игрока, B – попадание второго стрелка. Тогда событие $C = A + B$ – хотя бы один стрелок попал в цель. События A и B независимы, но совместны, поэтому $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,9 + 0,8 - 0,9 \cdot 0,8 = 0,98$.

5.5. Электрическая цепь составлена по схеме, изображенной на рисунке. Вероятности выхода из строя равны, соответственно, p_1, p_2, p_3 . Определить вероятность прекращения тока в цепи.



Решение. Пусть A_i – выход из строя i -ого элемента. Тогда событие $A = (A_1 + A_2)A_3$ – прекращение тока в цепи.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}((A_1 + A_2)A_3) = \mathbf{P}(A_1 + A_2)\mathbf{P}(A_3) = \\ &= (\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1A_2))\mathbf{P}(A_3) = (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_3 = \\ &= p_1p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3. \end{aligned}$$

Если использовать запись через сумму попарно несовместных слагаемых, то будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3) = \\ &= p_1p_2p_3 + p_1(1 - p_2)p_3 + (1 - p_1)p_2p_3 = p_1p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3. \end{aligned}$$

5.6. Вероятность перехода студента первого курса на второй равна 0,9, а вероятность успешного окончания университета равна 0,8. Какова вероятность того, что студент второго курса окончит университет?

Решение. Пусть событие A – студент первого курса перешел на второй, B – студент первого курса окончит университет. $\mathbf{P}(A) = 0,9$, $\mathbf{P}(B) = 0,8$. Тогда $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A)$, где $\mathbf{P}(B|A)$ – вероятность студенту окончить университет при условии, что он перешел на второй курс. Вероятность $\mathbf{P}(AB) = 0,8$, так как в нашем случае $AB = B$. Таким образом, $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0,8}{0,9} = \frac{8}{9}$.

5.7. Вероятность того, что в электроцепи напряжение превысит нормативное, равна 0,9. При превышенном напряжении вероятность отказа прибора 0,8. Найти вероятность отказа вследствие повышения напряжения.

5.8. Вероятность занятости первой линии связи 0,3, второй – 0,6, третьей – 0,2. Какова вероятность, что все три линии свободны?

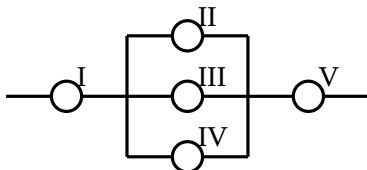
5.9. В цехе 2 станка. Вероятность занятости каждого из них равна 0,7. Найти вероятность того, что работает ровно один станок.

5.10. В блоке, содержащем 24 лампы, отказала одна из них. Неисправность отыскивается путем поочередной замены. Найти вероятность того, что неисправность будет устранена не более чем при первых трех попытках.

5.11. Вероятности того, что разговор можно вести по каждому из трех каналов связи, соответственно равны 0,8; 0,7; 0,8. Какова вероятность того, что разговор состоится?

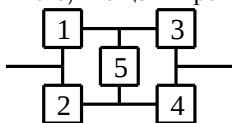
5.12. По радиолинии передается сигнал в виде последовательности из пяти импульсов. Вероятность искажения каждого импульса равна 0,1. Найти вероятность того, что передаваемый сигнал будет искажен.

5.13. Электрическая цепь составлена по схеме



Вероятности выхода из строя за время T элементов цепи, соответственно: 0,1; 0,4; 0,7; 0,5; 0,2. Определить вероятность прерыва питания за указанный промежуток времени.

5.14. На рисунке приведена схема цепи. Считается известной надежность каждого элемента p_i ($q_i = 1 - p_i$ — вероятность отказа i -ого элемента). Найти вероятность того, что цепь пропускает ток.



5.15. Вероятность аппаратуре проработать 100 часов равна $\frac{4}{5}$, а вероятность проработать 500 часов равна $\frac{3}{5}$. Аппаратура проработала 100 часов. Какова вероятность того, что она будет работать еще 400 часов?

5.16. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого первого выпадет герб. а) Какова вероятность того, что выиграет начинающий? б) Какова вероятность того, что выиграет второй игрок?

5.17. Сколько раз достаточно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью не меньшей 0,5 можно было ожидать появление шестерки хотя бы в одном случае?

5.18. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах равна 0,936. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле, если вероятность при каждом выстреле считается одинаковой.

5.19. Над изготовлением изделия работают последовательно k рабочих; каче-

ство изделия при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью p_1 , второй — с вероятностью p_2 и т. д.. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

5.20. Для повышения надежности прибора он дублируется $(n - 1)$ аналогичными приборами. Надежность каждого прибора p . а) Найти надежность системы. б) Сколько необходимо взять приборов, чтобы повысить надежность до заданной величины p_1 ?

5.21. Доказать, что если $\mathbf{P}(A) = 0,8$, $\mathbf{P}(B) = 0,4$, то $0,25 \leq \mathbf{P}(B|A) \leq 0,5$.

5.22. Доказать, что если вероятность хотя бы одного из событий A и B равна 0 или 1, то события A и B независимы.

5.23. Доказать, что если $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$ и события A и B несовместные, то они зависимые.

5.24. Доказать, что если $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A|\bar{B})$, то A и B независимые.

1.6 Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$, которые мы будем называть гипотезами, образуют *полную группу* попарно несовместных событий, т. е. выполняются следующие соотношения: $\sum_{i=1}^n H_i = \Omega$, $H_i H_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Событие A можно представить как объединение событий $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$, т. е. $A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$. Тогда имеет место формула

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(H_i) \mathbf{P}(A|H_i),$$

которая называется *формулой полной вероятности*.

Вероятность события A в предположении, что событие A уже имеет место, определяется по *формуле Байеса*

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \frac{\mathbf{P}(AH_i)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(H_i) \mathbf{P}(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(H_k) \mathbf{P}(A|H_k)},$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Вероятности $\mathbf{P}(H_i|A)$ часто называют апостериорными (т. е., вычисленными после опыта) вероятностями гипотез, в отличие от $\mathbf{P}(H_i)$, которые называют априорными (т. е. известными до опыта).

Задачи.

6.1. В тире 6 ружей. Вследствие разницы в пристрелке ружей вероятность попадания для двух из этих ружей 0,8, для трех – 0,9, для одного 0,3. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле, если ружье выбирается наудачу.

Решение. Пусть событие A – попадание в цель при одном выстреле. События H_i – выбор ружья из i -ой группы. Тогда $\mathbf{P}(H_1) = \frac{2}{6}$, $\mathbf{P}(H_2) = \frac{3}{6}$, $\mathbf{P}(H_3) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(A|H_1) = 0,8$, $\mathbf{P}(A|H_2) = 0,9$, $\mathbf{P}(A|H_3) = 0,3$. По формуле полной вероятности имеем $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2) + \mathbf{P}(H_3)\mathbf{P}(A|H_3) = \frac{2}{6} \cdot 0,8 + \frac{3}{6} \cdot 0,9 + \frac{1}{6} \cdot 0,3 \approx 0,766$.

6.2. Заготовка может попасть к двум рабочим. Вероятность того, что она попадет к первому, – 0,6, ко второму – 0,4. Вероятность того, что первый рабочий изготовит деталь без брака, – 0,9, второй – 0,95. При проверке готовой детали оказалось, что деталь без брака. Найти вероятность того, что ее сделал первый рабочий.

Решение. Пусть событие H_1 – заготовка попала к первому рабочему, H_2 – ко второму, A – деталь изготовлена без брака. Тогда по формуле Байеса

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1)}{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)} = \frac{0,6 \cdot 0,9}{0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,95} = 0,59.$$

6.3. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложили два шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Затем из второй урны извлекают шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Пусть события H_1 – переложено из первой урны во вторую два белых шара, H_2 – черный и белый, H_3 – два черных, A – из второй урны извлечен белый шар. Тогда $\mathbf{P}(H_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10}$, $\mathbf{P}(H_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, $\mathbf{P}(A|H_1) = \frac{6}{10}$, $\mathbf{P}(A|H_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(A|H_3) = \frac{4}{10}$. По формуле полной вероятности $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0,52$.

6.4. В группе из 9 стрелков 5 отличных, 2 хороших, 2 удовлетворительных. Вероятность попадания в цель отличным стрелком равна 0,9, хорошим – 0,7, удовлетворительным – 0,6. Определить вероятность того, что вызванный наугад стрелок попадет в цель.

6.5. Вероятности подключения абонента к каждой из трех АТС соответственно равны $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{16}$. Вероятность соединения с абонентом в случае подключения к пер-

вой АТС — $\frac{5}{8}$, ко второй — $\frac{7}{8}$, к третьей — $\frac{2}{5}$. а) Какова вероятность соединения? б) Соединение произошло. Какова вероятность, что соединение произошло через вторую АТС?

6.6. Вероятность перегорания первой, второй и третьей ламп соответственно 0,1, 0,2 и 0,3. Вероятность выхода из строя прибора при перегорании одной лампы 0,25, при перегорании двух — 0,6, а при перегорании трех — 0,9. Определить вероятность выхода прибора из строя.

6.7. В ящике находится 10 белых и 2 черных шара. Из ящика вынимают шар, а затем возвращают его на место, добавив еще один шар такого же цвета. Какова вероятность вынуть после этого подряд три белых шара?

6.8. По каналу связи передается один из двух возможных сигналов X_1 или X_2 (например, «точка» — «тире»). Сигнал X_2 передается в среднем в два раза чаще, чем сигнал X_1 . Из-за наличия помех возможны искажения: вместо сигнала X_1 на приеме может быть получен X_2 и наоборот. Свойства канала связи таковы, что сигнал X_1 подвергается искажениям примерно в 10%, а X_2 — в 20% случаев. Получен сигнал X_1 . Какова вероятность, что передан этот же сигнал?

6.9. В левом кармане 5 монет достоинством 1 р. и 4 монеты по 2 р., в правом — 4 монеты по 1 р. и 3 монеты по 2 р.. Из левого в правый наугад перекладывают две монеты. Затем из правого извлекают одну монету. Какова вероятность, что это монета достоинством 2 р.?

6.10. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взяли один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

6.11. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

6.12. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

6.13. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2, 0,4 и 0,3.

6.14. Три орудия производят стрельбу по трем целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная одним орудием, поражается с вероятностью p . Найти вероятность того, что из трех целей две будут поражены, а третья нет.

6.15. Имеется 20 экзаменационных билетов, каждый из которых содержит два вопроса. Экзаменующийся знает ответ на 30 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса своего билета или на один вопрос из своего билета и на один дополнительный вопрос из другого билета.

6.16. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы. Человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же, либо первой группы. Человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7% имеет первую, 37,5% — вторую, 20,9% — третью, 7,9% — четвертую группу крови.

Найти вероятность того, что а) случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора; б) переливание можно осуществить, если имеются два донора; в) если имеются три донора.

6.17. Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс А (мало рискует), класс В (рискует средне), класс С (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у нее, 30% принадлежит классу А, 50% — классу В и 20% — классу С. Вероятность того, что водитель класса А в течение года попадет хотя бы в одну автомобильную аварию, равна 0,01, для водителей класса В — 0,03, а для водителей класса С — 0,1. Владелец застрахованной машины n лет без происшествий. Какова вероятность того, что этот водитель из класса А?

1.7 Повторение испытаний. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p . Тогда вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях ровно k раз, вычисляется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$.

Число m_0 называется *наивероятнейшим числом* наступления события A в n однотипных испытаниях, если $P_n(m_0) \geq P_n(m_i)$ при $m_i \neq m_0$. Число m_0 можно определить из двойного неравенства

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Разность граничных значений в этом двойном неравенстве равна 1. Если $np + p$ не является целым числом, то двойное неравенство определяет ровно одно наивероятнейшее значение m_0 . Если же $np + p$ — целое число, то есть два наивероятнейших числа $m_0^{(1)} = np - q$ и $m_0^{(2)} = np + p$.

Задачи.

7.1. Монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность того, что три раза выпадет герб. Найти наивероятнейшее число выпадений герба.

Решение. $p = q = 0,5$, $P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 = \frac{5}{16}$.

$np + p = 0,5 \cdot 5 + 0,5 = 3$. Значит, наивероятнейших значений два: $m_0^1 = np - q = 5 \cdot 0,5 - 0,5 = 2$ и $m_0^2 = np + p = 5 \cdot 0,5 + 0,5 = 3$.

7.2. Играют два равносильных теннисиста. Что вероятнее выиграть: две партии из четырех или три партии из шести?

Решение. $P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$, $P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$. Следовательно, вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

7.3. Найти вероятность того, что событие A появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4.

7.4. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

7.5. Отрезок АВ, длина которого 15 см, разделен точкой С в отношении 2 : 1. На этот отрезок наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки С и две — правее.

7.6. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов нужно произвести, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

7.7. Производится 5 независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую 0,2. Для разрушения цели достаточно трех попаданий. Найти вероятность того, что цель будет разрушена.

7.8. Производится стрельба по цели тремя снарядами. Для каждого снаряда вероятность попадания 0,4. Если в цель попал один снаряд, он выводит цель из строя с вероятностью 0,3; если два снаряда — 0,7; если три — 0,9. Найти вероятность того, что цель будет выведена из строя.

7.9. На проверку поступили 10 партий деталей с трех станков. В каждой партии по 1000 деталей, причем пять из этих партий изготовлены на первом станке, четыре на втором, и одна на третьем станке. Вероятность производства нестандартной детали на первом станке равна 0,5%, на втором — 1%, на третьем — 2%. Из трех деталей, взятых наудачу из одной из имеющихся 10 партий, 2 оказались стандартными, а одна нестандартной. Найти вероятность того, что проверенные детали изготовлены на первом станке.

7.10. Проблема Джона Смита. В 1693 г. Джон Смит поставил следующий вопрос: одинаковы ли шансы на успех трех человек, если первому необходимо получить хотя бы одну шестерку при бросании игральной кости 6 раз, второму не менее двух шестерок при 12 бросаниях, а третьему — не менее трех шестерок при 18 бросаниях. Задача была решена Ньютоном и Толлетом, показавшими, что первый человек имеет больше шансов, чем второй, а второй больше, чем третий. Получить этот результат.

1.8 Локальная и интегральная теоремы Муавра — Лапласа. Формула Пуассона

В тех случаях, когда использование формулы Бернулли затруднено из-за большого значения n , можно использовать приближенное равенство из следующей теоремы.

Локальная теорема Муавра — Лапласа. Пусть вероятность наступления события A в n независимых испытаниях постоянна и равна p ($0 < p < 1$). Тогда вероятность $P_n(k)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно k раз, можно приближенно найти по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$$

Имеются таблицы значений функции $\varphi(x)$ (см. приложение, табл. 3) для положительных значений аргумента x (функция $\varphi(x)$ — четная). При $x > 4$ можно считать, что $\varphi(x) \approx 0$.

Отметим, что при $p < 0,1$ и $p > 0,9$ приближенное равенство в теореме может дать значительную ошибку (приближение тем лучше, чем больше $\sqrt{npq}$). Поэтому при малых (и больших) p часто используют другие формулы, в частности, *формулу Пуассона*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda = np.$$

Имеются таблицы для вычисления при различных λ и k (см. приложение, табл. 1). Формулу Пуассона используют при $p \leq 0,1$ и $p \geq 0,9$. Если $p \geq 0,9$, пуассоновское приближение используют для нахождения числа неудач.

Интегральная теорема Муавра — Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, может быть найдена по формуле

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi_{0,1}(x_2) - \Phi_{0,1}(x_1),$$

где функция

$$\Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

есть функция стандартного нормального распределения, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi_{0,1}(x)$ также табулирована (см. приложение, табл. 4). Заметим, что $\Phi_{0,1}(-x) = 1 - \Phi_{0,1}(x)$. Для значений $x > 5$ полагают $\Phi_{0,1}(x) \approx 1$.

Задачи.

8.1. Вероятность появления события А в каждом из 625 испытаний равна 0,64. Найти вероятность того, что событие А в этих испытаниях появится ровно 415 раз.

Решение. Так как $n = 625$ достаточно велико, применяем локальную теорему Муавра – Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$$

По условию задачи, $n = 625$, $k = 415$, $p = 0,64$, $q = 0,36$. Имеем $x = \frac{415 - 625 \cdot 0,64}{\sqrt{625 \cdot 0,64 \cdot 0,36}} = 1,25$. По таблице 3 находим, что $\varphi(1,25) \approx 0,1826$. Отсюда

$$P_{625}(415) \approx \frac{1}{\sqrt{625 \cdot 0,64 \cdot 0,36}} \cdot 0,1826 \approx 0,015.$$

8.2. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

Решение. Так как вероятность $p = 0,004$ очень мала, применение формулы из локальной теоремы Муавра – Лапласа приведет к значительному отклонению от точного значения $P_n(k)$. Применяем формулу Пуассона: $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$. По условию задачи $n = 1000$, $k = 5$, $p = 0,004$. Тогда, $\lambda = 1000 \cdot 0,004 = 4$. Следовательно, $P_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0,1562$.

8.3. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз и не более 90 раз.

Решение. Воспользуемся формулой из интегральной теоремы Муавра – Лапласа: $P_n(k_1; k_2) \approx \Phi_{0,1}(x_2) - \Phi_{0,1}(x_1)$, где $\Phi_{0,1}(x)$ – функция стандартного нормального распределения, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. По условию задачи $n = 100$,

$k_1 = 75$, $k_2 = 90$, $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$. Имеем, $x_1 = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25$,

$x_2 = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,25$. Так как $\Phi_{0,1}(-x) = 1 - \Phi_{0,1}(x)$, то $P_{100}(75; 90) \approx$

$\Phi_{0,1}(2, 25) - \Phi_{0,1}(-1, 25) = \Phi_{0,1}(2, 25) - 1 + \Phi_{0,1}(1, 25) \approx 0,9938 - 1 + 0,8944 = 0,8882$ (см. приложение, табл. 4).

8.4. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 24200 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

8.5. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз.

8.6. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не более 1469 раз.

8.7. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

8.8. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

8.9. Среди семян ржи 0,04% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

8.10. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (один из видов брака) равна 0,02. Сверла укладывают в коробки по 100 штук. Какова вероятность того, что число сверл с указанным дефектом в коробке не превысит двух?

8.11. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,002. Проверяется книга, содержащая 500 страниц. Какова вероятность того, что от трех до пяти страниц содержат опечатки?

8.12. Вероятность того, что при перевозке бутылка разобьется, равна 0,003. Какова вероятность того, что после перевозки 1000 бутылок в партии окажется хотя бы одна битая бутылка?

Глава 2

Случайные величины

2.1 Случайные величины с дискретным распределением. Числовые характеристики случайных величин с дискретным распределением

2.1.1 Случайная величина и ее функция распределения

Определение. Случайной величиной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ называется любая числовая функция от элементарного исхода $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $X = X(\omega)$, такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ множество $(\omega \in \Omega : X(\omega) < x) \in \mathcal{F}$ является событием.

Примеры случайных величин — число выпавших очков при бросании игральной кости, время ожидания автобуса на остановке, средняя температура воздуха за сутки.

Определение. Функцией распределения случайной величины X называется функция $y = F_X(x) = F(x)$, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая соотношением

$$F_X(x) = \mathbf{P}(\omega : X(\omega) < x) = \mathbf{P}(X < x).$$

Функция распределения случайной величины обладает свойствами:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.
2. $F(x)$ нестрого монотонно возрастает на всей числовой оси.
3. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
4. $F(x)$ непрерывна слева в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, т. е., $\lim_{t \rightarrow x-0} F(t) = F(x)$ и имеет конечный предел справа $\lim_{t \rightarrow x+0} F(t) = F(x+0)$ в каждой точке x .
5. Для любых $a < b$ вероятность попадания случайно величины X в полуинтервал $[a, b)$ равна

$$\mathbf{P}(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

6. Для любого $a \in \mathbb{R}$ вероятность того, что случайная величина X принимает значение a , равна величине скачка функции распределения в точке a :

$$\mathbf{P}(X = a) = F(a+0) - F(a).$$

Выделяют два основных типа распределений случайных величин: дискретные и абсолютно непрерывные распределения.

2.1.2 Случайные величины с дискретным распределением

Бесконечное множество называется счетным, если его можно занумеровать числами натурального ряда, т. е., оно имеет вид $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Примерами счетных множеств являются множество четных натуральных чисел $\{2, 4, 6, \dots\}$, множество целых чисел, множество рациональных чисел и т. д.. Пример несчетного бесконечного множества — любой отрезок $[a, b]$ или интервал (a, b) .

Определение. Говорят, что случайная величина X имеет дискретное распределение, если она с вероятностью 1 принимает конечное или счетное множество значений, т. е. существует конечное или счетное множество $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ такое, что $p_i = \mathbf{P}(X = x_i) > 0$ и $\sum_i p_i = 1$.

Таблицей распределения, или рядом распределения, случайной величины X с дискретным распределением называется таблица, в которой приведены значения, принимаемые случайной величиной X , и соответствующие им вероятности.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
$\mathbf{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$

Если случайная величина X имеет дискретное распределение, то вероятность ее попадания в множество $A \subset \mathbb{R}$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{i: x_i \in A} p_i.$$

В частности, функция распределения случайной величины X с дискретным распределением

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x) = \sum_{i: x_i < x} p_i.$$

Если значения случайной величины упорядочены по возрастанию: $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$, то функция распределения имеет ступенчатый вид, т. е., функция постоянна на каждом из промежутков $(x_{i-1}, x_i]$ и имеет в каждой из точек x_i разрыв первого рода (скачок), равный вероятности $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.

В частности, если множество значений случайной величины X конечно, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3; \\ \dots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, & x > x_n. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 2.1.

2.1.3 Числовые характеристики случайных величин с дискретным распределением

Определение. Математическим ожиданием (средним значением) случайной величины X с дискретным распределением, принимающей значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ соответственно, называется число

$$\mathbf{E}X = \sum_i x_i p_i.$$

Если случайная величина $Y = \varphi(X)$ есть функция от случайной величины X , то ее математическое ожидание находится по формуле

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\varphi(X) = \sum_i \varphi(x_i) p_i.$$

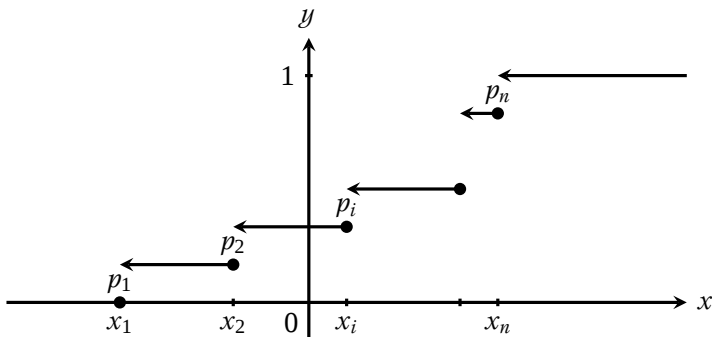


Рис. 2.1. График функции распределения $y = F_X(x)$

Определение. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$\mathbf{E}X^k = \sum_i x_i^k p_i.$$

Определение. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^k = \sum_i (x_i - \mathbf{E}X)^k p_i.$$

Число $\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^k$ называется абсолютным центральным моментом порядка k случайной величины X .

Определение. Дисперсией случайной величины X называется ее центральный момент второго порядка:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \sum_i (x_i - \mathbf{E}X)^2 p_i.$$

Дисперсия характеризует среднее отклонение (точнее – квадрат отклонения) случайной величины от ее математического ожидания. Чаще для ее вычисления используется формула

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbf{E}X)^2.$$

Определение. Случайные величины X и Y называются независимыми, если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ события $(X < x)$ и $(Y < y)$ независимы.

Основные свойства математического ожидания:

1. Если случайная величина постоянна: $X = C$ с вероятностью 1, то $EX = EC = C$.

2. Для любых случайных величин X и Y

$$E(X + Y) = EX + EY.$$

3. Для любой случайной величины X и любого числа $C \in \mathbb{R}$

$$E(CX) = CEX.$$

4. Если $X \geq 0$ с вероятностью 1, то $EX \geq 0$. При этом $EX = 0$ равносильно $P(X = 0) = 1$.

5. Если случайные величины X и Y независимы, то $E(XY) = EXEY$.

Основные свойства дисперсии:

1. $DX \geq 0$, и может быть равна 0 только в том случае, когда случайная величина постоянна с вероятностью 1, т. е. $P(X = C) = 1$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Для любой случайной величины X и любого числа $C \in \mathbb{R}$

$$D(CX) = C^2 DX.$$

3. Для любой случайной величины X и любого числа $C \in \mathbb{R}$

$$D(X + C) = DX.$$

4. Если случайные величины X и Y независимы, то

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

2.1.4 Примеры случайных величин с дискретным распределением

1. Распределение Бернулли $\mathcal{B}(p)$.

Определение. Случайная величина X имеет распределение Бернулли ($X \in \mathcal{B}(p)$) с параметром $0 < p < 1$, если она принимает два значения: $X = 1$ с вероятностью p или $X = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$.

Распределение Бернулли имеет случайная величина, равная числу «успехов» при одном испытании Бернулли.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Бернулли, равно $\mathbf{E}X = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$, дисперсия $\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

2. Биномиальное распределение $\mathcal{B}i(n, p)$.

Определение. Случайная величина X имеет биномиальное распределение ($X \in \mathcal{B}i(n, p)$) с параметрами $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}$, если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностями, вычисляемыми по формулам Бернулли:

$$\mathbf{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Биномиальное распределение имеет случайная величина, равная числу «успехов» при n испытаниях Бернулли с вероятностью «успеха», равной p .

Так как биномиальное распределение $\mathcal{B}i(n, p)$ имеет сумма независимых случайных величин $X = X_1 + \dots + X_n$, каждая из которых имеет распределение Бернулли $\mathcal{B}(p)$, то по свойствам математического ожидания и дисперсии $\mathbf{E}X = \mathbf{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{E}X_1 + \dots + \mathbf{E}X_n = np$ и $\mathbf{D}X = np(1 - p)$.

3. Геометрическое распределение $G(p)$

Определение. Случайная величина X имеет геометрическое распределение ($X \in G(p)$) с параметром $0 < p < 1$, если она принимает значения $k = 1, 2, 3, \dots$ с вероятностями $\mathbf{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$.

Предположим, что испытания Бернулли проводятся до первого «успеха». Тогда случайная величина, равная количеству проведенных испытаний, имеет геометрическое распределение. Проверим, что сумма вероятностей $\sum_k p_k = 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1.$$

Распределение получило свое название из-за того, что вероятности p_k образуют геометрическую прогрессию.

Для нахождения математического ожидания и дисперсии используем формулы для сумм рядов $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}$. Получим

$$\mathbf{EX} = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p},$$

и аналогично

$$\mathbf{DX} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} p - (\mathbf{EX})^2 = \frac{p(2-p)}{p^3} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

4. Распределение Пуассона $\Pi(\lambda)$

Определение. Случайная величина имеет распределение Пуассона ($X \in \Pi(\lambda)$) с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения $k = 0, 1, 2, \dots$ с вероятностями $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$.

Математическое ожидание

$$\mathbf{EX} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} = \lambda,$$

и аналогично $\mathbf{DX} = \lambda$.

Задачи.

9.1. В корзине 4 яблока и 6 апельсинов. Случайным образом из нее выбирается 3 фрукта. Обозначим через X случайную величину, равную количеству яблок среди выбранных фруктов. Найти:

- 1) ряд распределения и функцию распределения случайной величины X ;
- 2) математическое ожидание $\mathbf{EX}$;
- 3) дисперсию $\mathbf{DX}$;
- 4) вероятность события $\{X > 1\}$;
- 5) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $4X + 3$.

Решение. 1) Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями $P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$ (выбрано 0 яблок из 4, 3 апельсина из 6),

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2} \text{ (1 яблоко из 4, 2 апельсина из 6), } P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$$

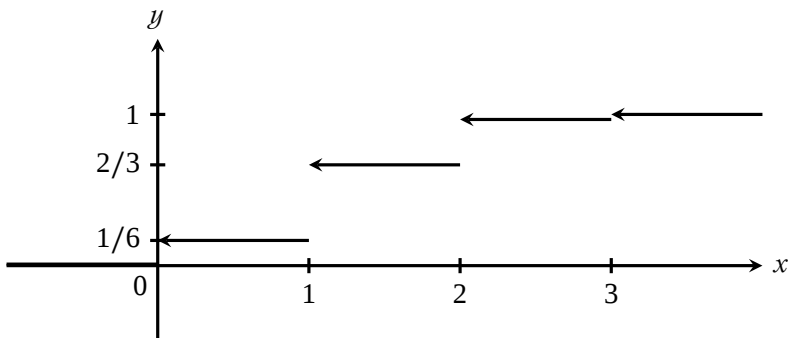


Рис. 2.2. График функции распределения $y = F_X(x)$

(2 яблока из 4, 1 апельсин из 6), $\mathbf{P}(X = 3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$ (3 яблока из 4, 0 апельсинов из 6). Запишем ряд распределения случайной величины X :

X	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

и функцию распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{6}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{2}{3}, & 1 < x \leq 2; \\ \frac{29}{30}, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения изображен на рис. 2.2.

2) Математическое ожидание $\mathbf{E}X = 0 + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = 1,2$.

3) Дисперсия $\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = 0 + 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{1}{30} - (1,2)^2 = 0,56$.

4) Вероятность $\mathbf{P}(X > 1) = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3}$.

5) Применяя свойства математического ожидания и дисперсии, найдем математическое ожидание $\mathbf{E}(4X + 3) = 4\mathbf{E}X + \mathbf{E}(3) = 4 \cdot 1,2 + 3 = 7,8$ и дисперсию $\mathbf{D}(4X + 3) = \mathbf{D}(4X) = 16\mathbf{D}X = 16 \cdot 0,56 = 8,96$.

9.2. Игральную кость подбрасывают 4 раза. Случайная величина X — количество выпадений «шестерки». Найти:

- 1) ряд распределения и функцию распределения случайной величины X ;
- 2) математическое ожидание EX и дисперсию DX ;
- 3) вероятность события $\{X \geq 1\}$.

Решение. 1) Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 1/6$. Она принимает значения 0, 1, 2, 3, 4 с вероятностями, вычисляемыми по формулам Бернулли:

$$P(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296},$$

$$P(X = 1) = C_4^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296},$$

$$P(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{150}{1296},$$

$$P(X = 3) = C_4^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{20}{1296},$$

$$P(X = 4) = C_4^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{1296}.$$

Запишем ряд распределения случайной величины X

X	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{500}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$

и ее функцию распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{625}{1296}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{1125}{1296}, & 1 < x \leq 2; \\ \frac{1296}{1296}, & 2 < x \leq 3; \\ \frac{1296}{1295}, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$$2) \text{ Математическое ожидание } EX = np = \frac{2}{3}, \text{ дисперсия } DX = np(1-p) = \frac{10}{18}.$$

$$3) \text{ Вероятность } P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{671}{1296}.$$

9.3. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биномиальный закон распределения случайной величины X — числа нестандартных деталей среди четырех отобранных, построить график функции распределения, найти EX , DX и вероятность $P(X \leq 2)$.

9.4. Написать биномиальный закон распределения случайной величины X — числа появлений «герба» при двух бросаниях монеты. Построить график функции распределения, найти EX , DX и вероятность $P(X < 2)$.

9.5. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать биномиальный закон распределения случайной величины X — числа выпадений четного числа очков на обеих игровых костях. Построить график функции распределения, найти EX , DX и вероятность $P(X < 2)$.

9.6. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобрано три детали. Составить закон распределения случайной величины X — числа стандартных деталей среди отобранных. Построить график функции распределения, найти EX , DX и вероятность $P(X \leq 2)$.

9.7. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется: а) составить закон распределения случайной величины X — числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту; б) найти наименьшее число k_0 заданных студенту дополнительных вопросов.

9.8. Вероятность попадания баскетбольного мяча в кольцо при бросании начинающим спортсменом равна $1/4$. Мяч бросают до первого попадания, но дают не более 2 попыток. Найти ряд распределения случайной величины X — числа промахов. Построить график функции распределения, найти EX и DX .

9.9. По мишени одновременно стреляют 2 стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,3 и 0,6. Найти ряд распределения случайной величины X — числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения, найти EX и DX .

9.10. Вероятность попадания в мишень равна 0,6 при каждом выстреле. Стрельба ведется одиночными выстрелами до первого попадания, пока не будет израсходован боезапас. Найти ряд распределения случайной величины X — числа произведенных выстрелов, если боезапас составляет 2 единицы. Построить график функ-

ции распределения, найти EX и DX .

9.11. Вероятность отказа сервера при каждом из независимых подключений с помощью модема равна $0,3$. Попытки подключения производятся до установления связи. Найти ряд распределения случайной величины X — числа произведенных попыток подключения, если число попыток ограничено двумя. Построить график функции распределения, найти EX и DX .

9.12. Имеется шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

9.13. В урне находятся шары, различимые только по цвету: 3 белых и 2 черных шара. По схеме случайного выбора без возвращения извлекаются 2 шара. Написать гипергеометрический закон распределения случайной величины X — числа вынутых черных шаров. Найти EX и DX .

9.14. В трех урнах находятся шары, различимые только по цвету. В первой урне 1 белый и 3 черных; во второй урне 2 белых и 2 черных, в третьей урне 2 белых и 3 черных. Из каждой урны наудачу извлекается по одному шару. Найти закон распределения случайной величины X — числа вынутых белых шаров. Найти вероятность $P(X \leq 1)$.

9.15. В связке 7 ключей, из которых 2 подходят к замку. Последовательно перебирая ключи, пытаются открыть замок. Каждый ключ выбирается случайным образом и используется один раз. Найти закон распределения случайной величины X — числа попыток открыть замок и вероятность $P(X \leq 2)$.

9.16. Вероятность выхода из строя прибора при проведении испытания равна $p = 0,0004$. Испытанию подверглись 10000 приборов, работающих независимо друг от друга. Написать закон Пуассона, аппроксимирующий биномиальный закон распределения случайной величины X — числа вышедших из строя приборов. Используя распределение Пуассона, найти вероятность $P(1 \leq X \leq 2)$.

9.17. В телевикторине игроку последовательно задаются вопросы до первого неправильного ответа. На каждый вопрос игроку предлагается четыре возможных ответа, среди которых только один правильный. Написать закон распределения случайной величины X — числа заданных игроку вопросов, в предположении, что он отвечает на вопросы простым угадыванием и что максимальное число задаваемых в игре вопросов равно 15. Найти k_* — наиболее вероятное число заданных игроку

вопросов.

9.18. Из урны, содержащей пять белых и три черных шара, последовательно вынимают шары, причем операция извлечения продолжается до появления белого шара. Составить ряд распределения числа извлеченных черных шаров и вычислить математическое ожидание и дисперсию, если известно, что: а) вынутые шары в урну не возвращаются; б) вынутые шары возвращаются в урну.

9.19. Игральную кость бросают $n = 4$ раза. Найти ряд распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию: а) числа выпадений шестерки; б) разности чисел выпадения шестерки и тройки.

9.20. Монету бросают до появления двух гербов. Найти ряд распределения и функцию распределения числа проведенных бросаний.

9.21. Задан ряд распределения случайной величины X . Найти условную вероятность.

$$1) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline x_i & -3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathbf{P}(X = x_i) & 0,15 & 0,32 & 0,18 & 0,16 & 0,16 & 0,03 \\ \hline \end{array},$$

$\mathbf{P}(X < 2 | X \geq -1)$.

$$2) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline x_i & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \mathbf{P}(X = x_i) & 0,16 & 0,2 & 0,06 & 0,28 & 0,18 & 0,12 \\ \hline \end{array},$$

$\mathbf{P}(X > -1 | X < 1)$.

9.22. Случайная величина X с дискретным распределением принимает только два значения x_1 и x_2 , причем $x_1 < x_2$. Известно, что $\mathbf{P}(X = x_2) = 0,2$, $\mathbf{E}X = 3,6$, $\mathbf{D}X = 1,44$. Найти закон распределения случайной величины X .

9.23. Заданы ряды распределения случайных величин X_1 и X_2 :

x_i	-2	0	1
$\mathbf{P}(X_1 = x_i)$	0,4	0,3	0,3

,

t_j	-1	0	1
$\mathbf{P}(X_2 = t_j)$	0,3	0,3	0,4

.

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 5X_1 - 3X_2$. Что можно сказать о дисперсии случайной величины Y ?

9.24. Заданы ряды распределения независимых случайных величин X_1 и X_2 :

x_i	-1	1	2
$\mathbf{P}(X_1 = x_i)$	0,4	0,1	0,5

,

t_j	-2	-1	0
$\mathbf{P}(X_2 = t_j)$	0,2	0,3	0,5

.

Найти математическое ожидание случайной величины $Y_1 = X_1 \cdot X_2$ и дисперсию случайной величины $Y_2 = -2X_1 - 5X_2$.

9.25. Случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	-1	0	1
$P(X = x_i)$	1/3	1/3	1/3

Построить ряды распределения следующих случайных величин: а) $2X + 5$; б) $X^2 + 1$; в) $|X|$; г) 2^X ; д) $\min(X, 1)$; е) $1/(3 - X)$.

9.26. Случайная величина X распределена по закону:

1)	x_i	-3	3	5	6
	$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,1	0,2

2)	x_i	-7	-5	-3	5
	$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти законы распределения случайных величин $Y_1 = 5X + 2$, $Y_2 = 3 - 2X^2$, $Y_3 = 3|X| - 4$. Нарисовать графики функций распределения случайных величин Y_2 и Y_3 .

9.27. Законы распределения независимых случайных величин X и Y заданы в таблицах. Найти ряд распределения случайной величины Z :

1)	x_i	-1	0	1
	$P(X = x_i)$	0,5	0,1	0,4

,

y_j	-2	-1	1
$P(Y = y_j)$	0,1	0,7	0,2

 $Z = X + Y$.

2)	x_i	-2	-1	2
	$P(X = x_i)$	0,4	0,4	0,2

,

y_j	-1	1	2
$P(Y = y_j)$	0,4	0,4	0,2

 $Z = X - Y$.

9.28. Законы распределения независимых случайных величин X и Y заданы в таблицах. Найти ряд распределения случайной величины $Z = X \cdot Y$:

1)	x_i	-1	1	2
	$P(X = x_i)$	0,3	0,4	0,3

,

y_j	-2	-1	0
$P(Y = y_j)$	0,1	0,2	0,7

2)	x_i	-2	0	1
	$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

,

y_j	-2	0	2
$P(Y = y_j)$	0,3	0,6	0,1

2.2 Случайные величины с абсолютно непрерывным распределением. Числовые характеристики случайных величин с абсолютно непрерывным распределением

2.2.1 Функция и плотность распределения случайной величины с абсолютно непрерывным распределением

Определение. Говорят, что случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение, если ее функция распределения представляется в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

где $f(x) = f_X(x)$ — неотрицательная, интегрируемая на всей числовой оси функция, которая называется плотностью распределения случайной величины X .

Плотность и функция распределения случайной величины с абсолютно непрерывным распределением обладают следующими свойствами:

1. $f(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$;

3. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}$

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx,$$

если интеграл в правой части определен.

4. Функция распределения $F(x)$ непрерывна во всех точках $x \in \mathbb{R}$ и дифференцируема во всех точках непрерывности плотности $f(x)$, причем во всех таких точках

$$F'(x) = f(x).$$

5. $P(X = a) = 0$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

6. Для любых $a < b$

$$\mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

2.2.2 Числовые характеристики случайных величин с абсолютно непрерывным распределением

Определение. Математическим ожиданием случайной величины X с абсолютно непрерывным распределением с плотностью $f(x)$ называется число

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Если случайная величина $Y = \varphi(X)$ есть функция от случайной величины X , то ее математическое ожидание находится по формуле

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\varphi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

Определение. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$\mathbf{E}X^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Определение. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}x)^k f(x) dx.$$

Число $\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^k$ называется абсолютным центральным моментом порядка k случайной величины X .

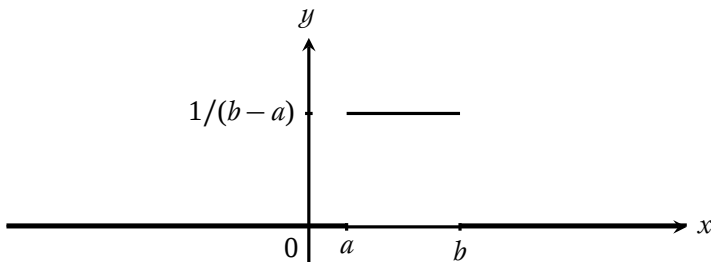


Рис. 2.3. Плотность $f(x)$ распределения $X \in \mathcal{U}[a, b]$

Определение. Дисперсией случайной величины X называется ее центральный момент второго порядка:

$$DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx.$$

Чаще для ее вычисления используется формула

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (EX)^2.$$

Основные свойства математического ожидания и дисперсии — точно такие же, как свойства этих характеристик в дискретном случае.

2.2.3 Примеры случайных величин с абсолютно непрерывным распределением

1. Равномерное распределение $\mathcal{U}[a, b]$ на отрезке $[a, b]$

Определение. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ (обозначаем $X \in \mathcal{U}[a, b]$), если ее плотность распределения имеет вид (рис. 2.3)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in (a, b); \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

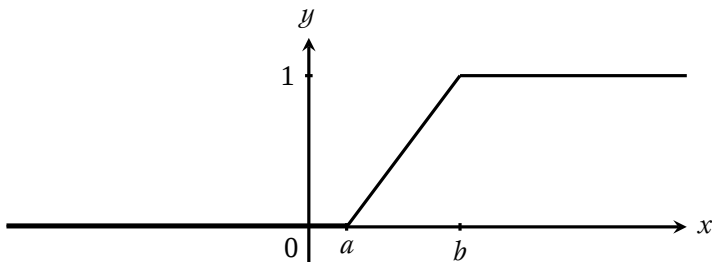


Рис. 2.4. Функция $F(x)$ распределения $X \in \mathcal{U}[a, b]$

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины имеет вид (рис. 2.4)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b; \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

В самом деле, для $x \leq a$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \, dt = 0,$$

для $a < x \leq b$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 \, dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} \, dt = \frac{x-a}{b-a},$$

а для $x > b$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 \, dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} \, dt + \int_b^x 0 \, dt = 0 + \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1.$$

Математическое ожидание случайной величины X :

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{a+b}{2},$$

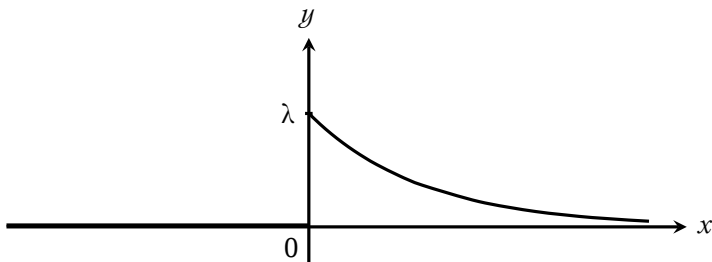


Рис. 2.5. Плотность $f(x)$ распределения $X \in \mathcal{E}(\lambda)$

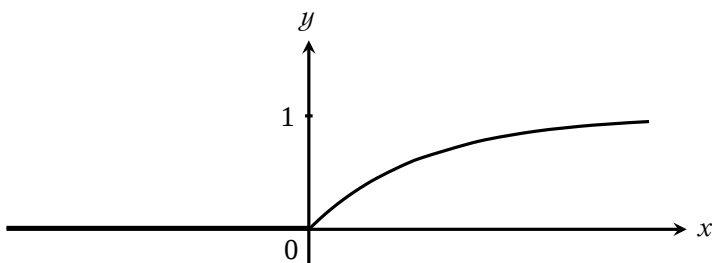


Рис. 2.6. Функция $F(x)$ распределения $X \in \mathcal{E}(\lambda)$

а дисперсия:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (\mathbf{E}X)^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

2. Показательное (экспоненциальное) распределение $\mathcal{E}(\lambda)$

Определение. Случайная величина X имеет показательное распределение ($X \in \mathcal{E}(\lambda)$) с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения имеет вид (рис. 2.5)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

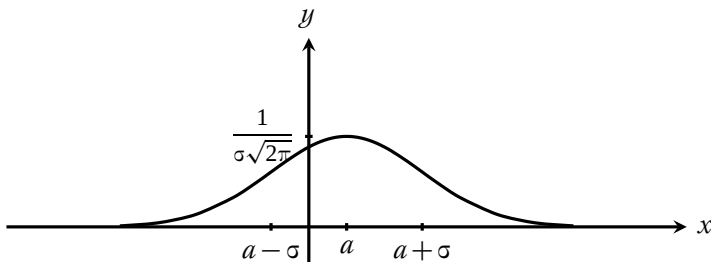


Рис. 2.7. Плотность $f(x)$ распределения $X \in \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Показательное распределение моделирует законы распределения таких величин, как время ожидания в очереди в системе массового обслуживания, время безотказной работы электрических приборов и т.д.

Функция распределения случайной величины X имеет вид (рис. 2.6)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$\mathbf{E}X = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

а дисперсия:

$$\mathbf{D}X = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Нормальное распределение $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Определение. Случайная величина X имеет нормальное (гауссовское) распределение ($X \in \mathcal{N}(a, \sigma^2)$) с параметрами a и $\sigma^2 > 0$, если ее плотность распределения имеет вид (рис. 2.7)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то такое распределение называется стандартным нормальным распределением.

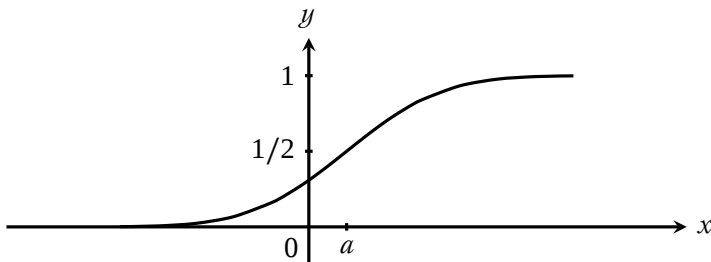


Рис. 2.8. Функция $F(x)$ распределения $X \in \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Нормальное распределение моделирует закон распределения величины ошибок при измерениях. Вообще, сумма большого числа независимых случайных величин с одинаковым законом распределения приближенно имеет нормальное распределение. Это объясняет интерес математической статистики к нормальному закону распределения.

Функция распределения нормально распределенной случайной величины (рис. 2.8) записывается с помощью интеграла, который не выражается через элементарные функции:

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi_{0,1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где

$$\Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

есть функция стандартного нормального распределения (мы сделали в интеграле замену переменных $\frac{t-a}{\sigma} = u$). Значения этой функции для различных значений x можно найти в таблицах. Часто в таблице приведены значения другой функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

связанной с функцией $\Phi_{0,1}(x)$ равенством $\Phi_{0,1}(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2}$. Для отрицательных значений аргумента используем равенство $\Phi_{0,1}(-x) = 1 - \Phi_{0,1}(x)$.

Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $\mathbf{E}X = a$, а дисперсия $\mathbf{D}X = \sigma^2$.

Если случайная величина $X \in \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то случайная величина $Y = \frac{X-a}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. Таким образом, задачу о нормально распределенной случайной величине можно всегда свести к рассмотрению стандартного нормального распределения.

2.2.4 Функции от случайных величин с абсолютно непрерывным распределением

Пусть случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_X(x)$ и функцией распределения $F_X(x)$, и случайная величина Y связана с X зависимостью $Y = \varphi(X)$, где $y = \varphi(x)$ — непрерывная функция. Требуется найти плотность распределения $f_Y(y)$ и функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y .

В общем случае

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(\varphi(X) < y) = \int_{\{x: \varphi(x) < y\}} f_X(x) dx.$$

Если $\varphi(x)$ строго монотонно возрастает, то она имеет обратную функцию $\psi(y) = \varphi^{-1}(y)$, также монотонно возрастающую. Тогда

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(\varphi(X) < y) = \mathbf{P}(X < \psi(y)) = F_X(\psi(y)).$$

Дифференцируя это равенство, получим формулу для плотностей:

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y)) \psi'(y).$$

В общем случае, формула примет вид

$$f_Y(y) = \sum_i f_X(\psi_i(y)) |\psi_i'(y)|,$$

где суммирование идёт по всем обратным функциям $\psi_i(y)$ к функции $\varphi(x)$.

Задачи.

10.1. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{x}}, & x \in (1, 4); \\ 0, & x \notin [1, 4]. \end{cases}$$

Найти:

- 1) постоянную A ;
- 2) функцию распределения $F_X(x)$;
- 3) математическое ожидание EX ;
- 4) дисперсию DX ;
- 5) вероятность события $\left(X \in \left[\frac{9}{4}; 5\right]\right)$.

Решение. 1) Постоянную A найдем из условия $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$:

$$1 = \int_1^4 \frac{A}{\sqrt{x}} dx = 2A\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2A,$$

т. е. $A = \frac{1}{2}$.

2) Так как $1 \leq X \leq 4$ с вероятностью 1, то $F_X(x) = 0$ для всех $x \leq 1$ и $F_X(x) = 1$ для всех $x > 4$. Для случая $x \in (1, 4]$ имеем

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \sqrt{t}\Big|_1^x = \sqrt{x} - 1.$$

Таким образом,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \sqrt{x} - 1, & 1 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

3) Математическое ожидание

$$EX = \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} x dx = \int_1^4 \frac{1}{2} \sqrt{x} dx = \frac{1}{3} \sqrt{x^3}\Big|_1^4 = \frac{7}{3}.$$

4) Найдем дисперсию DX . Имеем:

$$EX^2 = \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} x^2 dx = \int_1^4 \frac{1}{2} \sqrt{x^3} dx = \frac{1}{5} \sqrt{x^5}\Big|_1^4 = \frac{31}{5},$$

$$\text{и } DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{31}{5} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{34}{45}.$$

5) Так как величина X имеет абсолютно непрерывное распределение, то

$$\mathbf{P}\left(\frac{9}{4} \leq X \leq 5\right) = \mathbf{P}\left(\frac{9}{4} \leq X < 5\right) = F_X(5) - F_X\left(\frac{9}{4}\right) = 1 - \left(\sqrt{\frac{9}{4}} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Можно найти вероятность этого события через интеграл от плотности:

$$\mathbf{P}\left(\frac{9}{4} \leq X \leq 5\right) = \int_{\frac{9}{4}}^5 f_X(x) dx = \int_{\frac{9}{4}}^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \Big|_{\frac{9}{4}}^4 = \frac{1}{2}.$$

10.2. Найти плотность распределения случайной величины $Y = -\ln X$, если случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Решение. Функция $y = -\ln x$ монотонно убывает и имеет обратную функцию $x = e^{-y}$. Так как случайная величина X принимает значения на отрезке $[0, 1]$, то случайная величина $Y = -\ln X$ принимает значения на $[0, \infty)$. Следовательно, $f_Y(y) = 0$ при $y \leq 0$. Рассмотрим случай $y > 0$:

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(-\ln X < y) = \mathbf{P}(X > e^{-y}) = 1 - F_X(e^{-y}).$$

Дифференцируя, получим:

$$f_Y(y) = f_X(e^{-y}) e^{-y} = 3(e^{-y})^2 e^{-y} = 3e^{-3y}, y > 0.$$

Таким образом, Y имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 3$.

10.3. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$, если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, т. е.,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Решение. Функция $y = x^2$ монотонно убывает при $x \leq 0$ и возрастает при $x \geq 0$. Она имеет две обратных функции: $x = \sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$. Случайная величина $Y = X^2$ принимает значения на $[0, \infty)$. Следовательно, $f_Y(y) = 0$ при $y \leq 0$. Рассмотрим случай $y > 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(X^2 < y) = \mathbf{P}(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \Phi_{0,1}(\sqrt{y}) - \Phi_{0,1}(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Дифференцируя, получим:

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, y > 0.$$

10.4. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \cos X$, если случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Решение. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{если } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; \\ 0, & \text{если } x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Функция $y = \cos x$ монотонно возрастает на $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ и монотонно убывает на $[0, \frac{\pi}{2}]$. Она имеет две обратные функции: $x = \pm \arccos y$. Так как случайная величина X принимает значения на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, то случайная величина $Y = \cos X$ принимает значения на $[0, 1]$, т. е., $f_Y(y) = 0$ при $y \notin [0, 1]$. Рассмотрим случай $y \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(\cos X < y) = \mathbf{P}(X < -\arccos y) + \mathbf{P}(X > \arccos y) = \\ &= F_X(-\arccos y) + 1 - F_X(\arccos y). \end{aligned}$$

Дифференцируя, получим:

$$f_Y(y) = f_X(-\arccos y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - f_X(\arccos y) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Таким образом,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & \text{если } y \in [0, 1]; \\ 0, & \text{если } y \notin [0, 1]. \end{cases}$$

10.5. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = 1/2 + (\arctg x)/\pi$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0, 1)$.

10.6. Функция распределения случайной величины X (времени безотказной работы некоторого устройства) равна $F(x) = 1 - e^{-x/T}$ ($x \geq 0$). Найти вероятность безотказной работы устройства за время $x \geq T$.

10.7. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу $(0, 25, 0, 75)$.

10.8. Дана функций распределения случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \sin 2x & \text{при } 0 < x \leq \pi/4, \\ 1 & \text{при } x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

10.9. Случайная величина X в интервале $(0, \infty)$ задана плотностью распределения $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ ($\alpha > 0$); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1, 2)$.

10.10. Плотность распределения случайной величины X в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ равна $f(x) = (2/\pi) \cos^2 x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях X примет ровно два раза значение, принадлежащее интервалу $(0, \pi/4)$.

10.11. Задана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

10.12. Плотность распределения случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x) = 2C / (1 + x^2)$. Найти постоянный параметр C .

10.13. Плотность распределения случайной величины X в интервале $(0, \pi/2)$ равна $f(x) = C \sin 2x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр C .

10.14. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = x/2$ в интервале $(0; 2)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X .

10.15. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = C(x^2 + 2x)$ в интервале $(0; 1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти: а) параметр C ; б) математическое ожидание величины X .

10.16. Случайная величина X , возможные значения которой неотрицательны, задана функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ($\alpha > 0$). Найти математическое ожидание величины X .

10.17. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \cos x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = \varphi(X) = X^2$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

10.18. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = x + 0,5$ в интервале $(0, 1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X^3$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

10.19. Случайная величина X в интервале $(2, 4)$ задана плотностью распределения $f(x) = -(3/4)x^2 + (9/2)x - 6$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X .

10.20. Случайная величина X в интервале $(-3, 3)$ задана плотностью распределения $f(x) = 1/(\pi\sqrt{9-x^2})$; вне этого интервала $f(x) = 0$. а) Найти дисперсию X ; б) что вероятнее: в результате испытания окажется $X < 1$ или $X > 1$?

10.21. Случайная величина X в интервале $(0, \pi)$ задана плотностью распределения $f(x) = (1/2)\sin x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию X .

10.22. Случайная величина X в интервале $(0, 5)$ задана плотностью распределения $f(x) = (2/25)x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию X .

10.23. Закон Рэлея с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} Axe^{-x^2/2} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

в ряде случаев описывает распределение срока службы электронной аппаратуры. Найти коэффициент A , функцию распределения и вероятность того, что случайная величина, распределенная по закону Рэлея, примет значение, большее 1.

10.24. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} A \cos 4x & \text{при } x \in [0; \pi/8]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \pi/8]. \end{cases}$$

Найти коэффициент A и функцию распределения. Построить графики плотности распределения и функции распределения.

10.25. Непрерывная функция распределения случайной величины X задана выражением

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ At^3 & \text{при } 0 < t \leq 2, \\ 1 & \text{при } t > 2. \end{cases}$$

Найти коэффициент A , плотность распределения, а также $\mathbf{P}(0 < X < 1)$. Построить графики функции распределения и плотности распределения.

10.26. Можно ли подобрать постоянную C так, чтобы функция Cx^{-4} была плотностью распределения на множестве: а) $[1, \infty)$; б) $[0, \infty)$; в) $[-2, -1]$; г) $[-3, 0]$?

10.27. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx^3, & x \in (-3, 0); \\ 0, & x \notin (-3, 0). \end{cases}$$

Найти постоянную C , вероятность $\mathbf{P}(X \geq -2)$, математическое ожидание $\mathbf{E}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$.

10.28. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} C \cos 2x, & x \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right); \\ 0, & x \notin \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Найти постоянную C , вероятность $\mathbf{P}\left(\frac{\pi}{8} < X < \frac{\pi}{4}\right)$ и математическое ожидание $\mathbf{E}X$.

10.29. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 5]$. Нарисовать график функции распределения случайной величины X и найти вероятность $\mathbf{P}(-3 < X < 8)$, математическое ожидание $\mathbf{E}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$.

10.30. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 2]$. Нарисовать график плотности распределения случайной величины X и найти вероятность $\mathbf{P}(1 < X < 5)$, математическое ожидание $\mathbf{E}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$.

10.31. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}, x \in \mathbf{R}.$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y = -5X + 2$ и приближенное значение вероятности $\mathbf{P}(-17 < Y < -12)$.

10.32. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = -2$ и $\sigma = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = -2X + 5$ и приближенное значение вероятности $\mathbf{P}(4 < Y < 7)$.

10.33. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 10. Показания прибора округляются до ближайшего деления. Пусть случайная величина X — это ошибка округления. Предполагая, что случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 5]$, найти EX и DX .

10.34. Автобусы маршрута № 5 идут строго по расписанию с интервалом в 20 минут. Пусть случайная величина X — это время ожидания пассажиром автобуса на остановке. Предполагая, что случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 20]$, найти EX и DX .

10.35. Вероятность того, что срок службы электролампы превысит 50 часов, равна 0,6. Пусть случайная величина X — это время службы электролампы. Предполагая, что случайная величина имеет показательное распределение, найти EX и DX .

10.36. Измерительный прибор работает без систематических ошибок. Известно, что вероятность ошибки измерения, превышающей по абсолютной величине 5, равна 0,4. Пусть случайная величина X — это величина ошибки измерения. Предполагая, что случайная величина X нормально распределена, найти приближенное значение DX . (Работа измерительного прибора без систематических ошибок означает, что $EX = 0$.)

10.37. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке 1) $[0, \pi/6]$; 2) $[0, \pi/3]$. Найти $E(\sin X)$, $D(\sin X)$.

10.38. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке 1) $[0, \pi/4]$; 2) $[0, \pi/2]$. Найти $E(\cos X)$, $D(\cos X)$.

10.39. Распределение случайной величины X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин: а) X ; б) $|X - 1/2|$; в) X^2 ; г) 2^X .

10.40. Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Вычислить $E \sin^2(\pi X)$, $D \sin^2(\pi X)$.

10.41. Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, найти среднее значение и дисперсию площади круга.

10.42. Случайные величины X и Y независимы, причем X имеет нормальное распределение с параметрами 2 и $1/2$, а Y — равномерное распределение на отрезке

$[0, 4]$. Найти: а) $E(X + Y)$; б) $E(XY)$; в) $E(X^2)$ г) $E(X - Y^2)$; д) $D(X + Y)$; е) $D(X - Y)$.

10.43. Доказать, что плотности случайных величин X и $Y = CX$ ($C = const \neq 0$) связаны следующим соотношением:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|C|} f_X\left(\frac{y}{C}\right).$$

10.44. Пусть случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$ ($X \in \mathcal{U}[0, 1]$). Найти плотности распределения следующих случайных величин: а) $-\ln X$; б) $X - 1/X$; в) $-\ln(1 - X)$; г) e^{X-1} .

10.45. Пусть случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α ($X \in \mathcal{E}(\alpha)$). Найти плотности распределения следующих случайных величин: а) $\sqrt{X}$; б) X^2 ; в) $2X$; г) $\ln(\alpha X)$; д) $e^{-\alpha X}$; е) $\min(X, X^2)$.

10.46. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx^2, & x \in (0, 3); \\ 0, & x \notin (0, 3). \end{cases}$$

Найти постоянную C и

- 1) плотность распределения случайной величины $Y_1 = 2 - X$;
- 2) функцию распределения случайной величины $Y_2 = X^2$;
- 3) плотность распределения случайной величины $Y_3 = -\sqrt{X}$.

10.47. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 4]$. Найти

- 1) функцию распределения случайной величины $Y_1 = 2X - 3$;
- 2) плотность распределения случайной величины $Y_2 = -9X^2$;
- 3) функцию распределения случайной величины $Y_3 = e^{-2X}$;
- 4) плотность распределения случайной величины $Y_4 = -\ln(3X)$.

10.48. Случайная величина X имеет показательное распределение с плотностью

$$f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Найти

- 1) плотность распределения случайной величины $Y_1 = 5X + 2$;
- 2) функцию распределения случайной величины $Y_2 = -2\sqrt{X}$;
- 3) плотность распределения случайной величины $Y_3 = -X^2$.

10.49. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотность распределения случайных величин: а) $Y = X^3 + 2$; б) $Z = X^2$.

10.50. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке: а) $[0, \pi/2]$; б) $[0, \pi]$. Найти плотность распределения $f_Y(y)$ случайной величины $Y = \sin X$.

2.3 Случайные векторы с дискретным распределением

2.3.1 Случайные векторы. Случайные векторы с дискретным распределением. Независимость случайных величин с дискретным распределением

Определение. Случайным вектором называется упорядоченный набор $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ случайных величин $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, заданных на одном вероятностном пространстве.

Мы будем рассматривать двумерные случайные векторы (X, Y) .

Определение. Функцией распределения случайного вектора (X, Y) называется функция $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая соотношением

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

Определение. Случайный вектор (X, Y) имеет дискретное распределение, если множество его значений с вероятностью 1 конечно или счетно.

Рядом распределения, или таблицей распределения случайного вектора с дискретным распределением будем называть таблицу, в которой представлен набор значений (x_i, y_j) случайного вектора, и вероятности, соответствующие каждому из этих значений: $p_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

X	Y				
	y_1	y_2	$\dots$	y_m	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Случайные векторы с дискретным распределением обладают следующими свойствами:

1. $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$;
2. $\mathbf{P}((X, Y) \in A) = \sum_{i,j: (x_i, y_j) \in A} p_{ij}$.

Зная таблицу совместного распределения величин X и Y , можно найти одномерные законы распределения величин X и Y :

$$\mathbf{P}(X = x_i) = \sum_j \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j), \quad \mathbf{P}(Y = y_j) = \sum_i \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Определение. Случайные величины X и Y называются независимыми, если для любых x_i, y_j из множества значений величин X и Y выполняется равенство $\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j)$.

Если зафиксировать одно из значений y_j величины Y , то можно найти условный закон распределения случайной величины X :

$$\mathbf{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbf{P}(Y = y_j)}. \quad (2.3.1)$$

2.3.2 Числовые характеристики случайных векторов с дискретным распределением

Определение. Пусть (X, Y) – случайный вектор. Ковариацией случайных величин X и Y называется число

$$\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y.$$

Если случайный вектор (X, Y) имеет дискретное распределение с вероятностями $\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$, то

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}.$$

Вообще, для любой функции $\varphi(X, Y)$ от случайных величин X и Y справедливо равенство

$$\mathbf{E}\varphi(X, Y) = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij}.$$

Если $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$, то случайные величины X и Y называются некоррелированными.

Свойства ковариации:

1. Ковариация линейна по обоим аргументам: для любых $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{cov}(C_1 X_1 + C_2 X_2, Y) = C_1 \mathbf{cov}(X_1, Y) + C_2 \mathbf{cov}(X_2, Y),$$

$$\mathbf{cov}(Y, C_1 X_1 + C_2 X_2) = C_1 \mathbf{cov}(X_1, Y) + C_2 \mathbf{cov}(X_2, Y).$$

2. $\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{cov}(Y, X)$.

3. $\mathbf{cov}(X, X) = \mathbf{D}X \geq 0$.

4. Если X, Y – независимые случайные величины, то $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$. Обратное неверно, есть примеры зависимых случайных величин, которые являются некоррелированными.

5. Для зависимых случайных величин X, Y

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}X\mathbf{E}Y + \mathbf{cov}(X, Y), \quad \mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\mathbf{cov}(X, Y).$$

Определение. Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется число

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{D}X}\sqrt{\mathbf{D}Y}}.$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
2. Если X и Y независимы, то $\rho(X, Y) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно.
3. $\rho(X, Y) = \pm 1$ тогда и только тогда, когда X и Y линейно зависимы, т. е. $Y = aX + b$, где $a > 0$ в случае $\rho(X, Y) = 1$, и $a < 0$ в случае $\rho(X, Y) = -1$.

Задачи.

11.1. В группе из 20 студентов только двое пропустили более половины занятий, и именно они получили оценку «2» на экзамене. Из остальных студентов 5 человек получили оценку «5», 10 человек – оценку «4» и 3 студента получили «3».

- 1) Составить таблицу совместного распределения оценки на экзамене (X) и индикатора пропуска более половины занятий (Y) для выбранного наудачу студента.
- 2) Найти частные законы распределения случайных величин X и Y . Зависимы ли случайные величины X и Y ?

- 3) Найти математические ожидания EX и EY .
- 4) Найти дисперсии DX и DY .
- 5) Найти ковариацию $cov(X, Y)$.
- 6) Найти коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$.
- 7) Найти условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла свое наименьшее значение.
- 8) Найти $cov(20X - 10Y, X - Y)$.

Решение. 1) Случайная величина X принимает значения 2, 3, 4, 5, случайная величина Y – значения 0, 1. Согласно условию задачи, составим таблицу совместного распределения

Y	X			
	2	3	4	5
0	0	3/20	10/20	5/20
1	2/20	0	0	0

2) Случайная величина X принимает значения 2, 3, 4, 5 с вероятностями, которые мы найдем, суммируя вероятности по столбцам в таблице совместного распределения X и Y , а случайная величина Y принимает значения 0 и 1 с вероятностями, которые мы найдем, суммируя вероятности по строкам в таблице совместного распределения.

x_i	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	2/20	3/20	10/20	5/20
y_j	0	1		
$P(Y = y_j)$	18/20	2/20		

Случайные величины X и Y зависимы, так как, например, $P(X = 2, Y = 0) = 0$, а $P(X = 2) \cdot P(Y = 0) = \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{20} \neq P(X = 2, Y = 0)$.

3)

$$EX = 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{3}{20} + 4 \cdot \frac{10}{20} + 5 \cdot \frac{5}{20} = 3,9,$$

$$EY = 0 \cdot \frac{18}{20} + 1 \cdot \frac{2}{20} = 0,1.$$

4)

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 4 \cdot \frac{2}{20} + 9 \cdot \frac{3}{20} + 16 \cdot \frac{10}{20} + 25 \cdot \frac{5}{20} - (3,9)^2 = 0,79,$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = 0 \cdot \frac{18}{20} + 1 \cdot \frac{2}{20} - (0,1)^2 = 0,1 - 0,01 = 0,09.$$

5)

$$\mathbf{cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot 0 \cdot \frac{3}{20} + 3 \cdot 1 \cdot 0 + \\ + 4 \cdot 0 \cdot \frac{10}{20} + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot \frac{5}{20} + 5 \cdot 1 \cdot 0 - 3,9 \cdot 0,1 = 0,2 - 0,39 = -0,19.$$

6)

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-0,19}{\sqrt{0,79} \cdot \sqrt{0,09}} \approx -0,713.$$

7) Условный закон распределения случайной величины X при условии $Y = 0$ найдем, используя формулу (2.3.1):

$$P(X = 2|Y = 0) = \frac{P(X = 2, Y = 0)}{P(Y = 0)} = 0 : \frac{18}{20} = 0,$$

$$P(X = 3|Y = 0) = \frac{P(X = 3, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{3}{20} : \frac{18}{20} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 4|Y = 0) = \frac{P(X = 4, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{10}{20} : \frac{18}{20} = \frac{5}{9},$$

$$P(X = 5|Y = 0) = \frac{P(X = 5, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{5}{20} : \frac{18}{20} = \frac{5}{18}.$$

Запишем ряд распределения:

x_i	2	3	4	5
$P(X = x_i Y = 0)$	0	1/6	5/9	5/18

8) По свойствам ковариации,

$$\mathbf{cov}(20X - 10Y, X - Y) = 20 \mathbf{cov}(X, X) - 10 \mathbf{cov}(Y, X) - 20 \mathbf{cov}(X, Y) + \\ + 10 \mathbf{cov}(Y, Y) = 20DX - 30 \mathbf{cov}(X, Y) + 10DY = \\ = 20 \cdot 0,79 + 30 \cdot 0,19 + 10 \cdot 0,09 = 22,4.$$

11.2. Дискретное распределение двумерного случайного вектора (X, Y) задается таблицей

Y	X		
	-2	0	1
-1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	1/6	1/6

где в пересечении столбца $X = i$ и $Y = j$ находится вероятность $\mathbf{P}(X = i, Y = j)$.

Выяснить, зависимы или нет случайные величины X и Y . Найти:

- а) одномерные распределения $\mathbf{P}(X = i)$ и $\mathbf{P}(Y = j)$;
- б) условные вероятности $\mathbf{P}(Y = 2|X = 0)$ и $\mathbf{P}(X = 1|Y = -1)$;
- в) совместное распределение величин $X + Y$ и XY ;
- г) одномерные распределения величин $X + Y$ и XY ;
- д) совместное распределение величин $\max(X, Y)$ и $\min(X, Y)$.

11.3. Случайная величина X имеет таблицу распределения

x_i	0	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	1/2	1/6	1/3

Построить таблицу распределения случайной величины $Y = 3^X - 1$ и таблицу совместного распределения величин X и Y . Проверить (по определению), что случайные величины X и Y зависимы.

11.4. Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин X и Y задается с помощью таблицы

Y	X		
	-2	0	1
-1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	1/6	1/6

где в пересечении столбца $X = i$ и строки $Y = j$ находится вероятность $\mathbf{P}(X = i, Y = j)$.

Найти: а) $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$; б) $\mathbf{E}Y$, $\mathbf{D}Y$; в) $\mathbf{cov}(X, Y)$; г) $\mathbf{E}(X - 2Y)$, $\mathbf{D}(X - 2Y)$.

11.5. Двумерный случайный вектор (X, Y) имеет распределение, заданное таблицей:

Y	X		
	-1	0	1
-2	1/8	1/12	7/24
0	1/12	1/12	1/16
1	3/24	1/12	1/16

Найти математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции случайных величин X , Y , а также математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X - 3Y + 1$.

11.6. Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы и

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = 1/4, \mathbf{P}(X_i = 0) = 1/2, i = 1, 2, \dots, n.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

11.7. Бросается n игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы очков на всех костях.

11.8. Совместное распределение случайных величин X, Y задано таблично.

1)

Y	X		
	-5	0	5
-3	2/17	4/17	4/17
2	1/17	1/17	5/17

2)

Y	X		
	-2	0	2
-2	1/9	2/9	2/9
2	1/9	1/6	1/6

Найти ряды распределения случайных величин $X, Y, Z_1 = X + Y$ и $Z_2 = X \cdot Y$. Найти $\mathbf{EX}, \mathbf{DX}, \mathbf{EY}, \mathbf{DY}, \mathbf{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$.

11.9. В урне пять одинаковых шаров с номерами от 1 до 5. Осуществляется выборка с возвращением до тех пор, пока впервые не появится шар с четным номером. Пусть случайная величина X — это четный номер шара, на котором завершается выборка. Пусть случайная величина Y — это число извлечений шара. Найти совместный закон распределения X и Y , одномерные законы распределения X и Y . Найти $\mathbf{EX}, \mathbf{DX}, \mathbf{EY}, \mathbf{DY}, \mathbf{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$. Являются ли X и Y независимыми?

11.10. В двух из четырех комнат температура 25 градусов, а влажность 80 процентов. В третьей комнате температура 20 градусов, а влажность 90 процентов. В четвертой комнате температура 25 градусов, а влажность 90 процентов. Найти совместное распределение температуры X и влажности Y в выбранной наудачу комнате, а также одномерные законы распределения X и Y . Найти $\mathbf{EX}, \mathbf{DX}, \mathbf{EY}, \mathbf{DY}, \mathbf{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$. Являются ли X и Y независимыми?

11.11. В трех из четырех аудиторий по 20 студентов и уровень шума 60 децибелл, а в четвертой аудитории нет студентов и уровень шума 20 децибелл. Найти совместное распределение числа студентов X и уровня шума Y в выбранной наудачу аудитории, а также одномерные законы распределения X и Y . Найти $\mathbf{EX}, \mathbf{DX}, \mathbf{EY}, \mathbf{DY}, \mathbf{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$. Являются ли X и Y независимыми?

11.12. Четыре поезда метро, уходящие с интервалом в 4 минуты, увезли по 200 пассажиров. Четыре поезда, уходящие с интервалом в 6 минут, увезли по 300 пассажиров. Два поезда, уходящие с интервалом в 8 минут, увезли по 100 пассажиров. Найти совместное распределение числа пассажиров X и интервала движения

Y для выбранного наудачу поезда, а также одномерные законы распределения X и Y . Найти $EX, DX, EY, DY, \text{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$. Являются ли X и Y независимыми?

11.13. В подъезде 5 однокомнатных квартир площадью по 40 м^2 , 10 двухкомнатных квартир по 60 м^2 и 5 трехкомнатных квартир по 70 м^2 . Для выбранной наудачу квартиры найти совместное распределение числа комнат X и площади Y , а также одномерные законы распределения X и Y . Найти $EX, DX, EY, DY, \text{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$. Являются ли X и Y независимыми?

2.4 Случайные векторы с абсолютно непрерывным распределением

2.4.1 Случайные векторы с абсолютно непрерывным распределением. Плотность распределения

Определение. Случайный вектор (X, Y) имеет абсолютно непрерывное распределение, если его функция распределения представляется в виде

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^x dt \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(t,s) ds,$$

где $f(x,y) = f_{X,Y}(x,y)$ — неотрицательная функция, интегрируемая на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, называемая плотностью распределения вектора (X, Y) (или совместной плотностью распределения случайных величин X, Y).

Свойства плотности $f(x,y)$:

1. $f(x,y) \geq 0$.

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1.$$

3. Для любого множества $A \in \mathbb{R}^2$

$$P((X, Y) \in A) = \int \int_A f(x,y) dx dy.$$

Зная совместную плотность $f_{X,Y}(x,y)$, можно найти одномерные плотности распределения величин X и Y :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx.$$

Определение. Случайные величины X и Y называются независимыми, если для любых x, y выполняется равенство

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

2.4.2 Числовые характеристики случайных векторов с абсолютно непрерывным распределением

Ковариация случайных величин X, Y с абсолютно непрерывным распределением вычисляется по формуле

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy - EXEY.$$

$$\text{Коэффициент корреляции } \rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}.$$

Вообще, для любой функции $\varphi(X, Y)$ от случайных величин X и Y с абсолютно непрерывным распределением справедливо равенство

$$E(\varphi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy.$$

Свойства ковариации и коэффициента корреляции – такие же, как и в дискретном случае.

2.4.3 Функции от случайных векторов с абсолютно непрерывным распределением

Пусть случайный вектор (X, Y) имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_{X,Y}(x,y)$ и функцией распределения $F_{X,Y}(x,y)$, и случайная величина Z связана с X, Y зависимостью $Z = \varphi(X, Y)$, где $z = \varphi(x,y)$ – непрерывная

функция. Требуется найти плотность распределения $f_Z(z)$ и функцию распределения $F_Z(z)$ случайной величины Z .

В общем случае

$$F_Z(z) = \mathbf{P}(Z < z) = \mathbf{P}(\varphi(X, Y) < z) = \iint_{\{(x,y): \varphi(x,y) < z\}} f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy.$$

Есть простая и удобная формула для нахождения плотности суммы $Z = X + Y$ независимых случайных величин X и Y с абсолютно непрерывным распределением. В этом случае

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \, dy.$$

Интеграл в этой формуле называется сверткой функций f_X и f_Y и обозначается через $f_X * f_Y$. Таким образом, $f_{X+Y} = f_X * f_Y = f_Y * f_X$.

Задачи.

12.1. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Axy, & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область $D : \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$. Найти:

- 1) постоянную A ;
- 2) вероятность $\mathbf{P}((X, Y) \in G)$, где $G : \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;
- 3) одномерные плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ случайных величин X и Y ; определить, зависимы ли X и Y ;
- 4) математические ожидания $\mathbf{E}X$ и $\mathbf{E}Y$;
- 5) дисперсии $\mathbf{D}X$ и $\mathbf{D}Y$;
- 6) ковариацию $\mathbf{cov}(X, Y)$;
- 7) коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$.

Решение.

- 1) Найдём коэффициент A , воспользовавшись свойством 2 функции плотности

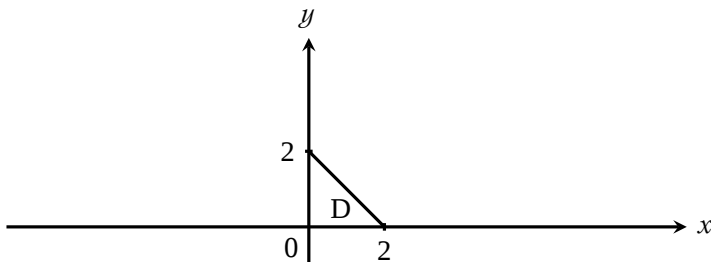


Рис. 2.9. Область D из задачи 12.1.

$f_{X,Y}(x,y)$:

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} Axy \, dy = \frac{A}{2} \int_0^2 x(2-x)^2 \, dx = \\
 &= \frac{A}{2} \int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3) \, dx = \frac{A}{2} \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3}A,
 \end{aligned}$$

откуда $A = \frac{3}{2}$.

2) Вероятность попадания (X, Y) в область G:

$$\mathbf{P}((X, Y) \in G) = \iint_G f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{3}{2}xy \, dy = \int_0^1 \frac{3}{4}x \, dx = \frac{3}{8}.$$

3) Найдем плотность $f_X(x)$ распределения случайной величины X. Ясно, что $f_X(x) = 0$ при $x \notin [0, 2]$. Если $x \in (0, 2)$, то

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \, dy = \int_0^{2-x} \frac{3}{2}xy \, dy = \frac{3}{4}x(2-x)^2 = \frac{3}{4}(4x - 4x^2 + x^3),$$

т. е.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(4x - 4x^2 + x^3), & x \in (0, 2), \\ 0, & x \notin [0, 2], \end{cases}$$

и аналогично

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \begin{cases} \frac{3}{4}(4y - 4y^2 + y^3), y \in (0,2), \\ 0, y \notin [0,2]. \end{cases}$$

Заметим, что $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, т. е. случайные величины X и Y зависимы.

4) Найдем математическое ожидание

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^2 \frac{3}{4}(4x - 4x^2 + x^3) x dx = \int_0^2 \frac{3}{4}(4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{5} \text{ и аналогично } EY = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

5) Найдем дисперсию DX . Имеем:

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_0^2 \frac{3}{4}(4x - 4x^2 + x^3) x^2 dx = \int_0^2 \frac{3}{4}(4x^3 - 4x^4 + x^5) dx = \\ &= \frac{3}{4} \left(x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{5}, \text{ и } DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}, \text{ и анало-} \\ &\text{гично } DY = \frac{4}{25}. \end{aligned}$$

6) Найдем ковариацию $\text{cov}(X, Y)$. Имеем:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_D \int xy f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \frac{3}{2} x^2 y^2 dy = \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 (2-x)^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (8x^2 - 12x^3 + 6x^4 - x^5) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}x^3 - 3x^4 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{15}, \end{aligned}$$

$$\text{и } \text{cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = \frac{8}{15} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{8}{75}.$$

7) Коэффициент корреляции

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = -\frac{2}{3}.$$

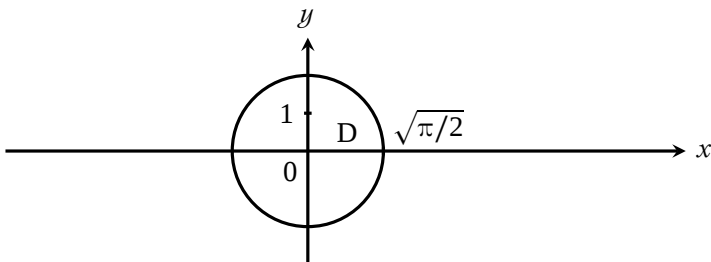


Рис. 2.10. Область D из задачи 12.2.

12.2. Пусть случайный вектор (X, Y) имеет равномерное распределение в круге $D : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}$. Найти плотность и математическое ожидание случайной величины $Z = \sin(X^2 + Y^2)$.

Решение. Так как случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в круге D , то плотность

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C, & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Из свойства 2 плотности $f_{X,Y}(x,y)$ найдём константу $C = \frac{1}{S(D)} = \frac{2}{\pi^2}$. Так как $0 \leq X^2 + Y^2 \leq \frac{\pi}{2}$, то $0 \leq Z = \sin(X^2 + Y^2) \leq 1$. Поэтому плотность $f_Z(z) = 0$ для $z \notin (0, 1)$. Рассмотрим $0 < z < 1$. Тогда функция распределения

$$F_Z(z) = \mathbf{P}(Z < z) = \mathbf{P}(\sin(X^2 + Y^2) < z) = \mathbf{P}(X^2 + Y^2 < \arcsin z) =$$

$$= \int \int_{\{x^2 + y^2 < \arcsin z\}} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\arcsin z}} \frac{2}{\pi^2} \rho d\rho = \frac{2}{\pi} \arcsin z,$$

а плотность $f_Z(z) = F'_Z(z)$,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sqrt{1-z^2}}, & 0 < z < 1; \\ 0, & z \notin (0, 1). \end{cases}$$

Математическое ожидание

$$\mathbf{E}Z = \int_0^1 \frac{2z}{\pi \sqrt{1-z^2}} dz = -\frac{2}{\pi} \sqrt{1-z^2} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Можно найти $\mathbf{EZ}$ по другой формуле, используя плотность $f_{X,Y}(x,y)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{EZ} &= \mathbf{E} \sin(X^2 + y^2) = \int \int_D \sin(x^2 + y^2) \frac{2}{\pi^2} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{2}{\pi^2} \rho \sin(\rho^2) d\rho = \frac{4}{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \rho \sin(\rho^2) d\rho = -\frac{2}{\pi} \cos(\rho^2) \Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

12.3. Пусть случайные величины X и Y независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность случайной величины $Z = X^2 + Y^2$.

Решение. Так как X и Y независимы, то совместная плотность их распределения имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Так как $Z = X^2 + Y^2$, то $f_Z(z) = 0$ при $z < 0$. В случае $z > 0$

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= \mathbf{P}(Z < z) = \mathbf{P}(X^2 + Y^2 < z) = \int \int_{\{x^2+y^2 < z\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho = \left(-e^{-\frac{\rho^2}{2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{z}} = 1 - e^{-\frac{z}{2}},\end{aligned}$$

и

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}}, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Таким образом, величина $Z = X^2 + Y^2$ имеет показательное распределение.

12.4. Пусть случайные величины X и Y независимы и имеют показательное распределение с одним и тем же параметром $\lambda > 0$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Плотности распределения случайных величин X и Y имеют вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Так как $Z = X + Y \geq 0$, то $f_Z(z) = 0$ при $z < 0$. Рассмотрим случай $z > 0$. В этом случае

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

Подынтегральное выражение отлично от 0 при $x \geq 0, z-x \geq 0$, т. е. $0 \leq x \leq z$. Следовательно,

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \quad z > 0.$$

Таким образом,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

12.5. Пусть случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на отрезках $[0, 1]$ и $[1, 2]$ соответственно. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Плотности распределения случайных величин X и Y имеют вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1); \\ 0, & x \notin [0, 1]; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in (1, 2); \\ 0, & y \notin [1, 2]. \end{cases}$$

Так как $0 \leq X \leq 1, 1 \leq Y \leq 2$, то $1 \leq Z = X + Y \leq 3$, и $f_Z(z) = 0$ при $z \notin [1, 3]$. Рассмотрим случай $z \in (1, 3)$. В этом случае

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

Подынтегральное выражение отлично от 0 при $0 \leq x \leq 1, 1 \leq z-x \leq 2$, т. е. $0 \leq x \leq 1$ и $z-2 \leq x \leq z-1$. Следовательно,

$$f_Z(z) = \int_{\max\{0, z-2\}}^{\min\{1, z-1\}} 1 dx.$$

Если $1 < z \leq 2$, то $\max\{0, z-2\} = 0, \min\{1, z-1\} = z-1$, и $f_Z(z) = \int_0^{z-1} dx = z-1$. Если $2 \leq z < 3$, то $\max\{0, z-2\} = z-2, \min\{1, z-1\} = 1$, и $f_Z(z) =$

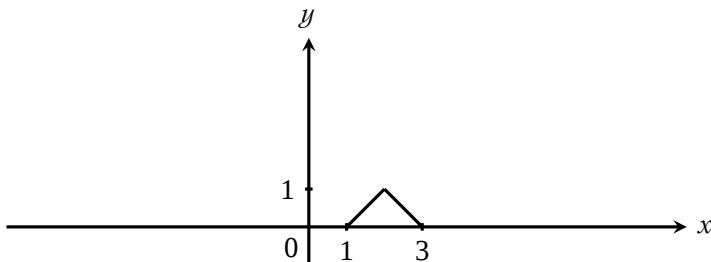


Рис. 2.11. Плотность $f_Z(z)$ из задачи 12.5.

$\int_{z-2}^1 dx = 3 - z$. Таким образом,

$$f_Z(z) = \begin{cases} z - 1, & 1 < z \leq 2; \\ 3 - z, & 2 \leq z < 3; \\ 0, & z \notin [1, 3]. \end{cases}$$

12.6. Случайный вектор (X, Y) имеет равномерное распределение в прямоугольнике с вершинами $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Найти частные распределения и проверить, являются ли X , Y независимыми.

12.7. Случайный вектор (X, Y) имеет равномерное распределение в прямоугольнике с вершинами $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$. Найти частные распределения и проверить, являются ли X , Y независимыми.

12.8. Случайный вектор (X, Y) имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$. Найти частные распределения и проверить, являются ли X , Y независимыми. Найти $\mathbf{EX}$, $\mathbf{EY}$, $\mathbf{DX}$, $\mathbf{DY}$, $\mathbf{cov}(X, Y)$, $\rho(X, Y)$.

12.9. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике D с вершинами $A_1(0, 0)$, $A_2(0, 4)$, $A_3(-2, 0)$. Найти плотность совместного распределения случайных величин X и Y , вероятность $\mathbf{P}(X \leq -1, Y \geq 1)$, одномерные плотности и функции распределения случайных величин X и Y . Найти $\mathbf{EX}$, $\mathbf{DX}$, $\mathbf{EY}$, $\mathbf{DY}$, $\mathbf{cov}(X, Y)$, $\rho(X, Y)$.

12.10. Задана плотность совместного распределения случайных величин X и

Y:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C(2x-y), & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где D – прямоугольник, задаваемый неравенствами $0 \leq x \leq 1, -4 \leq y \leq 0$. Найти коэффициент C , вероятность $P(X \geq 0, Y \geq -1)$ и одномерные плотности распределения случайных величин X и Y . Найти $EX, DX, EY, DY, \text{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$.

12.11. Задана плотность совместного распределения случайных величин X и Y :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C(x^2 + 2y), & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где D – прямоугольник, задаваемый неравенствами $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 5$. Найти коэффициент C , вероятность $P(X \leq 0, Y \geq 2)$ и одномерные плотности распределения случайных величин X и Y . Найти $EX, DX, EY, DY, \text{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$.

12.12. Задана плотность совместного распределения случайных величин X и Y :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C \cos^2(x+y), & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где D – прямоугольник, задаваемый неравенствами $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$. Найти коэффициент C , вероятность $P\left(X \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq Y \leq \frac{3\pi}{4}\right)$ и одномерные плотности распределения случайных величин X и Y . Найти $EX, DX, EY, DY, \text{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$.

12.13. Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы и имеют одинаковые распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 8-2x, & \text{если } x \in [3,4], \\ 0, & \text{если } x \notin [3,4]. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

12.14. Случайные величины X и Y независимы и $X \in \mathcal{E}(\alpha), Y \in \mathcal{E}(\alpha)$. Найти функцию и плотность распределения случайной величины $Z = \min(X, Y^3)$.

12.15. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[0, 4]$. Известно, что X и Y – независимые случайные величины. Найти функцию распределения случайной величины $Z = XY$.

12.16. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[5, 9]$, случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[3, 6]$. Известно, что X и Y — независимые случайные величины. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

12.17. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x/3}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-y/5}, & y \geq 0; \\ 0, & y < 0; \end{cases}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

12.18. Независимые нормально распределенные случайные величины X и Y заданы плотностями распределений:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$, убедиться, что величина Z имеет нормальное распределение.

12.19. Пусть случайные величины X и Y независимы и каждая имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2]$. Найти функции распределения и плотности следующих величин: а) $|X - Y|$; б) $\min(X, Y^3)$; в) $X - 3Y$; г) $\max(2X, Y^2)$; д) $\max(3X, Y^3)$; е) $X - Y^2$.

12.20. Случайные величины X и Y независимы, причем случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, а случайная величина Y имеет дискретное распределение и принимает два значения 1 и 2 с вероятностями $P(Y = 1) = \frac{1}{4}$ и $P(Y = 2) = \frac{3}{4}$. Найти плотность распределения случайной величины $X + Y$.

2.5 Предельные теоремы

Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Составим среднее арифметическое n первых слагаемых: $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$. Оказывается, что при больших n эта величина ведет себя не как случайная и приближается к математическому ожиданию каждого слагаемого. Это факт носит название закона больших чисел (ЗБЧ). Закон больших

чисел — это совокупность теорем. Доказательство теорем опирается на неравенство Чебышёва: пусть $\mathbf{E}X^2 < \infty$, тогда для любого $\varepsilon \geq 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2} \quad (2.5.1)$$

или равносильное ему

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \quad (2.5.2)$$

Если случайная величина $X \geq 0$, то для любого $\varepsilon \geq 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}X}{\varepsilon}, \quad (2.5.3)$$

которое чаще называют неравенством Маркова.

Применять неравенство Чебышёва имеет смысл, если $\varepsilon > \sigma = \sqrt{\mathbf{D}X}$, иначе оно дает тривиальную оценку. Следует заметить, что оценка вероятности по неравенству Чебышёва несколько грубовата. Рассмотрим на примерах.

Задачи.

13.1. Пусть $X \in \mathcal{N}(0, 1)$. Оценить снизу вероятности событий $A = \{-3 < X < 3\}$, $B = \{-1 < X < 1\}$.

Решение. Так как $X \in \mathcal{N}(0, 1)$, то $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$. Воспользуемся неравенством (2.5.2):

$$\mathbf{P}(-3 < X < 3) = \mathbf{P}(|X - 0| < 3) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Так как по условию распределение случайной величины известно, мы можем точно вычислить

$$\mathbf{P}(|X| < 3) = \Phi_{0,1}(3) - \Phi_{0,1}(-3) = 2\Phi_{0,1}(3) - 1 \approx 0,9974.$$

Оценим вероятность события B , используя неравенство (2.5.2):

$$\mathbf{P}(|X| < 1) \geq 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

Получили тривиальную оценку (почему?). А теперь вычислим точно:

$$\mathbf{P}(|X| < 1) = 2\Phi_{0,1}(1) - 1 \approx 0,6826.$$

13.2. Пусть известны числовые характеристики случайной величины X : $\mathbf{E}X = 0,5$; $\mathbf{D}X = 0,1$. Оценить снизу вероятности следующих событий: $A = \{0,1 < X < 0,9\}$, $B = \{X < 1\}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(0,1 < X < 0,9) &= \mathbf{P}(-0,4 < X - 0,5 < 0,4) = \\ &= \mathbf{P}(|X - 0,5| < 0,4) \geq 1 - \frac{0,1}{(0,4)^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X < 1) &= \mathbf{P}(-\infty < X < 1) \geq \mathbf{P}(0 < X < 1) = \\ &= \mathbf{P}(0,5 - 0,5 < X < 0,5 + 0,5) = \mathbf{P}(|X - 0,5| < 0,5) \geq 1 - \frac{0,1}{(0,5)^2} = 0,6.\end{aligned}$$

13.3. Контролер проверяет партию лампочек накаливания – 1000 штук. С вероятностью 0,01 лампочка имеет дефект нити накала и независимо от этого с вероятностью 0,03 дефект цоколя. В каких границах будет практически наверняка заключено число бракованных лампочек? За вероятность практической достоверности принять 0,95.

Решение. Пусть v_n – количество бракованных лампочек, $v_n \in \mathcal{B}i(n, p)$. Найдем p – вероятность, что лампочка оказывается бракованной: $p = 0,01 \cdot 0,97 + 0,99 \cdot 0,03 + 0,01 \cdot 0,03 \approx 0,04$. Тогда $\mathbf{E}v_n = np = 1000 \cdot 0,04 = 40$, $\mathbf{D}v_n = npq = 1000 \cdot 0,04 \cdot 0,96 = 38,4$. Воспользуемся неравенством Чебышёва (2.5.2):

$$\mathbf{P}(|v_n - \mathbf{E}v_n| < \varepsilon) = 1 - \mathbf{P}(|v_n - \mathbf{E}v_n| \geq \varepsilon) > 1 - \frac{\mathbf{D}v_n}{\varepsilon^2} > 0,95.$$

Теперь остается решить неравенство $1 - \frac{\mathbf{D}v_n}{\varepsilon^2} > 0,95$, т. е. $1 - \frac{38,4}{\varepsilon^2} > 0,95$. Получим $\varepsilon^2 > \frac{38,4}{0,05} = 153,6$, т. е. $\varepsilon \geq 13$. Таким образом, $|v_n - 40| < 13$, т. е. $27 < v_n < 53$.

13.4. Суточный расход воды в типовом девятиэтажном доме составляет в среднем 1200 кубометров. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход воды не превысит 3000 кубометров.

Решение. Обозначим через X суточный расход воды. По условию $\mathbf{E}X = 1200$. Так как случайная величина $X > 0$, то применим неравенство Маркова (2.5.3)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > \varepsilon) &\leq \mathbf{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}X}{\varepsilon}, \\ \mathbf{P}(X > 3000) &\leq \mathbf{P}(X \geq 3000) \leq \frac{1200}{3000}.\end{aligned}$$

Тогда $\mathbf{P}(X \leq 3000) = 1 - \mathbf{P}(X > 3000) \geq 1 - 0,4 = 0,6$, т. е. искомая вероятность не меньше, чем 0,6.

2.5.1 Закон больших чисел

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ и случайную величину X , заданные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Определение. Последовательность $\{X_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине X , если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Обозначается сходимость по вероятности так:

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X, n \rightarrow \infty.$$

К законам больших чисел относятся следующие теоремы:

Теорема 2.5.1 (Чебышёва). Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с $\mathbf{E}X_1 = a$ и конечной дисперсией $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

В частности, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} a$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2.5.2 (Бернулли). Пусть ν_n — число «успехов» в n независимых испытаниях Бернулли, p — вероятность «успеха» в каждом испытании. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}. \quad (2.5.4)$$

В частности, $\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} p$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорему 2.5.1 можно сформулировать и не для одинаково распределённых слагаемых:

Теорема 2.5.3. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы и имеют конечные моменты $\mathbf{E}X_k = a_k$, $\mathbf{D}X_k = \sigma_k^2$, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$. Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}{n^2 \varepsilon^2}.$$

В частности, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ЗБЧ в такой форме выполняется при дополнительном условии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}{n^2} = 0. \quad (2.5.5)$$

Задачи.

13.5. Последовательность независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$ задана законами распределения

k	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
$\mathbf{P}(X_n = k)$	$\frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Выполняется ли ЗБЧ для данной последовательности случайных величин?

Решение. Найдём

$$\mathbf{E}X_n = -n\alpha \cdot \frac{1}{2^n} + n\alpha \cdot \frac{1}{2^n} = 0,$$

$$\mathbf{D}X_n = \mathbf{E}X_n^2 - (\mathbf{E}(X_n))^2 = \frac{2n^2\alpha^2}{2^n} = \frac{n^2\alpha^2}{2^{n-1}}.$$

Необходимо проверить условие (2.5.5). Очевидно,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2\alpha^2}{2^{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\alpha^2}{2^{k-1}},$$

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\alpha^2}{2^{k-1}}$ сходится, в чем можно убедиться, используя признак Даламбера. Обо-

значим его сумму через C , тогда справедлива оценка $\sum_{k=1}^n \frac{k^2\alpha^2}{2^{k-1}} \leq C$, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{k^2\alpha^2}{2^{k-1}}}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\alpha^2}{2^{k-1}}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{n^2} = 0,$$

и условие (2.5.5) выполнено. Для данной последовательности случайных величин ЗБЧ выполняется.

13.6. Монету подбрасывают 1000 раз. С какой вероятностью можно гарантировать выполнение неравенства $\left| \frac{y_n}{n} - p \right| < 0,1$?

Решение. Имеем: $p = q = 0,5$, $\varepsilon = 0,1$. Воспользуемся неравенством (2.5.4):

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{y_n}{1000} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\right) > 1 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{1000 \cdot (0,1)^2} = 1 - \frac{0,25}{10} = 0,975.$$

13.7. Сколько раз необходимо подбросить монету, чтобы с вероятностью не меньшей, чем 0,99, гарантировать выполнение неравенства $\left|\frac{y_n}{n} - p\right| < 0,1$?

Решение. Воспользуемся неравенством (2.5.4):

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{y_n}{n} - p\right| < 0,1\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left|\frac{y_n}{n} - p\right| \geq 0,1\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}, \quad \varepsilon = 0,1.$$

Исходя из условия задачи, надо решить неравенство

$$1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 0,99.$$

Получим

$$n \geq \frac{p(1-p)}{0,01 \cdot 0,01} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,0001} = 2500.$$

Ответ: $n \geq 2500$.

2.5.2 Центральная предельная теорема

Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин, X — случайная величина, не обязательно заданные на одном вероятностном пространстве. Пусть $F_n(x)$ — функции распределения случайных величин X_n , $F(x)$ — функция распределения X , т. е. $F_n(x) = \mathbf{P}(X_n < x)$; $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$.

Определение. Последовательность случайных величин X_n сходится по распределению к случайной величине X , если $F_n(x) \rightarrow F(x)$, $n \rightarrow \infty$, для всех точек непрерывности функции $F(x)$. Обозначение сходимости по распределению $F_n \Rightarrow F$.

Пусть $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Во многих прикладных задачах возникает необходимость вычислять вероятности вида $\mathbf{P}(A \leq S_n \leq B)$ для больших n . Как оказалось, функции распределения таких сумм (только не самих, а подправленных — центрированных и нормированных) сближаются с функцией распределения стандартного нормального закона при $n \rightarrow \infty$. Это и есть суть центральной предельной теоремы (ЦПТ).

Теорема 2.5.4 (ЦПТ для одинаково распределенных слагаемых).

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{E}X_1 = a$, $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ и $0 < \sigma^2 < \infty$. Тогда для любого x

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.5.6)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Вернемся к вычислению $\mathbf{P}(A \leq S_n \leq B)$. Тогда по ЦПТ (2.5.6):

$$\mathbf{P}\left(\frac{A-na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{S_n-na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{B-na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi_{0,1}(x_2) - \Phi_{0,1}(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{A-na}{\sigma\sqrt{n}}, x_2 = \frac{B-na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Замечание 2. Частным случаем теоремы 2.5.4 является следующая

Теорема 2.5.5 (Муавра – Лапласа). Пусть ν_n — число «успехов» в n независимых испытаниях схемы Бернулли, p — вероятность «успеха» в каждом испытании, тогда

$$\mathbf{P}\left(\frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \rightarrow \Phi_{0,1}(x), \quad n \rightarrow \infty \text{ для любого } x,$$

что равносильно следующему:

$$\mathbf{P}(k_1 \leq \nu_n \leq k_2) = \mathbf{P}\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \rightarrow \Phi_{0,1}(x_2) - \Phi_{0,1}(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Задачи.

13.8. Какова вероятность того, что при 100 бросаниях монеты «орел» выпадет от 40 до 60 раз?

Решение.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(40 \leq \nu_n \leq 60) &= \mathbf{P}\left(\frac{40-50}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \leq \frac{\nu_n - 50}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \leq \frac{60-50}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(-2 \leq \frac{\nu_n - 50}{5} \leq 2\right) \approx \Phi_{0,1}(2) - \Phi_{0,1}(-2) = 2\Phi_{0,1}(2) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544. \end{aligned}$$

13.9. а) Игральная кость бросается 1000 раз. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 будет лежать сумма выпавших очков.

б) Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью $p \geq 0,975$ сумма выпавших очков была не менее 4500?

Решение. Пусть X_i – количество очков, выпавших на игральной кости при i -м бросании, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ – сумма очков при n бросаниях. Запишем ряд распределения случайной величины X_i .

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_i = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины X_i .

$$EX_i = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5,$$

$$DX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - 12,25 \approx 2,92.$$

а) Надо найти такие x_1 и x_2 , чтобы $P(x_1 \leq S_n \leq x_2) = 0,95$, $x_1 < x_2$. Имеем одно неравенство относительно двух неизвестных x_1 и x_2 . Чтобы уменьшить количество неизвестных, промежутки (x_1, x_2) выбирают симметричным относительно математического ожидания ES_n . Тогда надо найти такое $\varepsilon > 0$, чтобы

$$P(ES_n - \varepsilon \leq S_n \leq ES_n + \varepsilon) = 0,95.$$

Преобразуем левую часть равенства к такому виду, чтобы применить ЦПТ (2.5.6):

$$\begin{aligned} P(ES_n - \varepsilon \leq S_n \leq ES_n + \varepsilon) &= P\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{S_n - ES_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \\ &\approx \Phi_{0,1}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi_{0,1}\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_{0,1}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}}\right) - 1 = 0,95. \end{aligned}$$

Решаем уравнение $2\Phi_{0,1}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1,95$, т. е. $\Phi_{0,1}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0,975$. По таблице значений функции стандартного нормального закона найдём, при каком x $\Phi_{0,1}(x) = 0,975$. Из таблицы $x = 1,96$, т. е. $\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}} = 1,96$ и $\varepsilon = 1,96\sigma\sqrt{n} = 1,96\sqrt{2,92 \cdot 1000} \approx 106$. Так как $ES_n = 3,5 \cdot 1000 = 3500$, то $3500 - 106 \leq S_n \leq 3500 + 106$, т. е. $3394 \leq S_n \leq 3606$ с вероятностью 0,95.

б) В этой задаче надо найти такое n , чтобы $P(S_n \geq 4500) \geq 0,975$.

Преобразуем левую часть неравенства к такому виду, чтобы применить ЦПТ (2.5.6):

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 4500) &= P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{4500 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{4500 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \\ &= 1 - \Phi_{0,1}\left(\frac{4500 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi_{0,1}\left(-\frac{4500 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,975. \end{aligned}$$

По таблице значений $\Phi_{0,1}(x)$ находим такое x , при котором $\Phi_{0,1}(-x) = 0,975$.

Получим $-\frac{4500 - na}{\sigma\sqrt{n}} \geq 1,96$ или $-4500 + na \geq 1,96\sigma\sqrt{n}$. Обозначим $\sqrt{n} = t$,

$t \geq 0$. Получим неравенство $at^2 - 1,96\sigma t - 4500 \geq 0$ или $3,5t^2 - 1,96 \cdot \sqrt{2,92}t - 4500 \geq 0$.

Решением неравенства является промежуток $t \geq 36,34$, откуда следует, что $n \geq 1320$.

13.10. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на два средних квадратических отклонения.

13.11. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - EX| < 0,2$, если $DX = 0,004$.

13.12. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

13.13. Вероятность появления события в каждом испытании равна $1/4$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

13.14. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	0,1	0,4	0,6
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,5

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - EX| < \sqrt{0,4}$.

13.15. Математическое ожидание количества выпадающих осадков в течение года в данной местности составляет 60 см.

а) Оценить вероятность того, что количество осадков в предстоящем году будет не больше 120 см.

б) Тот же вопрос в случае, когда известно средне-квадратическое отклонение — 20 см.

в) Оценить вероятность того, что выпадет не менее 180 см осадков в условиях а) и б).

13.16. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20000 кВт-ч.

а) Какого потребления электроэнергии в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0,96?

б) Тот же вопрос, если известно среднеквадратическое отклонение суточного потребления энергии, равное 200 кВт-ч.

13.17. Количество воды, необходимое в течение суток предприятию для технических нужд, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 125 м^3 . Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход воды на предприятии будет меньше 500 м^3 .

13.18. Среднее время опоздания студента на лекцию составляет 1 минуту. Оценить вероятность того, что студент опоздает на лекцию не менее, чем на 5 минут.

13.19. Число X солнечных дней в году для данной местности является случайной величиной со средним значением 100 дней и среднеквадратичным отклонением 20 дней. Оценить сверху вероятности событий $A = \{X \geq 150\}$, $B = \{X \geq 200\}$.

13.20. Для некоторого автопарка среднее число автобусов, отправляемых в ремонт после месяца эксплуатации на городских линиях, равно 5. Оценить вероятность события, что по истечении месяца в данном автопарке будет отправлено в ремонт меньше 15 автобусов. Оценить вероятность этого события, если появилось данное о дисперсии, она равна 4.

13.21. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0,006. Застрахована группа в 10000 человек 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 120 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного страховое учреждение выплачивает наследникам 10000 рублей. Каковы вероятности, что:

а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;

б) его доход превысит 600000 рублей; 400000 рублей? Оценить указанные вероятности, используя: 1) ЗБЧ (неравенство Чебышева); 2) теорему Муавра – Лапласа.

13.22. Задана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, причем ряд распределения случайной величины X_n имеет вид

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$\frac{1}{2n}$	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$

Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

13.23. Стрелок попадает при выстреле по мишени в десятку – с вероятностью 0,5; в девятку – 0,3; в восьмерку – 0,1; в семерку – 0,05; в шестерку – 0,05.

Стрелок производит 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал более 920 очков?

13.24. Урожайность куста картофеля равна 0 кг с вероятностью 0,1; 1 кг с вероятностью 0,2; 1,5 кг с вероятностью 0,2; 2 кг с вероятностью 0,3; 2,5 кг с вероятностью 0,2. На участке посажено 900 кустов.

а) В каких пределах с вероятностью 0,95 будет находиться урожай?

б) Какое наименьшее количество кустов надо посадить, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,975, урожай был не менее тонны?

13.25. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0,2; 4 с вероятностью 0,4; 3 с вероятностью 0,3; 2 с вероятностью 0,1. За время обучения он сдает 40 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 лежит средний балл студента.

13.26. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого входа имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом гардеробе для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли. Предполагается, что зрители приходят:

а) парами независимо одна пара от другой;

б) поодиночке независимо друг от друга.

13.27. При составлении статистического отчета надо было сложить 10^4 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-4} . Предполагая, что ошибки округления чисел взаимно независимы и равномерно распределены на $(-1/2 \cdot 10^{-4}, 1/2 \cdot 10^{-4})$, найти пределы, в которых с вероятностью, большей 0,997, будет лежать суммарная ошибка.

13.28. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

13.29. Время ожидания автобуса пассажиром имеет показательное распределение со средним значением 9 минут. Найти число поездок, для которого суммарное время ожидания автобуса превысит 3 часа с вероятностью не более 0,2.

13.30. Какова вероятность того, что в 100 партиях одинаковых по силе противников один из них выиграет более 70 раз? Ничьих нет.

13.31. Каждая буква текста может оказаться опечаткой с вероятностью 10^{-4} . Какова вероятность того, что в тексте из 40000 букв окажется более 2 опечаток?

13.32. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна

0,515. Какова вероятность того, что среди 10000 новорожденных окажется мальчиков не больше, чем девочек?

13.33. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Какое наименьшее число сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не менее 100 исправных?

13.34. Вероятность угадывания 6 номеров в спортлото (6 из 49) равна $7,2 \cdot 10^{-8}$. При подсчете оказались заполненными 5 млн. карточек. Какова вероятность, что никто не угадал все 6 номеров? Какое наименьшее количество карточек нужно заполнить, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хотя бы один угадал 6 номеров?

Ответы

Глава 1. Случайные события

§ 1. Элементы комбинаторики.

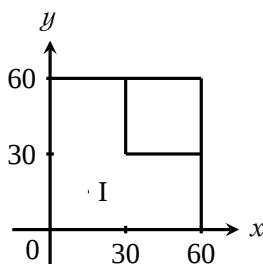
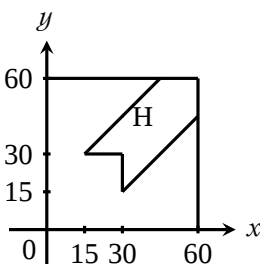
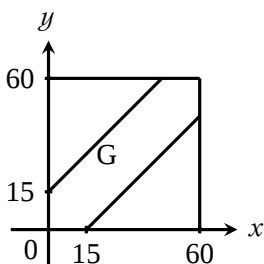
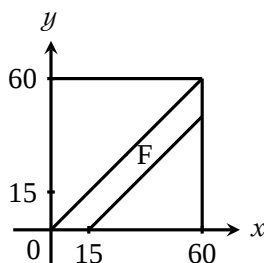
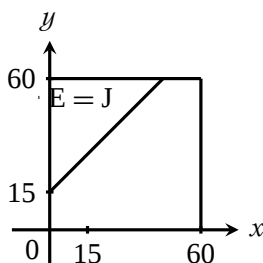
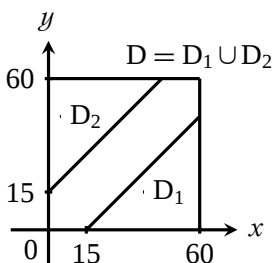
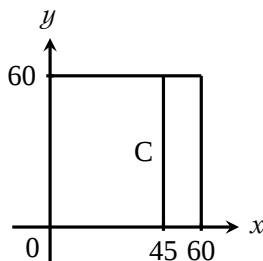
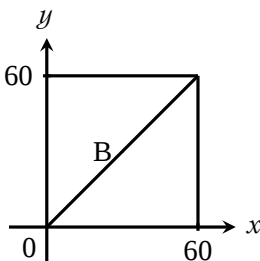
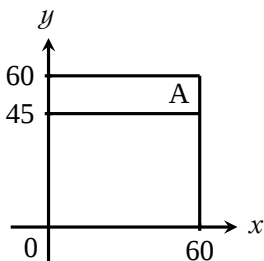
1.10. 720. **1.11.** а) $A_{20}^3 = 6840$; б) $C_{20}^3 = 1140$. **1.12** Число возможных пар инициалов равняется $31 \cdot 31 = 961$ (из алфавита исключаются буквы «ъ» и «ь»). Это меньше, чем число студентов НГТУ, но больше, чем число студентов на потоке. **1.13.** 49; 42. **1.14.** 18000. **1.15.** 288. **1.16.** 5040; 2016. **1.17.** 72. **1.18.** 1440. **1.19.** 3024. **1.20.** 360. **1.21.** а) 8!; б) 8!; в) 336. **1.22.** 26820600. **1.23.** 126. **1.24.** а) 126; б) 210. **1.25.** $C_{17}^{10} = 18448$. **1.26.** а) 7140; б) 1984; в) 595; г) 336. **1.27.** 19440. **1.28.** 210. **1.29.** а) $C_{39}^1 \cdot C_{13}^5 = 50193$; б) $(C_{13}^1)^2 \cdot (C_{13}^2)^2 \cdot C_4^2 + (C_{13}^1)^3 \cdot C_{13}^3 \cdot C_4^1 = 6854640$; в) $C_{51}^5 = 2349060$. **1.30.** а) 5040; б) 10; в) 270; г) 360; д) 4320. **1.31.** а) 360; б) 7200. **1.32.** а) 2520; б) 4; в) 420. **1.33.** а) 1680; б) 15120. **1.34.** а) 3; б) $\frac{11!}{4!4!2!} = 34650$. **1.35.** $4 \cdot 5^5 = 12500$. **1.36.** 2520. **1.37.** 190. **1.38.** $C_{20}^5 - C_{17}^2 \cdot C_3^3 = C_{17}^5 \cdot C_3^0 + C_{17}^4 \cdot C_3^1 + C_{17}^3 \cdot C_3^2 = 15368$. **1.39.** $C_7^2 - C_3^2 + 1 = 19$. **1.40.** $3 \cdot (4 + 5 + 6) + 6 \cdot (3 + 4 + 5 + 5) + (2 + 3 + 4 + 5 + 4) = 165$.

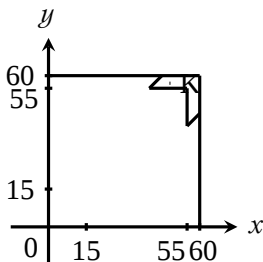
§ 2. Алгебра событий.

2.3. $A = A_1 A_2 A_3$, $B = \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$, $C = A_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3$, $D = \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$, $E = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3$, $F = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$. **2.4.** а) $A_1 A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4 +$

$A_1A_2A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1A_2A_3\overline{A_4}$;
 б) $A_1A_2A_3A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4 + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1A_2A_3\overline{A_4}$
 $+ \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4 + \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}$; в) $A_1A_2A_3A_4 +$
 $+ A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1A_2A_3\overline{A_4}$; г) $A_1A_2A_3A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + A_1A_2\overline{A_3}A_4 +$
 $+ A_1A_2A_3\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}\overline{A_3}\overline{A_4}$. **2.5.** $AB = A$, $A + B =$
 B , $ABC = AC$, $A + B + C = B + C$. **2.6.** Нет, $\overline{A + B + C} = \overline{ABC}$. **2.7.** Да.
2.8. Е, К, Г, Е, С, Н, Е, F, H, К. **2.10.** а) $A + B$; б) $A + B + C$; в) $A \setminus B$; г) AB ; д)
 $AB + AC + BC$. **2.11.** а) AB ; б) $A + B$; в) $A + B + C$; г) Ω . **2.13.** $A = \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}A_4$;
 $B = A_1 + A_2 + A_3$; $C = \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}$.

2.15. Пусть x – время прихода Ивана (в минутах, отсчитываемое от 11 ч), y – время прихода Петра.





2.16. а) $A_1A_2A_3$; б) $A_1A_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3$; в) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; г) $A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$; д) $A_1A_2\bar{A}_3$; е) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$; ж) $A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$; з) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; и) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$. 2.17. $A = A_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 + \dots + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2\dots\bar{A}_{k-1}\bar{B}_{k-1}A_k + \dots$; $B = \bar{A}_1B_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2B_2 + \dots + \bar{A}_1\bar{B}_1\dots\bar{A}_{k-1}\bar{B}_{k-1}\bar{A}_kB_k + \dots$

§ 3. Вероятность. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчет вероятностей.

$$3.4. \frac{2}{C_5^2} = \frac{1}{5}. 3.5. \frac{1+3}{6^3} = \frac{1}{54}. 3.6. \frac{C_2^1 C_8^4}{C_{10}^5} = \frac{5}{9}. 3.7. \frac{C_{18}^3 C_{18}^1}{C_{36}^4} = \frac{96}{385}. 3.8. \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}.$$

$$3.9. 1/5^4. 3.10. 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}. 3.11. 1/C_{33}^5. 3.12. а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9. 3.13. \frac{30240}{99999} \approx$$

$$0,302. 3.14. 1/336. 3.15. 2/7. 3.16. \frac{C_{18}^2 C_2^1}{C_{20}^{10}} = \frac{10}{19}. 3.17. \frac{10!}{10^{10}}. 3.19. Обратное утвер-$$

ждение, вообще говоря, неверно. 3.20. а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{3}{2401}$. 3.21. $\frac{1+2^4+3^4+4^4+5^4}{6^5} = \frac{979}{7776} \approx 0,1259$. 3.22. $\frac{4^{36}}{C_{176}^{36}} \approx 1,195 \cdot 10^{-16}$. 3.23. Из 16 подмножеств: $\emptyset, A, B, \bar{A},$

$\bar{B}, A\bar{B}, \bar{A}B, AB, \bar{A}\bar{B}, A+B, A+\bar{B}, \bar{A}+B, \bar{A}+\bar{B}, AB+\bar{A}\bar{B}, \bar{A}B+A\bar{B}, \Omega$.

3.24. Да.

§ 4. Геометрические вероятности.

$$4.3. \frac{450}{2000} = 0,225. 4.4. \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 2. 4.5. \left(1 - \frac{d}{a}\right)^2. 4.6. 1/2. 4.8. 1/4. 4.9. 1/3.$$

4.10. $(1+3\ln 2)/8$. 4.11. $\frac{2}{\pi} \arccos \frac{R_1}{R_2}$. 4.12. $x(3-2x)$, если $0 \leq x \leq 0,5$; 1, если $x > 0,5$; 0, если $x < 0$. 4.13. а) 0,542; б) 0,458; в) 0,5; г) 0,0417; д) 0,0208.

4.14. а) $1 - (1-z)^2$; б) $1 - (1-z)^2$; в) $2z^2$ при $z \leq \frac{1}{2}$; $1 - 2(1-z)^2$ при $z \geq \frac{1}{2}$;

г) $z(1 - \ln z)$; д) z^2 ; е) $\frac{z^2}{4}$.

§ 5. Условная вероятность и теорема умножения.

5.7. 0,72. 5.8. 0,224. 5.9. 0,42. 5.10. 0,125. 5.11. 0,998. 5.12. 0,41.
 5.13. 0,3808. 5.14. $p_5(1 - q_1q_2)(1 - q_3q_4) + q_5(p_1p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3p_4)$.
 5.15. 0,75. 5.16. а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots = \frac{1}{3}$. 5.17. 4 раза.
 5.18. 0,6. 5.19. $1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i)$. 5.20. а) $1 - (1 - p)^n$; б) $n \geq \frac{\lg(1 - p_1)}{\lg(1 - p)}$.

§ 6. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

6.4. 71/90. 6.5. 387/640; 175/387. 6.6. $\approx 0,1601$. 6.7. 0,55. 6.8. 9/13. 6.9. 35/81.
 6.10. 0,5. 6.11. 0,4. 6.12. 4/29. 6.13. $\frac{0,056}{0,188} \approx 0,3$. 6.14. $2p^2 \left(1 - \frac{2}{3}p\right)$. 6.15. 0,852.
 6.16. а) 0,574; б) 0,819; в) 0,923. 6.17. $\frac{0,3 \cdot 0,99^n}{0,3 \cdot 0,99^n + 0,5 \cdot 0,97^n + 0,2 \cdot 0,9^n}$.

§ 7. Повторение испытаний. Формула Бернулли.

7.3. $P_4(3) + P_4(4) = 0,1792$. 7.4. а) 0,31; б) 0,48; в) 0,52; г) 0,62. 7.5. $P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$. 7.6. 25 или 24. 7.7. 0,0579. 7.8. $\approx 0,389$. 7.9. $\approx 0,298$.
 7.10. $p_1 = 0,665$, $p_2 = 0,619$, $p_3 = 0,597$.

§ 8. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа. Формула Пуассона.

8.4. 0,0041. 8.5. 0,8944. 8.6. а) 0,4236; б) 0,5. 8.7. $P_{21}(11; 21) \approx 0,95945$. 8.8. 100.
 8.9. $\approx 0,036$. 8.10. 0,677. 8.11. 0,0797. 8.12. 0,95.

Глава 2. Случайные величины

§ 9. Случайные величины с дискретным распределением. Числовые характеристики случайных величин с дискретным распределением.

9.3.	x_i	0	1	2	3	4
	$P(X = x_i)$	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,6561, & 0 < x \leq 1; \\ 0,9477, & 1 < x \leq 2; \\ 0,9963, & 2 < x \leq 3; \\ 0,9999, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases} \quad EX = 0,4, \quad DX = 0,36, \quad P(X \leq 2) = 0,9963.$$

9.4.

x_i	0	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{3}{4}, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases} \quad \mathbf{EX} = 1, \mathbf{DX} = \frac{1}{2}, \mathbf{P}(X < 2) = \frac{3}{4}.$$

9.5.

x_i	0	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	9/16	6/16	1/16

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{9}{16}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{15}{16}, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases} \quad \mathbf{EX} = \frac{1}{2}, \mathbf{DX} = \frac{3}{8}, \mathbf{P}(X < 2) = \frac{15}{16}.$$

9.6.

x_i	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	1/5	3/5	1/5

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{1}{5}, & 1 < x \leq 2; \\ \frac{4}{5}, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases} \quad \mathbf{EX} = 2, \mathbf{DX} = \frac{2}{5}, \mathbf{P}(X \leq 2) = \frac{4}{5}.$$

9.7.

x_i	1	2	3	...	k	...
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,1	0,09	$0,9^2 \cdot 0,1$	...	$0,9^{k-1} \cdot 0,1$	...

$k_0 = 1.$

9.8.

x_i	0	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	1/4	3/16	9/16

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{7}{16}, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases} \quad \mathbf{EX} = \frac{21}{16}, \mathbf{DX} = \frac{183}{256}.$$

9.9.

x_i	0	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,28	0,54	0,18

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,28, & 0 < x \leq 1; \\ 0,82, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases} \quad \mathbf{EX} = 0,9, \mathbf{DX} = 0,45.$$

9.10.

x_i	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,6	0,4

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 0,6, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases} \quad \mathbf{EX} = 1,4, \mathbf{DX} = 0,24.$$

9.11.

x_i	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,7	0,3

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 0,7, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases} \quad \mathbf{EX} = 1,3, \mathbf{DX} = 0,21.$$

9.12.

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

 $\mathbf{EX} = \frac{7}{2}, \mathbf{DX} = \frac{35}{12}.$

9.13.

x_i	0	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,3	0,6	0,1

 $\mathbf{EX} = 0,8, \mathbf{DX} = 0,36.$

9.14.

x_i	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	9/40	9/20	11/40	1/20

 $\mathbf{P}(X \leq 1) = \frac{27}{40} = 0,675.$

9.15.

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(X = x_i)$	2/7	5/21	4/21	1/7	2/21	1/21

 $\mathbf{P}(X \leq 2) = \frac{11}{21}.$

9.16

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{4^k \cdot e^{-4}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad \mathbf{P}(1 \leq X \leq 2) \approx 0,21978.$$

9.17

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{3}{4^k}, \quad k = 1, 2, \dots, 14, \quad \mathbf{P}(X = 15) = \frac{1}{4^{14}}; \quad k_* = 1.$$

9.18. а)

x_i	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	5/8	15/56	5/56	1/56

, $\mathbf{EX} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{DX} = \frac{15}{28}$.

б)

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad \mathbf{EX} = \frac{3}{5}, \quad \mathbf{DX} = \frac{24}{25}.$$

9.19. а) $\mathbf{P}(X = k) = C_4^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$

x_i	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = x_i)$	625/6 ⁴	500/6 ⁴	150/6 ⁴	20/6 ⁴	1/6 ⁴

; $\mathbf{EX} = \frac{2}{3}$, $\mathbf{DX} =$

$$\frac{5}{9}.$$

б)

x_i	-4	-3	-2	-1	0
$\mathbf{P}(X = x_i)$	1/6 ⁴	16/6 ⁴	100/6 ⁴	304/6 ⁴	454/6 ⁴

;

продолжение:

x_i	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = x_i)$	304/6 ⁴	100/6 ⁴	16/6 ⁴	1/6 ⁴

$\mathbf{EX} = 0$, $\mathbf{DX} = \frac{4}{3}$.

9.20. $\mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}, \quad k = 2, 3, \dots;$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ \frac{1}{2^2}, & 2 < x \leq 3; \\ \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3}, & 3 < x \leq 4; \\ \dots \\ \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{k-1}{2^k}, & k < x \leq k+1; \\ \dots \end{cases}$$

9.21. 1) $\frac{66}{85}$; 2) $\frac{2}{5}$.

9.22.

x_i	3	6
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,8	0,2

9.23. $\mathbf{EY} = -2,8$; если X и Y независимы, то $\mathbf{DY} = 47,46$.

9.24. $\mathbf{EY}_1 = -0,49$, $\mathbf{DY}_2 = 23,29$.

9.25. а) $Y = 2X + 5$;

x_i	3	5	7
$\mathbf{P}(Y = x_i)$	1/3	1/3	1/3

;

$$6) Y = X^2 + 1; \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_i & 1 & 2 \\ \hline \mathbf{P}(Y = x_i) & 1/3 & 2/3 \\ \hline \end{array};$$

$$B) Y = |X|; \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_i & 0 & 1 \\ \hline \mathbf{P}(Y = x_i) & 1/3 & 2/3 \\ \hline \end{array};$$

$$r) Y = 2^X; \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_i & 1/2 & 1 & 2 \\ \hline \mathbf{P}(Y = x_i) & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline \end{array};$$

$$д) Y = \min(X, 1); \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_i & -1 & 0 & 1 \\ \hline \mathbf{P}(Y = x_i) & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline \end{array};$$

$$e) Y = 1/(3 - X); \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_i & 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ \hline \mathbf{P}(Y = x_i) & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline \end{array}.$$

$$9.26. 1) \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_i & -13 & 17 & 27 & 32 \\ \hline \mathbf{P}(Y_1 = x_i) & 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,2 \\ \hline \end{array};$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_i & -69 & -47 & -15 \\ \hline \mathbf{P}(Y_2 = x_i) & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ \hline \end{array};$$

$$F_{Y_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -69; \\ 0,2, & -69 < x \leq -47; \\ 0,3, & -47 < x \leq -15; \\ 1, & x > -15. \end{cases}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_i & 5 & 11 & 14 \\ \hline \mathbf{P}(Y_3 = x_i) & 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ \hline \end{array};$$

$$F_{Y_3}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5; \\ 0,7, & 5 < x \leq 11; \\ 0,8, & 11 < x \leq 14; \\ 1, & x > 14. \end{cases}$$

$$2) \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_i & -33 & -23 & -13 & 27 \\ \hline \mathbf{P}(Y_1 = x_i) & 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ \hline \end{array};$$

x_i	-95	-47	-15
$\mathbf{P}(Y_2 = x_i)$	0,1	0,5	0,4

;

$$F_{Y_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -95; \\ 0,1, & -95 < x \leq -47; \\ 0,6, & -47 < x \leq -15; \\ 1, & x > -15. \end{cases}$$

x_i	5	11	17
$\mathbf{P}(Y_3 = x_i)$	0,4	0,5	0,1

;

$$F_{Y_3}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5; \\ 0,4, & 5 < x \leq 11; \\ 0,9, & 11 < x \leq 17; \\ 1, & x > 17. \end{cases}$$

9.27. 1)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(Z = x_i)$	0,05	0,36	0,11	0,38	0,02	0,08

;

2)

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	3
$\mathbf{P}(Z = x_i)$	0,08	0,24	0,16	0,16	0,2	0,08	0,08

.

9.28. 1)

x_i	-4	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(Z = x_i)$	0,03	0,1	0,08	0,7	0,06	0,03

;

2)

x_i	-4	-2	0	2	4
$\mathbf{P}(Z = x_i)$	0,02	0,09	0,8	0,03	0,06

.

§ 10. Случайные величины с абсолютно непрерывным распределением.
Числовые характеристики случайных величин с абсолютно непрерывным распределением.

10.5. $\mathbf{P}(0 < X < 1) = \frac{1}{4}$. 10.6. $\mathbf{P}(X \geq T) = \frac{1}{e}$. 10.7. $C_4^3 p^3 (1-p) = \frac{1}{4}$, где $p =$

$\mathbf{P}(0,25 < X < 0,75) = \frac{1}{2}$.

10.8.

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos 2x, & x \in (0, \pi/4); \\ 0, & x \notin (0, \pi/4). \end{cases}$$

10.9. $\mathbf{P}(1 < X < 2) = \frac{e^\alpha - 1}{e^{2\alpha}}$. 10.10. $C_3^2 p^2 (1 - p) = 3 \left(\frac{\pi + 2}{4\pi} \right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi - 2}{4\pi} \right)$, где $p = \frac{\pi + 2}{4\pi}$.
10.11.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - \cos x, & 0 < x \leq \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

10.12. $C = \frac{1}{2}$. 10.13. $C = 1$. 10.14. $\mathbf{E}X = \frac{4}{3}$. 10.15. $C = \frac{3}{4}$, $\mathbf{E}X = \frac{11}{16}$. 10.16. $\mathbf{E}X = \frac{1}{\alpha}$.
10.17. $\mathbf{E}X^2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}$. 10.18. $\mathbf{E}X^3 = \frac{13}{40}$. 10.19. $\mathbf{E}X = 3$, $\mathbf{D}X = \frac{1}{5}$. 10.20. $\mathbf{D}X = 4, 5$;
 $\mathbf{P}(-3 < X < 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{3} > \mathbf{P}(1 < X < 3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{3}$. 10.21. $\mathbf{E}X = \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{D}X = \frac{\pi^2 - 8}{4}$. 10.22. $\mathbf{E}X = \frac{10}{3}$, $\mathbf{D}X = \frac{25}{18}$.
10.23.

$$A = 1; F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-x^2/2}, & x > 0; \end{cases} \quad \mathbf{P}(X > 1) = e^{-1/2}.$$

10.24.

$$A = 4; F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sin 4x, & 0 < x \leq \pi/8; \\ 1, & x > \pi/8. \end{cases}$$

10.25.

$$A = \frac{1}{8}; f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in (0, 2); \\ 0, & x \notin (0, 2); \end{cases} \quad \mathbf{P}(0 < X < 1) = \frac{1}{8}.$$

10.26 а) Да, $C = 3$; б) нет; в) да, $C = \frac{24}{7}$; г) нет. 10.27. $C = -\frac{4}{81}$, $\mathbf{P}(X \geq -2) = \frac{16}{81}$,
 $\mathbf{E}X = -\frac{12}{5}$, $\mathbf{D}X = \frac{6}{25}$. 10.28. $C = 4$, $\mathbf{P}\left(\frac{\pi}{8} < X < \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$, $\mathbf{E}X = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
10.29.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{5}, & 0 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5; \end{cases} \quad \mathbf{P}(-3 < X < 8) = 1; \mathbf{E}X = \frac{5}{2}; \mathbf{D}X = \frac{25}{12}.$$

10.30.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2); \\ 0, & x \notin (-1, 2); \end{cases} \quad \mathbf{P}(1 < X < 5) = \frac{1}{3}; \mathbf{E}X = \frac{1}{2}; \mathbf{D}X = \frac{3}{4}.$$

10.31.

$$F_Y(x) = \Phi\left(\frac{x+13}{5}\right) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t+13)^2}{50}} dt;$$

$$\mathbf{P}(-17 < Y < -12) = \Phi(1/5) - \Phi(-4/5) \approx 0,3674.$$

10.32.

$$f_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-9)^2}{8}}; \mathbf{P}(4 < Y < 7) = \Phi(-1) - \Phi(-5/2) \approx 0,1525.$$

$$10.33. \mathbf{E}X = 2,5, \mathbf{D}X = \frac{25}{12}. 10.34 \mathbf{E}X = 10, \mathbf{D}X = \frac{100}{3}. 10.35. \mathbf{E}X = \frac{50}{\ln 10 - \ln 6} \approx 97,88, \mathbf{D}X = \frac{2500}{(\ln 10 - \ln 6)^2} \approx 9580,64. 10.36. \mathbf{D}X \approx 35,43.$$

$$10.37. 1) \mathbf{E} \sin X = \frac{3(2 - \sqrt{3})}{\pi}, \mathbf{D}(\sin X) = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{9(7 - 4\sqrt{3})}{\pi^2}; 2) \mathbf{E} \sin X = \frac{3}{2\pi}, \mathbf{D}(\sin X) = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} - \frac{9}{4\pi^2}.$$

$$10.38. 1) \mathbf{E} \cos X = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \mathbf{D}(\cos X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}; 2) \mathbf{E} \cos X = \frac{2}{\pi}, \mathbf{D}(\cos X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}.$$

$$10.39. a) \mathbf{E}X = \frac{2}{3}, \mathbf{D}X = \frac{1}{18}; 6) \mathbf{E}|X - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}, \mathbf{D}|X - \frac{1}{2}| = \frac{1}{48}; b) \mathbf{E}X^2 = \frac{1}{2}, \mathbf{D}(X^2) = \frac{1}{12}; r) \mathbf{E}2^X = \frac{4\ln 2 - 2}{\ln^2 2}, \mathbf{D}(2^X) = \frac{8\ln 2 - 3}{2\ln^2 2} - \frac{(4\ln 2 - 2)^2}{\ln^4 2}.$$

$$10.40. \mathbf{E}(\sin^2 \pi X) = \frac{1}{2}, \mathbf{D}(\sin^2 \pi X) = \frac{1}{8}.$$

10.41.

$$\mathbf{E}S = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{b^3 - a^3}{b - a}, \mathbf{D}S = \frac{\pi^2}{80} \cdot \frac{b^5 - a^5}{b - a} - \left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{b^3 - a^3}{b - a} \right)^2.$$

$$10.42. a) \mathbf{E}(X + Y) = 4; 6) \mathbf{E}(XY) = 4; b) \mathbf{E}X^2 = \frac{9}{2}; r) \mathbf{E}(X - Y^2) = -\frac{10}{3};$$

$$d) \mathbf{D}(X + Y) = \frac{11}{6}; e) \mathbf{D}(X - Y) = \frac{11}{6}.$$

10.44. a)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ e^{-y}, & y > 0; \end{cases}$$

6)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 0; \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2 + 4}}, & y < 0; \end{cases}$$

В)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ e^{-y}, & y > 0; \end{cases}$$

Г)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & y \in \left(\frac{1}{e}, 1\right); \\ 0, & y \notin \left(\frac{1}{e}, 1\right); \end{cases}$$

10.45. а)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ 2\alpha y e^{-\alpha y^2}, & y > 0; \end{cases}$$

б)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{y}} e^{-\alpha\sqrt{y}}, & y > 0; \end{cases}$$

В)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha y}{2}}, & y > 0; \end{cases}$$

Г)

$$f_Y(y) = e^y e^{-(e^y)} = e^{y-e^y};$$

Д)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in (0, 1); \\ 0, & y \notin (0, 1); \end{cases}$$

е)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{y}} e^{-\alpha\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 1; \\ \alpha e^{-\alpha y}, & y > 1. \end{cases}$$

10.46. С = $\frac{1}{9}$;

1)

$$f_{Y_1}(y) = \begin{cases} \frac{(2-y)^2}{9}, & y \in (-1, 2); \\ 0, & y \notin (-1, 2); \end{cases}$$

2)

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{y\sqrt{y}}{27}, & 0 < y \leq 9; \\ 1, & y > 9; \end{cases}$$

3)

$$f_{Y_3}(y) = \begin{cases} -\frac{2y^5}{9}, & y \in (-\sqrt{3}, 0); \\ 0, & y \notin (-\sqrt{3}, 0). \end{cases}$$

10.47. 1)

$$F_{Y_1}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -3; \\ \frac{y+3}{8}, & -3 < y \leq 5; \\ 1, & y > 5; \end{cases}$$

2)

$$f_{Y_2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{24\sqrt{-y}}, & y \in (-144, 0); \\ 0, & y \notin (-144, 0). \end{cases}$$

3)

$$F_{Y_3}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq e^{-8}; \\ 1 + \frac{\ln y}{8}, & e^{-8} < y \leq 1; \\ 1, & y > 1; \end{cases}$$

4)

$$f_{Y_4}(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{12}, & y > -\ln 12; \\ 0, & y \leq -\ln 12. \end{cases}$$

10.48. 1)

$$f_{Y_1}(y) = \begin{cases} e^{2-y}, & y > 2; \\ 0, & y \leq 2. \end{cases}$$

2)

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} e^{-\frac{5y^2}{4}}, & y \leq 0; \\ 1, & y > 0; \end{cases}$$

3)

$$f_{Y_3}(y) = \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{-y}} \cdot e^{-5\sqrt{-y}}, & y < 0; \\ 0, & y \geq 0. \end{cases}$$

10.49. а)

$$f_Y(y) = \frac{1}{3\pi\sqrt[3]{(y-2)^2} \cdot (1 + \sqrt[3]{(y-2)^2})};$$

б)

$$f_Z(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

10.50. а)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0, 1); \\ 0, & y \notin (0, 1); \end{cases}$$

б)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0, 1); \\ 0, & y \notin (0, 1). \end{cases}$$

§ 11. Случайные векторы с дискретным распределением.

11.2. а)

x_i	-2	0	1
$\mathbf{P}(X = x_i)$	1/3	1/3	1/3

 ;

y_j	-1	2
$\mathbf{P}(Y = y_j)$	1/2	1/2

 ;

б) $\mathbf{P}(Y = 2|X = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(X = 1|Y = -1) = \frac{1}{3}$;

в)

X+Y	XY			
	-4	-1	0	2
-3	0	0	0	1/6
-1	0	0	1/6	0
0	1/6	1/6	0	0
2	0	0	1/6	0
3	0	0	0	1/6

 ;

г)

x_i	-3	-1	0	2	3
$\mathbf{P}(X+Y = x_i)$	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

 ;

x_i	-4	-1	0	2
$\mathbf{P}(XY = x_i)$	1/6	1/6	1/3	1/3

д)

max(X, Y)	min(X, Y)			
	-2	-1	0	1
-1	1/6	0	0	0
0	0	1/6	0	0
1	0	1/6	0	0
2	1/6	0	1/6	1/6

11.3.

y_j	0	2	8
$\mathbf{P}(Y = y_j)$	1/2	1/6	1/3

;

X	Y		
	0	2	8
0	1/2	0	0
1	0	1/6	0
2	0	0	1/3

11.4. а) $\mathbf{E}X = -\frac{1}{3}$, $\mathbf{D}X = \frac{14}{9}$; б) $\mathbf{E}Y = \frac{1}{2}$, $\mathbf{D}Y = \frac{9}{4}$; в) $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$;

г) $\mathbf{E}(X - 2Y) = -\frac{4}{3}$, $\mathbf{D}(X - 2Y) = \frac{95}{9}$.

11.5. $\mathbf{E}X = \frac{1}{2}$, $\mathbf{D}X = \frac{107}{144}$, $\mathbf{E}Y = -\frac{35}{48}$, $\mathbf{D}Y = \frac{4007}{2304}$, $\rho(X, Y) = -\frac{193}{\sqrt{107 \cdot 4007}} \approx -0,29$, $\mathbf{E}(X - 3Y + 1) = \frac{157}{48}$, $\mathbf{D}(X - 3Y + 1) = \frac{42407}{2304} \approx 18,4$.

11.6. $\mathbf{E}S_n = 0$, $\mathbf{D}S_n = \frac{1}{2}n$.

11.7. $\mathbf{E}S_n = \frac{7}{2}n$, $\mathbf{D}S_n = \frac{35}{12}n$.

11.8. 1)

x_i	-5	0	5
$\mathbf{P}(X = x_i)$	3/17	5/17	9/17

;

y_j	-3	2
$\mathbf{P}(Y = y_j)$	10/17	7/17

x_i	-8	-3	2	7
$\mathbf{P}(X + Y = x_i)$	2/17	5/17	5/17	5/17

x_i	-15	-10	0	10	15
$\mathbf{P}(XY = x_i)$	4/17	1/17	5/17	5/17	2/17

$\mathbf{E}X = \frac{30}{17}$, $\mathbf{D}X = \frac{4200}{289}$, $\mathbf{E}Y = -\frac{16}{17}$, $\mathbf{D}Y = \frac{1750}{289}$, $\mathbf{cov}(X, Y) = \frac{650}{289}$, $\rho(X, Y) = \frac{13}{14\sqrt{15}}$.

2)

x_i	-2	0	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	2/9	7/18	7/18

;

y_j	-2	2
$\mathbf{P}(Y = y_j)$	5/9	4/9

x_i	-4	-2	0	2	4
$\mathbf{P}(X+Y=x_i)$	1/9	2/9	1/3	1/6	1/6

x_i	-4	0	4
$\mathbf{P}(XY=x_i)$	1/3	7/18	5/18

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{3}, \mathbf{D}X = \frac{7}{3}, \mathbf{E}Y = -\frac{2}{9}, \mathbf{D}Y = \frac{77}{81}, \mathbf{cov}(X, Y) = -\frac{4}{27}, \rho(X, Y) = -\frac{4}{7\sqrt{33}}.$$

11.9.

X	Y					
	1	2	3	...	n	...
2	1/5	3/25	9/125	...	$3^{n-1}/5^n$	...
4	1/5	3/25	9/125	...	$3^{n-1}/5^n$	...

x_i	2	4
$\mathbf{P}(X=x_i)$	1/2	1/2

y_j	1	2	3	...	n	...
$\mathbf{P}(Y=y_j)$	2/5	6/25	18/125	...	$2 \cdot 3^{n-1}/5^n$	...

ная величина Y имеет геометрическое распределение с параметром $p = \frac{2}{5}$; случайные величины X и Y независимы;

$$\mathbf{E}X = 3, \mathbf{D}X = 1, \mathbf{E}Y = \frac{5}{2}, \mathbf{D}Y = \frac{15}{4}, \mathbf{cov}(X, Y) = 0, \rho(X, Y) = 0.$$

11.10.

Y	X	
	20	25
80	0	1/2
90	1/4	1/4

x_i	80	90
$\mathbf{P}(X=x_i)$	1/2	1/2

y_j	20	25
$\mathbf{P}(Y=y_j)$	1/4	3/4

$$\mathbf{E}X = \frac{95}{4}, \mathbf{D}X = \frac{75}{16}, \mathbf{E}Y = 85, \mathbf{D}Y = 25, \mathbf{cov}(X, Y) = -\frac{25}{4}, \rho(X, Y) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

случайные величины X и Y зависимы.

11.11.

Y	X	
	0	20
20	1/4	0
60	0	3/4

x_i	0	20
$\mathbf{P}(X=x_i)$	1/4	3/4

y_j	20	60
$\mathbf{P}(Y=y_j)$	1/4	3/4

$$\mathbf{E}X = 15, \mathbf{D}X = 75, \mathbf{E}Y = 50, \mathbf{D}Y = 300, \mathbf{cov}(X, Y) = 150, \rho(X, Y) = 1, \text{слу-}$$

чайные величины X и Y линейно зависимы, $Y = 2X + 20$.

11.12.

Y	X		
	100	200	300
4	0	0,4	0
6	0	0	0,4
8	0,2	0	0

x_i	100	200	300
$P(X = x_i)$	0,2	0,4	0,4

;

y_j	4	6	8
$P(Y = y_j)$	0,4	0,4	0,2

$EX = 220$, $DX = 5600$, $EY = 5,6$, $DY = 2,24$, $cov(X, Y) = -32$, $\rho(X, Y) = -\frac{2}{7}$,
случайные величины X и Y зависимы.

11.13.

Y	X		
	1	2	3
40	1/4	0	0
60	0	1/2	0
70	0	0	1/4

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

;

y_j	40	60	70
$P(Y = y_j)$	1/4	1/2	1/4

$EX = 2$, $DX = \frac{1}{2}$, $EY = 57,5$, $DY = 118,75$, $cov(X, Y) = 7,5$,

$\rho(X, Y) = -\frac{7,5}{\sqrt{59,375}} \approx 0,97$, случайные величины X и Y зависимы.

§ 12. Случайные векторы с абсолютно непрерывным распределением.

12.6.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-1, 1], \\ x+1, & x \in [-1, 0], \\ -x+1, & x \in [0, 1]; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-1, 1], \\ y+1, & y \in [-1, 0], \\ -y+1, & y \in [0, 1]; \end{cases}$$

X и Y зависимы.

12.7.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-1, 1], \\ \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1]; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-1, 1], \\ \frac{1}{2}, & y \in [-1, 1]; \end{cases}$$

X и Y независимы.

12.8.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-1, 1], \\ x+1, & x \in [-1, 0], \\ -x+1, & x \in [0, 1]; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, 1], \\ 2-2y, & y \in [0, 1]; \end{cases}$$

$\mathbf{E}X = 0, \mathbf{D}X = \frac{1}{6}, \mathbf{E}Y = \frac{1}{3}, \mathbf{D}Y = \frac{1}{18}, \mathbf{cov}(X, Y) = 0, \rho(X, Y) = 0$; X и Y независимы.

12.9.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D; \end{cases} \quad \mathbf{P}(X \leq -1, Y \geq 1) = \frac{1}{16};$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{x^2}{4} + x + 1, & -2 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{y}{2} - \frac{y^2}{16}, & 0 < y \leq 4, \\ 1, & y > 4; \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-2, 0], \\ \frac{x}{2} + 1, & x \in [-2, 0]; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, 4], \\ \frac{1}{2} - \frac{y}{8}, & y \in [0, 4]; \end{cases}$$

$$\mathbf{E}X = -\frac{2}{3}, \mathbf{D}X = \frac{2}{9}, \mathbf{E}Y = \frac{4}{3}, \mathbf{D}Y = \frac{8}{9}, \mathbf{cov}(X, Y) = \frac{2}{9}, \rho(X, Y) = \frac{1}{2}.$$

$$12.10. C = \frac{1}{12}, \mathbf{P}(X \geq 0, Y \geq -1) = \frac{1}{8};$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 1], \\ \frac{2}{3}(x+1), & x \in [0, 1]; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-4, 0], \\ \frac{1}{12}(1-y), & y \in [-4, 0]; \end{cases}$$

$$\mathbf{E}X = \frac{5}{9}, \mathbf{D}X = \frac{13}{162}, \mathbf{E}Y = \frac{1}{72}, \mathbf{D}Y = \frac{35}{5184}, \mathbf{cov}(X, Y) = -\frac{869}{648},$$

$$\rho(X, Y) = -\frac{869\sqrt{2}}{\sqrt{455}}.$$

$$12.11. C = \frac{3}{160}, \mathbf{P}(X \leq 0, Y \geq 2) = \frac{33}{80};$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-1, 1], \\ \frac{3}{32}(x^2+5), & x \in [-1, 1]; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, 5], \\ \frac{1}{80}(6y+1), & y \in [0, 5]; \end{cases}$$

$$\mathbf{E}X = 0, \mathbf{D}X = \frac{7}{20}, \mathbf{E}Y = \frac{105}{32}, \mathbf{D}Y = \frac{4525}{1024}, \mathbf{cov}(X, Y) = 0, \rho(X, Y) = 0.$$

$$12.12. \quad C = \frac{2}{\pi^2}, \mathbf{P}\left(X \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq Y \leq \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4};$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, \pi], \\ \frac{1}{\pi}, & x \in [0, \pi]; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0, \pi], \\ \frac{1}{\pi}, & y \in [0, \pi]; \end{cases}$$

$$\mathbf{E}X = \frac{\pi}{2}, \mathbf{D}X = \frac{\pi^2}{12}, \mathbf{E}Y = \frac{\pi}{2}, \mathbf{D}Y = \frac{\pi^2}{12}, \mathbf{cov}(X, Y) = 0, \rho(X, Y) = 0.$$

12.13.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [3, 4], \\ n(y^2 - 8y + 16)^{n-1} \cdot (8 - 2y), & y \in [3, 4]. \end{cases}$$

12.14.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ 1 - e^{-\alpha(z + \sqrt[3]{z})}, & z > 0; \end{cases} \quad f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \alpha \left(1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}\right) e^{-\alpha(z + \sqrt[3]{z})}, & z > 0. \end{cases}$$

12.15.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{z}{4} \left(1 - \ln \frac{z}{4}\right), & 0 < z \leq 4, \\ 1, & z > 4. \end{cases}$$

12.16.

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 8, \\ \frac{z-8}{12}, & 8 < z \leq 11, \\ \frac{1}{4}, & 11 < z \leq 12, \\ \frac{15-z}{12}, & 12 < z \leq 15, \\ 0, & z > 15. \end{cases}$$

12.17.

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{1}{2} e^{-z/5} (1 - e^{-2z/15}), & z > 0. \end{cases}$$

12.18.

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

12.19. а)

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ z - \frac{z^2}{4}, & 0 < z \leq 2, \\ 1, & z > 2; \end{cases} \quad f(z) = \begin{cases} 0, & z \notin [0, 2], \\ \frac{2-z}{2}, & z \in [0, 2]; \end{cases}$$

б)

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{z}{2} + \frac{\sqrt[3]{z}}{2} - \frac{z\sqrt[3]{z}}{4}, & 0 < z \leq 8, \\ 1, & z > 8; \end{cases} \quad f(z) = \begin{cases} 0, & z \notin [0, 8], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt[3]{z^2}} - \frac{\sqrt[3]{z}}{3}, & z \in [0, 8]; \end{cases}$$

в)

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq -6, \\ \frac{(z+6)^2}{z+5}, & -6 < z \leq -4, \\ \frac{z+5}{6}, & -4 < z \leq 0, \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{24}, & 0 < z \leq 2, \\ 1, & z > 2; \end{cases} \quad f(z) = \begin{cases} 0, & z \notin [-6, 2], \\ \frac{z+6}{12}, & -6 \leq z \leq -4, \\ \frac{1}{6}, & -4 \leq z \leq 0, \\ \frac{2-z}{12}, & 0 \leq z \leq 2; \end{cases}$$

г)

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{z\sqrt{z}}{8}, & 0 < z \leq 4, \\ 1, & z > 4; \end{cases} \quad f(z) = \begin{cases} 0, & z \notin [0, 4], \\ \frac{3\sqrt{z}}{16}, & z \in [0, 4]; \end{cases}$$

д)

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{z\sqrt[3]{z}}{12}, & 0 < z \leq 6, \\ \frac{\sqrt[3]{z}}{2}, & 6 < z \leq 8, \\ 1, & z > 8; \end{cases} \quad f(z) = \begin{cases} 0, & z \notin [0, 8], \\ \frac{\sqrt[3]{z}}{9}, & z \in [0, 6]; \\ \frac{1}{6\sqrt[3]{z^2}}, & z \in (6, 8]; \end{cases}$$

e)

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq -4, \\ \frac{2}{3} + \frac{z}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{(-z)^3}, & -4 < z \leq -2, \\ 1 - \frac{1}{6}\sqrt{(2-z)^3} + \frac{1}{6}\sqrt{(-z)^3}, & -2 < z \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{6}\sqrt{(2-z)^3}, & 0 < z \leq 2, \\ 1, & z > 2; \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \notin [-4, 2], \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{-z}, & z \in [-4, -2]; \\ \frac{1}{4}\sqrt{2-z} - \frac{1}{4}\sqrt{-z}, & z \in (-2, 0]; \\ \frac{1}{4}\sqrt{2-z}, & z \in (0, 2]. \end{cases}$$

12.20.

$$f_Z(z) = \frac{1}{4\pi(1+(z-1)^2)} + \frac{3}{4\pi(1+(z-2)^2)}.$$

§ 13. Пределные теоремы.

13.10. $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}$. 13.11. $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| < 0,2) \geq 0,9$.

13.12. а) $\mathbf{P}(|X - 16| < 3) \geq 0,64$; б) $\mathbf{P}(|X - 16| \geq 3) \leq 0,36$.

13.13. $\mathbf{P}(|X - 200| < 50) \geq 0,94$. 13.14. $\mathbf{P}(|X - 0,44| < \sqrt{0,4}) \geq 0,909$.

13.15. а) $\mathbf{P}(X \leq 120) \geq \frac{1}{2}$; б) $\mathbf{P}(X \leq 120) \geq \frac{8}{9}$; в) $\mathbf{P}(X \geq 180) \leq \frac{1}{3}$; $\mathbf{P}(X \geq 180) \leq \frac{1}{36}$. 13.16. а) 500000; б) 21000. 13.17. $\mathbf{P}(X < 500) \geq 0,75$. 13.18. $\mathbf{P}(X \geq 5) \leq$

0,2. 13.19. $\mathbf{P}(A) \leq \frac{21}{25}$, $\mathbf{P}(B) \leq 0,96$. 13.20. $\mathbf{P}(X < 15) \geq \frac{2}{3}$; $\mathbf{P}(X < 15) \geq 0,96$.

13.21. а) $p \leq 0,0166$ ($p \approx 0$); б) $\mathbf{P}(X > 600000) \leq 0,5$; $\mathbf{P}(X > 400000) \geq 0,95$;

$\mathbf{P}(X > 400000) \approx 0,9952$. 13.22. Да. 13.23. 0,4264. 13.24. а) $1397 \leq S_n \leq 1483$;

б) $n \geq 648$. 13.25. $\bar{X} \in (3,42; 3,98)$. 13.26. 554; 536. 13.27. $(-83,8; 83,8)$.

13.28. $p \geq 0,9207$. 13.29. $n \geq 36$. 13.30. $1,333 \cdot 10^{-5}$. 13.31. $1 - 13/e^4$.

13.32. 0,0014. 13.33. 1) $e^{-2} \approx 0,135$; 2) 104. 13.34. 1) $e^{-0,36} \approx 0,698$; 2) 31980349.

Распределение Пуассона

Т а б л. 1. Значения функции $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12161	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6					0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
							0,00001	0,00002	0,00004

Т а б л. 1. (Окончание).

$k \backslash \lambda$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	$k \backslash \lambda$	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	9	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	10	0,00004	0,00081	0,00529	0,0813
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	11	0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	12		0,00006	0,00064	0,00343
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	13		0,00001	0,00020	0,00132
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	14			0,00006	0,00047
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622	15			0,00002	0,00016
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445	16				0,00005
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	17				0,00001

Т а б л. 2. Значения функции $\sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,90484	0,81873	0,74081	0,67032	0,60653	0,54881
1	0,99532	0,98248	0,96306	0,93845	0,90980	0,80781
2	0,99984	0,99885	0,99640	0,99207	0,98561	0,97688
3	1,00000	0,99994	0,99973	0,99922	0,99825	0,99664
4		1,00000	0,99998	0,99994	0,99982	0,99960
5			1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
$k \backslash \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,49658	0,44933	0,40657	0,36790	0,23534	0,04979
1	0,84420	0,80880	0,77248	0,73576	0,40601	0,19915
2	0,96586	0,95258	0,93714	0,91970	0,67668	0,42319
3	0,99425	0,99092	0,98654	0,98101	0,85712	0,64723
4	0,99921	0,99859	0,99766	0,99634	0,94735	0,81526
5	0,99991	0,99982	0,99966	0,99941	0,98344	0,91600
6	0,99999	0,99998	0,99996	0,99992	0,99547	0,96649
7	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99890	0,98810
8					0,99976	0,99620
9					0,99995	0,99890
10					0,99999	0,99971
11						0,99993
12						0,99998
13						1,00000

Т а б л. 2. (Окончание).

$k \backslash \lambda$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012
1	0,09158	0,04042	0,01735	0,00730	0,00302	0,00123
2	0,23810	0,12465	0,06197	0,02964	0,01375	0,00623
3	0,43347	0,26503	0,15120	0,08176	0,04238	0,02123
4	0,62883	0,44049	0,28506	0,17299	0,09963	0,05496
5	0,78513	0,61596	0,44568	0,30071	0,19124	0,11569
6	0,88933	0,76218	0,60630	0,44971	0,31337	0,20678
7	0,94887	0,86662	0,74398	0,59871	0,45296	0,32390
8	0,97864	0,93181	0,84724	0,72909	0,59255	0,45565
9	0,99187	0,96817	0,91608	0,83050	0,71662	0,58741
10	0,99716	0,98630	0,95738	0,90148	0,81589	0,70599
11	0,99908	0,99455	0,97991	0,94665	0,88808	0,80301
12	0,99973	0,99798	0,99117	0,97300	0,93620	0,87577
13	0,99992	0,99920	0,99637	0,98719	0,96582	0,92615
14	0,99998	0,99977	0,99860	0,99428	0,98274	0,95853
15	0,99999	0,99993	0,99949	0,99759	0,99177	0,97796
16	1,00000	0,99998	0,99982	0,99904	0,99628	0,98889
17		0,99999	0,99994	0,99964	0,99841	0,99468
18		1,00000	0,99998	0,99987	0,99935	0,99757
19			0,99999	0,99995	0,99974	0,99894
20			1,00000	0,99998	0,99991	0,99956
21				1,00000	0,99997	0,99982
22					0,99999	0,99993
23					1,00000	0,99997
24						0,99999
25						1,00000

x	сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3322	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290

Т а б л. 3. Значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Т а б л. 3. (Продолжение).

x	сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Т а б л. 4. Значения функции Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,00	0	0,33	0,1293	0,66	0,2454	0,99	0,3389
0,01	0,004	0,34	0,1331	0,67	0,2486	1	0,3413
0,02	0,008	0,35	0,1368	0,68	0,2517	1,01	0,3438
0,03	0,012	0,36	0,1406	0,69	0,2549	1,02	0,3461
0,04	0,016	0,37	0,1443	0,7	0,258	1,03	0,3485
0,05	0,0199	0,38	0,148	0,71	0,2611	1,04	0,3508
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642	1,05	0,3531
0,07	0,0279	0,4	0,1554	0,73	0,2673	1,06	0,3554
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2703	1,07	0,3577
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734	1,08	0,3599
0,1	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764	1,09	0,3621
0,11	0,0438	0,44	0,17	0,77	0,2794	1,1	0,3643
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823	1,11	0,3665
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852	1,12	0,3686
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,8	0,2881	1,13	0,3708
0,15	0,0596	0,48	0,1844	0,81	0,291	1,14	0,3729
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939	1,15	0,3749
0,17	0,0675	0,5	0,1915	0,83	0,2967	1,16	0,377
0,18	0,0714	0,51	0,195	0,84	0,2995	1,17	0,379
0,19	0,0753	0,52	0,1985	0,85	0,3023	1,18	0,381
0,2	0,0793	0,53	0,2019	0,86	0,3051	1,19	0,383
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3078	1,2	0,3849
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106	1,21	0,3869
0,23	0,091	0,56	0,2123	0,89	0,3133	1,22	0,3888
0,24	0,0948	0,57	0,2157	0,9	0,3159	1,23	0,3907
0,25	0,0987	0,58	0,219	0,91	0,3186	1,24	0,3925
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3112	1,25	0,3914
0,27	0,1064	0,6	0,2257	0,93	0,3238	1,26	0,3962
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264	1,27	0,398
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289	1,28	0,3997
0,3	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315	1,29	0,4015
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,334	1,3	0,4032
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,4049

Т а б л. 4. (Окончание).

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
1,32	0,4066	1,64	0,4495	1,96	0,475	2,56	0,4948
1,33	0,4082	1,65	0,4505	1,97	0,4756	2,58	0,4951
1,34	0,4099	1,66	0,4515	1,98	0,4761	2,6	0,4953
1,35	0,4115	1,67	0,4525	1,99	0,4767	2,62	0,4956
1,36	0,4131	1,68	0,4535	2	0,4772	2,64	0,4959
1,37	0,4147	1,69	0,4545	2,02	0,4783	2,66	0,4961
1,38	0,4162	1,7	0,4554	2,04	0,4793	2,68	0,4963
1,39	0,4177	1,71	0,4564	2,06	0,4803	2,7	0,4965
1,4	0,4192	1,72	0,4573	2,08	0,4812	2,72	0,4967
1,41	0,4207	1,73	0,4582	2,1	0,4821	2,74	0,4969
1,42	0,4222	1,74	0,4591	2,12	0,483	2,76	0,4971
1,43	0,4236	1,75	0,4599	2,14	0,4838	2,78	0,4973
1,44	0,4251	1,76	0,4608	2,16	0,4846	2,8	0,4974
1,45	0,4265	1,77	0,4616	2,18	0,4854	2,82	0,4976
1,46	0,4279	1,78	0,4625	2,2	0,4861	2,84	0,4977
1,47	0,4292	1,79	0,4633	2,22	0,4868	2,86	0,4979
1,48	0,4306	1,8	0,4641	2,24	0,4875	2,88	0,498
1,49	0,4319	1,81	0,4649	2,26	0,4881	2,9	0,4981
1,5	0,4332	1,82	0,4656	2,28	0,4887	2,92	0,4982
1,51	0,4345	1,83	0,4664	2,3	0,4893	2,94	0,4984
1,52	0,4357	1,84	0,4671	2,32	0,4898	2,96	0,4985
1,53	0,437	1,85	0,4678	2,34	0,4904	2,98	0,4986
1,54	0,4382	1,86	0,4686	2,36	0,4908	3	0,49865
1,55	0,4394	1,87	0,4693	2,38	0,4913	3,2	0,49931
1,56	0,4406	1,88	0,4699	2,4	0,4918	3,4	0,49966
1,57	0,4418	1,89	0,4706	2,42	0,4922	3,6	0,499841
1,58	0,4429	1,9	0,4713	2,44	0,4927	3,8	0,499928
1,59	0,4441	1,91	0,4719	2,46	0,4931	4	0,499968
1,6	0,4452	1,92	0,4726	2,48	0,4934	4,5	0,499997
1,61	0,4463	1,93	0,4732	2,5	0,4938	5	0,5
1,62	0,4474	1,94	0,4738	2,52	0,4941		
1,63	0,4484	1,95	0,4744	2,54	0,4945		

Для заметок

УЧЕБНИКИ.

1. *Н.Ш.Кремер*. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник. М. Юнити, 2003.
2. *В.П.Яковлев*. Теория вероятностей и математическая статистика. М. "Дашков и К^о 2008.
3. *В.А.Фигурин, В.В.Оболонкин*. Теория вероятностей и математическая статистика. Минск, ООО "Новое знание 2000.
4. *П.П.Бочаров, А.В.Печинкин*. Теория вероятностей и математическая статистика. М. Физматлит, 2005.
5. *В.П.Чистяков*. Курс теории вероятности. М. "Наука 1982.
6. *И.А.Палий*. Введение в теорию вероятностей. М. "Высшая школа 2005.
7. *А.Н.Бородин*. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. Санкт-Петербург, "Лань 2002.
8. *В.Е.Гмурман*. Теория вероятностей и математическая статистика. М. "Высшее образование 2006.
9. *Н.С.Аркашев, В.М.Бородихин, А.П.Ковалевский*. Высшая математика. Том 4.2. Теория вероятностей и математическая статистика. Новосибирск. Изд-во НГТУ, 2008, с. 228.

ЗАДАЧНИКИ.

1. *В.А.Ватутин, Г.И.Ивченко, Ю.И.Медведев, В.П. Чистяков*. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. М. "АГАР 2003.
2. *В.Е.Гмурман*. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. "Высшее образование". 2007.
3. *Е.И.Гурский*. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Минск, "высшая школа 1975.
4. Сборник задач по высшей математике. Под ред. *Ермакова*.
5. *И.В.Белько, Г.П.Свирид*. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи. Минск, ООО "Новое знание 2004.
6. *К.Н.Лунгу, В.П.Норин, Д.Т.Письменный, Ю.А.Шевченко (под ред. С.Н.Федина)*. Сборник задач по высшей математике. Т.2. М. АЙРИС ПРЕСС, 2004.
7. Сборник задач по специальным главам математики. (Теория вероятностей. Математическая статистика). Составитель *Крымских Д.А.* Изд-во НГТУ, Новосибирску, 2005.

**Михаил Юлианович Васильчик
Николай Сергеевич Аркашов
Артем Павлович Ковалевский
Илья Михайлович Пупышев
Татьяна Вильевна Тренева
Владислав Владимирович Хаблов
Григорий Самуилович Шефель**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 01.12.11. Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 300 экз.
Уч.-изд. л. 7,44. Печ. л. 8,0. Изд. № 355. Заказ № 3. Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20