

Паспорт экзамена

по дисциплине «Методы решения больших систем уравнений», 2 семестр

1. Методика оценки

Экзамен проводится в (письменной) форме, по билетам. Билет состоит из 5 вопросов и формируется по следующему правилу:

- первый вопрос выбирается из диапазона вопросов, указанных в п. 4.1;
- второй вопрос – из диапазона вопросов, указанных в п. 4.2;
- третий вопрос – из диапазона вопросов, указанных в п. 4.3;
- четвертый вопрос – из диапазона вопросов, указанных в п. 4.4;
- пятый вопрос – из диапазона вопросов, указанных в п. 4.5.

Таким образом, проверяется уровень сформированности компетенций и соотнесенных с ними индикаторов, закрепленных за дисциплиной.

На экзамене преподаватель вправе задавать студенту уточняющие и дополнительные вопросы из общего перечня (п. 4).

Форма экзаменационного билета

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет ФПМИ

Билет № _____

к экзамену по дисциплине «Методы решения больших систем уравнений»

1. Дайте определения следующим понятиям:

- скалярное произведение и билинейная форма в комплексном линейном пространстве,
- предобусловливание.

2. Вывести схему метода СОСР с предобусловливанием:

Схема без предобусловливания. Для системы уравнений $Ax = b$ выполнить следующие действия:

Выбрать x_0 . Вычислить $r_0 = b - Ax_0$, положить $p_{-1} = 0$, $\beta_{-1} = 0$,

Для $j = 0, 1, 2, \dots$

$$p_j = r_j + \beta_{j-1} p_{j-1},$$

$$Ap_j = Ar_j + \beta_{j-1} Ap_{j-1},$$

$$\alpha_j = \frac{(\bar{r}_j, Ar_j)}{(\bar{A}p_j, Ap_j)},$$

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j,$$

$$r_{j+1} = r_j - \alpha_j Ap_j,$$

$$\beta_j = \frac{(\bar{r}_{j+1}, Ar_{j+1})}{(\bar{r}_j, Ar_j)}.$$

При выводе формул использовать скалярное произведение $(x, y)_M = (Mx, y)$.

3. Ответить на вопросы:

1. Можно ли применить метод обобщенных минимальных невязок (GMRES) для решения СЛАУ с комплексной симметричной матрицей?
2. Можно ли применить метод сопряженных невязок (CR) для решения СЛАУ с вещественной несимметричной матрицей?
3. Можно ли применить метод сопряженных градиентов (CG) для решения СЛАУ с комплексной несимметричной матрицей?
4. Можно ли применить стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab) для решения СЛАУ с вещественной неэрмитовой матрицей?
5. Можно ли применить метод сопряженных градиентов (CG) для решения СЛАУ с комплексной эрмитовой матрицей?
6. Можно ли применить метод бисопряженных градиентов (BiCG) для решения СЛАУ с комплексно-симметричной, но неэрмитовой матрицей?
7. Выполняется ли неравенство $\|r_{k+1}\| \leq \|r_k\|$ для невязок r_k , $k = 1, 2, \dots$ генерируемых в процессе решения СЛАУ методом СОСР?
8. Требуется ли в методе бисопряженных градиентов (BiCG) хранить все базисные векторы подпространства Крылова?
9. Укажите число матрично-векторных умножений, которые необходимо выполнить на каждой итерации метода СОСГ.
10. Встречается ли в методе обобщенных минимальных невязок GMRES операция умножения вектора на транспонированную матрицу A^T ?

4. Написать подпрограмму решения СЛАУ с верхнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчном формате.

5. Какие из ниже приведенных матриц можно интерпретировать как комплекснозначные? Какие из них являются комплексно-симметричными, эрмитовыми? Можно ли применить метод СОСГ для решения СЛАУ с данной матрицей?

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Утверждаю: зав. кафедрой _____ должность, ФИО
(подпись)
(дата)

2. Уровни освоения компетенций и критерии оценки

Ответ на экзаменационный билет засчитывается на **продвинутом** уровне, если студент при ответе на вопросы в состоянии провести сравнительный анализ методов

решения СЛАУ, выявляет проблемы, предлагает механизмы их решения, приводит конкретные примеры, не допускает ошибок и способен обосновать выбор метода решения СЛАУ. Компетенции и соотнесенные с ними индикаторы, закрепленные за дисциплиной, сформированы в полном объеме. Оценка составляет *от 40 до 35 баллов*.

Ответ на экзаменационный билет засчитывается на **базовом** уровне, если студент при ответе на вопросы формулирует основные понятия, дает характеристику методам решения СЛАУ, не допускает существенных ошибок при решении задачи. Компетенции и соотнесенные с ними индикаторы, закрепленные за дисциплиной, содержат несущественные пробелы и сформированы на базовом уровне. Оценка составляет *от 30 до 34 баллов*.

Ответ на экзаменационный билет засчитывается на **пороговом** уровне, если студент при ответе на вопросы дает определение основных понятий, может показать причинно-следственные связи явлений, при решении задачи допускает непринципиальные ошибки. Компетенции и соотнесенные с ними индикаторы, закрепленные за дисциплиной, содержат пробелы и сформированы на пороговом уровне. Оценка составляет *от 20 до 29 баллов*.

Ответ на экзаменационный билет считается **неудовлетворительным**, если студент при ответе на вопросы не дает определений основных понятий, не способен показать причинно-следственные связи явлений, при решении задач допускает принципиальные ошибки. Компетенции и соотнесенные с ними индикаторы, закрепленные за дисциплиной, не сформированы. Оценка составляет *менее 20 баллов*.

3. Шкала оценки

Экзамен считается сданным, если сумма баллов по всем заданиям билета составляет от 20 до 40 баллов включительно. Сумма менее 20 баллов признается неудовлетворительным результатом промежуточной аттестации по дисциплине.

В общей оценке по дисциплине экзаменационные баллы учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, установленными в НГТУ.

4. Вопросы к экзамену по дисциплине «Методы решения больших систем уравнений»

4.1. Требуется дать определения следующим понятиям. В задании будет 2 понятия из нижеперечисленных.

- скалярное произведение и билинейная форма в комплексном линейном пространстве,
- симметричные и эрмитовы комплексные матрицы,
- самосопряженный оператор, действующий в комплексном пространстве,
- матричное представление комплексных чисел,
- подпространство Крылова $K(A, m)$,
- предобусловливание,
- разреженный блочно-строчный формат хранения матриц,
- разреженный блочно-столбцовый формат хранения матриц,
- разреженный блочно-строчно-столбцовый формат хранения матриц.

4.2. Второе задание состоит в выводе схем итерационных методов. Даны формулы исходного метода и метода с предобусловливанием. Требуется показать вывод формул предобусловливания.

1) *Conjugate Orthogonal Conjugate Method (COCG)*.

Для системы уравнений $Ax = b$ выполнить следующие действия:

Выбрать x_0 . Вычислить $r_0 = b - Ax_0$, $p_0 = r_0$,

Для $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_j = \frac{(\bar{r}_j, r_j)}{(\bar{A}\bar{p}_j, p_j)},$$

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j,$$

$$r_{j+1} = r_j - \alpha_j A p_j,$$

$$\beta_j = \frac{(\bar{r}_{j+1}, r_{j+1})}{(\bar{r}_j, r_j)},$$

$$p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j.$$

Схема с предобуславливанием. При выводе формул использовать скалярное произведение $(x, y)_M = (Mx, y)$. Для предобусловленной системы $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ выполнить следующие действия:

Выбрать x_0 . Вычислить $r_0 = b - Ax_0$, $p_0 = M^{-1}r_0$,

Для $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_j = \frac{(\bar{r}_j, M^{-1}r_j)}{(\bar{A}\bar{p}_j, p_j)},$$

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j,$$

$$r_{j+1} = r_j - \alpha_j A p_j,$$

$$\beta_j = \frac{(\bar{r}_{j+1}, M^{-1}r_{j+1})}{(\bar{r}_j, M^{-1}r_j)},$$

$$p_{j+1} = M^{-1}r_{j+1} + \beta_j p_j,$$

2) Conjugate A-Orthogonal Conjugate Residual Method (COCR).

Для системы уравнений $Ax = b$ выполнить следующие действия:

Выбрать x_0 . Вычислить $r_0 = b - Ax_0$, положить $p_{-1} = 0$, $\beta_{-1} = 0$,

Для $j = 0, 1, 2, \dots$

$$p_j = r_j + \beta_{j-1} p_{j-1},$$

$$A p_j = A r_j + \beta_{j-1} A p_{j-1},$$

$$\alpha_j = \frac{(\bar{r}_j, A r_j)}{(\bar{A}\bar{p}_j, A p_j)},$$

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j,$$

$$r_{j+1} = r_j - \alpha_j A p_j,$$

$$\beta_j = \frac{(\bar{r}_{j+1}, A r_{j+1})}{(\bar{r}_j, A r_j)},$$

Схема с предобуславливанием. При выводе формул использовать скалярное произведение $(x, y)_M = (Mx, y)$. Для предобусловленной системы $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ выполнить следующие действия:

Выбрать x_0 . Вычислить $r_0 = (b - Ax_0)$, $s_0 = M^{-1}r_0$, $z_0 = A s_0$, $p_{-1} = a_{-1} = 0$, $\beta_{-1} = 0$,

Для $n = 0, 1, 2, \dots$

$$p_n = s_n - \beta_{n-1} p_{n-1},$$

$$a_n = z_n - \beta_{n-1} a_{n-1},$$

$$w_n = M^{-1} a_n,$$

$$\alpha_n = \frac{(\bar{z}_n, s_n)}{(\bar{a}_n, w_n)},$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n p_n,$$

$$r_{n+1} = r_n - \alpha_n a_n,$$

$$s_{n+1} = s_n - \alpha_n w_n,$$

$$z_{n+1} = A s_{n+1},$$

$$\beta_n = -\frac{(\bar{z}_{n+1}, s_{n+1})}{(\bar{z}_n, s_n)}.$$

3) Локально оптимальная схема для комплексно-симметричных матриц

Для системы уравнений $Ax = b$ выполнить следующие действия:

Выбрать x_0 . Вычислить $r_0 = b - Ax_0$, положить $p_0 = r_0$,

Для $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_j = \frac{(\bar{A} \bar{p}_j, r_j)}{(\bar{A} \bar{p}_j, A p_j)},$$

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j,$$

$$r_{j+1} = r_j - \alpha_j A p_j,$$

$$\beta_j = -\frac{(\bar{A} \bar{p}_j, A r_{j+1})}{(\bar{A} \bar{p}_j, A p_j)},$$

$$p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j ?$$

$$A p_{j+1} = A r_{j+1} + \beta_j A p_j$$

Схема с предобуславливанием. При выводе формул использовать скалярное произведение $(x, y)_M = (Mx, y)$. Для предобусловленной системы $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ выполнить следующие действия:

Вычислить $r_0 = (b - Ax_0)$, $z_0 = M^{-1}r_0$, $p_0 = z_0$, $a_0 = A p_0$, $w_0 = M^{-1}a_0$, $s_0 = a_0$,

Для $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_k = \frac{(\bar{w}_k, r_k)}{(\bar{w}_k, a_k)},$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k a_k,$$

$$z_{k+1} = z_k - \alpha_k w_k,$$

$$s_{k+1} = A z_{k+1},$$

$$\beta_k = -\frac{(\bar{w}_k, s_{k+1})}{(\bar{w}_k, a_k)},$$

$$p_{k+1} = z_{k+1} + \beta_k p_k,$$

$$a_{k+1} = s_{k+1} + \beta_k a_k,$$

$$w_{k+1} = M^{-1} a_{k+1}.$$

4) Метод обобщенных минимальных невязок (GMRES).

Для системы уравнений $Ax = b$ выполнить следующие действия:

Выбрать x_0 . Вычислить $r_0 = b - Ax_0$, $\beta = \|r_0\|$, $v_1 = r_0 / \beta$, выбрать m ,

Определить матрицу $H = \{h_{ij}\}$ размера $(m+1) \times m$, положить $H = 0$,

Для $j = 1, 2, \dots, m$ {

$$\omega_j = Av_j$$

Для $i = 1, 2, \dots, j$ {

$$h_{ij} = (\omega_j, v_i)$$

$$\omega_j = \omega_j - h_{ij}v_i$$

$h_{j+1,j} = \|\omega_j\|$, если $h_{j+1,j} = 0$ положить $m = j$ и перейти к 10

$$v_{j+1} = \omega_j / h_{j+1,j}$$

Решить систему $Hu = \beta e_1$ вращениями Гивенса и положить $x_m = x_0 + \sum_{k=1}^m y_k v_k$.

Схема с предобуславливанием. Для предобусловленной системы $AM^{-1}u = b$, где $u = Mx$ выполнить следующие действия:

Выбрать x_0 . Вычислить $r_0 = b - Ax_0$, $\beta = \|r_0\|$, $v_1 = r_0 / \beta$, выбрать m ,

Определить матрицу $H = \{h_{ij}\}$ размера $(m+1) \times m$, положить $H = 0$,

Для $j = 1, 2, \dots, m$ {

$$\omega_j = AM^{-1}v_j$$

Для $i = 1, 2, \dots, j$ {

$$h_{ij} = (\omega_j, v_i)$$

$$\omega_j = \omega_j - h_{ij}v_i$$

$h_{j+1,j} = \|\omega_j\|$, если $h_{j+1,j} = 0$ положить $m = j$ и перейти к 10

$$v_{j+1} = \omega_j / h_{j+1,j}$$

Решить систему $Hu = \beta e_1$ вращениями Гивенса и положить $x_m = x_0 + \sum_{k=1}^m y_k M^{-1}v_k$.

4.3 Третье задание посвящено проверке знаний итерационных методов CG, CR, ЛОС, GMRES, их версий для комплекснозначных систем, а также методов BCG и BCGStab.

Примеры вопросов (здесь X – любой из перечисленных выше методов):

1. Можно ли применить метод X для решения СЛАУ с вещественной симметричной матрицей?
2. Можно ли применить метод X для решения СЛАУ с вещественной несимметричной матрицей?
3. Можно ли применить метод X для решения СЛАУ с комплексной симметричной матрицей?
4. Можно ли применить метод X для решения СЛАУ с комплексной несимметричной матрицей?
5. Можно ли применить метод X для решения СЛАУ с вещественной эрмитовой матрицей?
6. Можно ли применить метод X для решения СЛАУ с вещественной неэрмитовой матрицей?

7. Можно ли применить метод Х для решения СЛАУ с комплексной эрмитовой матрицей?
8. Можно ли применить метод Х для решения СЛАУ с комплексной неэрмитовой матрицей?
9. Можно ли применить метод Х для решения СЛАУ с комплексно-симметричной, но неэрмитовой матрицей?
10. Выполняется ли неравенство $\|r_{k+1}\| \leq \|r_k\|$ для невязок r_k , $k = 1, 2, \dots$ генерируемых в процессе решения СЛАУ методом Х?
11. Требуется ли в методе Х хранить все базисные векторы подпространства Крылова?
12. Укажите число матрично-векторных умножений, которые необходимо выполнить на каждой итерации метода Х.
13. Имеет ли смысл делать сглаживание невязки в схеме метода Х?
14. Встречается ли в методе Х операция умножения вектора на транспонированную матрицу A^T ?

4.4 В четвертом задании необходимо написать фрагмент программы. Можно писать или на C/C++, или на Фортране, или на псевдокоде. Главное – показать, что вы знаете алгоритм.

1. Написать подпрограмму матрично-векторного умножения для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчном формате.
2. Написать подпрограмму матрично-векторного умножения для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-столбцовом формате.
3. Написать подпрограмму матрично-векторного умножения для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчно-столбцовом формате.
4. Написать подпрограмму решения СЛАУ с нижнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчном формате.
5. Написать подпрограмму решения СЛАУ с нижнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-столбцовом формате.
6. Написать подпрограмму решения СЛАУ с нижнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчно-столбцовом формате.
7. Написать подпрограмму решения СЛАУ с верхнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчном формате.
8. Написать подпрограмму решения СЛАУ с верхнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-столбцовом формате.
9. Написать подпрограмму решения СЛАУ с верхнетреугольной матрицей для матрицы, хранящейся в разреженном блочно-строчно-столбцовом формате.
10. Пусть критерием останова итерационного метода служит условие уменьшения компонент вектора невязки, перечисленных в массиве a, размера $m < n$ (n – размер вектора неизвестных) в заданное число раз. Написать код подпрограммы, реализующий выполнение данного критерия останова решателя.

4.5. Какие из ниже приведенных матриц можно интерпретировать как комплекснозначные? Какие из них являются комплексно-симметричными, эрмитовыми? Можно ли применить метод Х для решения СЛАУ с данной матрицей? В задании будет дано 3 матрицы. Примеры матриц приведены ниже.

$$\begin{aligned}
& \text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{в)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
& \text{г)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{е)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 5 & 9 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & -9 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \\
& \text{ж)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{з)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{и)} \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \text{к)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
& \text{л)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{м)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{н)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{о)} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$