

## Паспорт расчетно-графического задания (работы)

по дисциплине «Теория пластичности и ползучести», 1 семестр магистратуры

### 1. Методика оценки

Студенты должны выполнить расчетно-графическую работу в соответствии с заданием, которое приведено в п. 4.

Обязательные структурные части РГЗ:

- Титульный лист
- Задание
- Решение, теоретическое обоснование решения, результаты
- Выводы

Оцениваемые позиции:

- Правильность решения
- Подробность теоретического обоснования
- Аккуратность и грамотность выполнения работы

### 2. Критерии оценки

- Работа считается **не выполненной**, если выполнены не все части РГЗ(Р), решение формальное, студент не продемонстрировал знание основных определений, оценка составляет менее 0,5 максимального балла, указанного в БРС.
- Работа считается выполненной **на пороговом** уровне, если части РГЗ(Р) выполнены формально: задачи решены с отдельными недочетами, оценка составляет менее 0,6 максимального балла.
- Работа считается выполненной **на базовом** уровне, если анализ объекта выполнен в полном объеме, имеются отдельные недочеты в решении, нет достаточного теоретического обоснования оценка составляет менее 0,8 максимального балла.
- Работа считается выполненной **на продвинутом** уровне, если все задачи решены, оформление отчета соответствует требованиям, продемонстрировано понимание необходимого теоретического материала, оценка составляет 0,8 максимального балла или более.

### 3. Шкала оценки

В общей оценке по дисциплине баллы за РГЗ(Р) учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

### 4. Примерный перечень тем РГЗ(Р)

## ЗАДАНИЕ НА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКУЮ РАБОТУ ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

### Часть 1. Определение максимальной касательной скорости при вращении

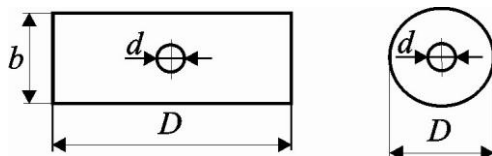
1.1. Изучить решения задачи Кирша о растяжении плоскости с круглым отверстием и задачи о вращении диска постоянной толщины с центральным круглым отверстием.

Записать формулы для напряжений.

1.2. Провести расчет на прочность по допускаемым напряжениям двух конструкций.

1) Стержня с центральным круглым отверстием, вращающегося вокруг оси отверстия, перпендикулярной оси стержня. Стержень имеет постоянное прямоугольное сечение, размеры которого в направлении, перпендикулярном оси отверстия много больше, чем его диаметр.

2) Диска постоянной толщины с центральным круглым отверстием, вращающегося вокруг своей оси.



$D = 2n$ , где  $n$  – порядковый номер магистранта в метрах,  $b = 0,1D$ ,  $d = 0,004$  м.

Использовать 4-ю теорию прочности, то есть критерий текучести Губера – Мизеса. Расчет провести для алюминиевого сплава В96Ц1 Т1, имеющего следующие характеристики: плотность  $\rho = 2890 \text{ кг/м}^3$ , условный предел текучести  $\sigma_{0,2} = 613 \text{ МПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,34$ , модуль Юнга  $E = 72 \text{ ГПа}$ . Вычислить значения максимальной касательной скорости наиболее удаленных от оси вращения точек стержня и диска при коэффициенте запаса прочности  $k_T = 1,5$ . Сравнить полученные значения максимальной скорости для стержня и диска.

1.3. Применить для расчета на прочность стержня, имеющего центральное отверстие диаметром 4 мм, градиентный критерий начала пластического течения. В качестве эквивалентного напряжения использовать интенсивность напряжений  $\sigma_i$ . Для алюминиевого сплава В96Ц1 Т1 принять значение параметра, имеющего размерность длины,  $L_0 = 0,16 \text{ мм}$ . Вычислить значения максимальной касательной скорости наиболее удаленных от оси вращения точек стержня при том же коэффициенте запаса прочности, что и в расчете по допускаемым напряжениям. Сравнить полученное значение максимальной касательной скорости концов стержня при использовании классического критерия Губера – Мизеса и градиентного критерия начала пластического течения.

## **Часть 2. Технологическая задача о деформировании цилиндрической трубы в конической матрице**

### **2.1. Варианты исходных данных**

Цилиндрическая труба протягивается осевой силой через абсолютно жесткую коническую матрицу так, что ее радиус увеличивается (операция протяжки, рис. 2.1) или уменьшается (операция волочения, рис. 2.2).

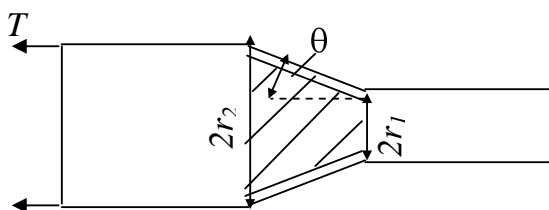


Рис. 2.1 Операция протяжки

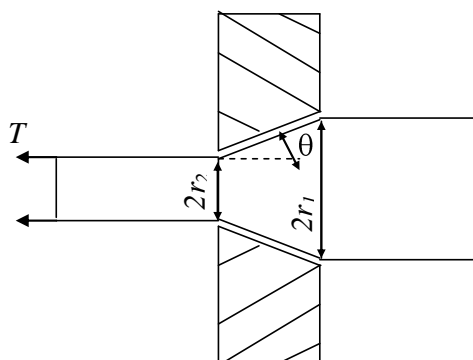


Рис. 2.2. Операция волочения

Требуется:

1. Дать математическую формулировку задачи на основе теории течения и модели идеального жестко-пластического материала.
2. Найти распределение окружных, меридиональных напряжений и толщины пластины вдоль матрицы (при изменении радиуса  $r$  от  $r_1$  до  $r_2$ ).
3. Определить потребную силу  $T$  технологической операции протяжки (волочения).

Исходные данные для вариантов №1-26 приведены в таблице 2.1

Таблица 2.1

Исходные данные для задачи №2

№ варианта	Операция	Соотношение радиусов $r_1/r_2$	Половина угла конической матрицы, $\theta$ , градус	Коэффициент трения $f$
1	волочение	1,5	10	0,09
2	протяжка	0,75	9	0,10
3	волочение	1,4	8	0,11
4	протяжка	0,85	7	0,12
5	волочение	1,6	6	0,13
6	протяжка	0,66	5	0,14
7	волочение	1,65	7	0,15
8	протяжка	0,80	10	0,16
9	волочение	1,45	9	0,17
10	протяжка	0,76	8	0,18
11	волочение	1,55	11	0,19
12	протяжка	0,62	7	0,20
13	волочение	1,70	10	0,085
14	протяжка	0,71	9	0,09
15	волочение	1,75	8	0,10
16	протяжка	0,78	7	0,11
17	волочение	1,63	7	0,12
18	протяжка	0,81	6	0,13
19	волочение	1,52	6	0,14
20	протяжка	0,69	5	0,15
21	волочение	1,48	5	0,16
22	протяжка	0,65	8	0,17
23	волочение	1,80	9	0,18
24	протяжка	0,73	4	0,19
25	протяжка	0,66	11	0,21
26	волочение	1,64	8	0,17

## 2.2. Пример выполнения задания №2

Цилиндрическая труба толщиной  $h$  протягивается погонной осевой силой  $T$  через абсолютно жесткую коническую матрицу так, что ее радиус увеличивается (операция протяжки, см. рис.2.1). Соотношение радиусов  $r_1/r_2 = 0,65$ , половина угла конической матрицы  $\theta = 7^\circ$ , коэффициент трения  $f = 0,12$ . Требуется:

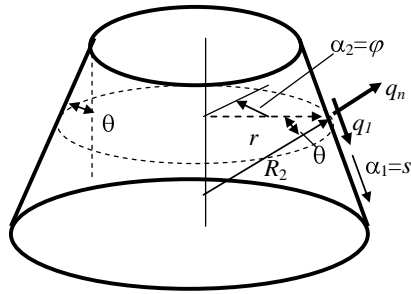
1. Дать математическую формулировку задачи на основе теории течения и модели идеального жестко-пластического материала (предел текучести –  $\sigma_T$ ).

2. Найти распределение окружных, меридиональных напряжений и толщины трубы вдоль матрицы (при изменении радиуса от  $r_1$  до  $r_2$ ).

3. Определить требуемую погонную силу  $T$  технологической операции протяжки. Допущения, принимаемые при решении данной задачи [1, 2]:

1. полагаем, что материал трубы идеальный жесткопластический;
2. матрица абсолютно жесткая и имеет коническую форму;
3. пренебрегаем изгибающими моментами, возникающими при деформировании трубы, то есть, при описании деформирования трубы используем безмоментную теорию.

Участок трубы при движении вдоль матрицы представляет собой коническую оболочку, нагруженную осесимметрично. Учитывая осевую симметрию, запишем уравнения равновесия:



$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 \right] + q_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = q_n$$

Рис. 2.3. Безмоментная коническая оболочка

Здесь:  $\alpha_1, \alpha_2$  – криволинейные координаты;  $A_1, A_2$  – параметры Ламе;  $T_1, T_2$  – нормальные усилия в оболочке,  $q_1, q_n$  – проекции внешних распределенных сил на направления  $\alpha_1$  и нормаль (рис. 2.3). Для конической оболочки  $R_1 = \infty$ .

В соответствии с рис. 2.3. имеем:

$$ds_1 = d\alpha_1 = ds, A_1 = 1, ds_2 = r d\alpha_2 = r d\varphi = R_2 \cos \theta d\varphi, A_2 = r = R_2 \cos \theta. \quad (2.2)$$

Уравнения равновесия (2.1) с учетом (2.2) запишем в виде:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{d}{ds} r T_1 - \frac{dr}{ds} T_2 \right] + q_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{T_2 \cos \theta}{r} = q_n \quad (2.4)$$

Так как  $ds = dr / \sin \theta$ , то (2.3) примет вид:

$$\frac{d}{dr} r T_1 - T_2 + \frac{q_1 r}{\sin \theta} = 0 \quad (2.5)$$

Перейдем к напряжениям:

$$T_1 = \sigma_1 h, \quad T_2 = \sigma_2 h \quad (2.6)$$

где  $\sigma_1$  – меридиональное,  $\sigma_2$  – окружное напряжения,  $h$  – толщина оболочки.

Из (2.4) с учетом (2.6) получим:

$$q_n = \frac{\sigma_2 h \cos \theta}{r} \quad (2.7)$$

Поскольку оболочка скользит по матрице, то составляющую нагрузки  $q_1$  можно выразить через  $q_n$ :

$$q_1 = f q_n \quad (2.8)$$

где  $f$  – коэффициент трения.

Преобразуем (2.5) с учетом (2.6), (2.8):

$$r \frac{d\sigma_1}{dr} + \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \sigma_1 + \sigma_1 - k\sigma_2 = 0 \quad (2.9)$$

где принято обозначение:

$$k = 1 + f \operatorname{ctg} \theta . \quad (2.10)$$

Так как

$$d\varepsilon_2 = \frac{dr}{r}, d\varepsilon_n = \frac{dh}{h}, \quad (2.11)$$

то (2.9) перепишем в виде:

$$r \frac{d\sigma_1}{dr} + \frac{d\varepsilon_n}{d\varepsilon_2} \sigma_1 + \sigma_1 - k\sigma_2 = 0 \quad (2.12)$$

Запишем уравнения теории течения для жестко-пластического тела (упругими приращениями компонент деформации пренебрегаем) [1]:

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_1 - \sigma_0, \quad d\varepsilon_2 = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_2 - \sigma_0, \quad d\varepsilon_n = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i} \sigma_n - \sigma_0. \quad (2.13)$$

Так как напряженное состояние двумерное ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_n = 0$ ), то

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_n = \frac{1}{3} \sigma_1 + \sigma_2, \quad (\sigma_n = 0). \quad (2.14)$$

Подставляем (2.14) в (2.13):

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\varepsilon_i}{2\sigma_i} 2\sigma_1 - \sigma_2, \quad d\varepsilon_2 = \frac{d\varepsilon_i}{2\sigma_i} 2\sigma_2 - \sigma_1, \quad d\varepsilon_n = \frac{d\varepsilon_i}{2\sigma_i} \sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.15)$$

Подставляем (2.15) в (2.12) и после преобразований получим:

$$r \frac{d\sigma_1}{dr} + \frac{\sigma_2 - 2\sigma_1}{2\sigma_2 - \sigma_1} \sigma_1 - k\sigma_2 = 0. \quad (2.16)$$

Запишем условие пластичности:

$$\sigma_i^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2 \quad (2.17)$$

Величины  $\sigma_1, \sigma_2$  связаны соотношением (3.17), следовательно, их можно выразить через один параметр:

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \psi, \quad \sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos(\psi - \frac{\pi}{3}) \quad (2.18)$$

Для операции протяжки  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$  и, следовательно,  $-\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Подставляем (2.18) в (2.16):

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \operatorname{tg}^2(\psi) d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k) \operatorname{tg}(\psi) - \sqrt{3} k \operatorname{tg}^2(\psi)} = \Phi(\psi) \quad (2.19)$$

Интегрируя (2.19), получим:

$$\frac{r}{r_1} = e^{\int_{\psi_1}^{\psi} \Phi(\psi) d\psi} \quad (2.20)$$

где  $r_1$  – радиус оболочки при входе в матрицу (рис. 2.2),  $\psi_1$  – значение параметра  $\psi$  при  $r=r_1$ .

Для определения  $\psi_1$  используем граничное условие:

$$r = r_1 \quad \sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \cos \psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Найдем изменение толщины при прохождении через матрицу:

$$\frac{dh}{h} = d\varepsilon_n = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} d\varepsilon_2 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} \frac{dr}{r}. \quad (2.21)$$

При записи (2.21) учтены соотношения (2.15). Подставляя (2.19) в (2.21), получим:

$$\frac{dh}{h} = -\frac{tg\psi (tg\psi + \sqrt{3})}{-\sqrt{3} + (1-k)tg\psi - \sqrt{3}k tg^2\psi} = \Psi(\psi) \quad (2.22)$$

После интегрирования (3.22), приходим к параметрическому равенству:

$$\frac{h}{h_1} = e^{\int_{\psi_1}^{\psi} \Psi(\psi) d\psi} \quad (2.23)$$

где  $h_1$  – начальная толщина трубы при входе в матрицу.

Уравнения (2.20), (2.18), (2.23) позволяют численно определить зависимости напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и толщины оболочки  $h$  при движении вдоль матрицы в зависимости от параметра  $r$  от  $r_1$  до  $r_2$ . Предварительно учтем диапазон изменения параметра  $-\pi/6 \leq \psi \leq \pi/2$  и начальное значение  $\psi = \pi/2$ . Далее образуется цикл, при котором задается ряд значений параметра  $\psi = \psi_k = \pi/2 + k \cdot \Delta\psi$  с отрицательным шагом  $\Delta\psi < 0$  ( $k$  – номер цикла). Для каждого значения  $\psi_k$  находятся с помощью (2.20), (2.23)  $r/r_1$ ,  $h/h_1$  и с помощью (2.18) напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , соответствующие параметру  $\psi_k$ . Цикл заканчивается при достижении  $r/r_1$  заданной величины  $r_2/r_1$ .

Найдем требуемую силу протяжки (рис. 2.4). Рассмотрим интегральное равновесие элемента:

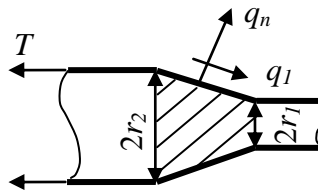


Рис. 2.4. Определение силы протяжки

Сила  $q_n$  – определяется выражением (2.4), а сила  $q_1$  – выражением (2.5).

Составляем интегральное уравнение равновесия:

$$T \cdot 2\pi r_2 - \int_{r_1}^{r_2} q_n ds \cdot 2\pi r \sin \theta - \int_{r_1}^{r_2} q_1 ds \cdot 2\pi r \cos \theta = 0,$$

где  $ds = dr/\sin \theta$ .

После преобразования с учетом (2.8) будем иметь:

$$T = \frac{1 + fctg\theta}{r_2} \int_{r_1}^{r_2} r q_n dr. \quad (2.24)$$

Подставляя выражение (2.7) для  $q_n$  и (2.20) для  $r$  в (2.24) и переходя к переменной  $\psi$ , получим:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1 + fctg\theta}{r_2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left( r_1 e^{\int_{\psi_1}^{\psi} \Phi(\psi') d\psi'} \right)^2 \frac{\sigma_2 h \cos \theta}{r} \Phi(\psi) d\psi = \\ &= (1 + fctg\theta) \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot h_1 \cdot \sigma_T \cdot \cos \theta \cdot \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left( e^{\int_{\psi_1}^{\psi} \Phi(\psi') d\psi'} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot e^{\int_{\psi_1}^{\psi} \Psi(\psi') d\psi'} \Phi(\psi) d\psi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

В выражении (2.25) толщина трубы на входе  $h_1$  и предел текучести  $\sigma_T$  являются задаваемыми параметрами. Разделив выражение для  $T$  на произведение  $h_1 \sigma_T$ , представим погонное усилие  $T$  в безразмерном виде:

$$T^* = \frac{T}{h_1 \cdot \sigma_T}.$$

После вычислений получим:  $T^* = 0,427$ .

### Список литературы

1. Малинин Н.Н. Теория пластичности и ползучести. – М.: Наука, 1975. – 400 с.
2. Можаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести. – Киев: Выща школа, 1991. – 264 с.