Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

53
Ф 503

№ 4174

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Методические указания

Решение задач по физике для студентов I и II курсов
дневной и заочной форм обучения

НОВОСИБИРСК
2012

УДК 537.8(07)
Ф 503

Составители: *Л.М. Родникова, Н.Я. Усольцева, Н.В. Чичерина*

Рецензент *В.В. Христофоров*, доцент

Методические указания предназначены в помощь студентам при решении задач по физике (на практических занятиях, при самостоятельной работе, при выполнении РГЗ). В них рассмотрены задачи различного уровня по разделу «Электромагнетизм».

Указания полезны для студентов всех форм обучения и различных факультетов.

Работа подготовлена на кафедре общей физики

1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА
ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Индукция магнитного поля, создаваемого бесконечно малым элементом проводника $d\mathbf{l}$ с током I в точке, положение которой задается радиусом-вектором $\mathbf{r}$, определяется ***законом Био–Савара–Лапласа***:

$d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \dfrac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}$ – в векторном виде, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды. Для вакуума $\mu = 1$.

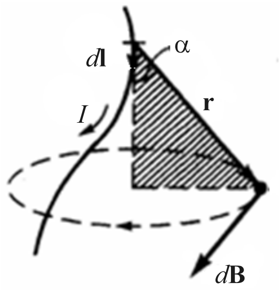


Рис. 1.1

Направление вектора $d\mathbf{B}$ задается направлением векторного произведения векторов $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$: вектор $d\mathbf{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

Модуль вектора $d\mathbf{B}$ определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \frac{dl \sin\alpha}{r^2},$$

где α – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ (рис. 1.1).

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив ***принцип суперпозиции.*** Вектор индукции $\mathbf{B}$ магнитного поля, порождаемого несколькими источниками (движущимися зарядами, токами), в любой точке поля равен геометрической (векторной) сумме индукций полей $\mathbf{B}_i$, создаваемых каждым отдельным источником в данной точке:

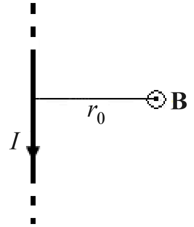
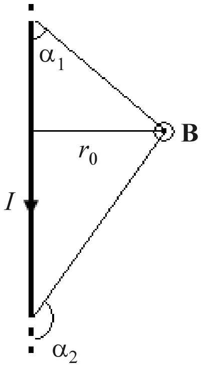
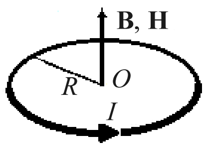
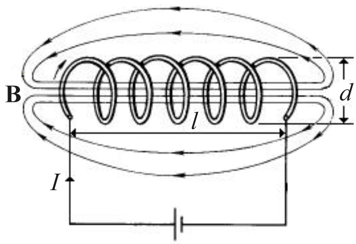
$$\mathbf{B} = \Sigma \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{B} = \int d\mathbf{B}_i .$$

Совместное применение закона Био–Савара–Лапласа и принципа суперпозиции позволяет вычислить магнитную индукцию для любых систем токов.

Для однородной изотропной среды магнитная индукция $\mathbf{B}$ связана с напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$ (см. таблицу) соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}.$$

Индукция B и напряженность H магнитного поля

Бесконечный прямолинейный проводник с током I		$B = \dfrac{\mu_0\mu I}{2\pi r_0}$, $[B] = \text{Тл}$ $H = \dfrac{I}{2\pi r_0}$, $[H] = \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$
Отрезок прямого провода с током I		$B = \dfrac{\mu_0\mu I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$ $H = \dfrac{I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$
Круговой виток с током I: магнитное поле в центре витка		$B = \dfrac{\mu_0\mu I}{2R}$ $H = \dfrac{I}{2R}$
Соленоид: магнитное поле внутри соленоида: в точках на его оси, удаленных от концов		Если $l >> d$, $n = \dfrac{N}{l}$ $B = \mu_0\mu n I$ $H = nI$

Соленоид – цилиндрическая катушка длиной l и диаметра d, состоящая из большого числа N витков проволоки, образующих винтовую линию.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.1

По двум бесконечно длинным прямым проводам, находящимся на расстоянии d = 5 см друг от друга в воздухе, текут токи силой I = 10 А каждый. Определить индукцию B поля, создаваемого токами в точке O, лежащей посередине между проводами, для случаев:

а) провода параллельны, токи текут в одном направлении;

б) провода параллельны, токи текут в противоположных направлениях;

в) провода перпендикулярны и лежат в параллельных плоскостях; направление токов указано на рис. 1.

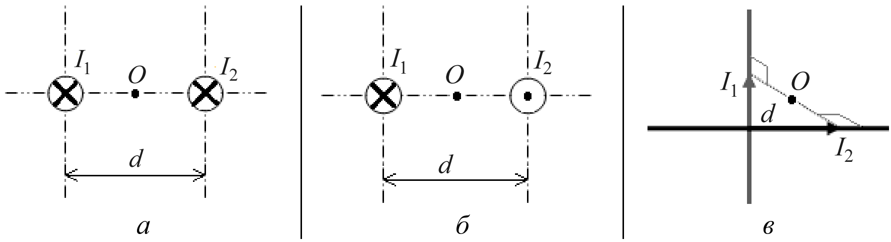


Рис. 1 к примеру 1.1

Дано:

$I_1 = I_2$ = 10 А
d = 5 см = 0,05 м
μ = 1 (воздух)

B – ?

Решение

Для решения поставленной задачи применим принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2, \qquad (1)$$

где $\mathbf{B}_1$ – индукция магнитного поля, создаваемого током I_1; $\mathbf{B}_2$ – индукция магнитного поля, создаваемого током I_2. Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечным прямым проводником с током I, на расстоянии r от оси проводника вычисляется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r_0}.$$

В данной задаче во всех трех случаях абсолютные значения индукций B_1 и B_2 одинаковы, так как точки выбраны на равных расстояниях от проводников, по которым текут равные токи. Если $r_0 = \dfrac{d}{2}$, то

$$B_i = \frac{\mu_0 \mu I}{\pi d}. \qquad (2)$$

На рис. 2 (случай а) покажем силовые линии магнитного поля токов I_1 и I_2 (окружности, проходящие через точку O). Направление силовых линий задается правилом правого винта. Векторы магнитной индукции направлены по касательной к силовым линиям.

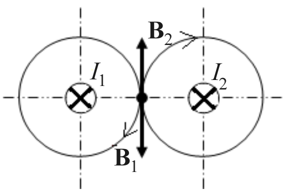


Рис. 2 к примеру 1.1

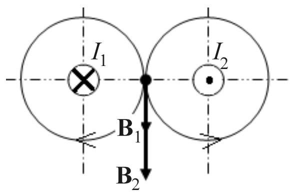


Рис. 3 к примеру 1.1

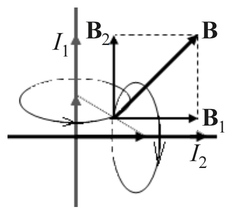


Рис. 4 к примеру 1.1

В данном случае векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ направлены противоположно, следовательно,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = 0.$$

На рис. 3 (случай б) векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ сонаправлены, следовательно,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = 2\mathbf{B}_1, \quad B = 2B_1 = \frac{2\mu_0 \mu I}{\pi d}.$$

Проведем вычисления:

$$B = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10}{\pi \cdot 0{,}05} = \frac{80 \cdot 10^{-7}}{0{,}05} = 0{,}16 \cdot 10^{-3}\,\text{Тл}.$$

На рис. 4 (случай в) векторы индукций магнитных полей $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$, создаваемых токами в точке, лежащей на середине общего перпендикуляра, взаимно перпендикулярны, следовательно, модуль результирующей индукции магнитного поля можно найти по теореме Пифагора:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = B_1\sqrt{2} = \frac{\mu_0 \mu I \sqrt{2}}{\pi d};$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu I \sqrt{2}}{\pi d}.$$

Проведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1{,}41}{\pi \cdot 0{,}05} = \frac{56{,}4 \cdot 10^{-7}}{0{,}05} = 0{,}113 \cdot 10^{-3}\,\text{Тл}.$$

Ответ. а) $B = 0$; б) $B = 0{,}16 \cdot 10^{-3}$ Тл; в) $B = 0{,}113 \cdot 10^{-3}$ Тл.

Пример 1.2

По двум параллельным бесконечно длинным проводникам текут одинаковые токи в противоположных направлениях I = 50 А. Проводники находятся на расстоянии a = 9 см друг от друга (рис. 1). Определить индукцию магнитного поля в точке, отстоящей от одного проводника на расстоянии r_1 = 4 см и от другого – на расстоянии r_2 = 12 см.

Дано:

I = 50 А
a = 9 см = $9 \cdot 10^{-2}$ м
r_1 = 4 см = $4 \cdot 10^{-2}$ м
r_2 = 12 см = $12 \cdot 10^{-2}$ м

B – ?

Решение

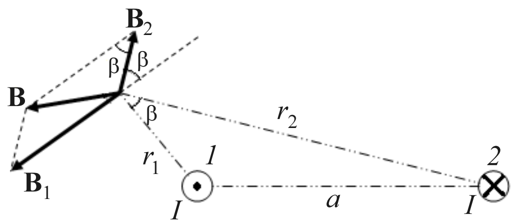


Рис. 1 к примеру 1.2

Для решения поставленной задачи применим принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Модуль результирующего вектора магнитной индукции B может быть найден с использованием теоремы косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos\beta}\,. \qquad (1)$$

Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечным прямым проводником с током I, на расстоянии r_0 от оси проводника вычисляется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 \mu \cdot I}{2\pi \cdot r_0}.$$

Для нашего случая $\mu = 1$, следовательно,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r_1}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r_2}. \qquad (2)$$

Так как $a^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\beta$, следовательно,

$$\cos\beta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{2r_1 r_2}. \qquad (3)$$

Подставляя выражения (3) и (2) в (1), получим

$$B = \sqrt{\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r_1^2} + \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r_2^2} - 2\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r_1 r_2}\frac{\left(r_1^2 + r_2^2 - a^2\right)}{2r_1 r_2}};$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - 2\frac{1}{r_1 r_2}\frac{\left(r_1^2 + r_2^2 - a^2\right)}{2r_1 r_2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{r_2^2 + r_1^2 - \left(r_1^2 + r_2^2 - a^2\right)}{r_1^2 r_2^2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{r_1^2 r_2^2}} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r_1 r_2};$$

$$B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r_1 r_2}.$$

Проведем вычисления:

$$B=\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot50\cdot9\cdot10^{-2}}{2\pi\cdot4\cdot10^{-2}\cdot12\cdot10^{-2}}=\frac{10^{-7}\cdot50\cdot3}{2\cdot10^{-2}\cdot4}=18{,}75\cdot10^{-5}=0{,}19\cdot10^{-3}\text{ Тл}.$$

Ответ. $B=0{,}19\cdot10^{-3}$ Тл .

Пример 1.3

Четыре прямых бесконечно длинных проводника с одинаково направленными токами I = 10 А расположены в вершинах квадрата со стороной a = 20 см (рис. 1). Определить напряженность магнитного поля в середине одной из сторон.

Дано:

I = 10 А
a = 20 см = 0,2 м
B – ?

H – ?

Решение

Для решения поставленной задачи применим принцип суперпозиции:

$$\mathbf{H}_A=\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_3+\mathbf{H}_4.$$

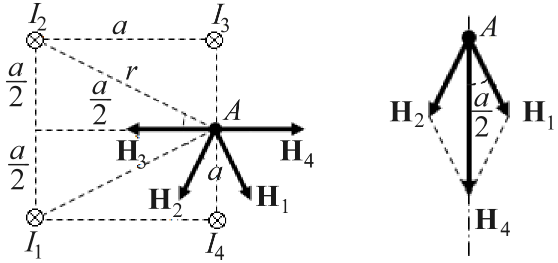


Рис. 1 к примеру 1.3

Из геометрической симметрии задачи следует, что векторы $\mathbf{H}_3$ и $\mathbf{H}_4$ равны по величине и противоположны по направлению, т. е. $\mathbf{H}_3=-\mathbf{H}_4$, следовательно, $\mathbf{H}_A=\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2$; векторы $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ равны по величине:

$$H_1=H_2.$$

Напряженность магнитного поля, создаваемого бесконечным прямым проводником с током I, на расстоянии r_0 от оси проводника вычисляется по формуле

$$H = \frac{I}{2\pi r_0};$$

в нашем случае

$$r_0 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; \quad H_1 = \frac{I \cdot 2}{2\pi a\sqrt{5}} = \frac{I}{\pi a\sqrt{5}}; \tag{1}$$

$$H_A = 2H_1 \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{r} = \frac{a \cdot 2}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ следовательно,}$$

$$H_A = 2H_1 \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

С учетом (1) для напряженности магнитного поля в точке A получим

$$H_A = 2\frac{I}{\pi a\sqrt{5}} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4I}{5\pi a}; \quad H_A = \frac{4I}{5\pi a}.$$

Проведем вычисления:

$$H_A = \frac{4 \cdot 10}{5 \cdot 3.14 \cdot 0,2} = \frac{40}{3,14} = 12,7\ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Ответ. $H_A = 12,7\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Пример 1.4

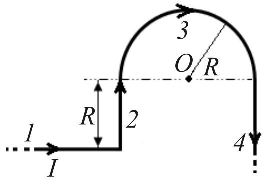


Рис. 1 к примеру 1.4

Проводник, изображенный на рис. 1, состоит из четырех участков: два из них полубесконечные прямые (*1*) и (*4*), участок прямого провода (*2*) длиной R = 10 см и проводник в виде полуокружности (*3*) радиуса R = 10 см. По проводнику течет ток I = 1 А. Определить напряженность магнитного поля в центре полуокружности.

Дано:	**_Решение_**
$I = 1$ А $R = 0{,}1$ м	Для решения (рис. 2) поставленной задачи применим принцип суперпозиции магнитных полей:
$H_O - ?$	$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 + \mathbf{H}_4 .$$

В соответствии с правилом правого винта вектор $\mathbf{H}_1$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа «к нам», векторы $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_3$ и $\mathbf{H}_4$ – перпендикулярно плоскости чертежа «от нас».

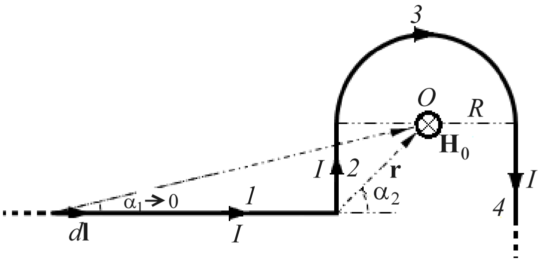


Рис. 2 к примеру 1.4

Следовательно, модуль

$$H_O = H_2 + H_3 + H_4 - H_1 . \qquad (1)$$

Напряженность магнитного поля, созданного отрезком прямого провода, определяется выражением:

$$H = \frac{I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

С учетом геометрических соотношений задачи получим:

$$H_1 = \frac{I}{4\pi r_0}\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{I}{4\pi R}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \qquad (2)$$

$$H_2 = \frac{I}{4\pi r_0}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{I}{4\pi R}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \qquad (3)$$

$$H_4 = \frac{I}{4\pi r_0}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi\right) = \frac{I}{4\pi R}. \qquad (4)$$

Третий участок проводника представляет собой половину кругового витка, следовательно:

$$H_3 = \frac{1}{2}H_{\text{витка}} = \frac{1}{2}\frac{I}{2R} = \frac{I}{4R}. \qquad (5)$$

Подставляя выражения (2)–(5) в (1), получим:

$$H_O = \frac{I}{4\pi R}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{I}{4R} + \frac{I}{4\pi R} - \frac{I}{4\pi R}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$H_O = \frac{I}{4\pi R}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi + 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{I}{4\pi R}\left(\sqrt{2} + \pi\right);$$

$$H_O = \frac{I}{4\pi R}\left(\sqrt{2} + \pi\right).$$

Проведем вычисления:

$$H_O = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1}\left(\sqrt{2} + \pi\right) = 3{,}625 = 3{,}7\ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Ответ. $H_O = 3{,}7\ \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Пример 1.5

По контуру, изображенному на рис. 1, идет ток силой I = 10 А. Определить магнитную индукцию в точке O, если радиус дуги R = 10 см, угол φ = 60°.

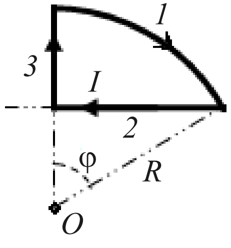


Рис. 1 к примеру 1.5

Дано:	Решение
I = 10 А R = 10 см = 0,1 м $\varphi = 60° = \dfrac{\pi}{3}$	Для решения (рис. 2) поставленной задачи применим принцип суперпозиции магнитных полей: $$\mathbf{B}_O = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3,$$
B_O – ?	где $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ – индукции магнитных полей, создаваемых в точке O тремя участками контура соответственно.

Вектор $\mathbf{B}_1$ в точке O направлен перпендикулярно плоскости чертежа «от нас», вектор $\mathbf{B}_2$ – перпендикулярно плоскости чертежа «к нам». Вектор $\mathbf{B}_3 = 0$, так как магнитное поле прямого проводника на его оси отсутствует.

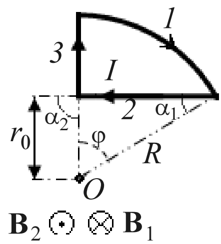


Рис. 2 к примеру 1.5

Тогда для модуля $|\mathbf{B}_0|$ справедливо выражение

$$B_0 = |B_1 - B_2|. \qquad (1)$$

Для нахождения $|\mathbf{B}_1| = B_1$ учтем, что $\mathbf{B}_1$ создается частью кругового витка с током, опирающегося на угол φ:

$$B_1 = \frac{B_{\text{круг.вит.}}}{2\pi}\varphi = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}\frac{\varphi}{2\pi}.$$

Так как по условию $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, следовательно,

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}\frac{\pi}{2\pi \cdot 3} = \frac{\mu_0 \mu I}{12R}. \qquad (2)$$

Для нахождения $|\mathbf{B}_2| = B_2$ используем формулу для расчета индукции магнитного поля для отрезка прямого проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

В нашем случае:

$$\alpha_1 = 90° - 60° = 30°\,, \quad \alpha_2 = 90°\,, \quad r_0 = R\sin\alpha_1 = R\sin 30° = \frac{R}{2}\,,$$

следовательно,

$$B_2 = \frac{\mu_0\mu I\cdot 2}{4\pi R}\left(\cos 30 - \cos 90\right) = \frac{\mu_0\mu I\cdot 2}{4\pi R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) = \frac{\mu_0\mu I\cdot\sqrt{3}}{4\pi R}. \qquad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим

$$B_O = \left|\frac{\mu_0\mu I}{12R} - \frac{\mu_0\mu I\sqrt{3}}{4\pi R}\right| = \frac{\mu_0\mu I}{4R}\left|\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right| = \frac{\mu_0\mu I}{12\pi R}\left|\pi - 3\sqrt{3}\right|.$$

$$B_O = \frac{\mu_0\mu I}{12\pi R}\left|\pi - 3\sqrt{3}\right|.$$

Проведем вычисления:

$$B_O = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 10}{12\pi\cdot 0{,}1}\left|\pi - 3\sqrt{3}\right| = 0{,}686\cdot 10^{-5} = 6{,}9\cdot 10^{-6}\ \text{Тл}.$$

Видно, что значение $\left(\pi - 3\sqrt{3}\right) < 0$. Это означает, что $|\mathbf{B}_2| > |\mathbf{B}_1|$ в точке O, следовательно, результирующий вектор $\mathbf{B}_O$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{B}_2$.

Ответ. $B_O = 6{,}9\cdot 10^{-6}$ Тл.

2. СИЛА ЛОРЕНЦА. СИЛА АМПЕРА РАБОТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

На электрический заряд q, движущийся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ в магнитном поле $\mathbf{B}$, действует сила Лоренца $\mathbf{F}_{\text{Л}}$:

$$\mathbf{F}_{\text{Л}} = q[\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}].$$

Направление вектора $\mathbf{F}_Л$ задается направлением векторного произведения векторов $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{B}$, вектор $\mathbf{F}_Л$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{B}$ (рис. 2.1).

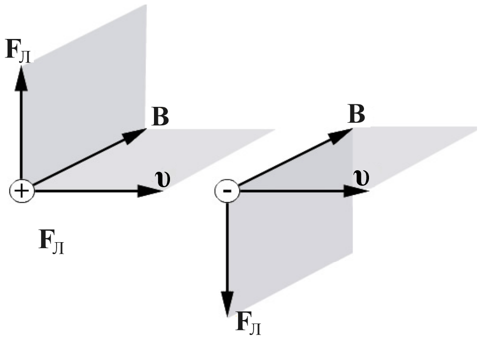


Рис. 2.1

Модуль силы Лоренца $F_Л$ определяется выражением

$$F_Л = qvB\sin\alpha ,$$

где α – угол между векторами $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{B}$.

В однородном магнитном поле заряд движется по винтовой линии радиуса r и шагом винта h:

$$r = \frac{mv\sin\alpha}{|q|B}, \qquad h = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{|q|B},$$

где α – угол между вектором скорости заряда $\boldsymbol{\upsilon}$ и вектором индукции магнитного поля $\mathbf{B}$.

Если скорость заряда перпендикулярна силовым линиям магнитного поля, то заряженная частица будет двигаться по окружности радиуса:

$$r = \frac{m\upsilon}{|q|B}.$$

Сила, с которой магнитное поле действует на проводник с током, называется силой Ампера.

Сила, действующая на бесконечно малый элемент проводника $d\mathbf{l}$ с током I в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$, определяется выражением

$$d\mathbf{F} = I\,[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]\,.$$

Направление вектора $d\mathbf{F}$ задается направлением векторного произведения векторов $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$, вектор $d\mathbf{F}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$.

Модуль силы Ампера dF определяется выражением

$$dF = IdlB\sin\alpha\,,$$

где α – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$.

Сила, действующая на элемент $d\mathbf{l}$ прямолинейного проводника с током I, со стороны длинного проводника с током I^*, расположенного параллельно первому на расстоянии d, равна

$$dF = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2II^*}{d}dl\,.$$

На виток в магнитном поле действует вращающий момент

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_{\text{м}} \times \mathbf{B}]\,,$$

где $\mathbf{p}_{\text{м}}$ – магнитный момент контура с током, $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции поля.

Магнитный момент контура с током задается выражением

$$\mathbf{p}_{\text{м}} = IS\mathbf{n}\,,$$

где I – ток в контуре, S – площадь контура, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура, его направление задается направлением поступательного движения правого винта.

Величина момента сил определяется выражением

$$M = ISB\sin\alpha\,,$$

где α – угол между вектором нормали к плоскости контура $\mathbf{n}$ и вектором индукции магнитного поля $\mathbf{B}$.

Элементарная работа по перемещению проводника с током I в магнитном поле

$$dA = Id\Phi\,,$$

где $d\Phi$ – элементарный магнитный поток, пересеченный проводником при элементарном перемещении.

Чтобы найти работу при конечном перемещении проводника, необходимо проинтегрировать данное выражение:

$$A_{12} = \int_1^2 I d\Phi = I \Delta\Phi .$$

Элементарная работа по перемещению контура с током I в магнитном поле

$$dA = I d\Phi ,$$

где $d\Phi$ – приращение магнитного потока сквозь контур при его перемещении.

Чтобы найти работу при конечном перемещении контура, необходимо проинтегрировать данное выражение:

$$A_{12} = \int_1^2 I d\Phi .$$

Если ток в контуре поддерживается постоянным, то

$$A_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1) ,$$

где Φ_2 и Φ_1 – магнитные потоки сквозь контур в начальном и конечном положениях.

Элементарный магнитный поток $d\Phi$ (поток вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$) сквозь поверхность площадью $d\mathrm{S}$ равен:

$$d\Phi = \mathbf{B} d\mathbf{S} , \text{ где } d\mathbf{S} = dS\mathbf{n} .$$

В случае однородного поля, поток вектора $\mathbf{B}$ через плоскую поверхность S рассчитывается по формуле

$$\Phi = BS\cos\alpha ,$$

где α – угол между вектором нормали $\mathbf{n}$ к плоскости S и вектором индукции магнитного поля.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 2.1

Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов U = 3000 В, попадает в однородное магнитное поле, силовые линии которого перпендикулярны скорости его движения, и начинает вращаться с частотой $\nu = 10^9$ Гц. Определить значение силы Лоренца, действующей на протон.

Дано:

$U = 3\cdot10^3$ В

$\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$

$B = \mathrm{const}$

$\nu = 10^9$ Гц

$m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг

$q_p = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл

$F_{\text{Л}}$ – ?

Решение

По условию задачи, протон, прежде чем попасть в магнитное поле, проходит ускоряющую разность потенциалов. Для нахождения скорости протона воспользуемся законом сохранения энергии. Работа электрического поля равна изменению кинетической энергии протона:

$$A_{\text{эл}} = \Delta W_{\text{кин}};$$

$$q_p U = \frac{m_p v^2}{2} - 0.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{2q_p U}{m_p}}. \qquad (1)$$

В магнитном поле на движущийся протон действует сила Лоренца. Величина силы Лоренца определяется выражением

$$F_{\text{Л}} = qvB\sin\alpha.$$

В нашем случае $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, $q = q_p$, следовательно,

$$F_{\text{Л}} = q_p vB. \qquad (2)$$

Чтобы найти величину индукции магнитного поля, воспользуемся выражением для силы Лоренца:

$$F_{\text{Л}} = q_p vB;$$

вторым законом Ньютона:

$$F_{Л} = m_p a$$

и выражением для центростремительного ускорения, с которым протон движется по окружности:

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega v = 2\pi\nu v .$$

Решая совместно эти уравнения, получим

$$q_p vB = m_p 2\pi\nu v ,$$

следовательно,

$$B = \frac{2\pi\nu m_p}{q_p} . \qquad (3)$$

Подставляя (1) и (3) в (2), получим выражение для силы Лоренца, действующей на протон:

$$F_{Л} = q_p \sqrt{\frac{2q_p U}{m_p}} \frac{2\pi\nu m_p}{q_p} = 2\pi\nu\sqrt{2q_p m_p U} ;$$

$$F_{Л} = 2\pi\nu\sqrt{2q_p m_p U} .$$

Проведем вычисления:

$$F_{Л} = 6,28\cdot 10^9 \sqrt{2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 1,67\cdot 10^{-27} 3\cdot 10^3} =$$

$$= 79,52\cdot 10^{-13} = 7,95\cdot 10^{-12} \text{ Н} .$$

Ответ. $F_{Л} = 7,95\cdot 10^{-12}$ Н **.**

Пример 2.2

Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно пластинам со скоростью υ = $2\cdot 10^7$ м/с. Длина конденсатора l = 7 см. Напряженность электрического поля в конденсаторе E = 15 кВ/м. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле, перпендикулярное электрическому. Индукция магнитного поля B = 15 мТл. Найти радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон в магнитном поле.

Дано:

$\upsilon = 2\cdot10^7$ м/с
$l = 7\cdot10^{-2}$ м
$E = 15\cdot10^3$ В/м
$B = 15\cdot10^{-3}$ Тл

R – ?
h – ?

Решение

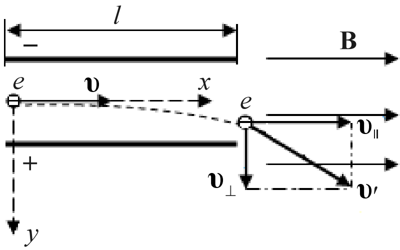


Рис. 1 к примеру 2.2

Движение электрона в конденсаторе является равномерным вдоль оси x и ускоренным вдоль оси y. Сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, сообщает ему ускорение, направленное вдоль оси y (рис. 1):

$$a_y = \frac{F_{\text{эл}}}{m_e} = \frac{Eq_e}{m_e}.$$

За время t движения внутри конденсатора электрон приобретает вертикальную составляющую скорости

$$v_y = a_y t = \frac{Eq_e t}{m_e}.$$

Двигаясь равномерно вдоль оси x со скоростью $\upsilon_x = \upsilon$, электрон за это же время t пройдет путь l, равный длине конденсатора:

$$l = vt,$$

следовательно, $t = \dfrac{l}{v}$.

С учетом этого

$$v_y = \frac{Eq_e l}{m_e v}. \qquad (1)$$

При вылете из конденсатора электрон будет иметь скорость

$$\boldsymbol{\upsilon}' = \boldsymbol{\upsilon}_{\perp} + \boldsymbol{\upsilon}_{\parallel},$$

где $\boldsymbol{\upsilon}_{\perp} = \boldsymbol{\upsilon}_y$ – составляющая скорости, перпендикулярная вектору $\mathbf{B}$; $\boldsymbol{\upsilon}_{\parallel} = \boldsymbol{\upsilon}_x = \boldsymbol{\upsilon}$ – составляющая скорости, параллельная вектору $\mathbf{B}$.

Влетая в магнитное поле под углом к силовым линиям, заряженная частица движется по винтовой траектории радиусом R с шагом h.

Радиус R можно найти, учитывая, что сила Лоренца сообщает протону центростремительное ускорение:

$$F_{\text{Л}} = ma; \tag{2}$$

$$qv_{\perp}B = m\frac{v^2}{R}. \tag{3}$$

Следовательно:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}; \tag{4}$$

$$h = Tv_{\parallel} = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}v_{\parallel} = \frac{2\pi m v_{\perp}}{qBv_{\perp}}v_{\parallel} = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}. \tag{5}$$

Учитывая (1), для радиуса и шага винтовой траектории получим окончательные выражения:

$$R = \frac{m_e E q_e l}{q_e B m_e v} = \frac{El}{Bv},$$

$$h = \frac{2\pi m_e v}{q_e B}.$$

Проведем вычисления:

$$R = \frac{15\cdot 10^3 \cdot 7\cdot 10^{-2}}{15\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^7} = 3{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{м},$$

$$h = \frac{6{,}28\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 2\cdot 10^7}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 15\cdot 10^{-3}} = 0{,}04767 = 47{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

Ответ. $R = 3{,}5\cdot 10^{-3}$ м; $h = 47{,}7\cdot 10^{-3}$ м.

Пример 2.3

Опишите движение электрона в однородных параллельных электрическом и магнитном полях. Начальная скорость электрона $\boldsymbol{\upsilon}_0$ направлена под углом α к векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Дано:	***Решение***
$\mathbf{B}\uparrow\uparrow\mathbf{E}$ $\angle(\boldsymbol{\upsilon}_0, \mathbf{E}) = \alpha$	
Характер движения – ?	

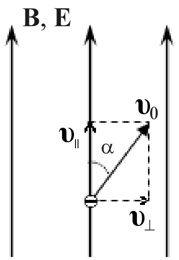


Рис. 1 к примеру 2.3

Представим движение электрона в электрическом и магнитном полях как два независимых движения – по полю и перпендикулярно ему (рис. 1).

Разложим вектор $\boldsymbol{\upsilon}_0$ на две составляющие:

$$\boldsymbol{\upsilon}_0 = \boldsymbol{\upsilon}_{||} + \boldsymbol{\upsilon}_{\perp}.$$

В отсутствии электрического поля ($\mathbf{E} = 0$) $\boldsymbol{\upsilon}_{||} = \text{const}$. Тогда под действием силы Лоренца движение заряженной частицы, начальная скорость которой $\boldsymbol{\upsilon}_0$ направлена под углом α к вектору магнитной индукции $\mathbf{B}$, происходит по винтовой линии (спирали). Радиус R винтовой линии зависит только от $\boldsymbol{\upsilon}_{\perp}$, а шаг h – от $\boldsymbol{\upsilon}_{||}$ (см. пример 2.2). При этом шаг h остается постоянным из-за неизменности $\boldsymbol{\upsilon}_{||}$.

В присутствии электрического поля ($\mathbf{E} \neq 0$) движение электрона в направлении поля становится равнозамедленным:

$$v_{||} = v_{0||} - at,$$

где $a = \dfrac{F_{\text{эл}}}{m} = \dfrac{Eq}{m}$.

При этом шаг спирали с течением времени уменьшается и в какой-то момент времени станет равным нулю. В этот момент $v_{\parallel} = 0$. Далее $v_{\parallel}$ изменит знак, и электрон начнет движение по спирали с увеличивающимся шагом h в обратном направлении. Электрон как бы «отразится» от некоторой плоскости, перпендикулярной векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Пример 2.4

Три прямых проводника с токами расположены параллельно друг другу, как изображено на рис. 1. Проводники с токами I_1 = 10 А и I_2 = 30 А бесконечно длинные, а проводник с током I_3 = 40 А имеет длину l = 2 м. Расстояние между проводниками a_1 = 30 см и a_2 = 40 см. Определить силу, действующую на проводник с током I_3.

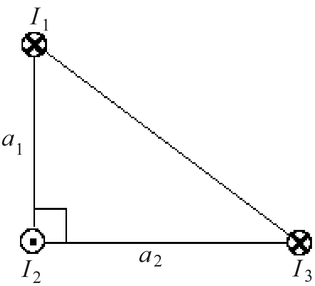


Рис. 1 к примеру 2.4

Дано:

I_1 = 10 А
I_2 = 30 А
I_3 = 40 А
l = 2 м
a_1 = 0,3 м
a_2 = 0,4 м

$\mathbf{F}_3$ – ?

Решение

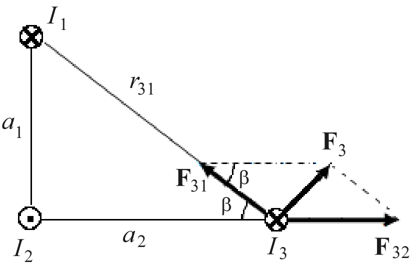


Рис. 2 к примеру 2.4

Для решения поставленной задачи применим принцип суперпозиции сил:

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32},$$

где $\mathbf{F}_{31}$ – сила Ампера, действующая на проводник с током I_3 со стороны тока I_1; $\mathbf{F}_{32}$ – сила Ампера, действующая на проводник с током I_3 со стороны тока I_2 (рис. 2).

Модуль силы F_3 может быть найден с использованием теоремы косинусов:

$$F_3 = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2 - 2F_{31}F_{32}\cos\beta}\,. \tag{1}$$

Сила, действующая на участок проводника длиной l с током I со стороны длинного проводника с током I^*, расположенного параллельно первому на расстоянии d от него, определяется выражением

$$F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2II^*}{d}l\,.$$

Следовательно, для модулей сил F_{31} и F_{32} имеем

$$F_{31} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_3I_1}{r_{31}}l\,,\quad F_{32} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_3I_2}{a_2}l\,, \tag{2}$$

где

$$r_{31} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,. \tag{3}$$

Найдем $\cos\beta$ из пространственного треугольника токов:

$$\cos\beta = \frac{a_2}{r_{31}} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\,. \tag{4}$$

Подставляя выражения (2)–(4) в (1), получим

$$F_3 = \sqrt{\left(\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_3I_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}l\right)^2 + \left(\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_3I_2}{a_2}l\right)^2 - 2\left(\frac{\mu_0\mu}{4\pi}2I_3l\right)^2\frac{I_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\frac{I_2}{a_2}\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}} =$$

$$= \frac{\mu_0\mu I_3 l}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{a_2}\right)^2 - 2\frac{I_1I_2}{\left(a_1^2+a_2^2\right)}\cdot 1} =$$

$$= \frac{\mu_0\mu I_3 l}{2\pi a_2}\sqrt{\frac{\left(I_2a_2 - I_1a_2\right)^2 + \left(I_2a_1\right)^2}{a_1^2+a_2^2}}\,.$$

Проведем вычисления:

$$F_3 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 40 \cdot 2}{2\pi \cdot 0,4} \cdot \sqrt{\frac{(30 \cdot 0,4 - 10 \cdot 0,4)^2 + (30 \cdot 0,3)^2}{0,09 + 0,16}} =$$

$$9633,3 \cdot 10^{-7} = 0,96 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

Ответ. $\mathbf{F}_3 = 0,96 \cdot 10^{-3}$ Н.

Пример 2.5

Найти модуль и направление вектора силы, действующей на единицу длины тонкого проводника с током I = 10 А в точке O, если проводник изогнут, как показано на рис. 1. Расстояние между длинными параллельными друг другу участками проводника l = 35 см.

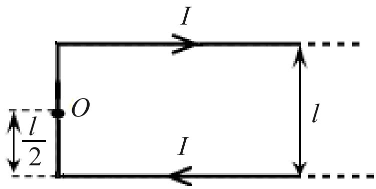


Рис. 1 к примеру 2.5

Дано:	***Решение***
I = 10 А l = 0,35 м	Сила, действующая на бесконечно малый элемент проводника $d\mathbf{l}$ с током I в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$, определяется выражением
$\frac{dF_0}{dl}$ – ?	$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}].$$

Для нашего случая

$$d\mathbf{F}_0 = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}], \qquad (1)$$

где $\mathbf{B}$ – вектор индукции результирующего поля, созданного в точке O полубесконечными проводниками 1 и 2 с током (рис. 2).

Модуль силы $d\mathbf{F}_0$ определяется выражением

$$dF_0 = IdlB\sin\alpha, \qquad (2)$$

где α – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$.

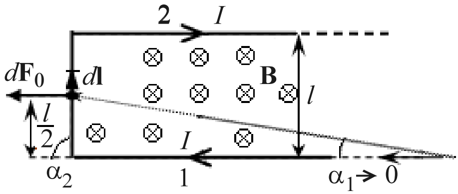


Рис. 2 к примеру 2.5

Величину и направление вектора $\mathbf{B}$ можно найти с использованием принципа суперпозиции:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 .$$

Векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ в точке O направлены перпендикулярно плоскости рис. 2 «от нас» – $\otimes$, следовательно, и вектор результирующего поля имеет такое же направление $(\otimes)$. С учетом этого угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$ прямой, $\alpha = 90°$, следовательно,

$$\sin\alpha = 1, \tag{3}$$

$$B = B_1 + B_2 ,$$

так как $B_1 = B_2$, то $B = 2B_1$.

Для нахождения B_1 используем формулу для расчета индукции магнитного поля для отрезка прямого проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

В нашем случае $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90°$, $r_0 = \dfrac{l}{2}$, следовательно,

$$B = 2B_1 = 2\frac{\mu_0 \mu I \cdot 2}{4\pi l}\left(1 - 0\right) = \frac{\mu_0 \mu I}{\pi l} . \tag{4}$$

Подставляя выражения (3) и (4) в (2), получим

$$dF_0 = Idl \frac{\mu_0 \mu I}{\pi l} \cdot 1 = \frac{\mu_0 \mu I^2}{\pi l} dl .$$

Тогда сила, приходящаяся на единицу длины проводника, равна

$$\frac{dF_0}{dl} = \frac{\mu_0 \mu I^2}{\pi l}.$$

Проведем вычисления:

$$\frac{dF_0}{dl} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^2}{\pi \cdot 0,35} = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{0,35} = 11,43 \cdot 10^{-5} = 0,11 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Ответ. $\frac{dF_0}{dl} = 0,11 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Пример 2.6

Круговой виток и два бесконечных длинных проводника расположены, как показано на рис. 1. Плоскость витка zOx параллельна проводникам, второй проводник проходит около центра витка. По первому прямому проводнику проходит ток I_1 = 1 А, по второму прямому – ток I_3 = 10 А. По витку течет ток I_2 = 1 А. Расстояние от центра витка до первого проводника r = 10 см, радиус витка R = 20 см. Определить силу, действующую на 1 см участка второго прямого проводника в точке O.

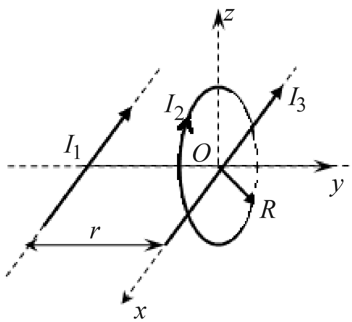


Рис. 1 к примеру 2.6

Дано*:*

$I_1 = I_2 = I$ =1 А
I_3 = 10 А
r = 0,10 м
R = 0,20 м
l_3 = 0,01 м

F_3 – ?

Решение

Для решения (рис. 2) поставленной задачи применим принцип суперпозиции сил:

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32},$$

где $\mathbf{F}_{31}$ – сила, действующая на проводник с током I_3 со стороны тока I_1; $\mathbf{F}_{32}$ – сила, действующая на проводник с током I_3 со стороны тока I_2.

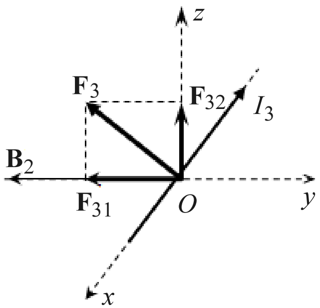


Рис. 2 к примеру 2.6

Сила, действующая на участок проводника длиной l с током I со стороны длинного проводника с током I^*, расположенного параллельно первому на расстоянии d от него, определяется выражением

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2II^*}{d} l .$$

Следовательно, для нашего случая величина силы F_{31} определяется выражением

$$F_{31} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_3 I_1}{r} l_3 , \qquad (1)$$

вектор силы $\mathbf{F}_{31}$ направлен в сторону, противоположную оси y (параллельные токи одного направления притягиваются).

Вектор магнитной индукции $\mathbf{B}_2$ в центре кругового витка с током I_2, направлен в сторону, противоположную оси y, величина $\mathbf{B}_2$ определяется выражением

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu I_2}{2R} .$$

Сила, действующая на малый участок проводника с током I_3 длиной l_3 в однородном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}_2$, определяется выражением

$$F_{32} = I_3 B_2 l_3 \sin 90 = \frac{\mu_0 \mu I_2 I_3}{2R} l_3 . \qquad (2)$$

Вектор $\mathbf{F}_{32}$ направлен по оси z.

Так как векторы $\mathbf{F}_{31}$ и $\mathbf{F}_{32}$ взаимно перпендикулярны, модуль силы $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}$ можно найти с использованием теоремы Пифагора:

$$F_3 = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2} \ .$$

С учетом (1) и (2) получим:

$$F_3 = \sqrt{\left(\frac{\mu_0\mu}{2\pi}\frac{I_3 I_1}{r}l_3\right)^2 + \left(\frac{\mu_0\mu}{2}\frac{I_2 I_3}{R}l_3\right)^2} = \frac{\mu_0\mu I_3 l_3}{2}\sqrt{\left(\frac{I_1}{\pi r}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{R}\right)^2} \ .$$

По условию задачи: $I_1 = I_2 = I$, следовательно,

$$F_3 = \frac{\mu_0\mu I_3 I_1 l_3}{2\pi r R}\sqrt{R^2 + (\pi r)^2} \ .$$

Проведем вычисления:

$$F_3 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0,01}{2\pi \cdot 0,1 \cdot 0,2}\sqrt{0,2^2 + (0,314)^2} = 0,3723 \cdot 10^{-6} = 0,37 \cdot 10^{-6}\ \text{Н} .$$

Ответ. $F_3 = 0,37 \cdot 10^{-6}$ Н .

Пример 2.7

Медный провод с сечением S = 1 мм^2 согнут в виде трех сторон квадрата и может вращаться, как показано на рис. 1, у горизонтальной оси OO'. Провод находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Когда по проводу идет ток I = 10 А, провод отклоняется от положения равновесия на угол α = 10°. Определить индукцию поля.

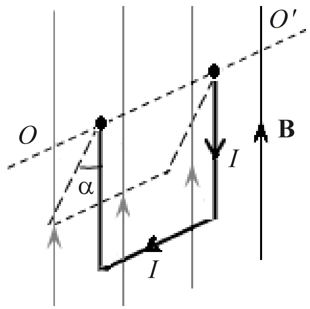


Рис. 1 к примеру 2.7

Дано:

$S = 1 \cdot 10^{-6}$ м^2
$I = 10$ А
$\alpha = 10°$
$\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3

B – ?

Решение

Проводник с током находится в магнитном поле и поле сил тяготения Земли, поэтому на каждую из трех его частей действуют и сила Ампера, и сила тяжести.

В начальный момент времени на боковые стороны рамки силы Ампера не действуют, так как угол между векторами $Id\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$ равен нулю или π. На горизонтальную сторону рамки действует сила Ампера, приводящая к ее отклонению от вертикального положения.

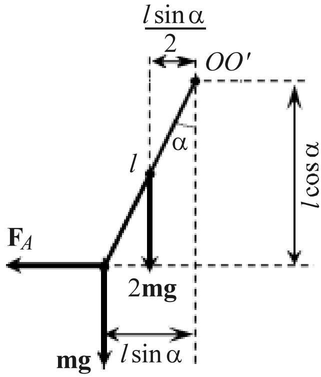


Рис. 2 к примеру 2.7

При отклонении рамки от положения равновесия появляются равные по модулю и противоположные по направлению силы Ампера, действующие на боковые стороны рамки (рис. 2). Суммарный вращающий момент этих сил равен нулю.

Сила Ампера, действующая на горизонтальный участок рамки, равна

$$F_A = IBl\sin 90° = IBl, \qquad (1)$$

где l – длина этой стороны рамки.

Эта сила не меняется при отклонении рамки, так как угол $\angle(Id\mathbf{l}, \mathbf{B}) = 90°$ остается неизменным.

Вращательный момент силы F_A относительно оси OO' равен

$$M_{\text{маг}} = F_A\left(l\cos\alpha\right), \qquad (2)$$

где $\left(l\cos\alpha\right)$ – плечо силы Ампера.

Суммарный момент сил тяжести, действующих на все стороны рамки, равен:

$$M_{\text{мех}} = mg\left(l\sin\alpha\right) + 2mg\left(\frac{l}{2}\sin\alpha\right), \qquad (3)$$

где $mg\left(l\sin\alpha\right)$ – момент силы тяжести, действующий на горизонтальный участок рамки; $\left(l\sin\alpha\right)$ – плечо этой силы; $2mg\left(\frac{l}{2}\sin\alpha\right)$ – момент силы тяжести, действующий на два боковых участка рамки; $\left(\frac{l}{2}\sin\alpha\right)$ – плечо силы тяжести, действующей на боковой участок.

Масса одной стороны рамки

$$m = \rho l S , \quad (4)$$

где ρ – плотность материала рамки.

Преобразуем (3) с учетом (4):

$$M_{\text{мех}} = 2mgl\sin\alpha = 2\rho lSgl\sin\alpha = 2\rho Sgl^2\sin\alpha . \quad (5)$$

При увеличении угла отклонения α механический момент сил тяжести ($M_{\text{мех}}$) растет, а вращательный момент сил Ампера ($M_{\text{маг}}$) уменьшается, и при равенстве моментов рамка установится в положении равновесия:

$$M_{\text{маг}} = M_{\text{мех}} . \quad (6)$$

Подставляя (2) и (5) в уравнение равновесия (6), получим

$$IBl^2\cos\alpha = 2\rho Sgl^2\sin\alpha ;$$

$$B = \frac{2\rho Sg}{I}\,\mathrm{tg}\,\alpha .$$

Проведем вычисления:

$$B = \frac{2\cdot 8{,}9\cdot 10^3\cdot 10^{-6}\cdot 9{,}8}{10}\cdot 0{,}18 = 31{,}399\cdot 10^{-4} = 3{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{Тл} .$$

Ответ. $B = 3{,}2\cdot 10^{-3}$ Тл.

Пример 2.8

Виток радиусом R = 20 см, по которому течет ток силой I = 50 А, свободно устанавливается в однородном магнитном поле напряженностью $H = 1{,}0\cdot 10^3$ А/м. Виток повернули относительно диаметра на угол $\alpha = 30°$ (рис. 1). Определить совершенную работу.

Дано:

$R = 0{,}2$ м
$I = 50$ А
$H = 1{,}0 \cdot 10^3$ А/м
$\alpha_1 = 0$
$\alpha_2 = 30°$

A_{12} – ?

Решение

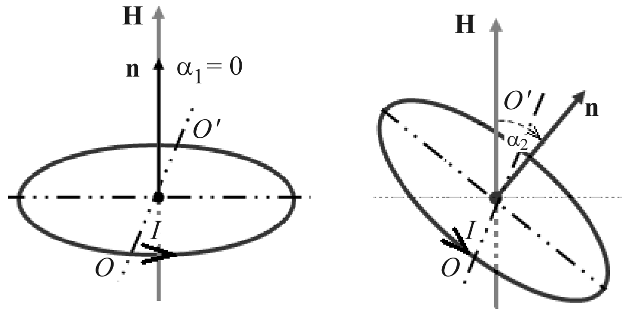


Рис. 1 к примеру 2.8

I способ

На виток в магнитном поле действует вращающий момент

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_\text{м} \times \mathbf{B}], \tag{1}$$

где $\mathbf{p}_\text{м}$ – магнитный момент контура с током, $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции поля

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \tag{2}$$

Магнитный момент контура с током задается выражением

$$\mathbf{p}_\text{м} = IS\mathbf{n}, \tag{3}$$

где I – ток в контуре, S – площадь контура, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура (его направление задается направлением движения правого винта).

Для нашего случая

$$S = \pi R^2. \tag{4}$$

В начальный момент времени виток свободно устанавливается в магнитном поле, следовательно, в этом положении вектор нормали к витку $\mathbf{n}$ и вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ совпадают.

Внешние силы выводят контур с током из положения равновесия. Для нахождения работы внешних сил A_{12} воспользуемся известной из курса «Механики» формулой элементарной работы dA, совершаемой моментом внешних сил M при повороте витка на угол $d\alpha$:

$$dA = Md\alpha \,. \tag{5}$$

Найдем выражение для момента сил M. Для этого подставим выражения (2)–(4) в формулу (1):

$$\mathbf{M} = I\pi R^2 \mu_0 \mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \,.$$

Модуль момента сил будет определяться выражением

$$M = I\pi R^2 \mu_0 \mu H \sin\alpha \,. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$dA = I\pi R^2 \mu_0 \mu H \sin\alpha d\alpha \,. \tag{7}$$

Работа внешних сил при повороте витка на конечный угол α определяется выражением

$$A_{12} = \int dA \,.$$

С учетом (7), найдем работу внешних сил:

$$A_{12} = I\pi R^2 \mu_0 \mu H \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = -I\pi R^2 \mu_0 \mu H (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) =$$

$$= I\pi R^2 \mu_0 \mu H (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = I\pi R^2 \mu_0 \mu H (\cos 0 - \cos 30) =$$

$$= I\pi R^2 \mu_0 \mu H \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{I\pi R^2 \mu_0 \mu H \left(2 - \sqrt{3}\right)}{2} \,;$$

$$A_{12} = \frac{I\pi R^2 \mu_0 \mu H \left(2 - \sqrt{3}\right)}{2} \,.$$

II способ

При выведении внешними силами контура с током из положения равновесия со стороны магнитного поля возникает противодействующий момент сил, стремящихся вернуть контур в исходное положение. Эти силы совершают работу:

$$A_{\text{поля}} = I(\Phi_2 - \Phi_1) \,, \tag{8}$$

где Φ_1 и Φ_2 – потоки вектора магнитной индукции через плоскость витка в начальном и конечном положениях.

Исходя из третьего закона Ньютона:

$$A_{внеш} = -A_{поля},$$

с учетом (8) для работы внешних сил получим

$$A_{12} = A_{внеш} = -I(\Phi_2 - \Phi_1) = I(\Phi_1 - \Phi_2), \qquad (9)$$

$$\Phi = BS\cos\alpha, \qquad (10)$$

$$B = \mu_0 \mu H, \qquad (11)$$

$$S = \pi R^2. \qquad (12)$$

Решая совместно уравнения (9)–(12), получим выражение, совпадающее с ранее найденным:

$$A_{12} = \frac{I\pi R^2 \mu_0 \mu H\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Проведем вычисления:

$$A_{12} = \frac{50 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot (2-1{,}73)}{2} = 1{,}06 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Ответ. $A_{12} = 1{,}06 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Пример 2.9

Два параллельных прямых проводника с токами одного направления находятся на расстоянии r_1 = 1 см друг от друга. Первый проводник с током I_1 = 1 А имеет длину l_1 = 20 см, второй проводник с током I_2 = 3 А – бесконечно длинный. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между ними до расстояния r_2= 5 см?

Дано:	***Решение***
r_1 = 0,01 м r_2 = 0,05 м l_1 = 0,20 м I_1 = 1 А I_2 = 3 А	
A_{12} – ?	

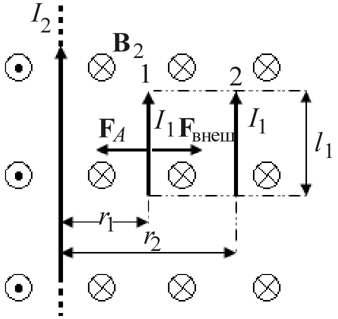


Рис. 1 к примеру 2.9

На проводник действует внешняя сила и сила Ампера (рис. 1). В соответствии с третьим законом Ньютона работа внешней силы равна работе сил Ампера, взятой с противоположным знаком:

$$A_{12} = -A_A . \qquad (1)$$

Для нахождения работы силы Ампера воспользуемся известной из курса «Механики» формулой:

$$A_A = \int_1^2 \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 F_r dr . \qquad (2)$$

Сила Ампера, действующая на проводник, определяется выражением:

$$F_A = I_1 l_1 B_2 \sin\alpha , \qquad (3)$$

где B_2 – величина индукции магнитного поля, созданного проводником с током I_2; l_1 – длина проводника; α – угол между направлением вектора магнитной индукции $\mathbf{B}_2$ и элементом тока $I_1 d\mathbf{l}$. Исходя из условия задачи имеем, что $\alpha = 90°$, следовательно, $\sin\alpha = 1$.

Индукция прямого провода с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r_0} .$$

В нашем случае $I = I_2$, следовательно,

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu I_2}{2\pi r}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (3) для силы Ампера, получим

$$F_A = I_1 l_1 \frac{\mu_0 \mu I_2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l_1}{2\pi r}.$$

Проекция силы Ампера на направление перемещения отрицательна, следовательно,

$$F_r = -\frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l_1}{2\pi r}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2), для работы сил Ампера получим:

$$A_A = -\int_1^2 \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l_1}{2\pi r} dr = -\frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l_1}{2\pi} \int_1^2 \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 \mu \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l_1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Учитывая (1), для работы внешней силы имеем:

$$A_{12} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l_1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Проведем вычисления:

$$A_{12} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 0,2}{2\pi} \ln \frac{0,05}{0,01} =$$

$$= 1,2 \cdot 10^{-7} \ln 5 = -1,2 \cdot 10^{-7} \cdot 1,61 = 0,19 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Ответ. $A_{12} = 0,19 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Пример 2.10

Прямоугольная рамка со сторонами a = 5 см, $в$ = 8 см и током I_2 = 4 А находится на расстоянии r_1 = 2 см от бесконечного прямого проводника с током I_1 = 6 А, который расположен в одной плоскости с рамкой (рис. 1). Какая работа совершается при удалении рамки на расстояние r_2 = 10 см (между бесконечным проводом и ближайшей к нему стороной рамки)? Рамка и провод остаются в одной плоскости.

Дано:

$a = 0{,}05$ м
$в = 0{,}08$ м
$I_2 = 4$ А
$I_1 = 6$ А
$r_1 = 0{,}02$ м
$r_2 = 0{,}10$ м

A_{12} – ?

Решение

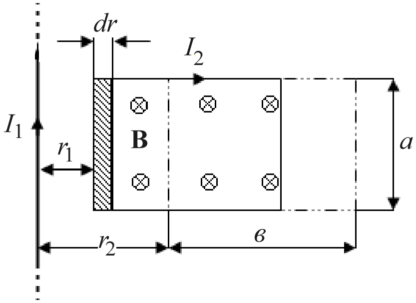


Рис. 1 к примеру 2.10

Элементарная работа сил поля по перемещению рамки с током I в магнитном поле

$$dA = Id\Phi,$$

где $d\Phi$ – элементарное приращение магнитного потока сквозь рамку при ее перемещении.

Чтобы найти работу при конечном перемещении рамки, необходимо проинтегрировать данное выражение:

$$A_{\text{поля}} = \int_1^2 Id\Phi.$$

В нашем случае $I = I_2 = \text{const}$, следовательно,

$$A_{\text{поля}} = I_2\int_1^2 d\Phi = I_2(\Phi_2 - \Phi_1), \qquad (1)$$

где Φ_1, Φ_2 – магнитные потоки сквозь рамку в положении 1 (ближайшая сторона рамки на расстоянии r_1 от бесконечного прямого провода) и в положении 2 (ближайшая сторона рамки на расстоянии r_2 от бесконечного прямого провода).

Индукция прямого провода с током

$$B = \frac{\mu_0\mu I}{2\pi r_0}.$$

В нашем случае $I = I_1$, следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi r} . \qquad (2)$$

Магнитное поле проводника с током неоднородно, т.е. B зависит от r, поэтому и поток вектора магнитной индукции будет переменным, зависящим от r.

На бесконечно малом расстоянии dr индукцию можно считать постоянной.

Для нахождения элементарного потока $d\Phi$ выделим бесконечно малую площадку

$$dS = adr . \qquad (3)$$

Найдем поток вектора $\mathbf{B}$ сквозь нее:

$$d\Phi = \mathbf{B}d\mathbf{S} = BdS\cos\alpha ,$$

$$\alpha = 0,\ \cos\alpha = 1 .$$

$$d\Phi = BdS .$$

С учетом (2) и (3) для элементарного потока получим

$$d\Phi = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi r} adr . \qquad (4)$$

Интегрируя выражение (4), можно найти магнитные потоки (Φ_1, Φ_2) сквозь рамку в положении 1 и в положении 2:

$$\Phi_1 = \int_{r_1}^{r_1+b} \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi r} adr = \frac{\mu_0 \mu I_1 a}{2\pi} \int_{r_1}^{r_1+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu I_1 a}{2\pi} \ln \frac{r_1 + b}{r_1} , \qquad (5)$$

$$\Phi_2 = \int_{r_2}^{r_2+b} \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi r} adr = \frac{\mu_0 \mu I_1 a}{2\pi} \int_{r_2}^{r_2+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu I_1 a}{2\pi} \ln \frac{r_2 + b}{r_2} . \qquad (6)$$

Подставляя выражения (5) и (6) в (1), для работы $A_{\text{поля}}$ получим

$$A_{\text{поля}} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 a}{2\pi} \left(\ln \frac{r_2 + b}{r_2} - \ln \frac{r_1 + b}{r_1} \right) = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 a}{2\pi} \ln \left(\frac{r_1 (r_2 + b)}{r_2 (r_1 + b)} \right) .$$

В соответствии с третьим законом Ньютона работа внешней силы равна работе сил поля, взятой с противоположным знаком:

$$A_{12} = -A_{\text{поля}} .$$

Тогда для работы внешней силы имеем:

$$A_{12} = -\frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1(r_2 + b)}{r_2(r_1 + b)}\right).$$

Проведем вычисления:

$$A_{12} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 0,05}{2\pi} \ln\left(\frac{0,02 \cdot (0,1 + 0,08)}{0,1(0,02 + 0,08)}\right) = -2,4 \cdot 10^{-7} \ln(0,36) =$$

$$= -2,4 \cdot 10^{-7} (-1,022) = 2,4504 \cdot 10^{-7} = 0,245 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Ответ. $A_{12} = 0,245 \cdot 10^{-6}$ Дж.

3. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Элементарный магнитный поток $d\Phi$ (поток вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$) сквозь поверхность площадью $d\mathrm{S}$ равен

$$d\Phi = \mathbf{B} d\mathbf{S} ,$$

где $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$; $d\Phi = BdS\cos\alpha$; α – угол между вектором нормали $\mathbf{n}$ к плоскости dS и вектором индукции магнитного поля.

Магнитный поток Φ через поверхность S равен

$$\Phi = \int_S BdS\cos\alpha .$$

В случае однородного поля $\mathbf{B}$ = const, поток вектора $\mathbf{B}$ через плоскую поверхность S рассчитывается по формуле:

$$\Phi = BS\cos\alpha .$$

Закон электромагнитной индукции. Электродвижущая сила (ЭДС) электромагнитной индукции ε_i в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную данным контуром:

$$\varepsilon_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Если замкнутый контур состоит из N витков, то под магнитным потоком понимают полный магнитный поток (потокосцепление) Ψ сквозь поверхности, ограниченные всеми N витками:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i.$$

Правило Ленца. Индукционный ток в контуре всегда имеет такое направление, что создаваемый им собственный магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную данным контуром, препятствует изменению внешнего магнитного потока, вызывающему появление индукционного тока.

Возникновение ЭДС индукции в контуре в результате изменения тока I в этом же контуре называется явлением самоиндукции:

$$\varepsilon_{si}(t) = -\frac{d\Phi_s}{dt} = -L\frac{dI}{dt},$$

где $\Phi_s = LI$, L – индуктивность контура.

Индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2}{l}S = \mu_0\mu n^2 lS = \mu_0\mu n^2 V,$$

где n – плотность (концентрация) витков $\left(n = \frac{N}{l}\right)$, S – площадь витка, V – объем соленоида, $V = Sl$.

Плотность энергии магнитного поля равна

$$\omega = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

Энергия магнитного поля в общем случае определяется выражением

$$W = \int_V \omega dV .$$

В случае однородного поля энергия магнитного поля:

$$W = \omega V .$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 3.1

В магнитное поле, меняющееся по закону $B = B_0 \cos\omega t$, где B_0 = 0,1 Тл, ω = 4 рад/с, помещена квадратная рамка со стороной a = = 50 см, причем нормаль к рамке образует с направлением поля угол 45° (рис. 1). Определить ЭДС индукции, возникающую в рамке через 5 с.

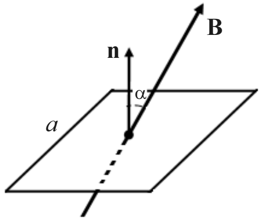


Рис. 1 к примеру 3.1

Дано:
$B = B_0 \cos\omega t$
B_0 = 0,1 Тл
ω = 4 рад/с
a = 0,5 м
α = 45°
t_1 = 5 с
ε_1 – ?

Решение

В замкнутом неподвижном контуре возникает электродвижущая сила при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур. Значение ЭДС определяется законом Фарадея:

$$\varepsilon_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} . \qquad (1)$$

Магнитный поток, пронизывающий рамку, определяется выражением:

$$\Phi = BS\cos\alpha .$$

В нашем случае $S = a^2$,

$$\alpha = 45°, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad B = B_0 \cos\omega t .$$

Следовательно, зависимость магнитного потока от времени будет задаваться выражением

$$\Phi(t) = (B_0 \cos\omega t)a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 B_0}{\sqrt{2}} \cos\omega t \ . \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\varepsilon_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{a^2 B_0 \omega\sqrt{2}}{2} \sin\omega t \ .$$

Тогда для момента времени t_1 имеем:

$$\varepsilon_1 = \frac{a^2 B_0 \omega\sqrt{2}}{2} \sin\omega t_1 \ .$$

Проведем вычисления:

$$\varepsilon_1 = \frac{0,25 \cdot 0,1 \cdot 4 \cdot 1,414}{2} \sin(4 \cdot 5) = 0,0707 \cdot \sin(20 \text{рад}) =$$

$$= 0,0707 \cdot 0,913 = 0,0645 = 65,4 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Ответ. $\varepsilon_1 = 65,4 \cdot 10^{-3}$ В.

Пример 3.2

Плоский виток провода расположен перпендикулярно однородному магнитному полю. Когда виток повернулся на угол 180°, по нему прошел заряд 7,2 мкКл. На какой угол повернется виток, если по нему пройдет заряд 1,8 мкКл?

Дано:

$\alpha_1 = 180°$

$Q_1 = 7,2 \cdot 10^{-6}$ Кл

$Q_2 = 1,8 \cdot 10^{-6}$ Кл

α_2 – ?

Решение

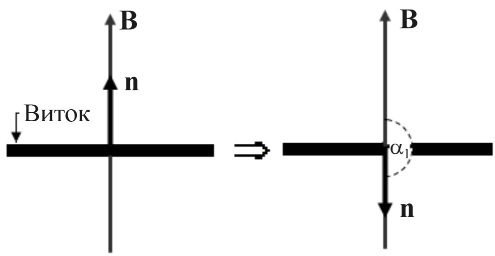


Рис. 1 к примеру 3.2

1. В начальный момент виток неподвижен, поток вектора **B** через плоскость витка $\Phi_0 = BS$.

Затем виток повернули на угол $\alpha_1 = 180°$ (рис. 1):

$$\Phi_1 = -BS.$$

$$\Delta\Phi_1 = \Phi_1 - \Phi_0 = -2BS.$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции получим

$$|\varepsilon_1| = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{2BS}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Согласно закону Ома по витку пройдет индукционный ток I_1:

$$I_1 = \frac{|\varepsilon_1|}{R}. \qquad (2)$$

По определению электрического тока

$$I_1 = \frac{Q_1}{\Delta t}, \qquad (3)$$

где Q_1 – заряд, прошедший по витку за время Δt.

Решая совместно систему уравнений (1)–(3), получим

$$\frac{2BS}{\Delta t} = \frac{Q_1 R}{\Delta t},$$

$$2BS = Q_1 R. \qquad (4)$$

2. Из начального положения виток повернули на угол α_2 (рис. 2):

$$\Phi_2 = BS\cos\alpha_2.$$

Следовательно, магнитный поток изменится на величину:

$$\Delta\Phi_2 = \Phi_2 - \Phi_0 = BS\cos\alpha_2 - BS = BS(\cos\alpha_2 - 1).$$

Аналогично (4) получим

$$BS(1 - \cos\alpha_2) = Q_2 R. \qquad (5)$$

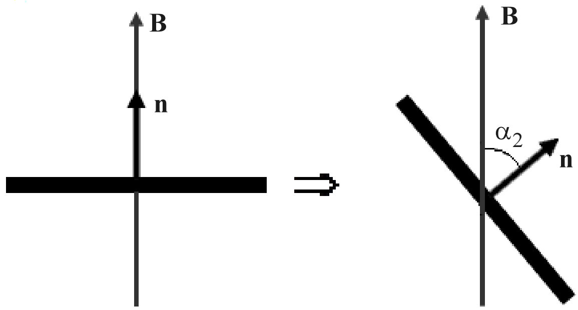


Рис. 2 к примеру 3.2

Решая совместно систему уравнений (4) и (5), получим

$$1-\cos\alpha_2 = 2\frac{Q_2 R}{Q_1 R},$$

$$1-\cos\alpha_2 = 2\frac{Q_2}{Q_1},$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{Q_1 - 2Q_2}{Q_1},$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{Q_1 - 2Q_2}{Q_1}\right).$$

Проведем вычисления:

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{7,2-2\cdot 1,8}{7,2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ.$$

Ответ. $\alpha_2 = 60^\circ$.

Пример 3.3

Медный провод диаметром d = 1 мм и длиной l = 16 см согнут в виде квадрата, концы его замкнуты. Эта рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл так, что ее плоскость перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить заряд Q, который пройдет по проволочной рамке при изменении ее формы из квадратной на прямоугольную. Соотношение сторон прямоугольника 1:3. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Дано:	***Решение***
$d = 1 \cdot 10^{-3}$ м $l = 0{,}16$ м $l = 4a$ $B = 0{,}2$ Тл $\frac{b}{c} = \frac{1}{3}$ $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м	По условию задачи, проводник сначала согнут в виде квадрата, а затем в виде прямоугольника. Оценим площадь, ограниченную рамкой, в обоих случаях. Ее периметр не изменился:
Q_i – ?	

$$4a = l = 2b + 2c \quad \text{или} \quad \frac{l}{2} = 2a = b + c\,.$$

По условию

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad b = \frac{c}{3}\,.$$

Следовательно, $b = \frac{l}{8}$; $c = \frac{3l}{8}$; $a = \frac{l}{4}$

Тогда для площади квадрата имеем

$$S_1 = a^2 = \frac{l^2}{16}\,.$$

Для площади прямоугольника

$$S_2 = bc = \frac{l}{8}\frac{3l}{8} = \frac{3l^2}{64}\,.$$

Согласно закону электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t}\,, \tag{1}$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1\,, \tag{2}$$

где Φ_1, Φ_2 – магнитные потоки через площадь контура в первом и втором случаях.

По условию задачи угол α между **n** и **B** равен нулю, следовательно,

$$\Phi_1 = BS_1\cos\alpha = BS_1 = B\frac{l^2}{16}, \tag{3}$$

$$\Phi_2 = BS_2 = B\frac{3l^2}{64}. \tag{4}$$

Решая систему уравнений (1)–(4), получим

$$\left|\varepsilon_i\right| = \left|\frac{\Phi_2-\Phi_1}{\Delta t}\right| = \left|\frac{B}{\Delta t}\left(\frac{3l^2}{64}-\frac{l^2}{16}\right)\right| = \left|\frac{Bl^2}{64\Delta t}(3-4)\right| = \frac{Bl^2}{64\Delta t}. \tag{5}$$

Согласно закону Ома

$$\left|\varepsilon_i\right| = I_i R, \tag{6}$$

где I_i – индукционный ток в рамке, R – сопротивление провода рамки.

По формуле сопротивления однородного проводника

$$R = \rho\frac{l}{S}. \tag{7}$$

Площадь поперечного сечения провода

$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \tag{8}$$

По определению электрического тока

$$I_i = \frac{Q_i}{\Delta t}, \tag{9}$$

где Q_i – заряд, прошедший по рамке за время Δt.

Подставляя (7)–(9) в (6), получим

$$\left|\varepsilon_i\right| = \frac{4l\rho Q_i}{\pi d^2\Delta t}. \tag{10}$$

Приравнивая выражение (10) к (5), выразим Q_i:

$$\frac{Bl^2}{64\Delta t} = \frac{4l\rho Q_i}{\pi d^2 \Delta t}, \qquad \frac{Bl}{64} = \frac{4\rho Q_i}{\pi d^2}, \qquad Q_i = \frac{\pi d^2 Bl}{256\rho}.$$

Проведем вычисления:

$$Q_i = \frac{3{,}14 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}16}{256 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8}} = 0{,}023 = 23 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}.$$

Ответ. $Q_i = 23 \cdot 10^{-3}$ Кл.

Пример 3.4

В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,5 Тл движется прямой проводник длиной l = 40 см. Найти разность потенциалов, возникающую на концах проводника в двух случаях:

1) проводник движется с постоянной скоростью υ = 5 м/с перпендикулярно линиям поля и оси проводника;

2) проводник вращается с постоянной угловой скоростью ω = 5 рад/с, ось вращения проходит через один из его концов и совпадает с направлением магнитного поля.

Дано:

B = 0,5 Тл
l = 0,4 м
υ = 5 м/с
ω = 5 рад/с

1) $|\varphi_1 - \varphi_2|$ – ?
2) $|\varphi_1 - \varphi_2|$ – ?

Решение

1. Проводник движется с постоянной скоростью v перпендикулярно линиям поля и оси проводника (рис. 1).

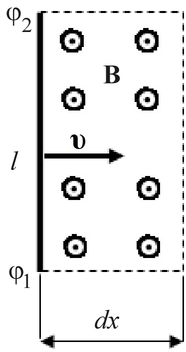


Рис. 1 к примеру 3.4

На концах проводника, движущегося в магнитном поле, возникает разность потенциалов. Она обусловлена явлением электромагнитной индукции и равна ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в проводнике:

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = |\varepsilon_i|. \qquad (1)$$

Для нахождения ЭДС электромагнитной индукции применим закон Фарадея:

$$|\varepsilon_i| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|. \qquad (2)$$

Проводник, двигаясь в магнитном поле, пересекает магнитный поток:

$$d\Phi = BdS, \qquad (3)$$

где dS – площадь, пересекаемая движущимся проводником:

$$dS = ldx. \qquad (4)$$

Здесь dx – расстояние, пройденное движущимся проводником за время dt:

$$dx = vdt. \qquad (5)$$

Решая совместно систему уравнений (1)–(5), получим

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{Blvdt}{dt} = Blv.$$

Проведем вычисления:

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 5 = 1 \text{ В}.$$

2. Проводник вращается с постоянной угловой скоростью ω, ось вращения проходит через один из его концов и совпадает с направлением магнитного поля (рис. 2).

Для решения задачи проведем рассуждения, аналогичные тем, что приводились в первом случае:

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = |\varepsilon_i| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|. \qquad (6)$$

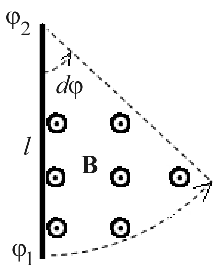


Рис. 2 к примеру 3.4

Проводник, двигаясь в магнитном поле, пересекает магнитный поток:

$$d\Phi = BdS\,, \tag{7}$$

где dS – площадь, пересекаемая движущимся проводником:

$$dS = \frac{\pi l^2}{2\pi} d\varphi = \frac{l^2}{2} d\varphi\,. \tag{8}$$

Здесь $d\varphi$ – угол, выраженный в радианах, на который повернулся проводник за время dt:

$$d\varphi = \omega dt\,. \tag{9}$$

Решая совместно систему уравнений (6)–(9), для разности потенциалов получим

$$\left|\varphi_1 - \varphi_2\right| = \frac{Bl^2 \omega dt}{2dt}\,;$$

$$\left|\varphi_1 - \varphi_2\right| = \frac{Bl^2 \omega}{2}\,.$$

Проведем вычисления:

$$\left|\varphi_1 - \varphi_2\right| = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}16 \cdot 5}{2} = 0{,}2 \text{ В}.$$

Ответ. 1) $\left|\varphi_1 - \varphi_2\right| = 1$ В;

2) $\left|\varphi_1 - \varphi_2\right| = 0{,}2$ В.

Пример 3.5

На соленоид длиной l = 20 см и площадью поперечного сечения S = 30 см^2 надета катушка с числом витков $N_к$ = 10. Соленоид имеет $N_с$ = 320 витков, и по нему течет ток I_1 = 3 А. Какая средняя ЭДС индуцируется в надетой на соленоид катушке при изменении тока в соленоиде до I_2 = 1 А за время Δt = 1 мс?

Дано:	***Решение***
$l = 0{,}2$ м $S = 30\cdot10^{-4}$ м^2 $N_к = 10$ $N_с = 320$ $I_1 = 3$ А $I_2 = 1$ А $\Delta t = 1\cdot10^{-3}$ с	Индукция магнитного поля, создаваемого соленоидом на его оси: $$B = \mu_0\mu\frac{N_с}{l}I. \qquad (1)$$ Это магнитное поле пронизывает катушку, надетую на соленоид, создавая магнитный поток через ее поперечное сечение: $$\Phi_к = N_к BS. \qquad (2)$$
$\langle\varepsilon_i\rangle$ – ?	

Согласно закону электромагнитной индукции в катушке возникает ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_к}{dt}. \qquad (3)$$

Среднее значение ЭДС индукции за время Δt определяется выражением

$$\langle\varepsilon_i\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}|\varepsilon_i|\,dt. \qquad (4)$$

С учетом (1)–(3) получим:

$$\langle\varepsilon_i\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left|\frac{d\Phi_к}{dt}\right|dt;$$

$$\langle\varepsilon_i\rangle = \frac{1}{\Delta t}\left|\int_{B_1}^{B_2} d(N_к BS)\right| = \frac{N_к S}{\Delta t}\left|\int_{B_1}^{B_2} dB\right| = \frac{N_к S}{\Delta t}\frac{\mu_0\mu N_с}{l}\left|\int_{I_1}^{I_2} dI\right|;$$

$$\langle\varepsilon_i\rangle = \frac{N_к S}{\Delta t}\frac{\mu_0\mu N_с}{l}|I_2 - I_1|;$$

$$\langle\varepsilon_i\rangle = \frac{\mu_0\mu N_с N_к S}{l\Delta t}|I_2 - I_1|.$$

Проведем вычисления:

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 320 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 10^{-4}}{0,2 \cdot 10^{-3}} |1-3| = 12057,6 \cdot 10^{-5} = 120,6 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Ответ. $\langle \varepsilon_i \rangle = 120,6 \cdot 10^{-3}$ В.

Пример 3.6

Соленоид сечением S = 10 см^2 содержит N = 1000 витков. Индукция B магнитного поля внутри соленоида при силе тока I = 5 А, B = 0,1 Тл. Определить:

1) индуктивность L соленоида;

2) среднюю ЭДС индукции, возникающую на концах обмотки соленоида при изменении магнитной индукции от указанного значения до $B_к$ = 0,5 Тл за время Δt = 0,01 с.

Дано:

$S = 10^{-3}$ м^2

$N = 1000$

$I = 5,0$ А

$B = 0,10$ Тл

$B_к = 0,50$ Тл

$\Delta t = 0,01$ с

L – ?

$\langle \varepsilon_i \rangle$ – ?

Решение

1. Полный магнитный поток (потокосцепление) Ψ сквозь поверхности, ограниченные всеми N витками замкнутого контура, состоящего из N витков, равен

$$\Psi = N\Phi ,$$

где Φ – магнитный поток через один виток

$$\Phi = BS , \qquad \Psi = NBS . \qquad (1)$$

С другой стороны:

$$\Psi = LI . \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получим: $NBS = LI$, следовательно,

$$L = \frac{NBS}{I} .$$

Проведем вычисления:

$$L = \frac{10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{5} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Гн} .$$

2. Согласно закону электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \tag{3}$$

Среднее значение ЭДС электромагнитной индукции за время Δt определяется выражением

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} |\varepsilon_i|\, dt. \tag{4}$$

С учетом (3) и (1) получим

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \left|\frac{d(NBS)}{dt}\right| dt = \frac{NS}{\Delta t}\left|\int_B^{B_\text{к}} dB\right|;$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{NS(B_\text{к} - B)}{\Delta t}.$$

Проведем вычисления:

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{10^3 \cdot 10^{-3} \cdot (0,5 - 0,1)}{10^{-2}} = 40 \text{ В}.$$

Ответ. 1) $L = 2 \cdot 10^{-2}$ Гн;

2) $\langle \varepsilon_i \rangle = 40$ В.

Пример 3.7

По бесконечно длинному прямолинейному проводнику протекает ток I = 8 А. Определить энергию магнитного поля тока I в объеме между двумя коаксиальными цилиндрами длиной l = 40 см, радиусами r_1 = 10 см и r_2 = 30 см. Ось цилиндров совпадает с прямым проводником (рис. 1).

Дано:

$I = 8$ А
$l = 0{,}40$ м
$r_1 = 0{,}10$ м
$r_2 = 0{,}30$ м

W – ?

Решение

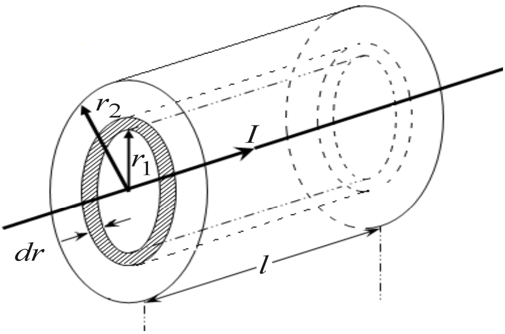


Рис. 1 к примеру 3.7

Для однородного поля энергия в объеме V определяется выражением

$$W = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V .$$

Магнитное поле, созданное прямым током, неоднородно. Следовательно, для решения поставленной задачи можно применить метод интегрирования.

Для этого найдем энергию dW, заключенную в тонком цилиндрическом слое толщиной dr и объемом dV:

$$dV = 2\pi r dr l ; \tag{1}$$

$$dW = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV . \tag{2}$$

Напряженность магнитного поля, созданного бесконечным прямым проводником, на расстоянии r_0 от него определяется выражением

$$H = \frac{I}{2\pi r_0} . \tag{3}$$

Решая совместно (1)–(3), получим

$$dW = \frac{\mu_0 \mu I^2}{24\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 \mu I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r} . \tag{4}$$

Для нахождения энергии магнитного поля тока, заключенной в объеме между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами r_1 и r_2, необходимо проинтегрировать полученное выражение в пределах от r_1 до r_2:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 \mu I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu I^2 l}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r};$$

$$W = \frac{\mu_0 \mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Проведем вычисления:

$$W = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 64 \cdot 0,4}{4\pi} \cdot \ln \frac{0,3}{0,1} = 25,6 \cdot 10^{-7} \cdot 1,099 =$$

$$= 28,124 \cdot 10^{-7} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Ответ. $W = 2,8 \cdot 10^{-6}$ Дж.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1990. – 398 с.
2. *Горбунова О.И., Зайцева А.М., Красников С.Н.* Задачник-практикум по общей физике. Электричество. Электромагнетизм. – М.: Просвещение, 1975. – 160 с.
3. *Иродов И.Е*. Задачи по общей физике. – М.: Наука, 1979. – 368 с.
4. *Иродов И.Е*. Электромагнетизм. Основные законы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. – 320 с.
5. *Новодворская А.Е., Дмитриев Э.М.* Методика проведения упражнений по физике во втузе. – М.: Высшая школа, 1981. – 318 с.
6. *Мясников С.П., Осанова Т.Н*. Пособие по физике. – М.: Высшая школа, 1988. – 399 с.
7. *Савченко Н.Е.* Задачи по физике с анализом их решения. – М.: Просвещение, 2000. – 320 с.
8. *Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981. – 496 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Методические указания

Редактор *Н.А. Лукашова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Компьютерная верстка *В.Ф. Ноздрева*

Подписано в печать 16.07.2012. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Тираж 200 экз. Уч.-изд. л. 3,25. Печ. л. 3,5. Изд. № 377. Заказ №
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

№ 4174

53
Ф 503

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Методические указания

НОВОСИБИРСК
2012