Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

53 № 3847
Ф 503

ФИЗИКА

МЕХАНИКА И ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Методические указания

Решения задач по физике для студентов I и II курсов
дневной и заочной формы обучения

НОВОСИБИРСК
2010

УДК 531+537.2](076.2)
Ф 503

Методические указания предназначены для студентов, выполняющих практические задания по курсу физики. Данная работа состоит из двух тем. Подобранные задачи отображают все основные разделы «Механики», «Электростатики».

Для экономии времени студентов в начале каждого раздела дана сводка основных формул на соответствующий материал. Формулы приведены без подробных объяснений. Предполагается, что смысл входящих в них величин студенту уже известен.

Составители:

Л.М. Родникова, Н.Я. Усольцева, В.Б. Уткин

Рецензент *Б.Б. Горлов*

Работа подготовлена на кафедре общей физики

1. КИНЕМАТИКА

Скорость и ускорение материальной точки определяются формулами:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{s}}{dt}, \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

В случае прямолинейного равномерного движения

$$v = \frac{s}{t} = \mathrm{const}, \quad a = 0.$$

В случае прямолинейного равнопеременного движения

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 + at, \quad a = \mathrm{const}.$$

В этих уравнениях a положительно при равноускоренном движении и отрицательно при равнозамедленном.
При криволинейном движении модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

здесь a_τ – модуль тангенциального ускорения; a_n – модуль нормального ускорения, причем

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R},$$

где v – скорость движения; R – радиус кривизны траектории в данной точке.

При вращательном движении вокруг неподвижной оси модули угловой скорости и углового ускорения находятся по формулам

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

В случае равномерного вращательного движения угловая скорость

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

где T – период вращения; n – частота вращения, т.е. число оборотов в единицу времени.

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью v точки соотношением

$$v = \omega R,$$

где R – расстояние точки от оси вращения. Тангенциальное и нормальное ускорения при вращательном движении могут быть выражены в виде

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R.$$

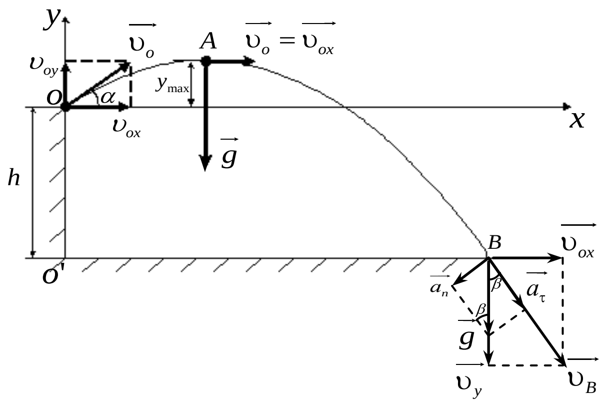
Задача № 1.1

Камень, брошенный с высоты $h = 2{,}1$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, падает на землю на расстоянии $S = 42$ м (по горизонтали) от места бросания. Найти начальную скорость камня, время полета τ и максимальную высоту подъема H над уровнем земли. Определить также радиусы кривизны траектории в верхней точке R_1 и в точке падения камня на землю R_2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:

$h = 2{,}1$ м
$\alpha = 45°$
$O'B = S = 42$ м

v_0 – ?
τ – ?
H – ?
R_1 – ?
R_2 – ?



Р е ш е н и е

Камень движется с постоянным ускорением $\vec{a} = \vec{g}$. Движение плоское и для описания его достаточно двух осей координат 0*x* и 0*y*, причем начало отсчета удобно выбрать в точке бросания. Сложное криволинейное движение камня рассматриваем как сумму двух независимых движений: движение вдоль оси 0*x* – равномерное ($a_x = 0$, $v_x = \text{const}$), движение вдоль оси 0*y* – равнопеременное с постоянным ускорением $a_y = a = g$. Координаты камня *x* и *y* в любой момент времени и проекции скорости камня на оси координат v_x и v_y равны:

$$x = v_x t = v_0 \cos\alpha t \, , \qquad (1)$$

$$y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} \, , \qquad (2)$$

$$v_y = v_{0y} - gt \, , \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha \, , \qquad (3)$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha = v_{0x} = \text{const} \, . \qquad (4)$$

Следует отметить, что, поскольку движение вдоль оси 0*x* равномерное, то значение скорости v_x сохраняется и одинаково для точек *O***,** *A*, *B*.

Точка *B* траектории. В конечной точке траектории *B* время равно $t = \tau$, $x = S$, $y = -h$.

Уравнения (1), (2), (3) примут вид

$$S = v_0 \cos\alpha \cdot \tau \, , \qquad (5)$$

$$-h = v_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2} \, , \qquad (6)$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - g\tau \, . \qquad (7)$$

Два уравнения (5) и (6) содержат два неизвестных v_0 и τ . Выразим v_0 из (5): $v_0 = \dfrac{S}{\cos\alpha \cdot \tau}$ и подставим в (6): $-h = S \, \mathrm{tg}\, \alpha - \dfrac{g\tau^2}{2}$.

Решение системы уравнений (5) и (6) дает

$$\tau=\sqrt{\frac{2\ \ h+S\ \mathrm{tg}\,\alpha}{g}}=\sqrt{\frac{2\ \ 2{,}1+42}{9{,}8}}=3\ \text{с},$$

$$v_0=\frac{42\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 3}=19{,}8\ \text{м/с}.$$

Точка *A*. Найдем максимальную H высоту подъема камня над землей:

$$H=h+y_{\max}.$$

За время t_1 подъема камня в точку A его скорость по оси y уменьшится до нуля: $v_y=0$.

Из уравнения (3) найдем время подъема t_1:

$$0=v_0\sin\alpha-gt_1,$$

$$t_1=\frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

При $y=y_{\max}$ из уравнения (2) имеем после подстановки t_1:

$$y_{\max}=v_0\sin\alpha\cdot t_1-\frac{gt_1^2}{2}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}-\frac{gv_0^2\sin^2\alpha}{2g^2}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g},$$

$$y_{\max}=\frac{19{,}8\ ^2\ \ \sqrt{2}\ ^2}{4\cdot 2\cdot 9{,}8}=10\ \text{м},$$

$$H=2{,}1+10=12{,}1\ \text{м}.$$

В верхней точке траектории $v_y=0$, следовательно, $v_A=v_x$, поэтому для точки A нормальное ускорение $a_n=a=g=\dfrac{v_x^2}{R_1}$. Определим радиус кривизны траектории R_1 в верхней точке:

$$R_1=\frac{v_x^2}{g}=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}=\frac{19{,}8^2\cdot 2}{4\cdot 9{,}8}=20\ \text{м}.$$

Точка *B*. Для определения радиуса кривизны траектории R_2 в точке *B* запишем формулу для нормального ускорения в этой точке:

$$a_n = \frac{v_B^2}{R_2}, \quad R_2 = \frac{v_B^2}{a_n}. \qquad (8)$$

Скорость в точке *B* с учетом (7):

$$v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \ v_0\sin\alpha - g\tau\ ^2},$$

$$v_B = \sqrt{19{,}8^2\,\frac{2}{4} + \left(19{,}8\frac{\sqrt{2}}{2} - 9{,}8\cdot 3\right)^2} = 20{,}8 \text{ м/с}.$$

Построив в точке *B* векторы ускорений $\vec{g} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ и скоростей $\vec{v}_B = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, из рисунка выразим: $a_n = g\sin\beta$ и $\sin\beta = \dfrac{v_x}{v_B}$, тогда $a_n = g\dfrac{v_x}{v_B}$.

Подставим a_n в формулу (8):

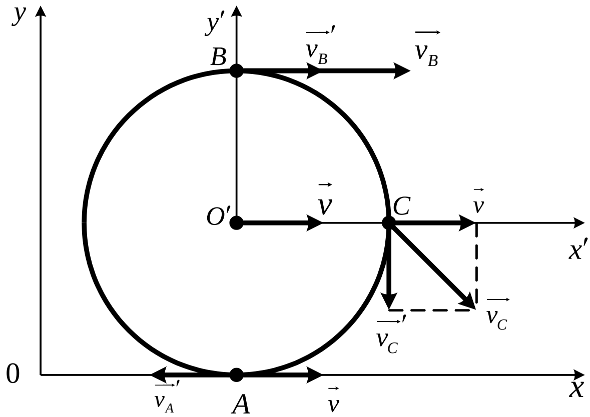
$$R_2 = \frac{v_B^3}{gv_x} = \frac{v_B^3}{gv_0\cos\alpha} = \frac{19{,}8^3\cdot 2}{9{,}8\cdot 19{,}8\cdot\sqrt{2}} = 67 \text{ м}.$$

Задача № 1.2

Обруч катится по горизонтальной плоскости со скоростью $\vec{v}$ без проскальзывания. Определить мгновенные скорости нижней и верхней точек обруча.

Дано:
$\vec{v}$

$\vec{v}_A - ?$
$\vec{v}_B - ?$



Р е ш е н и е

Неподвижную систему координат $x0y$ выберем так, чтобы ось $0x$ лежала в плоскости, по которой катится обруч. Подвижная система $x'O'y'$ движется поступательно вместе с осью обруча со скоростью $\vec{v}$. Скорости $\vec{v}'_B$, $\vec{v}'_C$, $\vec{v}'_A$ точек *B, C* и *A* обода колеса в подвижной системе отсчета одинаковы и направлены по касательной к обручу. Согласно закону сложения скоростей, скорость любой точки обруча относительно неподвижной системы координат равна векторной сумме скоростей $\vec{v}$ и $\vec{v}'$.

Пусть $\vec{v}_A$ – скорость точки *A* относительно горизонтальной плоскости (т.е. относительно системы координат $x0y$). Тогда $\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}'$. При отсутствии проскальзывания нижняя точка *A* обруча, касаясь плоскости, неподвижна относительно ее, поэтому $\vec{v}_A = 0$, т.е. $0 = \vec{v}'_A + \vec{v}$. Для проекций скоростей на ось $0x$ получим:

$$0 = -v'_{Ax} + v_x, \quad 0 = -v'_A + v.$$

Отсюда $v'_A = v$. Следовательно, относительно системы $x'O'y'$ скорость любой точки по модулю равна *v*. Относительно $x0y$ точка *B* имеет скорость $\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}$. Спроектировав эти скорости на ось $0x$, получим:

$$v_{Bx} = v'_{Bx} + v_x, \quad v_B = v'_B + v.$$

Но $v'_B = v$, следовательно, $v_B = 2v$.

Можно легко найти, что скорость точки C

$$v_C = \sqrt{2} \cdot v.$$

2. ДИНАМИКА

Основной закон динамики (второй закон Ньютона) выражается уравнением

$$\overline{F} \cdot dt = d\left(m\overline{v}\right).$$

Если масса m постоянна, то

$$\overline{F} = m\frac{d\overline{v}}{dt} = m\overline{a},$$

где a – ускорение, которое приобретает тело массой m под действием силы F.

Работа силы F на пути s определяется формулой

$$A = \int_s F_s \cdot ds,$$

где F_s – проекция силы на направление перемещения; ds – элемент пути.

Интегрирование должно быть распространено на весь путь s. В случае постоянной силы, действующей под углом α к перемещению, имеем

$$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha,$$

где α – угол между силой F и перемещением.

Мощность определяется формулой

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

В случае постоянной мощности

$$N = \frac{A}{t},$$

где A – работа, совершаемая за время t.

Мощность может быть определена также формулой

$$N = F \cdot v\cos\alpha ,$$

где v – скорость тела.

Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v, равна

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} .$$

При криволинейном движении сила, действующая на материальную точку, может быть разложена на две составляющие: тангенциальную и нормальную. Модуль нормальной составляющей силы

$$F_n = \frac{mv^2}{R} ,$$

здесь v – линейная скорость тела массы m; R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Продольная деформация x стержня или пружины пропорциональна силе F, вызвавшей деформацию:

$$F = -kx ,$$

где k – жесткость (коэффициент, численно равный силе, вызывающей деформацию, равную единице).

Потенциальная энергия растянутой (или сжатой) пружины

$$W_p = \frac{kx^2}{2} .$$

Две материальные точки притягиваются друг к другу с силой

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} ,$$

где $G = 6,6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – гравитационная постоянная; m_1, m_2 – массы взаимодействующих материальных точек; r – расстояние между ними.

Этот закон справедлив и для однородных шаров; при этом r – расстояние между их центрами.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия материальных точек

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Это выражение нормировано так, чтобы при $r = \infty$ потенциальная энергия обращалась в нуль.

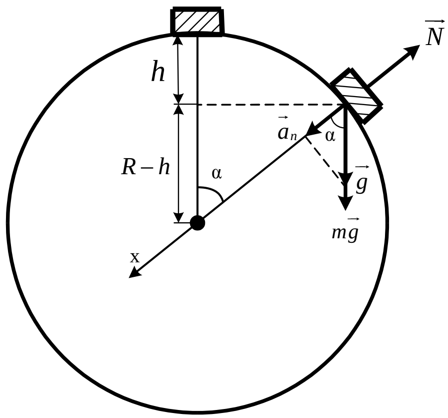
Задача № 2.1

С вершины идеально гладкой сферы соскальзывает небольшой груз. С какой высоты h, считая от вершины, груз сорвется со сферы? Радиус сферы $R = 90$ см.

Дано:

$R = 90$ см = 0,9 м

$h - ?$



Р е ш е н и е

Груз до точки отрыва от сферы движется по дуге окружности радиусом R. На груз во время его движения по сфере действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны сферы. Второй закон Ньютона для этой части траектории имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \qquad (1)$$

Проекции этих сил на направление x, нормальное к траектории, сообщают телу нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

где v – мгновенная скорость движения тела по сфере (непрерывно возрастающая).

$$ma_x = ma_n = mg\cos\alpha - N. \qquad (2)$$

В точке отрыва тела от поверхности сферы (пусть в точке C) прекращается взаимодействие движущегося тела и поверхности сферы и, следовательно, сила давления тела на сферу и соответственно сила реакции сферы N обращаются в ноль. Начиная с точки C нормальное ускорение сообщает телу только проекция силы тяжести:

$$ma_n = mg\cos\alpha.$$

Траектория движения тела с момента отрыва будет зависеть от модуля и направления скорости $\overrightarrow{v_C}$ в точке отрыва от сферы: $a_n = \frac{v_C^2}{R}$, следовательно,

$$\frac{mv_C^2}{R} = mg\cos\alpha.$$

Из рисунка видно, что $\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$, тогда $\frac{mv_C^2}{R} = mg\frac{R-h}{R}$, т.е.

$$v_C^2 = g\left(R-h\right). \qquad (3)$$

Для нахождения h необходимо еще одно уравнение, связывающее v_C с h. Применим закон сохранения энергии к переходу тела из начального состояния в точку отрыва. Поскольку сила реакции опоры работы не совершает, полная энергия E тела остается постоянной:

$$\Delta E = \Delta E_к + \Delta E_p = 0. \qquad (4)$$

При скольжении груза по сфере изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta E_p = -mgh - 0 = -mgh,$$

где h – высота, отсчитываемая от вершины сферы.

Потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая энергия возрастает при скольжении на величину

$$\Delta E_{к} = \frac{mv_C^2}{2} - 0 = \frac{mv_C^2}{2}.$$

Подставляя ΔE_p и $\Delta E_{к}$ в (4), получаем

$$-mgh + \frac{mv_C^2}{2} = 0,$$

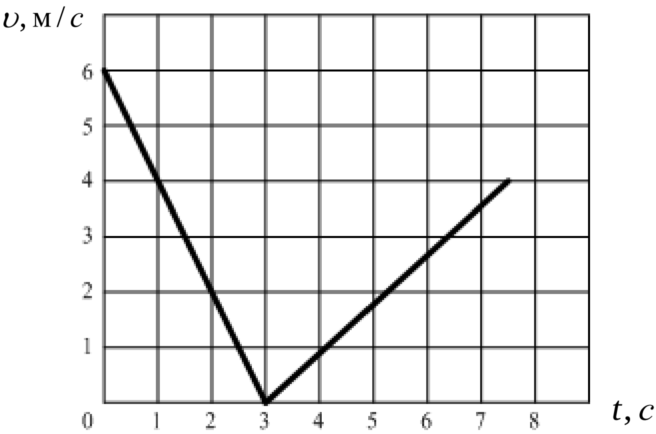
$$v_C^2 = 2gh. \qquad (5)$$

Приравнивая (3) и (5), находим

$$2gh = gR - gh, \qquad h = \frac{R}{3} = 0{,}3 \text{ м.}$$

Задача № 2.2

Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а затем возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени представлен на рисунке. Найти угол наклона плоскости к горизонту.



Р е ш е н и е

Из графика следует, что начальная скорость шайбы $v_0 = 6$ м/с (по модулю), время подъема шайбы $t_1 = 3$ с, время спуска $t_2 - t_1 = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$ с, модуль конечной скорости шайбы $v_к = 4$ м/с.

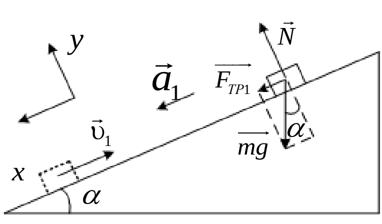
Скорость изменяется по линейному закону, следовательно, движение шайбы является равнопеременным, причем модули ускорений на подъеме a_1 и на спуске a_2 не равны друг другу. Используя график $v \;\; t$, определим значения a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{|v_1 - v_0|}{t_1 - t_0} = \frac{0 - 6}{3 - 0} = 2 \text{ м/с}^2,$$

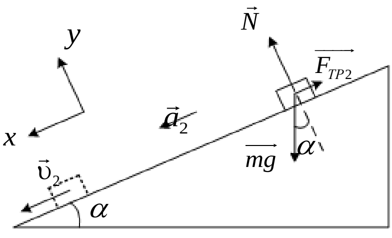
$$a_2 = \frac{v_к - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{4 - 0}{7{,}5 - 3} \approx 0{,}89 \text{ м/с}^2.$$

Из графика следует, что движение вверх равнозамедленное и поэтому векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}_1$ направлены в разные стороны, а движение вниз равноускоренное и векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}_2$ сонаправлены.

Ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ определяются силами, действующими на шайбу во время движения: силой тяжести $m\vec{g}$, силой реакции опоры $\vec{N}$ и силой трения $\vec{F}_{тр}$. Изобразим эти силы, векторы скоростей и ускорений на двух рисунках: для движения вверх (рис. *а*), вниз (рис. *б*)



а



б

Оси координат направим таким образом: ось *x* – вдоль наклонной плоскости (по направлению ускорений $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$), а ось *y* – перпендикулярно плоскости.

Второй закон Ньютона для движений вверх и вниз в векторной форме:

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{тр}1} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_1, \\ F_{\text{тр}2} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_2. \end{cases}$$

Второй закон Ньютона в проекциях на оси *x* и *y:*

$$F_{\text{тр}1} + mg\sin\alpha = ma_1, \tag{1}$$

$$-F_{\text{тр}2} + mg\sin\alpha = ma_2, \tag{2}$$

$$N - mg\cos\alpha = 0 \tag{3}$$

Учтем, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, где μ – коэффициент трения скольжения. Из равенства (3) следует, что $N = mg\cos\alpha$, а силы $\vec{F}_{\text{тр}1}$ и $\vec{F}_{\text{тр}2}$ равны по модулю:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha\ . \tag{4}$$

Подставим (4) в (1) и (2):

$$\begin{cases} \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma_1, \\ -\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma_2. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений относительно α:

$$2mg\sin\alpha = ma_1 + ma_2,$$

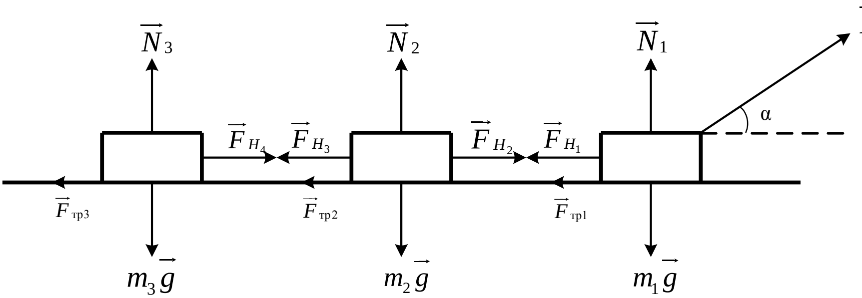
$$\alpha = \arcsin\frac{a_1 + a_2}{2g}\ . \tag{5}$$

Подставив числовые данные в (5), определим значение угла наклона плоскости:

$$\alpha = \arcsin\frac{2 + 0{,}89}{2 \cdot 9{,}8} \approx \arcsin 0{,}147 \approx 8{,}5°.$$

Задача № 2.3

Три груза массами $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ кг связаны между собой нитью. К грузу массой m_1 приложена сила $F = 10$ Н под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Коэффициент трения тел о поверхность равен $\mu = 0{,}1$. Определить ускорение системы.



Дано:

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$ кг
$F = 10$ Н
$\alpha = 30°$
$\mu = 0{,}1$

$a - ?$

Решение

Рассмотрим тело массой m_1. Второй закон Ньютона в векторной форме для него имеет вид

$$\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр1} + m_1\vec{g} + \vec{F}_{н_1} = m_1\vec{a}\,. \qquad (1)$$

Проекция сил, действующих на тело m_1, по оси *x*:

$$F\cos\alpha - F_{тр1} - F_{н_1} = m_1 a\,, \qquad (2)$$

$$F\cos\alpha - \mu N_1 - F_{н_1} = m_1 a\,. \qquad (3)$$

Проекция сил, действующих на тело m_1, по оси *y*:

$$N_1 + F\sin\alpha - m_1 g = 0\,. \qquad (4)$$

Отсюда находим

$$N_1 = m_1 g - F\sin\alpha\,,$$

$$F_{тр1} = \mu N_1 = \mu\;\; m_1 g - F\sin\alpha\;\,.$$

Подставим $F_{\text{тр}1}$ в уравнение (2):

$$F\cos\alpha - \mu \;\; m_1 g - F\sin\alpha \;\; - F_{\text{н}_1} = m_1 a. \qquad (5)$$

Рассмотрим тело массой m_2. Векторное уравнение имеет вид:

$$\overrightarrow{F_{\text{н}_2}} + \vec{F}_{\text{тр}2} + \overrightarrow{F_{\text{н}_3}} + \overrightarrow{N_2} + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}\,. \qquad (6)$$

Проекция сил, действующих на тело m_2 по оси x:

$$F_{\text{н}_2} - F_{\text{н}_3} - F_{\text{тр}2} = m_2 a\,, \qquad (7)$$

или

$$F_{\text{н}_2} - F_{\text{н}_3} - \mu m_2 g = m_2 a\,. \qquad (8)$$

Рассмотрим тело массой m_3. Векторное уравнение имеет вид

$$\overrightarrow{F_{\text{н}_4}} + \vec{F}_{\text{тр}3} = m_3\vec{a}\,, \qquad (9)$$

$$F_{\text{н}_4} - \mu m_3 g = m_3 a\,. \qquad (10)$$

Сложим левые и правые части уравнений (5), (8) и (10). Получим

$$F\cos\alpha - \mu \;\; m_1 g - F\sin\alpha \;\; - F_{\text{н}_1} + F_{\text{н}_2} - F_{\text{н}_3} + F_{\text{н}_4} - \mu m_2 g - \mu m_3 g =$$

$$= \;\; m_1 + m_2 + m_3 \;\; \alpha.$$

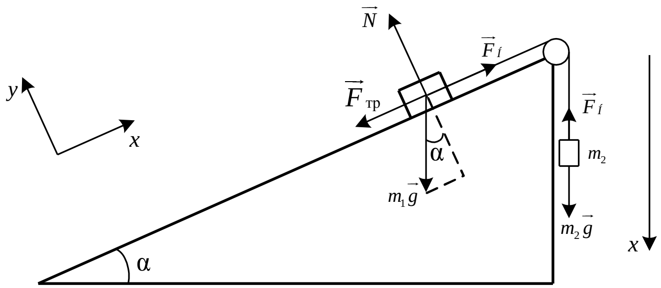
Учитывая, что $\left|\overrightarrow{F_{\text{н}_1}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{\text{н}_2}}\right|$ и $\left|\overrightarrow{F_{\text{н}_3}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{\text{н}_4}}\right|$, выразим α:

$$a = \frac{F\cos\alpha - \mu \;\; m_1 g - F\sin\alpha \;\; - \mu g \;\; m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= \frac{10\cdot 0{,}866 - 0{,}1 \;\; 10 - 10\cdot 0{,}5 \;\; - 0{,}1\cdot 10\cdot 2}{3} = 2{,}05 \text{ м/с}^2.$$

Задача № 2.4

Дана система, состоящая из двух тел m_1 и m_2, связанных нитью, перекинутой через невесомый блок. Тело массой m_1 находится на наклонной плоскости с углом α. Коэффициент трения равен μ. Определить натяжение нити и ускорение тел.



Р е ш е н и е

Рассмотри тело массой m_1. Второй закон Ньютона в векторной форме

$$\vec{N}_1 + m_1\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_{н} = m_1\vec{a}\,. \qquad (1)$$

Проекция сил на ось x дает

$$F_{н} - F_{тр} - m_1 g \sin\alpha = m_1 a\,. \qquad (2)$$

Проекция сил на ось y дает

$$N - m_1 g\cos\alpha = 0\,.$$

Отсюда $N = m_1 g\cos\alpha$.

$$F_{тр} = \mu N = \mu m_1 g\cos\alpha.$$

Перепишем уравнение (2):

$$F_{н} - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = m_1 a. \qquad (3)$$

Рассмотрим тело массой m_2. Второй закон Ньютона имеет вид

$$m_2\vec{g} + \vec{F}_{н} = m_2\vec{a}\,. \qquad (4)$$

Спроектируем уравнение (4) на выбранную для тела m_2 ось x:

$$m_2 g - F_н = m_2 a. \qquad (5)$$

Сложим левые и правые части уравнений (3) и (5). Получим

$$a = \frac{m_2 g - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha}{m_1 + m_2},$$

$$F_н = m_2 g - m_2 a.$$

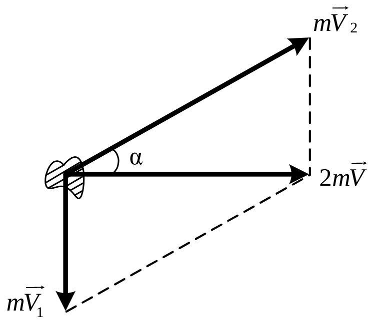
Задача № 2.5

Снаряд, летевший на высоте $h = 60$ м горизонтально со скоростью 150 м/с, разрывается на две равные части. Одна часть снаряда спустя время $t = 1$ с падает на землю точно под местом взрыва. Определить скорость другой части снаряда сразу после взрыва (величину и направление).

Дано:

$h = 60$ м
$v = 150$ м/с
$m_1 = m_2 = m$
$t = 1$ с

$v_2 - ?$
$\alpha - ?$



Р е ш е н и е

Рассмотрим части снаряда как систему тел. Силы, действующие на эти части в момент взрыва, являются внутренними. Так как эти силы очень велики по сравнению с внешними силами (тяжести, сопротивления воздуха), то систему тел в течение времени разрыва снаряда можно считать замкнутой. Для такой системы применим закон сохранения импульса системы тел:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2', \qquad (1)$$

где $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ – импульсы тел (частей) системы до взрыва; $\vec{P_1'}$, $\vec{P_2'}$ – импульсы тел системы сразу после разрыва.

До взрыва импульс системы $\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} = m\vec{v} + m\vec{v} = 2m\vec{v}$ направлен горизонтально (m – масса одной части снаряда). Сразу после взрыва импульс системы

$$\vec{P'} = \vec{P_1'} + \vec{P_2} = m\vec{v_1} + m\vec{v_2}$$

равен векторной сумме импульсов обеих частей снаряда. Следовательно, имеем

$$2m\vec{v} = m\vec{v_1} + m\vec{v_2}\,. \qquad (2)$$

Импульс первой части снаряда направлен вертикально вниз, направление импульса второй части находим, складывая векторы в соответствии с уравнением (2).

По теореме Пифагора для сторон векторного треугольника имеем

$$mv_2\;{}^2 = 2mv\;{}^2 + mv_1\;{}^2, \qquad m_2 v_2^2 = 4m^2v^2 + m^2v_1^2\,.$$

Найдем

$$v_2 = \sqrt{4v^2 + v_1^2}\,. \qquad (3)$$

Первая часть снаряда падает с высоты h с начальной скоростью v_1:

$$h_1 = v_1 t + \frac{gt^2}{2},$$

откуда $v_1 = \dfrac{h}{t} - \dfrac{gt}{2} = \dfrac{60}{1} - \dfrac{9{,}8}{2} = 55{,}1$ м/с.

По формуле (3) найдем

$$v_2 = \sqrt{4v^2 + v_1^2} = \sqrt{4\cdot 150^2 + 55{,}1^2} = 305 \text{ м/с.}$$

Вектор скорости $\vec{v_2}$ направлен под углом α к горизонту:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{mv_1}{2mv} = \frac{v_1}{2v} = \frac{55{,}1}{2\cdot 150} = 0{,}184, \qquad \alpha = 10°30'.$$

3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Модуль момента *M* силы *F* относительно некоторой оси определяется формулой

$$M = rF\sin\alpha,$$

где α – угол между *r* и *F*.

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси называется величина

$$I = mr^2,$$

где m – масса материальной точки и *r* – ее расстояние до оси.

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси

$$I = \int r^2 \cdot dm,$$

где интегрирование должно быть распространено на весь объем тела.

Момент инерции сплошного однородного цилиндра (диска) относительно оси цилиндра

$$I = \frac{1}{2}mR^2,$$

где *R* – радиус цилиндра и *m* – его масса.

Момент инерции полого цилиндра (обруча) с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 относительно оси цилиндра

$$I = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right),$$

для тонкостенного полого цилиндра $R_1 \approx R_2 = R$ и $I \approx mR^2$.

Момент инерции однородного шара радиусом *R* относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$

Момент инерции однородного стержня длиной *l* относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно к нему:

$$I = \frac{1}{12} ml^2 .$$

Если для какого-либо тела известен его момент инерции I_0 относительно оси, проходящей через центр масс, то момент инерции относительно любой оси, параллельной первой, может быть найден по теореме Штейнера

$$I = I_0 + ma^2 ,$$

где m – масса тела и a – расстояние между осями.

Основной закон динамики вращательного движения выражается уравнением

$$\vec{M}dt = d\vec{L} = d \;\; I\vec{\omega} \;\; ,$$

где $\vec{M}$ – момент сил, приложенных к телу; $\vec{L}$ – момент импульса тела; I – момент инерции тела; $\vec{\omega}$ – его угловая скорость. Если $I = \mathrm{const}$, то

$$\overrightarrow{M} = I \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} ,$$

где ε – угловое ускорение, приобретаемое телом под действием момента сил M.

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_{\text{k}} = \frac{I\omega^2}{2} ,$$

где I – момент инерции тела и ω – его угловая скорость.

Сопоставление уравнений динамики вращательного движения с уравнениями поступательного движения дано в таблице.

Поступательное движение	Вращательное движение
Второй закон Ньютона	
$\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$, или $\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M}\Delta t = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1$, $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
Закон сохранения импульса для замкнутой системы	Закон сохранения момента импульса в замкнутой системе, где момент внешних сил равен нулю

$\sum m\vec{v} = \text{const}$	$\sum J\vec{\omega} = \text{const}$
Работа и кинетическая энергия	
$A = FS = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$	$A = M\varphi = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}$

Задача № 3.1

В однородном диске массой $m = 1$ кг и радиусом $R = 30$ см вырезано круглое отверстие диаметром $d = 20$ см, центр которого находится на расстоянии $l = 15$ см от оси диска. Найти момент инерции полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

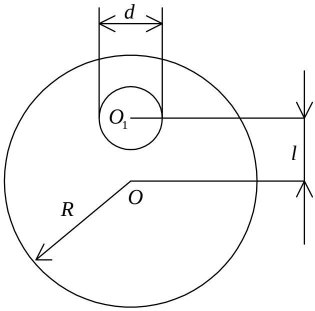
Дано:

$m = 1$ кг

$d = 0,2$ м

$l = 0,15$ м

$J - ?$



Решение

Момент инерции данного тела относительно указанной оси можно рассчитать как разность моментов инерции относительно той же оси двух однородных дисков: большого диска и малого, который был вырезан:

$$J_0 = J - J_1 . \quad (1)$$

Момент инерции однородного диска радиусом r относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска, рассчитывается по формуле

$$J = \frac{1}{2} mr^2 . \quad (2)$$

Масса вырезанного диска неизвестна. Найдем ее. Плотность большого диска

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{3}$$

Учитывая, что объемы большого и малого дисков можно записать как

$$V = \pi R^2 h,$$

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{4} h,$$

где h – толщина дисков, получим

$$\frac{m_1}{m} = \frac{\rho V_1}{\rho V} = \frac{\rho \pi d^2 h}{4 \rho \pi R^2 h} = \frac{d^2}{4R^2}. \tag{4}$$

Выразим m_1 из (4):

$$m_1 = \frac{md^2}{4R^2}. \tag{5}$$

С учетом (5) момент инерции малого диска относительно оси, проходящей через его центр масс (точку O_1) перпендикулярно его плоскости, запишется:

$$J_1' = \frac{1}{2}\frac{m_1 d^2}{4} = \frac{m_1 d^2}{8}. \tag{6}$$

Воспользуемся теоремой Штейнера для нахождения момента инерции малого диска относительно оси, проходящей через точку *O,* и параллельной оси, проходящей через точку O_1:

$$J_1 = J_1' + m_1 l^2,$$

$$J_1 = \frac{m_1 d^2}{8} + m_1 l^2 = m_1\left(\frac{d^2 + 8l^2}{8}\right) = \frac{md^2 \;\; d^2 + 8l^2}{32R^2}. \tag{7}$$

Окончательное выражение для расчета момента инерции полученного тела относительно указанной в условии оси получим, используя выражения (1), (2) и (7):

$$J_0 = \frac{1}{2} mR^2 - \frac{md^2 \;\; d^2 + 8l^2}{32R^2}. \qquad (8)$$

Рассчитаем численное значение J_0, подставив числовые данные:

$$J_0 = \frac{1}{2} \;\; 0,3 \;\; ^2 - \frac{0,2 \;\; ^2 \;\; 0,2^2 + 8 \cdot 0,15^2}{32 \cdot \;\; 0,3 \;\; ^2} = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ кг·м}^2.$$

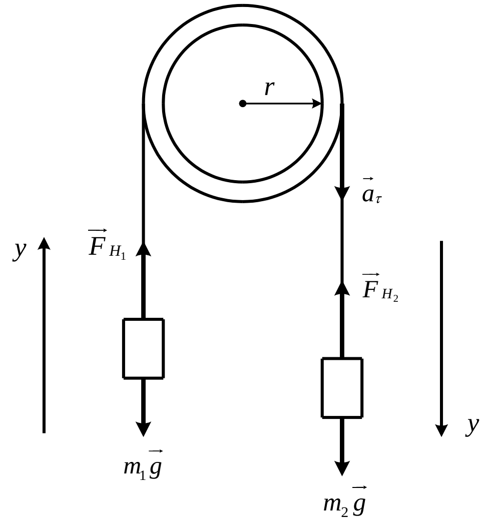
Задача № 3.2

Через блок, выполненный в виде колеса, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами 100 и 300 г. Масса колеса равна 200 г и равномерно распределена по ободу. Массой спиц пренебречь. Найти силы натяжения нитей и ускорение грузов.

Дано:

$m_1 = 0,1$ кг
$m_2 = 0,3$ кг
$m = 0,2$ кг

F_{H_1} – ?
F_{H_2} – ?
a – ?



Р е ш е н и е

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме для первого и второго грузов:

$$m_1\vec{g} + \overrightarrow{F_{H_1}} = m_1\vec{a}\ , \tag{1}$$

$$m_2\vec{g} + \overrightarrow{F_{H_2}} = m_2\vec{a}\ . \tag{2}$$

В проекциях на выбранные оси эти уравнения будут иметь вид

$$F_{H_1} - m_1 g = m_1 a\ , \tag{3}$$

$$m_2 g - F_{H_2} = m_2 a\ . \tag{4}$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения колеса. Введем радиус колеса r и моменты сил rF_{H_1} и rF_{H_2} относительно оси, проходящей через центр блока:

$$F_{H_2} - F_{H_1} \quad r = J\varepsilon. \tag{5}$$

Для колеса $J = mr^2$. Учитывая, что $a = a_\tau = \varepsilon r$, получим (5) в виде

$$F_{H_2} - F_{H_1} \quad r = mr^2\frac{a}{r} \text{ или } F_{H_2} - F_{H_1} = ma\ . \tag{6}$$

Решая систему уравнений (3), (4) и (6), получим:

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1 + m_2 + m} = 3{,}33 \text{ м/с}^2,$$

$$F_{H_1} = m_1 a + m_1 g = 1{,}33 \text{ Н},$$

$$F_{H_2} = m_2 g - m_2 a = 1{,}98 \text{ Н}.$$

Задача № 3.3

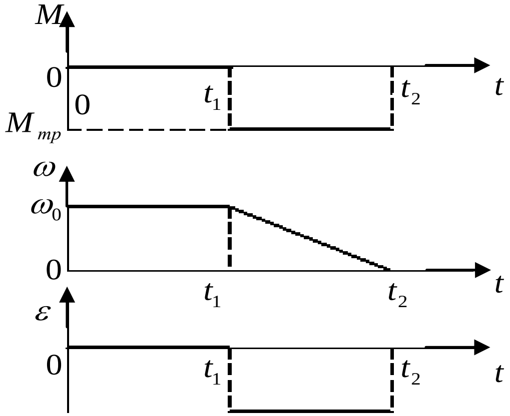
Маховое колесо, имеющее момент инерции $J = 300$ кг·м², вращается с частотой $n = 15$ об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент сил, оно остановилось, сделав 900 оборотов. Найти: 1) момент сил трения; 2) время, прошедшее от момента прекращения действия вращающего момента сил до полной остановки колеса.

Дано:

$J = 300$ кг м²
$n = n_0 = 15$ об/с
$N = 900$ об

$M_{\text{тр}} - ?$

$t_{\text{ост}} - ?$



Решение

Сначала колесо вращается с постоянной частотой $n = n_0$, т.е. равномерно, следовательно, суммарный момент сил $\vec{M}$, действующих на него, равен нулю:

$$\vec{M} = \vec{M}_{\text{вращ}} + \vec{M}_{\text{тр}} = 0;$$

когда $\vec{M}_{\text{вращ}} = 0$, то действует только тормозящий момент сил трения, $\vec{M} = \vec{M}_{\text{тр}}$, колесо движется равнозамедленно с постоянным отрицательным ускорением ε в течение времени $t_{\text{ост}} = t_2 - t_1$ (см. рисунок).

При равнозамедленном вращении зависимости угла поворота от времени $\varphi\ t$ и угловой скорости от времени $\omega\ t$ задаются уравнениями

$$\begin{cases} \varphi = \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2}, & (1) \\ \omega = \omega_0 - \varepsilon t. & (2) \end{cases}$$

Уравнение динамики вращательного движения имеет вид

$$M_{\text{тр}} = J\varepsilon. \quad (3)$$

Решая систему кинематических уравнений (1) и (2), можно найти угловое ускорение ε и время остановки колеса $t = t_{\text{ост}}$. Затем из уравнения (3) определим $M_{\text{тр}}$.

К моменту остановки колесо сделает N оборотов, повернувшись на угол $\varphi = 2\pi N$, а угловая скорость будет $\omega = 0$. Система уравнений (1) и (2) примет вид

$$2\pi N = \omega_0 t_{\text{ост}} - \frac{\varepsilon t_{\text{ост}}^2}{2}, \tag{4}$$

$$0 = \omega_0 - \varepsilon t_{\text{ост}}. \tag{5}$$

Исключим из уравнения (4) угловое ускорение, выразив его из (5): $\varepsilon = \dfrac{\omega_0}{t_{\text{ост}}}$. Получим

$$2\pi N = \omega_0 t_{\text{ост}} - \frac{\omega_0 t_{\text{ост}}}{2} = \frac{\omega_0 t_{\text{ост}}}{2}.$$

Тогда время остановки

$$t_{\text{ост}} = \frac{4\pi N}{\omega_0} = \frac{4\pi N}{2\pi n_0} = \frac{2N}{n_0},$$

$$t_{\text{ост}} = \frac{2 \cdot 900}{15} = 120 \text{ с}.$$

Выразим из уравнения (5) $\varepsilon = \dfrac{\omega_0}{t_{\text{ост}}}$ и подставим в уравнение (3):

$$M_{\text{тр}} = J\frac{\omega_0}{t_{\text{ост}}} = \frac{J \cdot 2\pi n_0}{t_{\text{ост}}} = \frac{300 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15}{120} = 235{,}5 \text{ Н·м},$$

$$M_{\text{тр}} = \frac{J \cdot 2\pi n_0 n_0}{2N} = \frac{J\pi n_0^2}{N}.$$

Задачу можно решить другим способом. Изменение кинетической энергии вращения колеса $\Delta E_{\text{кин}}$ равно работе тормозящих сил:

$$\Delta E_{кин} = A_{торм},$$

$$0 - \frac{J\omega_0^2}{2} = -M_{торм}\varphi,$$

$$\frac{J\omega_0^2}{2} = M_{торм} 2\pi N,$$

откуда

$$M_{торм} = M_{тр} = \frac{J\omega_0^2}{4\pi N} = \frac{J \cdot 4\pi^2 n_0^2}{4\pi N} = \frac{J\pi n_0^2}{N}.$$

Время $t_{ост}$ из $\omega = 0 = \omega_0 - \varepsilon t_{ост}$ равно $t_{ост} = \dfrac{\omega_0}{\varepsilon}$.

Выразив $\varepsilon = \dfrac{M_{торм}}{J}$, подставим в $t_{ост}$:

$$t_{ост} = \frac{\omega_0 J}{M_{торм}} = \frac{2\pi n_0 J}{M_{торм}}.$$

Задача № 3.4

По горизонтальной поверхности катятся без скольжения обруч и сплошной цилиндр со скоростью 10 км/час. На какое расстояние может вкатиться на горку каждое тело за счет его кинетической энергии? Сравнить найденные расстояния. Уклон горки равен 20 м на каждые 100 м пути. Массы и радиусы тел равны.

Дано:

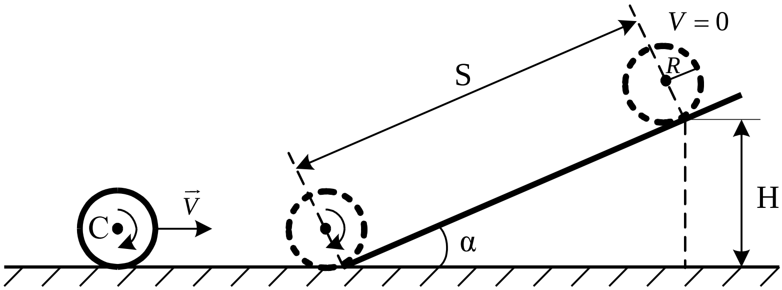
$v = 10$ км/ч = 2,78 м/с

$\sin\alpha = \dfrac{20}{100} = 0,2$

$S_1 - ?$

$S_2 - ?$

Р е ш е н и е



Полная кинетическая энергия катящегося без проскальзывания тела складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс тела (точки *C*) и кинетической энергии вращения относительно оси, проходящей через центр масс:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции тела; ω – угловая скорость вращения,

$$\omega = \frac{v}{R} \tag{1}$$

Когда тело вкатится на горку на расстояние S и скорость v станет равной нулю, то полная кинетическая энергия тела у основания горки перейдет в потенциальную: $W_к = W_п$ (закон сохранения полной механической энергии):

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = mgH\ . \tag{2}$$

Тела различной формы с одинаковой массой имеют различные моменты инерции. Так, момент инерции обруча в два раза больше момента инерции сплошного цилиндра:

$$J_{обр} = J_1 = mR^2, \tag{3}$$

$$J_{цил} = J_2 = \frac{1}{2}mR^2, \tag{4}$$

где m – масса; R – радиус обруча или цилиндра.

Следовательно, за счет большей кинетической энергии вращения обруч вкатится на большее расстояние $S_1 > S_2$ на горку и поднимется на большую высоту $H_1 > H_2$.

Из рисунка

$$H = S\sin\alpha\ . \tag{5}$$

Подставим ω и H из (1) и (5) в закон сохранения полной механической энергии:

$$mv^2 + \frac{Jv^2}{R^2} = 2mS\sin\alpha\,,$$

откуда расстояние S равно:

$$S = \frac{mv^2 + \dfrac{Jv^2}{R^2}}{2mg\sin\alpha} = \frac{v^2\left(m + \dfrac{J}{R^2}\right)}{2mg\sin\alpha}\ .$$

Для обруча

$$S_1 = \frac{v^2\left(m + \dfrac{mR^2}{R^2}\right)}{2mg\sin\alpha} = \frac{v^2}{g\sin\alpha}\,,$$

$$S_1 = \frac{2,78^2}{9,8\cdot 0,2} = 3,95\ \text{м.}$$

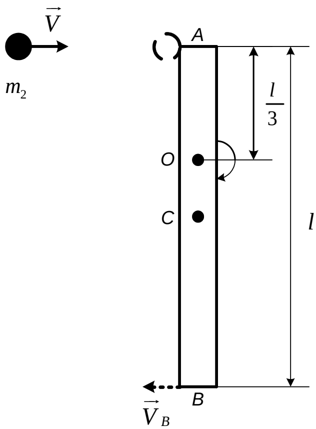
Для сплошного цилиндра

$$S_2 = \frac{v^2\left(m + \dfrac{1}{2}\dfrac{mR^2}{R^2}\right)}{2mg\sin\alpha} = \frac{3}{4}\frac{v^2}{g\sin\alpha}\,,$$

$$S_2 = 2,97\ \text{м,}\qquad S_1 > S_2\,.$$

Задача № 3.5

Однородный тонкий стержень массой $m_1 = 0,2$ кг и длиной $l = 1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси *z*, проходящей через точку *O*. В точку *A* на стержне попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси *z*) со скоростью $v = 10$ м/с, и прилипает к стержню. Масса m_2 шарика равна 10 г. Определить угловую скорость ω стержня и линейную скорость v_B нижнего конца стержня в начальный момент времени. Расстояние $AO = \frac{l}{3}$.



Дано:	Решение
$m_1 = 0,2$ кг $m_2 = 0,01$ кг $l = 1$ м $l = 1$ $v = 10$ м/с $AO = \frac{l}{3}$	Система тел шарик–стержень является замкнутой, и для нее применим закон сохранения момента импульса:
$\omega - ?$ $v_B - ?$	

$$\vec{L}_{сист} = \vec{L'}_{сист} = \text{const}, \qquad (1)$$

где $\vec{L}_{сист}$, $\vec{L'}_{сист}$ – моменты импульсов системы в разные моменты времени.

Обозначим в начальный момент удара моменты импульсов: стержня $\vec{L_1}$, шарика $\vec{L_2}$. В этот момент времени шарик только коснется неподвижного стержня в точке *A*.

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \vec{L_1} + \vec{L_2}\ .$$

В конечный момент удара, когда шарик прилипнет к стержню, обозначим момент импульса стержня $\vec{L_1'}$, а шарика – $\vec{L_2'}$. В этот момент времени стержень и прилипший шарик в точке *A* (неупругий удар) начнут вместе вращаться с угловой скоростью ω.

$$\vec{L'}_{\text{сист}} = \vec{L_1'} + \vec{L_2'}\ .$$

Тогда закон сохранения (1) примет вид

$$\vec{L_1} + \vec{L_2} = \vec{L_1'} + \vec{L_2'}\ . \qquad (2)$$

Так как стержень в начальный момент удара покоится, то $\vec{L_1} = 0$. Направления векторов $\vec{L_2}$, $\vec{L_1'}$, $\vec{L_2'}$ одинаковы: они направлены вдоль оси *z*, проходящей через точку *O*, от нас в соответствии с векторными уравнениями $\vec{L} = \left[\vec{r}; \vec{p}\right]$, $\vec{L} = J\vec{\omega}$.

Уравнение (2) примет вид

$$L_2 = L_1' + L_2'. \qquad (3)$$

Для шарика начальный момент импульса

$$L_2 = rp\,,$$

где p – импульс шарика; r – расстояние от точки удара шарика (точки *A*) до оси вращения, проходящей через точку *O*.

$$r = \frac{l}{3}, \quad p = m_2 v\,,$$

$$L_2 = \frac{l}{3} m_2 v\,. \qquad (4)$$

Выразим L_1' и L_2' через *J* и ω:

$$L_1' + L_2' = \omega\left(J_1' + J_2'\right), \qquad (5)$$

где J_1', J_2' – моменты инерции соответственно стержня и шарика относительно оси, проходящей через точку *O*, в конечный момент удара.

Так как радиус шарика не задан, то считаем шарик материальной точкой, для которой

$$J_2' = m_2 \;\; AO^{\;\;2} = m_2 \left(\frac{l}{3} \right)^2 = m_2 \frac{l^2}{9}. \qquad (6)$$

Для стержня по теореме Штейнера имеем

$$J_1' = J_C + m_1 \;\; OC^{\;\;2},$$

где J_C – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня (точка C) и параллельной оси z, проходящей через точку O; OC – расстояние между осями.

$$J_C = \frac{1}{12} m_1 l^2, \qquad OC = AC - OC = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6},$$

$$J_1' = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{6} \right)^2 = m_1 \frac{l^2}{9}. \qquad (7)$$

Подставим в уравнение (3) выражения (4), (5), (6), (7):

$$\frac{l}{3} m_2 v = \omega \left(m_1 \frac{l^2}{9} + m_2 \frac{l^2}{9} \right) = \frac{\omega l^2}{9} \;\; m_1 + m_2 \;\; .$$

Найдем угловую скорость:

$$\omega = \frac{3 m_2 v}{m_1 + m_2 \;\; l},$$

$$\omega = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{0{,}21} = 1{,}43 \text{ рад/с}.$$

Линейная скорость нижнего конца стержня при вращении относительно точки O

$$v_B = \omega OB = \omega \frac{2l}{3} = \frac{2 m_2 v}{m_1 + m_2},$$

$$v_B = 1{,}43 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}95 \text{ м/с}.$$

Задача № 3.6

Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой $m_1 = 60$ кг. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную точку на платформе? Масса m_2 платформы равна 240 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Дано:
$m_1 = 60$ кг
$m_2 = 240$ кг
$\varphi - ?$

Р е ш е н и е:

Человек и платформа являются замкнутой системой, так как моменты всех внешних сил (сил тяжести и сил реакции), действующих на систему по отношению к оси вращения, являются уравновешенными. Следовательно, для системы тел применим закон сохранения момента импульса.

Когда человек стоит на неподвижной платформе, момент импульса системы тел равен нулю. По закону сохранения момента импульса

$$0 = J_{чел}\omega_{чел} - J_{пл}\omega_{пл},$$

или

$$0 = J_1\omega_1 - J_2\omega_2, \qquad (1)$$

где J_1 и ω_1 – моменты инерции человека и угловая скорость человека относительно земли, сделавшего полный оборот по краю платформы; J_2 и ω_2 – момент инерции платформы и угловая скорость платформы, повернувшейся на угол φ относительно земли.

Платформа и человек вращаются в противоположные стороны, иначе момент импульса системы не остался бы равным нулю. Момент инерции платформы $J_2 = m_2\dfrac{R^2}{2}$, а человека – $J_1 = m_1R^2$.

Угловая скорость человека ω_1 относительно земли находится из закона сложения скоростей:

$$\overrightarrow{\omega_1} = \overrightarrow{\omega'} + \overrightarrow{\omega_2}, \qquad (2)$$

где $\overrightarrow{\omega'}$ – угловая скорость человека относительно платформы; $\overrightarrow{\omega_2}$ – угловая скорость платформы относительно земли.

При равномерном вращении $\omega' = \dfrac{2\pi}{t}$, а $\omega_2 = \dfrac{\varphi}{t}$, где t – время, за которое человек обойдет платформу, а платформа повернется в противоположном направлении на угол φ.

Преобразуем (2):

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{t} - \frac{\varphi}{t}.$$

Сделав подстановку в законе сохранения (1), будем иметь

$$J_2\omega_2 = J_1\omega_1,$$

$$m_2\frac{R^2}{2}\frac{\varphi}{t} = m_1 R^2\left(\frac{2\pi}{t} - \frac{\varphi}{t}\right),$$

$$\frac{m_2\varphi}{2} = 2\pi m_1 - m_1\varphi.$$

Найдем угол поворота платформы:

$$\varphi = \frac{2\pi m_1}{m_1 + \dfrac{m_2}{2}},$$

$$\varphi = \frac{120\pi}{60+120} = \frac{2\pi}{3} \text{ рад.} = 120^{\circ}.$$

Задача № 3.7

На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной $l = 2{,}4$ м и массой $m = 8$ кг, расположенный вертикально по оси вращения скамейки. Скамья с человеком вращается с частотой $n_1 = 1$ с$^{-1}$. С какой частотой n_2 будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение, так что ось вращения скамейки пройдет через середину стержня? Определить работу, совершенную человеком в этом случае. Суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 кг·м^2.

Дано:

$l = 2{,}4$ м
$m = 8$ кг
$n_1 = 1$ $с^{-1}$
$J_1 = J_r + J_{ск} = 6$ кг·м²

$n_2 - ?$
$A_{чел} - ?$

Р е ш е н и е

Система тел человек–стержень–скамейка замкнутая, и для нее справедлив закон сохранения момента импульса:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

$$J_1\omega_1 = \ J_1 + J_{ст}\ \ \omega_2, \tag{1}$$

где J_1 – момент инерции человека и скамейки; $J_{ст}$ – момент инерции стержня, расположенного горизонтально; ω_1, ω_2 – угловые скорости системы тел соответственно, когда стержень расположен вертикально и когда стержень повернут в горизонтальное положение $\ \omega_1 = 2\pi n_1\ $, $\ \omega_2 = 2\pi n_2\ $.

Момент инерции стержня, расположенного вертикально по оси вращения, равен нулю. $J_{ст} = \dfrac{1}{12} ml^2$, так как ось вращения пройдет через центр масс стержня. С учетом сказанного выше выражение (1) примет вид

$$J_1 \cdot 2\pi n_1 = \left(J_1 + \frac{1}{12} ml^2 \right) 2\pi n_2, \tag{2}$$

$$n_2 = \frac{J_1 n_1}{J_1 + \dfrac{1}{12} ml^2}, \quad n_2 = \frac{6 \cdot 1}{6 + \dfrac{8}{12} \cdot 2{,}4^2} = 0{,}61\ с^{-1}.$$

При повороте стержня в горизонтальное положение меняются угловая скорость вращения системы тел и ее кинетическая энергия вращения, т.е. человек совершает работу. Работу находим из закона изменения кинетической энергии:

$$A_{чел} = A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2} = 2\pi^2\ \ J_2 n_2^2 - J_1 n_1^2\ \ .$$

Найдем J_2:

$$J_2 = J_1 + \frac{1}{12} ml^2 = 6 + \frac{8}{12} \cdot 2{,}4^2 = 6 + 3{,}84 = 9{,}84 \text{ кг·м}^2.$$

$$A_{\text{чел}} = 2 \cdot 3{,}14^2 \;\; 9{,}84 \cdot 0{,}61^2 - 6 \cdot 1 \;\; = 19{,}72 \;\; 3{,}66 - 6 \;\; = -46{,}1 \text{ Дж.}$$

4. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

По закону Кулона сила электростатического взаимодействия между двумя заряженными телами, размеры которых малы по сравнению с расстоянием r между ними, определяется формулой

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

где q_1 и q_2 – электрические заряды тел; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_0 = 8{,}85418782 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Напряженность электрического поля определяется формулой

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

где F – сила, действующая на заряд q. Напряженность поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

Согласно принципу суперпозиции напряженность электрического поля нескольких зарядов (например, поле диполя) находится по правилу векторного сложения.

По теореме Гаусса поток напряженности сквозь любую замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sum q_i,$$

где $\sum q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри этой поверхности. Соответственно поток электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность

$$\Phi_D = \sum q_i.$$

При помощи теоремы Гаусса можно найти напряженность электрического поля, образованного различными заряженными телами.

Напряженность поля, образованного заряженной бесконечно длинной нитью,

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a},$$

где τ – линейная плотность заряда на нити; a – расстояние от нити. Если нить имеет конечную длину, то напряженность поля в точке, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из середины нити, на расстоянии a от нее,

$$E = \frac{\tau \sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a},$$

где α – угол между направлением нормали к нити и радиусом вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концу нити. Напряженность поля, образованного заряженной бесконечно протяженной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

где σ – поверхностная плотность заряда на плоскости.

Напряженность поля, образованного разноименно заряженными, параллельными бесконечными плоскостями (плоский конденсатора):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Напряженность поля заряженного шара

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где q – заряд шара радиусом R; r – расстояние от центра шара, причем $r > R$.

Электрическое смещение D определяется соотношением

$$D = \varepsilon_0\varepsilon E.$$

Разность потенциалов между двумя точками электрического поля определяется работой, которую надо совершить, чтобы единицу положительного заряда перенести из одной точки в другую:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}.$$

Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r},$$

где r – расстояние от заряда.

Напряженность электрического поля и потенциал связаны соотношением

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi.$$

В случае однородного поля плоского конденсатора напряженность

$$E = \frac{U}{d},$$

где U – разность потенциалов между пластинами конденсатора; d – расстояние между ними.

Потенциал уединенного проводника и его заряд связаны соотношением

$$q = C\varphi,$$

где C – емкость уединенного проводника.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора.

Емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r R}{R - r},$$

где r и R – радиусы внутренней и внешней сфер. В частном случае, когда $R = \infty$,

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r,$$

где C – емкость уединенного шара.

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon L}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)},$$

где L – высота коаксиальных цилиндров; r и R – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров.

Емкость системы конденсаторов:

- при параллельном соединении конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + C_1 + \ldots,$$

- при последовательном соединении

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots$$

Энергия заряженного проводника может быть найдена по одной из следующих формул:

$$W = \frac{qU}{2}, \quad W = \frac{CU^2}{2}, \quad W = \frac{q^2}{2C}.$$

В случае плоского конденсатора энергия

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S d}{2} = \frac{\sigma^2 S d}{2\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора; σ – поверхностная плотность заряда на пластинах; U – разность потенциалов между пластинами; d – расстояние между ними. Величина

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$$

называется объемной плотностью энергии электрического поля.

Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора

$$F = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d^2} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Задача № 4.1

Две бесконечные равномерно заряженные плоскости с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \pm 4{,}42 \cdot 10^{-9}$ Кл/м² пересекаются под углом $\alpha = 60°$. Чему равна напряженность поля в областях 1 и 2 ?

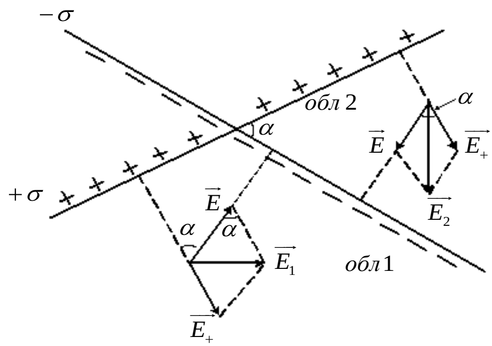
Дано:

$|\sigma_+| = |\sigma_-| = 4{,}42 \cdot 10^{-9}$ Кл/м²

$\alpha = 60°$

$E_1 - ?$

$E_2 - ?$



Решение

По принципу суперпозиции электрических полей обе заряженные плоскости создают независимо электрическое поле в любой точке пространства. Так как поле заряженной бесконечной плоскости однородно, то определяем напряженность в произвольной точке области.

Область 1

$$\vec{E_1} = \vec{E_+} + \vec{E_-}, \tag{1}$$

где $\vec{E_+}$, $\vec{E_-}$, $\vec{E_1}$ – соответственно напряженности электрического поля, созданного положительно заряженной плоскостью, отрицательно заряженной плоскостью, и напряженность суммарного электрического поля в области 1.

$$\left|\vec{E_-}\right| = \left|\vec{E_+}\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

По теореме косинусов найдем сторону в векторном треугольнике напряженностей:

$$E_1 = \sqrt{E_+^2 + E_-^2 - 2E_+E_-\cos\alpha} = \sqrt{2E_+^2 - 2E_+^2 \cdot 0,5} = \sqrt{E_+^2} = E_+,$$

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{4,42 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 250 \text{ В/м.}$$

Напряженность E_1 можно найти и другим способом: спроектировав векторы $\vec{E_+}$ и $\vec{E_-}$ на направление вектора E_1:

$$E_1 = E_+\cos\alpha + E_-\cos\alpha = 2E_+\cos\alpha = E_+.$$

Область 2

$$E_2 = \sqrt{E_+^2 + E_-^2 - 2E_+E_-\cos(\pi - \alpha)}, \quad \cos(\pi - \alpha) = -0,5,$$

$$E_2 = \sqrt{2E_+^2 + E_+^2} = E_+\sqrt{3},$$

$$E_2 = \frac{\sqrt{3} \cdot \sigma}{2\varepsilon_0} = 250 \cdot 1,732 = 431 \text{ В/м.}$$

Другим способом:

$$E_2 = 2E_+\cos 30^\circ = 2\frac{\sqrt{3}}{2}E_+ = E_+\sqrt{3}.$$

Задача № 4.2

Два точечных заряда $q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл и $q_2 = -4 \cdot 10^{-7}$ Кл находятся в керосине на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Каковы напряженность и потенциал электростатического поля в точке A, находящейся на расстоянии $r_1 = 20$ см от первого и $r_2 = 15$ см от второго заряда?

Дано:

$q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл

$q_2 = -4 \cdot 10^{-7}$ Кл

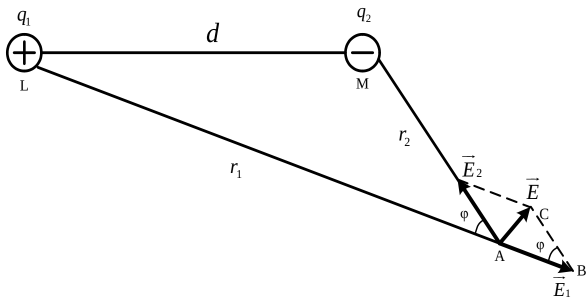
$d = 0{,}1$ м

$r_1 = 0{,}2$ м

$r_2 = 0{,}15$ м

$\varepsilon - ?$

$\varepsilon_0 - ?$



Р е ш е н и е:

По принципу суперпозиции электростатических полей полная напряженность в точке A равна

$$\overrightarrow{E_A} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}, \qquad (1)$$

где $\overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{E_2}$ – напряженности, создаваемые точечными зарядами q_1 и q_2 в точке A.

Модуль вектора $\vec{E}$ может быть определен из ΔABC по теореме косинусов:

$$E_A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\varphi}. \qquad (2)$$

Напряженность поля точечного заряда:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}, \\ E_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Из ΔLMA найдем $\cos\varphi$:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi\,,$$

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}\,. \qquad (4)$$

Подставив выражения (3), (4) в (2), получим

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - \frac{q_1q_2\;\; r_1^2 + r_2^2 - d^2}{r_1^3r_2^3}}\,. \qquad (5)$$

По принципу суперпозиции электростатических полей потенциал поля в точке *A* определяется алгебраической суммой потенциалов полей, создаваемых зарядами q_1 и q_2 в точке *A*:

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2\,. \qquad (6)$$

Потенциал поля точечного заряда:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}. \qquad (7)$$

Следовательно,

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right). \qquad (8)$$

Подставив числовые данные в выражения (5) и (8), найдем значения E_A и φ_A:

$$E_A = \frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\times$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{2\cdot 10^{-7}}{0{,}2^2}\right)^2 + \left(\frac{4\cdot 10^{-7}}{0{,}15^2}\right)^2 - \frac{2\cdot 10^{-7}\cdot 4\cdot 10^{-7}\;\; 0{,}2^2 + 0{,}15^2 - 0{,}1^2}{0{,}2^3\cdot 0{,}15^3}} =$$

$$= 6{,}2\cdot 10^4 \text{ В/м},$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{2\cdot 10^{-7}}{0{,}2} - \frac{4\cdot 10^{-7}}{0{,}15}\right) = 7{,}5\cdot 10^3 \text{ В}.$$

Задача № 4.3

Два металлических шарика радиусами r_1 и r_2, находящихся на расстоянии *R* друг от друга, были присоединены к батарее с электродвижущей силой ε. Найти силу взаимодействия шариков. Взаимодействием соединительных проводников пренебречь.

Дано:

r_1, r_2
ε
R
R, r_1 и r_2

F – ?

Р е ш е н и е

Силу взаимодействия шариков определим по закону Кулона. Для этого необходимо знать заряды шариков. Разность потенциалов между шариками должна равняться ε:

$$\frac{kq_1}{r_1} - \frac{kq_2}{r_2} = \varepsilon . \qquad (1)$$

Здесь $k = 1/4\pi\varepsilon_0$..
До присоединения к батарее заряд шариков был равен нулю. Согласно закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = 0 . \qquad (2)$$

Из (2) и (1) получим

$$q_1 = -q_2 = \frac{\varepsilon r_1 r_2}{k \;\; r_1 + r_2} .$$

По закону Кулона

$$F = \frac{kq_1q_2}{R^2} = \frac{\varepsilon^2 r_1^2 r_2^2}{kR^2 \;\; r_1 + r_2 \;\; ^2} .$$

Задача № 4.4

Металлический шар имеет заряд $Q_1 = 1$ мкКл. На расстоянии от его поверхности, равном радиусу шара, находится конец нити, вытянутой вдоль силовой линии. Нить несет равномерно распределенный по длине заряд $Q_2 = 10$ нКл. Длина нити равна радиусу шара. Определить силу *F*, действующую на нить, если радиус шара *R* равен 10 см.

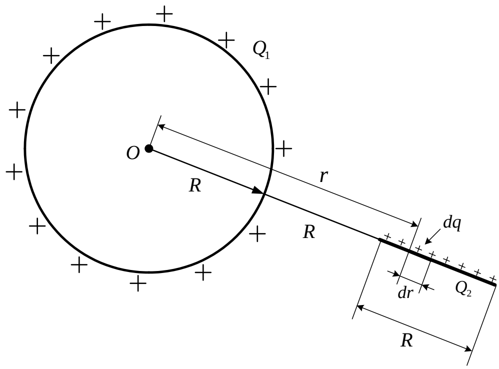
Дано:

$Q_1 = 1$ мкКл

$Q_2 = 10$ нКл

$R = 10^{-1}$ м

$F - ?$



Р е ш е н и е

Электрическое поле заряженного шара действует на заряд Q_2 отрезка заряженной нити. Для нахождения этой силы F нельзя воспользоваться формулой $F = Q_2 E$, где E – напряженность поля шара. Эта формула применима или для однородного электрического поля (поле же шара неоднородно: $E \neq \text{const}$), или для точечного заряда (Q_2 – неточечный). Поэтому для расчета силы, с которой неоднородное поле шара действует на неточечный заряд Q_2, применим метод дифференцирования и интегрирования.

Разделим отрезок нити R на столь малые части dr, что заряд dq каждого такого участка можно считать точечным. На точечный заряд dq, находящийся в электрическом поле заряженного шара, действует сила

$$dF = Edq = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dq, \qquad (1)$$

где E – напряженность заряженного шара; r – расстояние заряда dq от центра O шара.

Заряд dq каждого элемента dr отрезка нити найдем через линейную плотность распределенного заряда нити:

$$\tau = \frac{Q_2}{R} = \frac{dq}{dr}, \quad dq = \frac{Q_2}{R} dr. \qquad (2)$$

Тогда сила

$$dF = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R r^2} dr. \qquad (3)$$

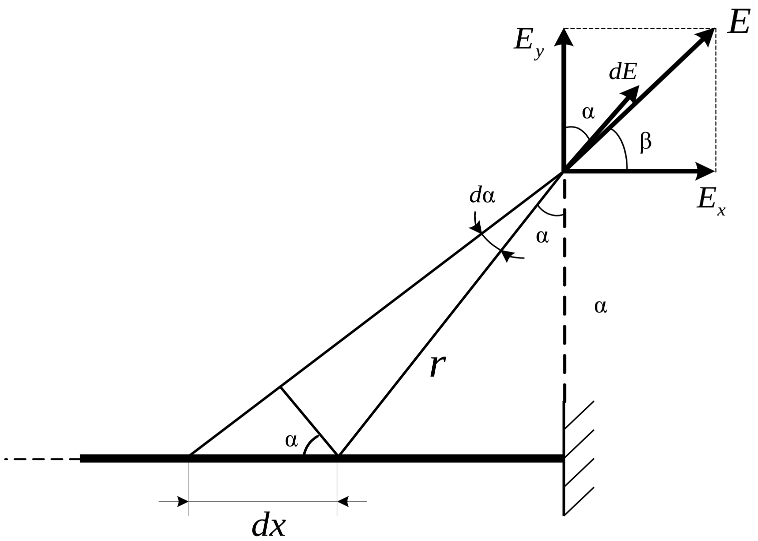
Сила dF, действующая на каждый элемент dr отрезка нити, имеющего точечный заряд dq, зависит от расстояния r этого элемента от центра шара; r – переменная интегрирования при нахождении силы F, действующей на все точечные заряды dq на нити:

$$F = \int dF = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_{2R}^{3R} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{2R}^{3R} = \frac{1}{6} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R};$$

$$F = \frac{1}{6} \frac{10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} = 150 \text{ мкКл.}$$

Задача № 4.5

Есть полубесконечная прямая – равномерно заряженная нить с линейной плотностью τ $\tau > 0$. Найти модуль и направление напряженности (угол β) поля в точке, которая отстоит от нити на расстоянии a и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через ее конец.



Решение

Элемент заряда $dq = \tau dx$.

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dx}{r^2}.$$

Определим $dx = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}$, $r = \frac{a}{\cos\alpha}$.

$$dE = \frac{\tau da}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

$$dE_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha \cdot d\alpha.$$

$$E_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

$$E_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Получается оригинальный результат: $E_x = E_y$ независимо от *a*. Угол $\beta = 45°$.

Модуль $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\tau\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

Задача № 4.6

По тонкой нити, изогнутой в виде дуги радиусом *r*, равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ $\tau > 0$. Определить напряженность поля и потенциал в точке *O,* совпадающей с центром кривизны дуги. Длина нити составляет $\frac{1}{3}l$ длины окружности.

Дано:

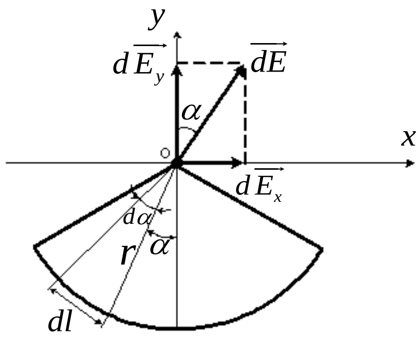
r,

τ ,

$L = \frac{1}{3} l$

$E - ?$

$\varphi - ?$



Р е ш е н и е

Выделим элемент *dl*. Тогда $dq = \tau dl$, а $dl = r d\alpha$. Определим *dE:*

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Выберем оси координат симметричного относительно середины дуги (см. рисунок) Найдем $dE_y = dE\cos\alpha$. Для определения E_y границы интегрирования зададим от 0 до $\frac{\pi}{3}$, а результат удвоим.

$$E_y = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tau\cos\alpha \cdot d\alpha}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\tau\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Так как $3l = 2\pi r$, то $r = \frac{3l}{2\pi}$. Отсюда $E_y = \frac{\tau\sqrt{3}}{6\varepsilon_0 l}$.

E_x – в силу симметрии равна 0.

Найдем потенциал φ: $d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Отсюда

$$\varphi = \int_0^L \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_0^{\frac{2\pi r}{3}} = \frac{\tau}{6\varepsilon_0}, \quad \varphi = \frac{\tau}{6\varepsilon_0} .$$

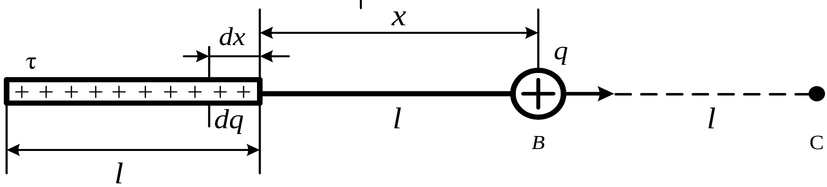
Задача № 4.7

На отрезке нити длиной l равномерно распределен электрический заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. Определить работу сил поля по перемещению заряда $q = 1$ нКл из точки B в точку C. Расстояние точки B от конца нити и от точки C равно l.

Дано:

$\tau = 1$ мкКл/м = 10^{-6} Кл/м
$q = 1$ нКл = 10^{-9} Кл

A_{BC} – ?



Р е ш е н и е

В электрическом поле отрезка заряженной нити на точечный заряд q действуют силы, перемещающие заряд из точки B с потенциалом φ_B в точку C с потенциалом φ_C. Работа сил поля равна

$$A_{BC} = q\ \ \varphi_B - \varphi_C\ \ .$$

Поскольку заряд нити не точечный, а линейно распределенный, для нахождения потенциалов φ_B и φ_C поля нити применим метод дифференцирования и интегрирования. Разобьем нить на столь малые элементы (участки) dx, что заряд элемента dq будет рассматриваться как точечный. Потенциал точечного заряда dq

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x}, \qquad (1)$$

где x – расстояние от заряда dq до точки, где определяется потенциал $d\varphi$. На рисунке показано расстояние x для точки поля B; x – переменная величина, переменная интегрирования при нахождении суммарного потенциала φ, созданного всеми зарядами dq, находящимися на нити:

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{x}. \tag{2}$$

Выразим точечный заряд dq через линейную плотность заряда:

$$dq = \tau \cdot dx \tag{3}$$

Тогда потенциал будет равен

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x}. \tag{4}$$

Потенциал точки B

$$\varphi_B = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{l}^{2l} \frac{dx}{x} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln x \Big|_{l}^{2l} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln 2. \tag{5}$$

Потенциал точки C

$$\varphi_C = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{2l}^{3l} \frac{dx}{x} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln 1,5. \tag{6}$$

Определим работу, используя (5) и (6):

$$A_{BC} = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ \ln 2 - \ln 1,5 \ , \tag{7}$$

$$A_{BC} = \frac{10^{-9} \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ 0,693 - 0,405 \ = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 2,6 \text{ мкДж}.$$

Задача № 4.8

Электрическое поле создано бесконечным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл/см. Какую скорость получит электрон под действием поля, приблизившись к цилиндру с расстояния $a_1 = 5$ см от поверхности цилиндра до расстояния $a_2 = 2$ см от поверхности цилиндра?

Дано:

$R = 1$ см

$\tau = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл/см $= 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м

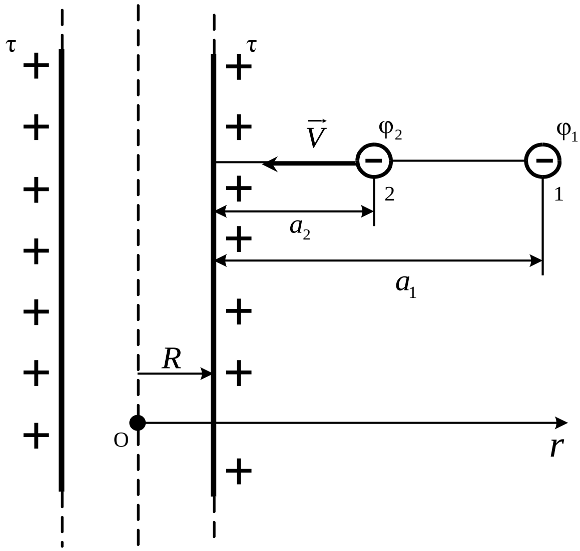
$a_1 = 5$ см

$a_2 = 2$ см

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

$q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$v_2 = v - ?$



Р е ш е н и е

Так как силы электростатического поля являются консервативными, то для определения кинетической энергии электрона и скорости в точке 2 воспользуемся законом сохранения полной энергии

$$W_{k_1} + W_{p_1} = W_{k_2} + W_{p_2}, \tag{1}$$

где W_{k_1}, W_{k_2} – кинетические энергии электрона в точках 1 и 2; W_{p_1}, W_{p_2} – потенциальная энергия электрона в точках 1 и 2.

Так как в точке 1 $W_{k_1} = 0 \quad v_1 = 0$, то

$$W_{k_2} = W_{p_1} - W_{p_2} = A_{12} = q_e \;\; \varphi_1 - \varphi_2 \;\; , \tag{2}$$

где A_{12} – работа сил поля по перемещению электрона из точки 1 с потенциалом φ_1 в точку 2 с потенциалом φ_2. Подставим выражение для W_{k_2} :

$$\frac{m_e v^2}{2} = q_e \;\; \varphi_1 - \varphi_2 \;\; . \tag{3}$$

Для нахождения разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ воспользуемся соотношением между напряженностью поля и изменением потенциала, записанным в проекции на радиальное направление *r*:

$$E_r = E = -\frac{d\varphi}{dr}, \tag{4}$$

где E_r – проекция вектора напряженности $\vec{E}$ на направление *r* (вдоль радиуса цилиндра); $d\varphi$ – бесконечно малое изменение потенциала при перемещении в поле на бесконечно малое расстояние *dr*.

Так как вектор напряженности $\vec{E}$ поля заряженного цилиндра в любой точке направлен по *r*, то проекция вектора $\vec{E}$ равна модулю вектора $E_r = E$.

Для заряженного цилиндра

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где *r* – расстояние от оси цилиндра до точки, где определяется напряженность.

Найдем разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, интегрируя (4):

$$E dr = -d\varphi,$$

$$\int_{r_1}^{r_2} E dr = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi ,$$

$$\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = - \ \ \varphi_2 - \varphi_1 \ \ = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} . \qquad (5)$$

Так как $r_1 = R + a_1$, $r_2 = R + a_2$, имеем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R + a_2}{R + a_1} . \qquad (6)$$

Выразим скорость электрона, воспользовавшись (3):

$$\frac{mv^2}{2} = q_e\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R + a_2}{R + a_1} ,$$

$$v = \sqrt{\frac{q_e\tau\ln\dfrac{R + a_2}{R + a_1}}{m_e\pi\varepsilon_0}} . \qquad (7)$$

Подставим численные значения величин:

$$v = \sqrt{\frac{-1{,}6\cdot 10^{-19} \ \ 2\cdot 10^{-7}\ln\dfrac{3}{6}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}} = 2{,}96\cdot 10^{7} \text{ м/с}, \quad \ln\frac{3}{6} = -0{,}693 .$$

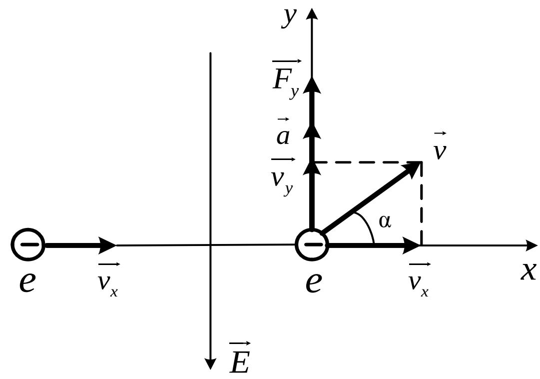
Задача № 4.9

Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U_0 = 25{,}6$ В в горизонтальном направлении, влетел в однородное электрическое поле, направленное вертикально вниз, напряженностью $E = 150$ В/м. Какова будет по абсолютному значению и направлению скорость v электрона через 0,1 мкс?

Дано:

$U_0 = 25{,}6$ В
$E = 150$ В/м
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$t = 0{,}1$ мкс $= 10^{-7}$ с
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

$v - ?$
$\alpha - ?$



Р е ш е н и е

В горизонтальном ускоряющем поле электрон приобретает скорость v_x и кинетическую энергию за счет работы поля $A = eU$:

$$\frac{m_e v_x^2}{2} = eU_0 , \tag{1}$$

$$v_x = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_e}} . \tag{2}$$

Когда электрон влетает в вертикальное электрическое поле, то на него действует сила этого поля $\overrightarrow{F_y}$, направленная вверх, создающая ускорение $\vec{a} = \overrightarrow{a_y}$ и скорость $\overrightarrow{v_y}$.

$$F_y = eE = m_e a ,$$

откуда

$$a = \frac{eE}{m_e} . \tag{3}$$

Скорость электрона в направлении y

$$v_y = v_{0y} + at = at = \frac{eE}{m_e} t \tag{4}$$

$$v_{0y} = 0 \; .$$

Движение электрона в скрещенных электрических полях становится криволинейным. Оно является суммой независимых движений электрона: движения по x с постоянной скоростью $v_x = \mathrm{const}$ и по y со скоростью v_y, увеличивающейся со временем.

Скорость электрона

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,. \tag{5}$$

Вычислим по формулам (2), (4), (5) скорости v_x, v_y, v:

$$v_y = \frac{eE}{m_e}\cdot t = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 150\cdot 10^{-7}}{9{,}1\cdot 10^{-31}} = 2{,}64\cdot 10^6 \text{ м/с},$$

$$v_x = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 25{,}6}{9{,}1\cdot 10^{-31}}} = \sqrt{9\cdot 10^{12}} = 3\cdot 10^6 \text{ м/с},$$

$$v = \sqrt{2{,}64^2 + 9}\cdot 10^6 = 4\cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Найдем угол α:

$$\sin\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{2{,}64}{4} = 0{,}66\,, \qquad \alpha \approx 41°\,.$$

Задача № 4.10

Два заряженных конденсатора подсоединили друг к другу одноименными полюсами. До подсоединения на первом конденсаторе емкостью $C_1 = 5$ мкФ было напряжение $U_1 = 20$ В, а на втором, емкость которого $C_2 = 20$ мкФ, напряжение $U_2 = 10$ В. Какое количество теплоты выделится в соединительных проводах?

Дано:

$C_1 = 5\cdot 10^{-6}$ Ф
$C_2 = 20\cdot 10^{-6}$ Ф
$U_1 = 20$ В
$U_2 = 10$ В

$Q - ?$

Решение

Из условия следует, что после зарядки каждого конденсатора в отдельности источники напряжения были отключены. Поэтому, в силу закона сохранения заряда изолированной системы, сумма зарядов присоединенных друг к другу обкладок не изменится. Поскольку начальные напряжения конденсаторов U_1 и U_2

не одинаковы, при соединении конденсаторов параллельно протечет электрический ток, выравнивающий эти напряжения $U_1' = U_2' = U$. Найдем установившееся напряжение на конденсаторах:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2', \tag{1}$$

где q_1 и q_2 – заряды на обкладках конденсаторов до их соединения; q_1' и q_2' – после соединения.
Но

$$q_1 = C_1 U_1, \quad q_2 = C_2 U_2, \quad q_1' = C_1 U_1' = C_1 U, \quad q_2' = C_2 U_2' = C_2 U. \tag{2}$$

Подставляя эти четыре заряда в (1), получаем

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 = (C_1 + C_2) U,$$

откуда

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2}.$$

Сравним начальную энергию электрического поля, запасенную двумя заряженными конденсаторами $W_н$, с конечной энергией системы $W_к$:

$$W_н = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2}, \tag{3}$$

$$W_к = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2) U}{2} = \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{2(C_1 + C_2)}. \tag{4}$$

Легко убедиться в том, что $W_к < W_н$, т.е. начальная энергия частично перешла в тепловую:

$$|Q| = |W_к - W_н|. \tag{5}$$

Подставим (3) и (4) в (5):

$$Q = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} - \frac{\left(C_1U_1 + C_2U_2\right)^2}{2\left(C_1 + C_2\right)}. \qquad (6)$$

Подставив числовые данные, определим значение Q:

$$Q = \frac{5\cdot10^{-6}\cdot20^2}{2} + \frac{20\cdot10^{-6}\cdot10^2}{2} - \frac{\left(5\cdot10^{-6}\cdot20 + 20\cdot10^{-6}\cdot10\right)^2}{2\left(5\cdot10^{-6} + 20\cdot10^{-6}\right)} =$$

$$= 2\cdot10^{-3} - 1{,}8\cdot10^{-3} = 2\cdot10^{-4}\ \text{Дж}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1990. – 398 с.

2. *Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я.* Сборник задач по элементарной физике. – М.: Наука, 1966. – 440 с.

3. *Иродов И.Е.* Основные законы электромагнетизма. – М.: Высш. шк., 1983. – 279 с.

4. *Новодворская А.Е., Дмитриев Э.М.* Методика проведения упражнений по физике во втузе. – М.: Высшая школа, 1981. – 318 с.

5. *Савченко Н.Е.* Задачи по физике с анализом их решения. – М., 1996. – 320 с.

6. *Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. – М., 1981.

7. *Сборник* задач индивидуальных заданий по физике. Электростатика. НГАСУ. – Новосибирск, 1999. – 498 с.

8. *Горбунова О.И., Зайцева А.М., Красников С.Н.* Задачник-практикум по общей физике. Электричество. Электромагнетизм. – М.: Просвещение, 1975. – 160 с.

9. *Борисов С.Н., Корнеева Л.А.* Пособие для интенсивной подготовки к экзаменам по физике. – М.: ВАКО, 2005. – 304 с.

10. *Зорин Н.И.* «ЕГЭ 2010 г. Физика: решение частей В и С». – М.: ЭКСМО, 2009. – 320 с.

ФИЗИКА

МЕХАНИКА И ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Методические указания

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Подписано в печать 15.06.2010. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 3,48. Печ. л. 3,75. Изд. № 311. Заказ № Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20