Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Ю. ПЕТРОВ, Е.И. КРЕНЕВА,
М.Р. МИРСИЯПОВ

ФИЗИКА
ВВОДНЫЙ КУРС

Механика

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2017

УДК 531(075.8)
П 305

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент *С.В. Спутай*
канд. техн. наук, доцент *С.А. Стрельцов*

Работа подготовлена на кафедре общей физики

Петров Н.Ю.

П 305 Физика. Вводный курс. Механика: учебное пособие / Н.Ю. Петров, Е.И. Кренева, М.Р. Мирсияпов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 168 с.

ISBN 978-5-7782-3337-9

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения по основным разделам классической механики (кинематика и динамика поступательного движения, законы сохранения энергии и импульса), методические указания к решению задач, примеры их решения и разноуровневые задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие позволяет студентам за сравнительно небольшой срок повторить теоретический материал и получить основные сведения о методах решения задач.

Пособие предназначено для студентов младших курсов технических вузов, в учебной программе которых предусмотрен вводный курс по физике. Также оно может быть полезным для преподавателей физики средних и высших учебных заведений.

УДК 531(075.8)

ISBN 978-5-7782-3337-9

© Петров Н.Ю., Кренева Е.И., Мирсияпов М.Р., 2017
© Новосибирский государственный технический университет, 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Опыт работы в техническом высшем учебном заведении показывает, что в последние годы преподаватели сталкиваются с проблемой слабой подготовки значительной части абитуриентов в области физики. Абитуриенты порой не знают определения «физическая величина», не могут отличить размерность величины от ее единиц измерения. Многие студенты первых курсов не понимают суть методики решения физических задач. Вместо изучения общих подходов и принципов решения задач учащиеся стараются подобрать «нужную» формулу, а зачастую – просто найти решение в Интернете. Преподавателям приходится тратить много сил и времени на ликвидацию пробелов в знаниях студентов. Учитывая, что на многих факультетах курс «Физика» изучается два семестра, преподавателям приходится оставлять студентам для самостоятельного освоения важные разделы курса, и это, к сожалению, отрицательно сказывается на качестве обучения.

Одним из решений описанной выше проблемы является включение на первом курсе в учебную программу вводного курса физики. В рамках этого курса учащиеся ликвидируют пробелы в знаниях, чтобы более продуктивно освоить основную программу по физике в техническом вузе. При этом подходе в течение одного семестра преподаватель может выравнять уровень знаний студентов и подготовить их к дальнейшему изучению основ общей физики на более высоком уровне.

С появлением подобного вводного курса возникла необходимость в создании методического обеспечения к нему. Данное учебное пособие представляет собой первую часть серии работ, предназначенных для студентов младших курсов, в программу которых включен вводный курс по физике. В пособии рассмотрены такие разделы классической механики, как *Кинематика* и *Динамика поступательного движения*, *Законы сохранения энергии и импульса*.

Работу с книгой рекомендуется начать с изучения теоретического материала к соответствующему разделу. Без владения физической

терминологией, без понимания фундаментальных физических законов приступать к решению задач бессмысленно. Чтобы понимать суть задачи, нужно уметь говорить на языке физики.

После изучения теоретического материала следует проверить, насколько хорошо вы его усвоили. Пособие содержит вопросы для самоконтроля, которые приведены после теоретической справки. Эти вопросы могут помочь выявить пробелы в изученном материале и впоследствии устранить их.

Следует отметить, что в данной работе приведена только краткая теоретическая справка, предназначенная для повторения фундаментальных понятий и законов некоторых разделов классической механики. Для более глубокого изучения нужно воспользоваться классическим учебником по общей физике для технических вузов.

Как только вы будете уверены, что в достаточной мере владеете теорией, прочитайте методические указания к решению задач. В них выделены наиболее существенные моменты и сформулированы общие подходы к решению большинства физических задач по механике.

Ознакомьтесь с примерами решения задач, приведенными в начале каждого раздела после теоретического материала. В примерах подробно расписано решение типовых задач. После изучения примера попробуйте самостоятельно воспроизвести решение рассматриваемой задачи. Проанализируйте, какие моменты или этапы решения вызвали у вас затруднения.

Далее перейдите к решению задач, приведенных в конце каждой главы в разделе «Задачи для самостоятельного решения». При возникновении трудностей в решении задач вернитесь к предыдущим этапам (теория, методические указания, примеры).

В конце пособия (в прил. А) приведены задания для подготовки к итоговому тестированию, которое проходит в конце вводного курса. При выполнении заданий постарайтесь не пользоваться вспомогательными материалами. Проанализируйте, какие задачи вызвали у вас наибольшие затруднения. Повторите необходимый теоретический материал, просмотрите примеры решения подобных задач.

В качестве вспомогательной литературы можно использовать пособие [1].

ВВЕДЕНИЕ

В1. ПЕРВИЧНЫЕ ПОНЯТИЯ

Физика является одной из основных естественных наук. Она принадлежит к числу фундаментальных наук, лежащих в основе подготовки любого инженера. Развитие современной техники напрямую связано с эволюцией физического знания. Приведем основные понятия, которые потребуются вам при изучении разделов механики, представленных в пособии.

Физика – наука, изучающая наиболее общие и фундаментальные законы природы, определяющие структуру и эволюцию материального мира. При этом физика – количественная наука. Физический эксперимент является важнейшим инструментом получения знаний об окружающей действительности.

Наблюдение – это систематическое, целенаправленное восприятие того или иного объекта или явления без воздействия на него. Наблюдение позволяет получить первоначальную информацию об изучаемом объекте или явлении [2].

При наблюдении, в отличие от эксперимента, человек изучает естественный ход процесса, не вмешиваясь и не искажая его. При проведении эксперимента объект исследования подвергают специально спланированным воздействиям и изучают реакцию объекта на них.

Наблюдение, как метод научного познания, в основном применяется там, где по тем или иным причинам постановка эксперимента невозможна или затруднительна. Например, в космологии проведение эксперимента практически невозможно, но тем не менее многие теории были подтверждены благодаря наблюдению за космическими объектами.

Физический эксперимент – это способ познания материального мира, заключающийся в изучении природных явлений в специально

созданных условиях. В эксперименте свойства физических явлений и объектов изучаются с помощью измерений соответствующих физических величин. Таким образом, провести физический эксперимент означает провести наблюдение физического явления и измерить характеризующие его физические величины.

Физическое тело – материальный объект, характеризующийся массой, формой, объемом, а также рядом других параметров (в зависимости от рассматриваемой задачи) и отделенный от других тел границей раздела.

Физическим явлением называется совокупность взаимосвязанных изменений, происходящих с телами или системами тел с течением времени. Синонимом понятия *физическое явление* является термин *физический процесс*. Зачастую термин физическое явление применяется к определенным значимым классам процессов (например, фотоэффект, самоиндукция, магнитострикция).

Приведем определение физической величины согласно РМГ 29–99 «Метрология. Основные термины и определения».

Физическая величина – одно из свойств физического объекта (физической системы или явления (процесса)), общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них. Таким образом, свойства физических объектов и процессов, которые можно прямо или косвенно измерить, называют физическими величинами [3]. К ним относятся такие свойства физических объектов, как масса тела, его объем, плотность, скорость и т. д.

При измерении физической величины ее значение Q сравнивают с *единицей измерения* $[Q]$, т. е. с однородной величиной, принятой за эталон. Следует помнить, что сравнивать можно только однородные физические величины (например, нельзя сравнивать массу тела с его плотностью). Число, которое получается при измерениях, называется *численным значением* физической величины и обозначается $\{Q\}$. Результат измерения физической величины определяется числом с указанием единицы измерения[1] и записывается в виде произведения численного значения и единицы измерения:

$$Q = \{Q\}[Q].$$

[1] Число с указанием единицы измерения называется именованным.

Для связи различных физических величин используются математические уравнения. При этом можно выделить базис независимых величин, которые не могут быть выражены через другие физические величины. Их называют *основными физическими величинами*, а соответствующие им единицы измерения – *основными единицами измерения* [3, 4]. Эти физические величины, строго говоря, можно выбрать произвольно. Их выбор обусловлен только соображениями удобства. Все остальные физические величины называются *производными.* Производные физические величины можно представить в виде произведения основных физических величин A_i:

$$Q = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n},$$

где показатели степени α_i принадлежат множеству рациональных чисел. Совокупность взаимосвязанных основных и производных физических величин образует *систему физических величин*.

Совокупность взаимосвязанных основных и производных единиц измерения физических величин образует *систему единиц физических величин* (подробнее см. в [5]). В октябре 1960 г. XI Генеральной международной конференцией по мерам и весам была принята **Международная система единиц** (СИ), основанная на **Международной системе величин**.

Основных единиц физических величин в системе СИ **семь** (см. прил. Б, табл. 1):

1) *метр* (м) – единица измерения *длины*;
2) *килограмм* (кг) – единица измерения *массы*;
3) *секунда* (с) – единица измерения *времени*;
4) *ампер* (А) – единица измерения *силы электрического тока*;
5) *кельвин* (К) – единица измерения *температуры*;
6) *моль* (моль) – единица измерения *количества вещества*;
7) *кандела* (кд) – единица измерения *силы света*.

Единицы измерения производных физических величин связаны с единицами измерения основных величин так же, как производные величины связаны с основными. Некоторые производные единицы измерения СИ и их связь с базовыми единицами измерения приведены в прил. Б, табл. 2–4. Более подробная информация содержится в ГОСТ 8.417–2002.

Как уже было сказано, физические величины связаны между собой определенными соотношениями. Если сопоставить базовые величины

с определенными символами, то эту связь можно записать в виде формулы (*формулы размерности*). Например, в системе СИ были введены следующие обозначения размерностей основных физических величин: длина – L, масса – M, время – T, сила тока – I, температура – Θ, количество вещества – N, сила света – J. Для указания размерностей используют символ $\dim$. В этом случае *формулу размерности* некоторой величины в общем виде можно записать как

$$\dim Q = L^{\alpha_1} \cdot M^{\alpha_2} \cdot T^{\alpha_3} \cdot I^{\alpha_4} \cdot \Theta^{\alpha_5} \cdot N^{\alpha_6} \cdot J^{\alpha_7}.$$

Показатели степени α_i – как правило, небольшие целые числа, которые могут быть положительными, отрицательными или равными нулю, они называются показателями размерностей. Если все они равны нулю, то величина Q будет величиной с размерностью единица (безразмерностная величина, безразмерная величина). Величина, безразмерная в одной системе физических величин, может быть размерной в другой системе. Величины, являющиеся отношением двух однородных величин, являются безразмерными в любой системе (например, плоский угол). Например, размерность импульса имеет вид

$$\dim p = \dim (mv) = MLT^{-1}.$$

Следует помнить, что **единица измерения и размерность физической величины – это разные понятия**. **Размерность показывает связь одних физических величин с базисными (основными) величинами**. Приведем простой пример. Скорость можно измерять в метрах в секунду (м/с), километрах в час (км/ч), сантиметрах в час (см/ч), километрах в секунду (км/с), все зависит от удобства использования в конкретной ситуации. Скорость материальной точки по определению $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор этой точки, t – время. В каких бы единицах мы не измеряли скорость, ее связь с r и t не изменится. Более того, единица измерения скорости в системе СИ – метр в секунду (м/с), а в системе СГС (сантиметр–грамм–секунда) – сантиметр в секунду (см/с), размерность одинаковая $\dim v = LT^{-1}$.

Стоит отметить, что в разных системах единиц измерения формула размерности для одной и той же величины может содержать различное число аргументов и иметь различный вид. Также не следует путать понятия «физическая величина» и ее «размерность», это не одно и то же. Одинаковую размерность могут иметь совершенно разные по своей

природе физические величины (например, линейная плотность электрического тока и напряженность магнитного поля А/м). Размерность не содержит информации о том, является ли данная физическая величина скаляром, вектором или тензором. Но размерность очень важна для проверки правильности соотношений между физическими величинами.

Помимо перечисленных характеристик физических величин существует еще несколько важных свойств. Все величины можно разделить на *аддитивные* (значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям) и *неаддитивные*. К аддитивным величинам можно отнести массу тела, а к неаддитивным – температуру.

Также физические величины принято разделять на *скалярные*, *векторные*, *комплексные* и *тензорные*. Скалярные величины выражаются только численным значением, а векторные имеют скалярный модуль и направление.

Перейдем к рассмотрению следующего фундаментального физического понятия.

Физический закон – общие закономерности, полученные экспериментальным путем, которым подчиняется течение различных процессов. Физический закон может выражаться как в словесной, так и математической формулировке[2].

Научная гипотеза – это утверждение, содержащее предположение относительно решения стоящей перед исследователем проблемы [6, с. 39]. Гипотеза должна быть сформулирована на грамотном физическом языке. Можно сказать, что **гипотеза – это главная идея решения проблемы**.

Научная теория – наиболее развитая форма организации научного знания, дающая целостное представление о закономерностях и существенных связях изучаемой области действительности (например, классическая механика И. Ньютона, корпускулярная и волновая теории света, теория биологической эволюции Ч. Дарвина) [7]. Стоит отметить, что любая теория (любой закон) имеет границы применимости, за пределами которых она перестает адекватно описывать физический объект или явление.

Модель – это объект любой природы, который способный замещать изучаемый объект в интересующих исследователя свойствах [8].

[2] В виде совокупности взаимосвязанных математических зависимостей и формально-логических выражений, описывающих реальные физические системы и процессы.

Процесс построения моделей называется *моделированием*. Модели бывают *физические* (*натурные*) и *физико-математические.* Модель позволяет упростить рассматриваемый физический объект или процесс путем отделения **главных** закономерностей от **второстепенных**. При этом если замечается какое-либо расхождение между результатами теоретического анализа и экспериментом, то следует проверить допустимость тех упрощений, которые сделаны при выборе схемы, и при необходимости скорректировать модель.

Физические (натурные или материальные) модели (например, модель самолета) необходимы при проведении различных реальных экспериментов.

Физико-математические модели (математическая модель[3] (абстракция), описывающая идеализированные физические объекты) используются в теоретических исследованиях, в том числе и при выполнении вычислительных экспериментов.

Физико-математические модели относятся к информационным моделям (совокупность информации, характеризующая существенные свойства и состояния объекта или явления, а также его взаимосвязь с внешним миром).

Простейшими моделями в механике являются: материальная точка, механическая система, твердое тело (абсолютно твердое тело) и сплошная среда.

Материальная точка – физический объект конечной массы, положение которого в пространстве можно описать геометрической точкой. Материальная точка представляет собой модель тела, характер движения которого и условия задачи позволяют не учитывать его геометрические размеры, внутреннюю структуру, форму и вращение.

Возможность использования модели материальной точки к конкретному телу в общем случае зависит не от размеров самого тела, а от условий его движения. Например, когда тело движется поступательно или нас интересует только поступательная составляющая движения тела, его можно считать материальной точкой, положение которой совпадает с центром масс тела. Также, несмотря на то что размер молекулы в разряженном газе пренебрежимо мал по сравнению со средним расстоянием между молекулами, у них есть колебательные

[3] *Математическая модель* – совокупность взаимосвязанных математических зависимостей и формально-логических выражений, описывающих объект моделирования.

и вращательные степени свободы. Поэтому в некоторых задачах (например, при расчете внутренней энергии газа, состоящего из многоатомных молекул) молекулы нельзя заменять материальными точками.

Механическая система – частный случай физической системы[4], совокупность взаимодействующих между собой материальных точек (например, звезды, образующие галактику).

Абсолютно твердое тело (твердое тело) – модель тела, расстояние между двумя произвольными точками которого постоянно остается неизменным в рассматриваемом процессе. Твердое тело представляет собой частный случай механической системы. Данная идеализация применяется в задачах, в которых деформации тела пренебрежимо малы и слабо влияют на точность результата.

Более общим является понятие *неизменяемая среда* – совокупность бесконечного числа точек, расстояние между которыми неизменно.

Сплошная среда – механическая система, в которой вещество рассматривается как непрерывная среда. При этом мы пренебрегаем молекулярным (атомным) строением вещества и считаем, что распределение в среде всех ее характеристик (плотности, напряжения, скорости частиц и т. д.) непрерывно. Сплошная среда обладает бесконечным числом внутренних степеней свободы и в общем случае моделирует деформируемые тела, жидкости и газы, изменяющие свою форму при движении.

Механическое движение – простейшая форма движения, процесс относительного изменения положения тел или частей тела в пространстве со временем. Относительность заключается в том, что отследить изменение положения тела в однородном пространстве можно только относительно других объектов.

Механическое действие – воздействие на тело со стороны других тел, приводящее к изменению состояния движения этого тела или к его деформации[5].

В реальном мире механическое действие всегда сопровождается деформацией тела. Различают *абсолютно упругое тело* и *абсолютно*

---

[4] *Физическая система* – мысленно выделенный для анализа объект физических исследований, совокупность взаимосвязанных элементов, отделенная от окружающей среды и взаимодействующая с ней как целое [9]. При этом в качестве элементов выступают физические тела или другие физические системы.

[5] *Деформация* – изменение взаимного расположения частей рассматриваемого тела.

неупругое тело. Это два предельных модельных случая реальных тел. Абсолютно упругое тело после прекращения внешнего механического действия на него полностью восстанавливает свою первоначальную форму и размер. Его деформации подчиняются закону Гука. Абсолютно неупругое тело после прекращения внешнего механического воздействия полностью сохраняет деформированное состояние, вызванное этим действием.

Пространство и время – фундаментальные физические понятия, наиболее общие формы существования материи (объективная реальность, присущая материи).

Время характеризует длительность протекания процесса и отражает порядок смены состояний физического объекта. Время имеет смысл, если происходит какое-либо движение (изменение состояний системы). Как правило, отсчет времени осуществляют от момента начала изучения движения.

Измерение времени осуществляется с помощью часов (систем отсчета времени). *Часы* – система отсчета времени, основанная на периодическом процессе и через равные интервалы передающая сигнал, доступный наблюдателю. Системой отсчета времени может являться природное явление (движение Земли вокруг Солнца или вокруг своей оси) или устройство, созданное человеком (например, механические часы).

В классической механике принято, что в любых системах отсчета время течет одинаково (время однородно, непрерывно и не зависит от свойств материальных тел). Следовательно, одновременные события в какой-либо системе отсчета будут одновременны во всех системах отсчета.

Пространство характеризует протяженность физических объектов. Любое тело имеет определенные размеры, которые определяются такими величинами, как длина, объем, площадь.

Основной величиной, характеризующей пространственные свойства тел, является *длина отрезка, принятого за единицу*. Например, в системе СИ за единицу принято расстояние, проходимое светом в вакууме за интервал времени, равный $1/299\,792458$ с. Это расстояние определяет единицу измерения длины – метр.

В классической механике пространство однородно и не меняет свои свойства в зависимости от расположения или движения тел. Однородность заключается в одинаковости физических явлений при прочих равных условиях в различных точках пространства. Также про-

странство изотропно[6] и непрерывно. Очевидно, что в силу того, что каждая область пространства ничем не отличается от любой другой, обнаружить перемещение тел в таком пространстве невозможно. Как уже было сказано, движение какого-либо тела можно обнаружить только по отношению к другому телу. Поэтому **механическое движение не может быть задано без указания тела отсчета**. Выбор тела отсчета произволен и зависит от конкретной задачи.

Для описания движения тел в пространстве недостаточно тела отсчета. Необходимо каким-то образом каждой точке пространства, в котором движется тело, поставить в соответствие определенное число (координату). Отслеживая точки, которые последовательно проходило тело, и записывая их координаты, всегда можно восстановить траекторию его движения. Для этого необходимо ввести жестко связанную с телом отсчета систему координат (например, цилиндрическую, сферическую или декартову). При этом нужно однозначно определить направление координатных осей относительно тела отсчета и расположение начала координат, а также ввести на координатной сетке единичный интервал (метрику). Выбор системы координат определяется удобством использования при решении конкретной задачи.

Помимо системы координат и тела отсчета для описания динамики движения тела необходима система отсчета времени.

Следствием однородности пространства и времени (в классической механике) является то, что расстояние между какими-либо материальными точками в заданный момент времени будет одинаковым во всех системах отсчета, произвольно движущихся относительно друг друга.

Система отсчета – совокупность системы координат, жестко связанной с телом отсчета (абсолютно твердым телом), и часов (системы отсчета времени), позволяющая определить положения тел по отношению к телу отсчета в различные моменты времени.

Предполагается, что тела отсчета являются идеализированными объектами, абсолютно проницаемыми, однородными и изотропными, которые находятся в вечном движении, никогда не меняют своего движения и не взаимодействуют ни между собой, ни с какими-либо другими телами.

---

[6] Пространство называется изотропным, если поворот системы отсчета на произвольный угол не приводит к изменению протекания физических процессов. Изотропность означает инвариантность (одинаковость) физических свойств во всех направлениях.

Инвариант – физическая величина, значение которой остается постоянным в процессе эволюции системы вне зависимости от процессов, происходящих внутри этой системы. **Инварианты, в отличие от *относительных величин*, не зависят от выбора системы отсчета.** Инварианты являются следствием симметрий различного рода (например, однородности пространства и времени). Примером инварианта служит масса.

Механика – один из разделов физики – наука, изучающая относительное движение тел в пространстве и во времени и взаимодействие между телами.

Обычно изучение физики начинается с механики. Многие механические модели и принципы их построения вводятся именно при изучении данного раздела. Также в силу того, что в повседневной жизни мы постоянно встречаемся с предметом изучения механики (механическое движение тел и их взаимодействие), ее модели относительно легко воспринимаются обучающимися.

Развитие классической физики и классической механики как полноценной науки, использующей для получения нового знания *научный метод*[7], можно отсчитывать со времен Галилео Галилея (1564–1642), верно сформулировавшего законы движения тел.

Исаак Ньютон (1643–1727), анализируя выводы Галилея и работы своих современников, изложил в своем фундаментальном труде «Математические начала натуральной философии» (1687) главные закономерности механического движения. Работы Ньютона являются основой классической механики.

Существенный вклад в развитие классической механики внесли такие выдающиеся ученые, как Леонард Эйлер (1707–1783), Даниил Бернулли (1700–1782), Жан Лерон Даламбер (1717–1783), Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) и многие другие.

Принципиально новый этап становления механики начался с работ Альберта Эйнштейна (1879–1955), обобщающих законы механики на случай движения тел с любой (меньшей, чем скорость света в вакууме) скоростью.

Также в работе «Общая теория относительности» (1915) показано, что свойства пространства зависят от конфигурации механической системы. Основной идеей теории является то, что материальным носите-

[7] Наиболее полно суть метода отражает циклическая схема «факты – гипотеза – модель – следствия – эксперимент» [10].

лем тяготения выступает само пространство. Механика Ньютона является частным случаем механики Эйнштейна.

Следующим этапом развития механики стало формулирование принципов движения и взаимодействия частиц, входящих в состав атомов и молекул, и законов движения в малой области пространства ($\sim 10^{-10}$ м). Эти законы принципиально отличаются от законов классической механики и составляют содержание *квантовой механики*. Квантовая механика берет начало с работ Эйнштейна по фотоэффекту, работ Макса Планка (1858–1947), Поля Дирака (1902–1984), Нильса Бора (1885–1962), Вернера Гейзенберга (1901–1976), волновой механики Эрвина Шрёдингера (1887–1961) и работ других известных ученых. Классическая механика также является частным случаем квантовой механики.

Для наглядности приведем пример, взятый из пособия [11], простой ассоциативной карты, отражающей взаимосвязь разделов механики (рис. 1).

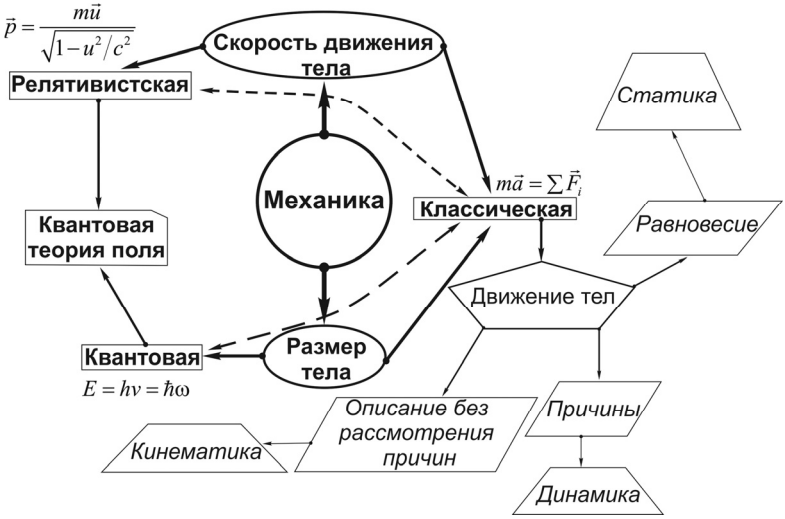


Рис. 1. Взаимосвязь разделов механики

Представленное пособие охватывает только область классической механики.

Прежде чем мы перейдем к рассмотрению основ классической механики, вспомним некоторые элементы математического аппарата, которые необходимо знать для успешного изучения дальнейшего материала.

B2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА

1. Векторы и системы координат

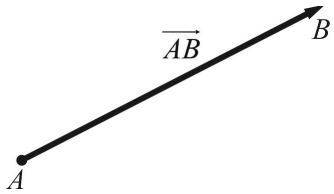


Рис. 2. Изображение вектора

Под вектором будем понимать направленный отрезок. Обозначение: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ или $\overline{AB} = \overline{a}$. Другим распространенным способом записи векторной величины является выделение символа жирным шрифтом: $\boldsymbol{a}$. Геометрически векторы изображаются отрезками со стрелкой (рис. 2) и сопоставляются параллельному переносу[8]. Например, вектор $\overrightarrow{AB}$, изображенный на рис. 2, определяет перенос, при котором точка A перейдет в точку B.

В нашем пособии будем обозначать вектор символом со стрелкой наверху: $\vec{a}$.

Приведем более строгое определение вектора. *Вектор* (лат. *vector* – «несущий») в трехмерном пространстве – это величина, определяемая в любой системе координат тремя числами (или функциями) a_i, которые при изменении пространственной системы координат преобразуются в a_i' по закону

$$a_i' = a_{i'k} a_k ,$$

где $a_{i'k}$ – косинус угла между i-й осью координат исходной системы и k-й осью системы, в которую осуществляется переход [12, с. 7]. Вектор является частным случаем **тензора** (подробнее см. в работах [12, 13]) и

[8] *Параллельный перенос* (*трансляция*) – перемещение объекта или пространства, при котором все точки этого объекта перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

равен тензору первого ранга[9], который в трехмерном пространстве имеет три координатные компоненты. Таким образом, вектор можно представить в виде

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы (модуль единичного вектора равен единице), или *орты*; a_1, a_2, a_3 – компоненты вектора.

Орты представляют собой систему линейно независимых векторов. Это значит, что ни один из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных (такое было бы возможно, если бы тройка векторов лежала в одной плоскости). Орты являются *базисом* в выбранной системе координат, т. е. любой вектор в рассматриваемом пространстве может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации этих векторов. **Направление орт совпадает с направлением осей выбранной системы координат**. Если длина (*норма*) орт принята за единицу, то базис называется *нормированным*, если орты взаимно перпендикулярны, то базис называется *ортогональным*, при выполнении обоих условий базис называется *ортонормированным*.

Базис является основой системы координат. *Система координат* – это способ задания положения точек в пространстве. Система координат является системой идентификации точек в системе отсчета. **Положение любой точки (или вектора) однозначно определяется ее координатами**. Это значит, что не может быть двух точек с одинаковыми координатами. Совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки, называется *координатами* этой точки.

Существует множество различных систем координат (например, прямоугольная, полярная, сферическая, цилиндрическая, аффинная (косоугольная)). Выбор системы координат определяется удобством использования в конкретной задаче.

Рассмотрим алгоритм введения системы координат на примере *декартовой прямоугольной системы координат*[10]. Прямоугольная си-

---

[9] Вектору в соответствие можно поставить столбец или строку чисел, а тензору – матрицу. Например, тензору второго ранга в трехмерном пространстве соответствует матрица размером 3 × 3.

[10] Прямоугольная система координат является частным случаем *аффинной* (общей декартовой) системы координат.

стема координат представляет собой пару, состоящую из ортонормированного базиса и фиксированной точки O (начало координат). В зависимости от размерности пространства (одномерное, двумерное или трехмерное) мы получаем три варианта декартовой системы координат: на прямой, на плоскости и в пространстве. Базис с общей точкой приложения в начале координат называется *репером*.

Также неотъемлемой частью системы координат являются координатные оси. *Координатные оси* (*числовые оси*) – это прямые, на которых лежат базисные векторы (векторы репера), задающие положительное направление роста численного значения координат на этих прямых. Это значит, что если мы будем перемещаться вдоль координатной оси по направлению соответствующего базисного вектора, то наша координата, отсчитываемая на этой координатной оси, будет расти. Если наша координата уменьшается, то это говорит о том, что мы движемся против направления оси. Также на оси выбирается единица масштаба. В прямоугольной системе координат за единицу принимают длину соответствующего базисного вектора. Тогда положение точки M на оси OX определяется числом, абсолютная величина которого равна длине отрезка OM, выраженного в выбранной единице длины (рис. 3). Координата точки положительна, если вектор $\overrightarrow{OM}$ сонаправлен с осью, и отрицательна, если в вектор $\overrightarrow{OM}$ направлен в противоположную сторону.

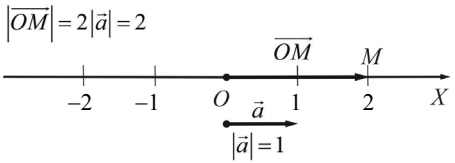


Рис. 3. Координатная ось

Начало координат, или *вершина репера*, отделяет положительные координатные числа (координаты) от отрицательных. Таким образом, между вещественными числами и точками оси установлено взаимно-однозначное соответствие.

Оси координат имеют специальные названия: *ось абсцисс, ось ординат* и *ось аппликат*, которые обычно обозначают OX, OY, OZ соответственно (рис. 4). Координаты точки называются *абсциссой, ординатой* и *аппликатой* и обозначаются как x, y, z соответственно. Координату точки в пространстве прямоугольной системы координат можно записать $A(x, y, z)$ или $A = (x, y, z)$.

Оси попарно образуют координатные плоскости. *Координатные плоскости* представляют собой геометрическое место точек, имеющих

общую неизменную координату. Координатные плоскости обозначатся *XOZ*, *YOZ*, *XOY*. Таким образом, любая точка *A* плоскости *XOY* имеет координаты $A(x, y, 0)$.

Все прямоугольные системы координат в трехмерном пространстве делятся на два класса – *правые* (*положительные*, *стандартные*) и *левые*. Правую и левую системы координат невозможно поворотами совместить так, чтобы совпали соответствующие оси (и их направления).

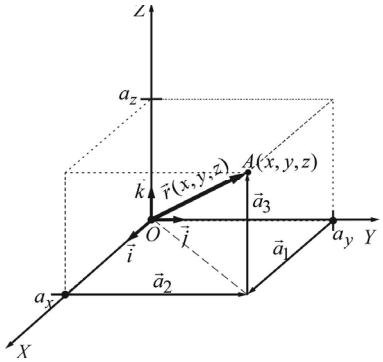


Рис. 4. Прямоугольная система координат

Для правой системы координат положительное направление осей выбирают так, чтобы при повороте оси *OX* против часовой стрелки на угол 90° ее положительное направление совпало с положительным направлением оси *OY*, если этот поворот наблюдать со стороны положительного направления оси *OZ* (рис. 5, *а*).

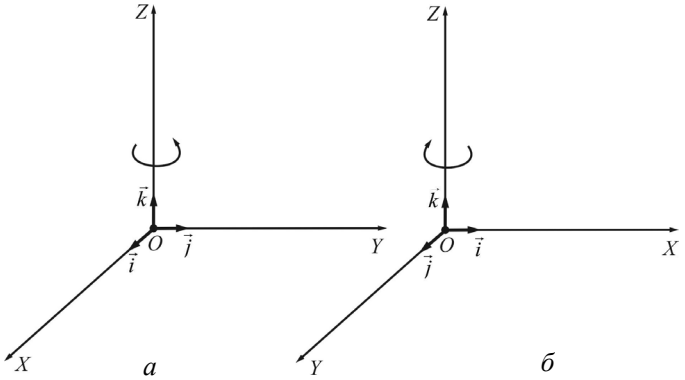


Рис. 5. Системы координат:

а – правая (правовинтовая); *б* – левая (левовинтовая)

Обычно по умолчанию стараются использовать правые координатные системы.

Важным понятием, связанным с системой координат, является понятие радиуса-вектора. *Радиус-вектор* точки *A* – это вектор $\overrightarrow{OA}$, про-

веденный из начала координат в рассматриваемую точку A. Обычно радиус-вектор обозначается $\vec{r}$. С помощью радиуса-вектора можно задать положение точки в любой момент времени в выбранной системе отсчета.

Важно отметить, что многие физические величины зависят от выбора системы отсчета, но ни одна физическая величина не зависит от выбора системы координат в данной системе отсчета [13, с. 31]. Необходимо понимать, что система координат – это только составная часть системы отсчета. Без тела отсчета бессмысленно вводить систему координат, поскольку указывать направление базисных векторов (направление координатных осей), как и любых векторов, можно только относительно чего-либо (в частности, относительно тела отсчета). Также важно понимать, что сами векторы не могут быть положительными или отрицательными, поскольку нет положительных и отрицательных направлений.

Подытожив вышесказанное, можно сделать вывод, что вектор без системы отсчета – это всего лишь «отрезок со стрелкой». Поэтому рассматривать такой объект, как вектор, имеет смысл только в контексте какой-либо системы отсчета.

Мы уже знаем, что в трехмерном пространстве вектор можно представить в виде

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} ,$$

в прямоугольной системе координат вектор раскладывается по базису:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} ,$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты прямоугольной системы координат; a_x , a_y , a_z – компоненты вектора или *проекции вектора* на оси OX, OY, OZ соответственно. Числа a_x , a_y , a_z также называют координатами вектора относительно базиса или *координатными компонентами вектора*, а произведения $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$, $a_3\vec{k}$ часто называют просто компонентами вектора, что, на наш взгляд, более удобно, поскольку позволяет разграничить понятия «проекция» и «компонента вектора». **В нашем пособии под компонентами вектора мы будим понимать** $\vec{a}_1 = a_x\vec{i}$ **,** $\vec{a}_2 = a_y\vec{j}$ **,** $\vec{a}_3 = a_z\vec{k}$ **, т. е. произведение соответствующей проекции вектора на вектор базиса.** Таким образом, любой вектор может быть

представлен в виде векторной суммы векторов репера, умноженных на соответствующие коэффициенты, называемые *проекциями вектора* на оси координат.

Проекция[11] подобна тени, отброшенной от предмета, освещенного лампой или солнцем. Поэтому подобно тому, как в зависимости от расположения источника освещения и особенностей распространяющихся от него лучей можно получить разные тени, так же можно получить и различные проекции: *центральную* и *параллельную*.

Если соединить все точки предмета лучами, сходящимися в точке O, называемой *центром проекции*, то на пересечении этих лучей с какой-либо плоскостью получится *центральная проекция* всех точек предмета.

Если центр проекции бесконечно удален от плоскости проецирования, то это *параллельная проекция*.

Параллельная проекция может быть *ортогональной*, когда проекционные лучи падают перпендикулярно к проекционной (картинной) плоскости, и *косоугольной*, когда проекционные лучи падают под углом, отличным от прямого угла, к проекционной плоскости.

Если плоскость проекции не параллельна ни одной из координатных плоскостей – это *аксонометрическая проекция*.

Проекция может быть не только на плоскость, но и из произвольного пространства на его подпространство. В частности, нас интересует проекция вектора, как элемента трехмерного пространства, на координатную ось. **Обычно под проекцией вектора на ось понимается ортогональная проекция**.

Геометрически спроецировать вектор на координатную ось означает спроецировать его начало и его конец, т. е. опустить перпендикуляр, как показано на рис. 6, из начала и конца вектора на координатную ось. При этом проекцией вектора на ось обычно называют число, совпадающее по абсолютной величине с длиной отрезка, полученного при проецировании, и

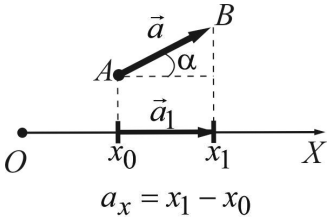


Рис. 6. Проекция вектора на ось OX

[11] Проекция (лат. *projectio* – «выбрасывание вперед») в общем случае – это один из видов отображения (установление соответствия между элементами двух множеств) пространства на свое подпространство.

имеющее положительный знак, если компонента вектора, параллельная оси, сонаправлена с ней.

По сути, проекция вектора на направление оси есть скалярное произведение вектора на орт оси:

$$a_x = \vec{a}\vec{i} = |\vec{a}|\cos\alpha = x_1 - x_0;$$

$$a_y = \vec{a}\vec{j} = |\vec{a}|\cos\beta = y_1 - y_0;$$

$$a_z = \vec{a}\vec{k} = |\vec{a}|\cos\gamma = z_1 - z_0,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – косинусы углов наклона вектора $\vec{a}$ к соответствующим осям координат, называемые *направляющими косинусами*. Декартовы координаты векторы совпадают с его проекциями на соответствующие оси координат $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Длина вектора (*модуль вектора*)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направляющие косинусы можно найти по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Радиус-вектор в прямоугольной системе координат может быть записан в виде

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Это уравнение связывает радиус-вектор с прямоугольными координатами.

Таким образом, координаты радиуса-вектора являются координатами рассматриваемой точки, а зависимость радиуса-вектора от времени описывает изменение положения тела со временем в пространстве.

Как уже упоминалась, существует множество различных систем координат, выбор среди которых зависит от удобства. Например, движение планет удобнее описывать в полярной или сферической системах координат.

В прямоугольной системе координат положение точки в трехмерном пространстве определяется тремя координатами (тройкой чисел), как показано на рис. 4.

Полярная система координат используется при рассмотрении движения объектов на плоскости. Положение точки A (рис. 7) определяется ее расстоянием до начала координат $r = |\overrightarrow{OA}|$ и углом φ между направлением ее радиуса-вектора и направлением координатной оси.

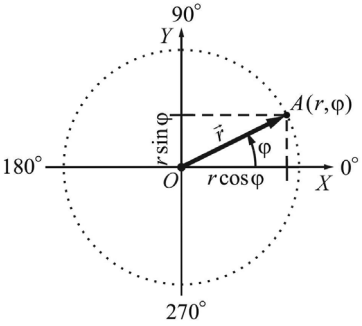


Рис. 7. Полярная система координат

Переход от полярных координат к прямоугольным осуществляется путем применения тригонометрических функций синуса и косинуса:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

В пространстве часто применяются цилиндрические и сферические системы координат.

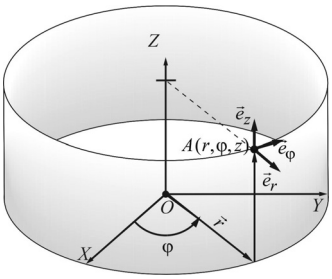


Рис. 8. Цилиндрическая система координат

В цилиндрической системе (рис. 8) координаты любой точки A пространства представляются упорядоченной тройкой: r (радиус), φ (азимут или долгота), z (высота); $r \ge 0$ и определяет расстояние от оси ZO до точки A; $0 \le \varphi < 360^\circ$ – угол между направлением оси OX и направлением вектора $\vec{a}_{12}$ (сумма компонент декартова радиуса-вектора точки A по осям OX и OY), расположенного в плоскости XOY. Высота z равна декартовой z-координате точки A.

Существенным недостатком полярных систем координат является тот факт, что значение φ не определено при $r = 0$. Цилиндрические

координаты полезны для изучения систем, симметричных относительно некоторой оси. Например, уравнение окружности с радиусом R, лежащей в плоскости XOY, в декартовых координатах с началом отсчета в центре окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$, тогда как в цилиндрических координатах оно существенно упрощается: $r = R$.

Орты цилиндрической системы координат связаны с декартовыми ортами следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}, \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}, \\ \vec{e}_z = \vec{k}. \end{cases}$$

Таким образом, преобразование координат из цилиндрических в декартовы имеет вид

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

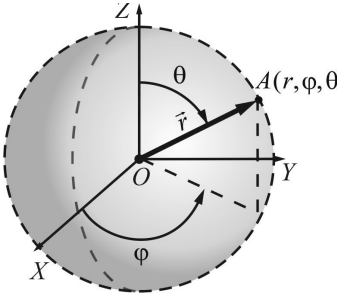


Рис. 9. Сферическая система координат

В сферической системе координат (рис. 9) расположение точки A определяется тремя компонентами: r (радиус), φ (азимут или долгота), θ (широта или полярный угол); $r \geq 0$ и определяет расстояние от точки A до начала координат (полюса); $0 \leq \varphi < 360°$ – угол между направлением оси OX и направлением вектора $\vec{a}_{12}$ (сумма компонент декартова радиуса-вектора точки A по осям OX и OY), расположенного в плоскости XOY. Широта $0 \leq \theta < 180°$ – угол между направлением оси OZ и направлением радиуса-вектора точки A.

Отметим, что сферическая система координат имеет такой же недостаток, как цилиндрическая и полярная системы координат: значение φ и θ не определены при $r = 0$. Угол φ также не определен для граничных значений $\theta = 0$ и $\theta = 180°$.

Если заданы сферические координаты точки, то переход к декартовым осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Переход от одной системы координат к другой можно осуществить, задав связь[12] между векторами репера (базисными векторами) исходной и новой системы координат и координаты полиса новой системы отчета в исходной. Подобным образом осуществляется переход между системами отсчета. При этом следует указать, как одна система отсчета движется относительно другой.

В качестве примера приведем преобразование координат при повороте (положительное направление вращения против часовой стрелки) прямоугольной двумерной системы координат:

$$\begin{cases} x' = x\cos(\vec{i}', \vec{i}) + y\cos(\vec{i}', \vec{j}), \\ y' = x\cos(\vec{j}', \vec{i}) + y\cos(\vec{j}', \vec{j}), \end{cases}$$

где x, y – координаты точки в исходной системе координат; x', y' – координаты в новой системе координат;
или

$$\begin{cases} x' = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), \\ y' = x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha), \end{cases}$$

где α – угол поворота новой системы координат относительно исходной.

[12] Связь задается в виде матрицы перехода.

2. Операции над векторами

Для изучения основ векторной алгебры необходимо ввести несколько понятий.

Векторы *коллинеарны*, если они параллельны одной прямой (рис. 10). Обозначаются: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ – коллинеарные векторы; $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ – сонаправленные векторы (рис. 10, *а*); $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – противоположно направленные векторы (рис. 10, *б*).

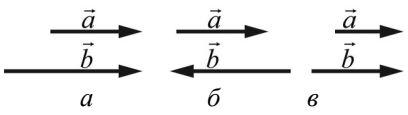


Рис. 10. Коллинеарные векторы:
а – сонаправленные; *б* – противоположно направленные; *в* – равные

Векторы *одинаковы* (*равны*), если они сонаправлены и их модули равны, т. е. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \left(|\vec{a}| = |\vec{b}|,\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}\right)$ (рис. 10, *в*).

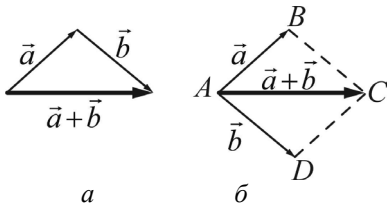


Рис. 11. Сложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
а – по правилу треугольника; *б* – по правилу параллелограмма ($AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$, $AB = DC$ и $AD = BC$)

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, определяемый по *правилу треугольника* или по *правилу параллелограмма* (рис. 11).

Разность векторов можно представить в виде $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис. 12).

По сути, операция сложения векторов – это совокупность двух (или нескольких) последовательных параллельных переносов; то же касается и операции умножения вектора на число.

Произведением $C\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число C называется вектор $\vec{b} = C\vec{a}$. При этом $|\vec{b}| = |C||\vec{a}|$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $C > 0$, и $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $C < 0$.

Вектор, модуль которого равен нулю (начало вектора совпадает с его концом), называется *нулевым* вектором и обозначается $\vec{0}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число[13] (*скаляр*) $C = \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}),$$

где $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Скалярное произведение можно представить как произведение проекции вектора $\vec{a}$ (на направление вектора $\vec{b}$) на модуль вектора $\vec{b}$ или произведение модуля вектора $\vec{a}$ на проекцию вектора $\vec{b}$ (на направление вектора $\vec{a}$) (рис. 13):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot b_a$$

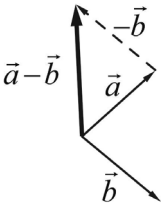


Рис. 12. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Из предыдущих соотношений получим следующие выражения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}, \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad b_a = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|}.$$

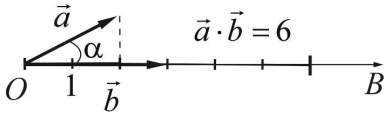


Рис. 13. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами: 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ – *свойство коммутативности*; 2) $(C\vec{a}, \vec{b}) = C(\vec{a}, \vec{b})$ – *сочетательное свойство*; 3) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ – *свойство дистрибутивности*; 4) скалярный квадрат вектора всегда неотрицателен $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$.

[13] Скаляр соответствует тензору нулевого ранга [12, 13].

Скалярное произведение двух векторов в декартовом базисе равно сумме произведений **одноименных** координат:

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z .$$

Из определения следует, что скалярное произведение двух ортогональных (перпендикулярных) векторов равно нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0 .$$

В физике многие величины определяются через скалярное произведение векторов. Например, работа A **постоянной потенциальной силы** $\vec{F}$ по перемещению материальной точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения[14] $\Delta\vec{r}$:

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

По аналогии с правой и левой системой координат вводится понятие правой и левой тройки векторов. Упорядоченная тройка векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ называется *правой*, если наблюдателю, находящемуся на конце вектора $\vec{c}$, кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден **против часовой стрелки** при условии того, что векторы тройки приведены к общему началу (исходят из одной точки), иначе тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ называется левой.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$; 2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$; 3) тройка векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – правая. Векторное произведение обозначается: $\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$. **Векторное произведение не обладает свойствами коммутативности**. Оно является *антикоммутативным* в отличие от скалярного произведения.

---

[14] Вектор перемещения – это вектор, соединяющий начальное и конечное положения тела (материальной точки) и направленный из точки, в которой тело находилось в начальный момент времени, в конечную точку. **В прямоугольной системе координат вектор перемещения равен изменению радиуса-вектора.**

Геометрический смысл векторного произведения заключается в том, что его модуль **численно** равен площади параллелограмма, образованного исходными векторами (рис. 14, *а*).

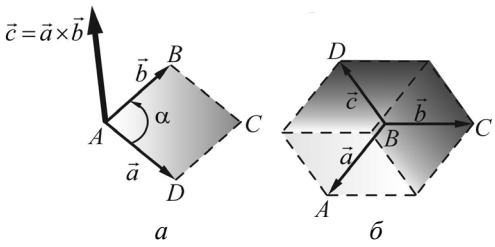


Рис. 14. Произведения векторов:

а – векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\left(|\vec{c}|=S_{ABCD}\right)$; *б* – смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ $\left($объем параллелепипеда $V=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right|\right)$

Векторное произведение обладает следующими свойствами: 1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ – *свойство антикоммутативности*; 2) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=$ $=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$; 3) $(C\vec{a}\times\vec{b})=C(\vec{a}\times\vec{b})$; 4) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\,||\,\vec{b}$ (условие коллинеарности векторов); 5) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, т. е. $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ в декартовом базисе, то векторное произведение можно представить в виде *определителя* (подробнее см. в [14, 15]):

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}\,.$$

Отметим особенность полученной формулы: индексы у компоненты вектора *a* и *b* в скобках изменяются по схеме $x\to y\to z$ $(a_xb_y\to a_yb_z\to a_zb_x)$.

Результатом **двойного векторного произведения** $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ является вектор, который можно найти по формуле

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\left[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}).$$

Эту формулу можно запомнить по мнемоническому правилу **«бац минус цаб»**.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярная величина, полученная в результате последовательного выполнения двух операций – векторного и скалярного умножения, – представленная выражением

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}.$$

Смешанное произведение обозначается $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (см. рис. 14, *б*). Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ **компланарны.**

Смешанное произведение, векторы которого выражены в декартовом базисе, можно представить в виде определителя:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=a_x(b_yc_z-b_zc_y)+a_y(b_zc_x-b_xc_z)+a_z(b_xc_y-b_yc_x).$$

Векторы делятся на *полярные* и *аксиальные*.

Полярным (*истинным*) вектором называется такой вектор, который при замене ориентации системы отсчета на противоположную не меняется.

Аксиальным (от лат. *axis* – ось) вектором или *псевдовектором* называется вектор, который при замене ориентации системы отсчета на противоположную меняет свое направление на противоположное, сохраняя свою длину.

Все векторы, полученные в результате векторного произведения двух истинных векторов, являются аксиальными. При векторном

умножении истинного вектора на псевдовектор получается истинный вектор.

Условно говоря, полярные векторы изображают в трехмерном пространстве трансляции, а аксиальные – вращения. Например, вектор скорости указывает направление движения тела, а вектор угловой скорости определяет направление вращения тела вокруг оси вращения.

Представим правую прямоугольную систему координат (см. рис. 4). Тогда любой единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{k}$, можно представить как векторное произведение $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Если смотреть с конца этого вектора на векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то поворот от первого ко второму по наименьшему углу осуществляется против часовой стрелки. Теперь, если мы посмотрим с противоположного конца рассматриваемого вектора (как бы снизу системы координат), то поворот от $\vec{i}$ и $\vec{j}$ осуществляется против часовой стрелки. Так как векторное произведение по определению образует правую тройку векторов, то вектор, являющийся результатом произведения $\vec{i} \times \vec{j}$, должен поменять свое направление, причем модуль этого вектора не изменится. Отметим, что радиус-вектор $\vec{r}$ точки A не изменит своего направления при выполнении описанной выше процедуры, которую можно представить как зеркальное отражение системы координат.

В механике многие физические величины являются аксиальными векторами, например, момент импульса, момент сил, угловая скорость и т. д.

3. Физический смысл производной. Дифференцирование и интегрирование

При изучении физики мы неизбежно сталкиваемся с дифференциальными и интегральными уравнениями. Подробное описание методов решения подобных уравнений выходит за рамки данного пособия. Мы лишь в краткой форме приведем некоторые понятия из дифференциального и интегрального исчисления[15].

Рассмотрим некоторую скалярную функцию $s(t)$, изображенную на рис. 15. На рассматриваемой кривой отметим точку A с координа-

[15] Предполагается, что читатель знаком с понятиями «интеграл», «производная», «первообразная».

тами t_0 и $s(t_0)$. Перемещаясь вдоль кривой $s(t)$, отметим точку $B(t_0+\Delta t,\ s(t_0+\Delta t))$ и проведем через обе точки секущую AB (светло-серая линия на рис. 15).

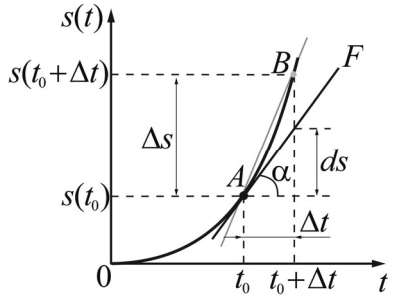


Рис. 15. Иллюстрация понятия производной

Разность координат по оси ординат $\Delta s = s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$ соответствует приращению функции $s(t)$, а по оси абсцисс – приращению аргумента функции Δt. Отношение $\Delta s/\Delta t$, по сути, равно **тангенсу угла наклона секущей** AB, т. е. отношение $\Delta s/\Delta t$ можно представить как угловой коэффициент *прямой*[16], построенной так, чтобы при заданном изменении аргумента мы из точки A попали бы в точку B.

Также отношение $\Delta s/\Delta t$ (отношение изменения функции к изменению аргумента) можно интерпретировать как среднюю скорость изменения функции на интервале от t_0 до $t_0+\Delta t$.

Таким образом, из сказанного выше следует, что средняя скорость роста функции на участке между точками A и B равна скорости изменения линейной функции, являющейся секущей AB. Поэтому если зависимость $s(t)$ выражает зависимость пути, пройденного материальной точкой, от времени, то $\Delta s/\Delta t = \langle v \rangle$, где $\langle v \rangle$ – *средняя путевая скорость*.

Будем постепенно приближать точку B вдоль кривой к точке A, при этом приращение аргумента функции Δt будет уменьшаться. При стремлении $\Delta t \to 0$ точка $B \to A$, а секущая AB переходит в касательную F к кривой $s(t)$ в точке A. Таким образом, касательная F в точке A – это предельное положение секущей AB при $B \to A$.

[16] Уравнение прямой с угловым коэффициентом k (постоянная величина), равным **тангенсу угла наклона прямой** к оси OX, имеет вид $y = kx + b$, где b – постоянная величина. Поэтому если график зависимости одной величины от другой представляет собой прямую линию, то говорят, что между величинами *прямая* (*линейная*) зависимость, т. е. изменение функции прямо пропорционально изменению аргумента.

Производной s' *функции в точке A* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$s' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Тогда с геометрической точки зрения производная функции в точке численно равна тангенсу угла наклона касательной к этой точке.

Производная характеризует скорость роста функции в данной точке. Если вернуться к нашей аналогии**,** в которой $s(t)$ выражает зависимость пути, пройденного материальной точкой, от времени, то $s' = |\vec{v}|$, где $|\vec{v}|$ – модуль *мгновенной скорости* движения материальной точки, а s' – производная пути по времени.

Приращение функции Δs можно представить в виде $\Delta s = ds + f(t)$ (рис. 15). При этом ds линейно связано с приращением аргумента Δt, а $f(t)$ характеризует нелинейную часть приращения функции, ds – *дифференциал функции* (линейная относительно Δt часть приращения функции). *Дифференциал аргумента* совпадает с его приращением $dt = \Delta t$.

Обобщая вышесказанное, можно записать

$$s' = \frac{ds}{dt} \text{ или } ds = s'dt.$$

В физике наиболее часто используется предложенное Г. Лейбницем обозначение производной $s' = ds/dt$.

То есть производная, по сути, является коэффициентом пропорциональности между дифференциалом функции и дифференциалом аргумента.

Отметим, что если $dt \to 0$, то ds также стремится к нулю. **Важно отличать понятие приращения функции** Δs **от ее дифференциала** ds. В общем случае дифференциал функции представляет собой функцию $ds(\Delta t)$, линейно зависящую от Δt, для которой верно следующее соотношение:

$$ds(\Delta t) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) + \alpha(\Delta t),$$

где α стремится к нулю при $\Delta t \to 0$, причем α стремится к нулю быстрее, чем Δt. Получается, что при $\Delta t \to 0$ разность $(ds - \Delta s) \to 0$, а ds принято называть дифференциалом функции в точке.

Функцию, имеющую конечную производную в некоторой точке, называют *дифференцируемой* в данной точке. Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*. Обратный процесс – нахождение *первообразной – интегрирование*. Подробнее о производной можно прочитать в работах [16–18].

Производная может быть не только первого порядка (первая производная). Например, первая производная от радиуса-вектора материальной точки по времени – это мгновенная скорость этой точки, а вторая производная (**производная от производной**) от радиуса-вектора по времени равна ускорению материальной точки. Вторая производная обозначается как

$$\left(f'\right)' = f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = d^2 f \big/ dx^2 .$$

Производная *n*-й степени функции f обозначается как

$$\frac{d^n f}{dx^n} = d^n f \big/ dx^n = f^{(n)} .$$

Отметим, что в физике принято записывать производную через отношение дифференциалов ($f' = df/dx$). **Также для производной по времени принято обозначение** $\dot{f}$, т. е. $\dot{f} = df/dt$, где t – это время. Вторая производная функции по времени обозначается как $\ddot{f}$.

В качестве примера найдем производную от функции $y(x) = 2x^2 - 1$. Тогда производная функции в точке x_0

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(2x^2 - 1) - \left(2x_0^2 - 1\right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2\left(x^2 - x_0^2\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} 2(x + x_0) = 4x_0 .$$

Таблица производных некоторых элементарных функций приведена в прил. Б, табл. 8.

Важно отметить, что в физике под дифференциалом аргумента понимают столь малое его приращение (**элементарное приращение**), чтобы разность между соответствующими значениями приращения функции и линейной части ее приращения была **пренебрежимо мала** (малой высшего порядка малости по сравнению с приращением функции). Выражение $s' = ds/dt$ следует понимать не как отношение математических дифференциалов функции и аргумента или отношение бесконечно малых величин, а как отношение *элементарных* приращений функции и аргумента. При этом все математические операции выполняются по правилам работы с дифференциалами.

В физике довольно часто используются дифференциальные уравнения.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную (переменные), неизвестную функцию и ее производные. Если неизвестная функция – это функция одной переменной, то уравнение называется обыкновенным, если нескольких переменных – то уравнением в частных производных:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots,\ y^{(n)}) = 0\,.$$

Порядок уравнения определяется порядком его старшей производной. *Решением дифференциального уравнения* называется функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставленной в уравнение, превращает его в тождество.

В качестве примера приведем решение простейшего дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = xy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = xy\,.$$

Для решения уравнения разделим переменные, т. е. однородные переменные скомпонуем с разных сторон от знака равенства:

$$\frac{dy}{y} = xdx\,.$$

Теперь мы можем проинтегрировать обе части равенства:

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx .$$

После интегрирования получим

$$\ln|y| + \ln|C| = \frac{x^2}{2} \Rightarrow Cy = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{C}\exp(x^2/2),$$

где C – постоянная величина. Постоянная интегрирования представлена для удобства в виде натурального логарифма, а модули отброшены, так как постоянная C может принимать и положительные и отрицательные значения. Отметим, что $x \neq 0$.

Если функция дифференцируема на промежутке [a, b] и во внутренней точке c этого промежутка принимает наибольшее или наименьшее значение, то производная в этой точке равна нулю.

Мы упомянули такое понятие, как *интегрирование* – вычисление различных интегралов. Кратко рассмотрим значение понятия *интеграл*.

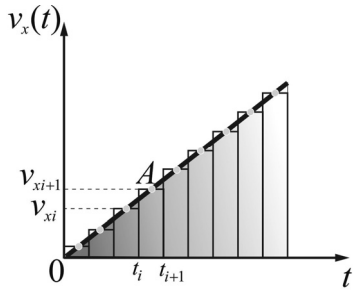


Рис. 16. Иллюстрация понятия интеграла

Представим, что мы провели некоторое количество измерений i через равные промежутки времени скорости v прямолинейно движущегося в одном направлении тела. Отметим полученные точки на графике зависимости $v_x(t)$ (v_x – проекция скорости на направление движения), который представлен на рис. 16, Пусть перед нами стоит задача найти пройденный телом путь. Как мы уже упоминали, $\Delta s/\Delta t = \langle v \rangle$, где $\langle v \rangle$ – средняя путевая скорость. Тогда $\Delta s = \langle v \rangle \cdot \Delta t$. Если предположить, что в интервале времени $[t_i, t_{i+1}]$ тело двигалось равномерно со средней скоростью $\langle v_x \rangle = v_{xi}$, то $s = \sum \Delta s_i = \sum v_i \cdot \Delta t$. Как можно видеть из рис. 16, произведение $v_i \cdot \Delta t = S$, где S – площадь прямоугольника, длина сторон которого равна v_i и $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ соответственно. Тогда путь численно

равен сумме площадей всех прямоугольников: $s = \sum S_i$. Если уменьшать промежутки времени между измерениями, то при $\Delta t \to 0$ площадь прямоугольников стремится к нулю, а их число – к бесконечности. В этом случае непонятно, как провести суммирование всех площадей. Нам поможет то обстоятельство, что при $\Delta t \to 0$ средняя скорость переходит в мгновенную, $\Delta s \to ds$, и мы имеем $ds = v \cdot dt$. Если для нахождения мгновенной скорости (**при определенных условиях**) необходимо взять производную по времени от пути (**в общем случае от радиуса-вектора**), то чтобы найти путь, необходимо совершить обратную операцию (обратная задача) – найти *первообразную* мгновенной скорости.

Например, первообразная от x – это $F(x) = x^2 / 2$, а производная от $F' = (x^2 / 2)' = x$. Если найти первообразную функции $v_x(t)$ в каждой точке и просуммировать по всему диапазону времени, то мы получим пройденный телом путь.

Таким образом, для нахождения пройденного телом пути нам необходимо ввести некоторый аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых, который называется *интегралом*:

$$\int_0^s ds = \int_0^t v(t)dt ,$$

где $\int$ – знак интеграла; $v(t)$ – *подынтегральная функция*; dt – *элемент интегрирования*; 0 и t, расположенные под и над знаком интеграла, – *пределы интегрирования*. Если пределы интегрирования указаны, то интеграл называется *определенным*; если пределы не заданы, то интеграл называется *неопределенным*.

Неопределенный интеграл можно записать как

$$\int f(x)dx = F(x) + C ,$$

где C – постоянная интегрирования (константа).

Определенный интеграл можно записать как

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Эта равенство называется **формулой Ньютона–Лейбница**.

Упрощенно говоря, процесс интегрирования, с одной стороны, сводится к нахождению первообразных функции, а с другой стороны, геометрический образ интеграла – это площадь под кривой $v_x(t)$ (см. рис. 16).

В зависимости от пространства, на котором задана подынтегральная функция, интеграл может быть двойным, тройным, криволинейным, поверхностным и т. д.

Таблица интегралов некоторых элементарных функций приведена в прил. Б, табл. 9.

В3. ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Перейдем к описанию общего алгоритма решения задач по физике.

Любая *задача*, по сути, это проблемная ситуация, с которой приходится иметь дело в учебной, научной или любой другой деятельности, когда необходимо определить неизвестные параметры на основе знания их связей с известными данными. Задачу, в том числе и физическую, следует воспринимать как описание некоторой модельной системы, у которой есть входные и выходные параметры, являющиеся ее характеристиками и каким-либо способом взаимосвязанные. Тогда решение задачи сводится к отысканию взаимосвязей между входными и выходными (неизвестными) параметрами и нахождению последних.

Нужно понимать, что решение задач необходимо для понимания физических законов и принципов, определения границ их применимости и формирования навыков их использования при решении конкретной проблемы. Только понимая суть физических моделей, можно успешно применять их при решении задач.

Перед решением задачи необходимо тщательно разобраться в теоретическом материале и внимательно ознакомиться с простыми примерами использования тех или иных законов или правил.

При решении задач не следует заниматься комбинаторикой, т. е. не пытайтесь методом перебора получить подходящую рабочую формулу.

«Искусство» решения задач основывается на **системе вопросов**, которые студент должен задавать самому себе в процессе решения той или иной задачи. **Вопросно-ответная** методика решения задач предполагает постановку самим учащимся вопросов и поиск ответов на них, может использоваться вне зависимости от вида задачи (*каче-*

ственная или *количественная*, *экспериментальная* или *теоретическая*) и применима при изучении любого учебного материала.

При решении задач студент должен постоянно задавать себе вопросы, отвечая на которые он постепенно приблизится к достижению своей цели (получение ответа на вопрос задачи). При этом успешность решения задачи зависит от корректности задаваемых вопросов.

Выделим три основных вопроса, отвечая на которые можно решить любую задачу: 1) Что мы знаем? 2) Что мы хотим узнать? 3) Что нам для этого необходимо?

Разберем суть методики вопросов и ответов на примере конкретной задачи.

Пример 1 (*качественная задача*). Почему колесные пары железнодорожных вагонов соединяются с их тележками при помощи роликовых подшипников?

Для начала нужно понять, что мы знаем о подшипниках. Для этого зададим себе следующие вопросы.

1. Что такое подшипник?
2. Какие виды подшипников бывают?
3. Чем они отличаются?

Хотя бы на один из этих вопросов вы наверняка знаете ответ, а вот на остальные ответы скорее всего придется поискать. Многим известно, что подшипник – это сборочный узел, поддерживающий вал (ось) или иную подвижную конструкцию, который обеспечивает вращение, качение или линейное перемещение с наименьшим сопротивлением, воспринимает и передает нагрузку от подвижного узла на другие части конструкции. Иначе говоря, подшипник – это аналог сустава у животных, обеспечивающий вращение деталей с наименьшим сопротивлением.

Также многие знают, что бывают подшипники качения и скольжения. Подшипники качения делятся на шариковые и роликовые.

Из условия задачи нам известно, что для соединения колесных пар с тележками используются подшипники качения, а именно роликовые. Нам необходимо понять, в чем их преимущество перед остальными. Для этого следует рассмотреть их устройство и сравнить его с устройством других подшипников. Далее следует узнать, в каких режимах работы должен эксплуатироваться подшипник и какие основные требования к нему предъявляются. Проанализировав эти условия, можно выявить наиболее подходящий подшипник.

Немаловажным остается вопрос поиска информации. Информацию следует искать в справочниках и учебниках, посвященных данному вопросу. Лучше проанализировать несколько источников.

Выполнив указанные выше рекомендации, вы можете прийти к следующим выводам: в шариковых подшипниках давление сосредоточено в точках опоры шариков с кольцом, а в цилиндрических роликовых подшипниках оно распределено по всей линии соприкосновения ролика с кольцом. Поскольку масса вагонов зачастую достигает более 10^3 кг, целесообразно использовать роликовые подшипники, так как нагрузка на элемент подшипника распределяется более равномерно, что повышает его надежность и устойчивость к различным видам нагрузок. Надежность всех узлов является ключевым критерием при конструировании вагонов для железнодорожных поездов.

Пример 2 (*количественная задача*). Автомобиль двигался прямолинейно в одном направлении. Первую треть пути он проехал со средней скоростью, проекция которой на ось *OX* равна v_{x1}, вторую треть – со средней скоростью $v_{x2} = 2v_{x1}$, последнюю – со средней скоростью $v_{x3} = 3v_{x1}$. Чему равна **средняя скорость** автомобиля на всем пройденном пути?

Попробуйте решить задачу самостоятельно, а затем сравните свое решение с решением, приведенным ниже.

При решении подобных задач многие студенты часто допускают грубую ошибку: представляют среднюю скорость в виде среднего арифметического трех скоростей. Поэтому заранее предупреждаем, что ответ $\langle v_x \rangle = (v_{x1} + v_{x2} + v_{x3})/3 = 2v_{x1}$ является НЕВЕРНЫМ!

Попытаемся решить задачу, используя вопросно-ответную методику. Для начала разберемся, **что нам известно** о физических процессах, рассматриваемых в задаче, и что нам требуется найти. Для этого необходимо внимательно изучить условия задачи и сформулировать концептуальную модель, т. е. определить исходные параметры рассматриваемой системы, выделить наиболее существенные факторы, определяющие протекание физических процессов, и отбросить несущественные, выявить взаимосвязанные физические величины.

Обычно условие задачи для наглядности записывают в кратком виде, а также, если необходимо, приводят графический аналог краткого условия – рисунок к задаче, моделирующий описываемую ситуацию.

Вспомогательный рисунок, описывающий физический процесс, рассматриваемый в задаче, является упрощенным аналогом ассоциативной карты (см. рис. 1) и помогает построить систему связей между физическими величинами, описывающими процесс. Зачастую грамотно построенный рисунок позволяет сразу найти интересующие нас математические зависимости между известными и искомыми величинами.

При краткой записи условия задачи важно проанализировать описываемую ситуацию, чтобы выделить наиболее существенные моменты. Многие студенты, читая условия, обращают внимание только на численные значения величин, пренебрегая факторами, при которых протекает процесс, заданными зачастую в неявной форме.

Определим, что нам известно в нашей задаче. Для этого внимательно проанализируем ее условие. В задаче сказано, что автомобиль двигался прямолинейно. Из этого следует, что он двигался поступательно. Чтобы понять, что дает нам эта информация, необходимо вспомнить, что такое *поступательное движение*.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором прямая, проходящая через любые две точки тела, в процессе движения остается параллельной самой себе (рис. 17)[17]. Следовательно, при поступательном характере движения все точки твердого тела движутся по одинаковым траекториям. **Поэтому для описания движения твердого тела достаточно описать движение произвольной его точки**. Чаще всего описывают движение *центра масс* (не путать с центром тяжести) твердого тела. Математически поступательное движение по своему конечному результату эквивалентно параллельному переносу.

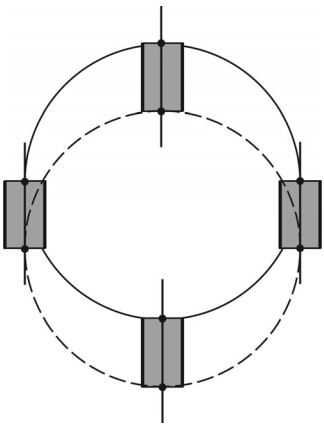


Рис. 17. Поступательное движение твердого тела

[17] Из рис. 17 видно, что траектории всех точек тела одинаковые – это окружности равного радиуса. При этом центры этих окружностей не совпадают, а точнее – не лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости рисунка.

Из сказанного выше следует вывод о том, что автомобиль в нашей задаче можно заменить материальной точкой.

Учитывая, что автомобиль двигался не только прямолинейно, но и в одном направлении, вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ численно равен по абсолютной величине пройденному телом за рассматриваемый промежуток времени пути $\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta s$.

Также в задаче указано, что автомобиль двигался неравномерно, и даны средние значения проекций скорости на направление на каждом из трех участков. Поскольку от нас требуется найти проекцию средней скорости на направление движения, значение скорости в конкретный момент времени нас не интересует, так же как для нас не важны конкретные участки торможения и ускорения твердого тела.

Перейдем к следующему «глобальному» вопросу: **что в задаче требуется найти?** По условию нам необходимо ответить на вопрос: чему равна **средняя скорость** автомобиля (в нашем случае – материальной точки) на всем пройденном пути? Логично задать себе вопрос: **а что же такое средняя скорость материальной точки?** Пока мы не ответим себе на этот вопрос, дальнейшее решение задачи становится бессмысленным.

Мы уже ввели понятие *средняя путевая скорость* как отношение $\langle v \rangle = \Delta s / \Delta t$. Средняя путевая скорость – это **скалярная величина**[18]. Поскольку скорость – это физическая величина, которая введена для описания не только быстроты перемещения тела в пространстве, но и для указания направления этого перемещения (а также быстроты изменения направления движения тела), то она по определению является векторной величиной. Поэтому под *средней скоростью* материальной точки в промежутке времени от t до $t+\Delta t$ следует понимать вектор $\langle \vec{v} \rangle$, равный отношению вектора перемещения (приращение радиуса-вектора) $\Delta\vec{r}$ точки за промежуток времени Δt к его продолжительности:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

[18] Физические величины, которые полностью характеризуются заданием одного вещественного числа, не зависящего от выбора системы координат, называются скалярами [13].

Исходя из определения средняя скорость (иногда ее называют *средняя скорость по перемещению*) движения тела по замкнутой траектории за один цикл (например, движение Земли вокруг Солнца за один год) равна нулю. Также средняя скорость при прямолинейном движении равна нулю, если тело поменяло направление своего движения и вернулось в исходную точку.

Проще говоря, под средней скоростью понимается скорость, с которой тело переместилось бы из начальной точки в конечную за указанный промежуток времени, двигаясь равномерно и прямолинейно в одном направлении.

Тогда

$$\left|\langle\vec{v}\rangle\right| \le \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

При отсутствии дополнительных уточнений во многих задачах под средней скоростью обычно понимают среднюю путевую скорость. Но в нашей задаче говорится о проекции на некоторую ось *OX*. Логично предположить, что нам требуется найти проекцию *средней скорости по перемещению*.

Как мы выяснили при анализе условия задачи, $\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta s$, следовательно, в нашем случае

$$\left|\langle\vec{v}\rangle\right| = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Зачастую, отвечая на вопрос: **что в задаче требуется найти**, мы уже можем решить многое простые задачи. После этого следует задать себе другой вопрос: **Какие законы описывают рассматриваемое явление, или как связаны физические величины, характеризующие процесс?** Необходимо определить неизвестные параметры, которые нам не даны в явной форме, и попытаться отыскать их связь с исходными данными, **составив систему уравнений**. После этого процесс решения задачи сводится к выбору метода решения системы уравнений и анализу полученного ответа на «физичность» (соответствие законам физики и здравого смысла).

Для удобства решения задачи и проверки его верности будем придерживаться оформления, приведенного в прил. В.

Дано:

$v_1 = v_{x1}$

$v_2 = 2v_{x1}$

$v_3 = 3v_{x1}$

$s_1 = s_2 = s_3 = \dfrac{s_\Sigma}{3}$

$\langle v_x \rangle = ?$

Решение

Изобразим рисунок к задаче (рис. 18).

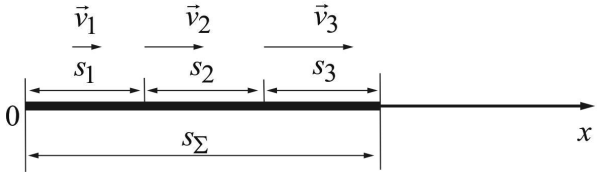


Рис. 18

По определению $\langle \vec{v} \rangle = \Delta\vec{r}/\Delta t$, где Δt – общее время движения автомобиля. Тогда проекция средней скорости на ось OX равна $\langle v_x \rangle = \Delta r_x / \Delta t$.

В нашем случае $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$, и поскольку тело двигалось в одном направлении прямолинейно, то $\Delta r_x > 0$, а значит, можно записать $|\Delta\vec{r}| = \Delta r_x = \Delta s$. Таким образом, имеем

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_\Sigma}{\Delta t}. \qquad (П2.1)$$

Общий путь нам не дан, как и не дано время движения материальной точки (автомобиля). Одно уравнение и три неизвестных. Следовательно, нам необходимо связать неизвестные параметры с известными, чтобы на каждую неизвестную величину приходилось одно уравнение. Тогда задача будет иметь единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

Если выразить Δt через s_Σ, то мы избавимся, по крайней мере, от одной неизвестной величины.

Уравнение (П2.1) можно преобразовать к виду

$$\langle v_x \rangle = \frac{s_\Sigma}{\Delta t} = \frac{s_\Sigma}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}. \qquad (П2.2)$$

Поскольку на каждом отрезке пути s_1, s_2, s_3 нам даны средние скорости v_1, v_2, v_3, то по аналогии с (П2.1) можно записать:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{s_1}{\Delta t_1} = \dfrac{s_\Sigma}{3\Delta t_1}, \\ v_2 = \dfrac{s_2}{\Delta t_2} = \dfrac{s_\Sigma}{3\Delta t_2}, \\ v_3 = \dfrac{s_3}{\Delta t_3} = \dfrac{s_\Sigma}{3\Delta t_3}. \end{cases} \qquad \text{(П2.3)}$$

Преобразуем систему уравнений (П2.3) к виду

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \dfrac{s_\Sigma}{3v_1}, \\ \Delta t_2 = \dfrac{s_\Sigma}{3v_2}, \\ \Delta t_3 = \dfrac{s_\Sigma}{3v_3}. \end{cases} \qquad \text{(П2.4)}$$

Подставив (П2.4) в (П2.2), получим следующее уравнение:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\cancel{s_\Sigma}}{\dfrac{\cancel{s_\Sigma}}{3v_1} + \dfrac{\cancel{s_\Sigma}}{3v_2} + \dfrac{\cancel{s_\Sigma}}{3v_3}} = \frac{3}{v_1^{-1} + v_2^{-1} + v_3^{-1}}. \qquad \text{(П2.5)}$$

По условию задачи $v_2 = 2v_1$, $v_3 = 3v_1$, следовательно, (П2.5) принимает вид

$$\langle v_x \rangle = \frac{3}{v_1^{-1} + (2v_1)^{-1} + (3v_1)^{-1}} = \frac{18v_1}{6+3+2} = \frac{18}{11}v_1 (\text{м/с}). \qquad \text{(П2.6)}$$

Ответ: средняя скорость автомобиля равна $\langle v_x \rangle = \frac{18}{11} v_1$ м/с .

Таким образом, мы нашли среднюю скорость в общем виде. Численное значение средней скорости можно определить, задав значение v_1 .

Верность решения можно оценить, решив задачу любым другим способом (например, графически). Если ответы совпадут, то решение с большой долей вероятности верное. Также необходимо оценить, насколько ответ «физичен». Например, в нашем случае средняя скорость не должна быть меньше минимальной из трех скоростей.

Следует проверить, совпадают ли размерности величин, стоящих в правой и левой частях конечного уравнения.

На описанном выше примере можно увидеть, как работает методика вопросов и ответов. Проанализировав решение, мы также можем выделить **четыре основных этапа решения физических задач** [19].

1. Анализ условия задачи и его наглядная интерпретация схемой или чертежом.

2. Составление уравнений, связывающих физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление с количественной стороны.

3. Совместное решение полученных уравнений относительно той или иной величины, считающейся в данной задаче неизвестной.

4. Анализ полученного результата и числовой расчет.

На первом этапе необходимо привести краткую запись условия задачи с помощью общепринятых буквенных обозначений (см. прил. Б, табл. 11). По умолчанию мы работаем в системе СИ, и все величины должны быть приведены к единообразному виду. Например, в СИ скорость измеряется в метрах в секунду (м/с), также допускается использование приставок кило, мега и т. д. (см. прил. Б, табл. 6). Допускается измерять (если это более удобно в рамках задачи) скорость в километрах в секунду (км/с), также допускается, если это необходимо, использовать такую внесистемную единицу времени, как час. Тогда скорость можно выражать в километрах в час (км/ч), **при этом следует единицы измерения всех величин, размерность которых включает время и длину, привести в соответствие по аналогии со скоростью** (например, расстояние следует измерять в километрах, а время в часах).

Иногда задачу можно решить без построения чертежа, но не стоит забывать, что наглядность – всегда отличный помощник в решении.

На втором этапе мы определяем, каким законам подчиняется процесс. В зависимости от выбора модели, описывающей физическое явление, составляется система математических основных уравнений. Таким образом, мы составляем *физико-математическую модель* (физическая постановка задачи (концепция) в сочетании с системой математических уравнений, описывающих процесс). Также мы определяем, каким методом будет решаться задача, и составляем план решения. Условно говоря, на этом этапе заканчивается физика и начинается математика.

На третьем этапе физическая задача практически полностью сводится к математической: осуществляется решение системы алгебраических уравнений.

Получив решение в общем виде (расчетную формулу), следует проанализировать его. Нужно подумать, всегда ли оно справедливо. Если возможно, стоит исследовать полученное решение в предельных случаях (например, как изменится решение, если числитель и/или знаменатель сложной дроби будут стремиться к нулю). Также хорошо бы проверить его правильность, сопоставив размерности величин справа и слева от знака равенства. После проверки и анализа итогового выражения производится численный расчет (в формулу подставляются численные значения). Числа следует подставлять только в итоговую формулу. Использование в промежуточных вычислениях конкретных численных значений физических величин часто ведет к серьезным ошибкам в конечном результате и не дает возможности делать обобщения, которые всегда более интересны, чем частные ответы.

В ходе вычислений необходимо следить, чтобы значения получаемых величин имели количество значащих цифр[19], соответствующее точности исходных данных.

Далее мы, исходя из здравого смысла и общих законов, производим оценку реальности полученного решения и, если нет противоречий, записываем ответ.

[19] Значащая цифра – это любая цифра, отличная от нуля, а также и ноль в том случае, если он стоит между другими значащими цифрами. В некоторых случаях значащий ноль может находиться и в конце числа для указания на заведомое отсутствие единиц в соответствующих разрядах.

Все законы физики имеют ограниченные области применимости. Поэтому применение этих законов должно сопровождаться обоснованием корректности их использования.

Все приводимые в решении формулы желательно пояснять краткими текстами, поясняющими справедливость их использования. Это поможет не ошибиться при составлении системы уравнений.

Отметим, что задача считается решенной в том случае, если решение основано на общих законах, проведен анализ полученной расчетной формулы и получены, если требуется, численные оценки искомых физических величин.

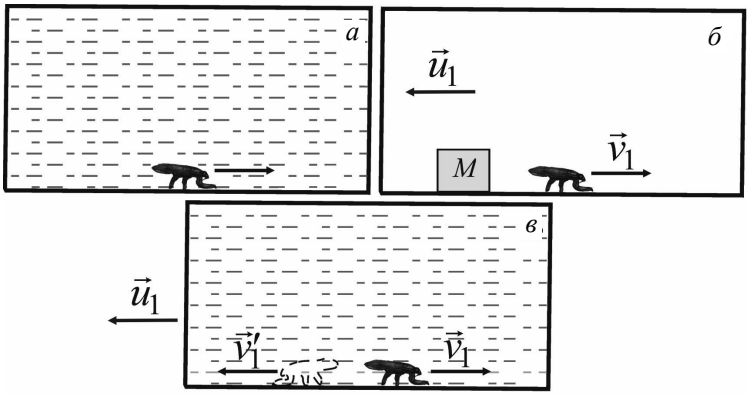


Рис. 19. Фантом из воды:

а – схематическое изображение движения клопа под водой; *б* – модель аквариума с клопом; *в* – модель движения фантома клопа

Пример 3 (*модели и методы решения*). **Всегда важно оценить адекватность модели, которую вы используете в задаче**. Например, рассмотрим следующую ситуацию [20, 21]: по дну аквариума малой массы с водой объемом V, стоящего на *гладкой поверхности* (с пренебрежимо малым коэффициентом трения), ползет со скоростью $\vec{v}_1$ относительно аквариума водный клоп массой m_1 и объемом V_1. Необходимо определить, с какой скоростью $\vec{v}_a$ станет двигаться аквариум по полу. Плотность воды ρ, масса аквариума m_2 (рис. 19, *а*). Задачу можно решить экспериментально. Используем модель, в которой воду в аквариуме заменим грузом эквивалентной массы M (рис. 19, *б*).

Значения искомой величины, полученные аналитически в рамках подобной модели, не будут соответствовать результатам натурного эксперимента. Данное противоречие можно объяснить исходя из особенностей движения тел в жидкости. Когда клоп **медленно** перемещается в **ньютоновской жидкости**, она обтекает его, при этом при определенных условиях происходит **ламинарное** обтекание. Жидкость заполняет пустое пространство, образующееся вследствие перемещения массы (рис. 19, *в*). При относительно малых скоростях это происходит практически мгновенно. Можно считать, что если клоп начал двигаться от стенки аквариума, то от противоположной стенки ему навстречу движется водный фантом. Поэтому перемещение водного клопа можно рассматривать как перемещение двух движущихся в противоположные стороны тел: клопа массой m_1 и условного фантома массой $m' = \rho V_к$ ($V_к = V_1$ – объем, равный объему, занимаемому клопом).

Можно решить эту задачу с использованием гидродинамических законов, а можно, внимательно изучив физику процесса, использовать более простой метод с фантомом.

Приведем решение этой задачи вторым способом.

Отметим, что если считать воду неподвижной, как в первоначальной модели (см. рис. 19, *б*), то можно получить следующее решение. Поскольку система *замкнута* (сила трения отсутствует, а *сила нормальной реакции* опоры уравновешивает силу тяжести), то можно использовать закон сохранения импульса. При движении клопа вправо со скоростью $\vec{v}_1$ относительно аквариума сосуд движется влево со скоростью $\vec{u}_1$ относительно земли (пола). Проекция скорости клопа относительно пола на ось *OX* (сонаправлена с $\vec{v}_1$) равна $v_{1x} - u_{1x}$. Тогда применение закона сохранения импульса дает

$$m_1(v_{1x} - u_{1x}) = Mu_{1x}. \qquad (П3.1)$$

Как вы можете догадаться, равенство (П3.1) является не совсем точным, так как мы не учли движение воды, вытесняемой клопом при его перемещении. Более внимательный анализ показывает, что кроме движения клопа вправо со скоростью $v_{1x} - u_{1x}$ относительно земли и перемещения воды объемом $V - V_1$ влево со скоростью u_{1x} происходит дополнительное перемещение влево воды (водного фантома клопа)

объемом V_1 со скоростью $v_{1x} + u_{1x}$ (так как аквариум движется в направлении движения фантома) относительно земли. С учетом сказанного выше перепишем закон сохранения импульса в виде

$$m_1(v_{1x} - u_{1x}) = \rho(V - V_1)u_{1x} + \rho V_1(v_{1x} + u_{1x}) . \qquad (П3.2)$$

Из выражения (П3.2) путем алгебраических преобразований получим

$$v_{ax} = u_{1x} = \frac{(\rho_1 - \rho)V_1 v_{1x}}{\rho V + \rho_1 V_1}, \qquad (П3.2)$$

где $\rho_1 = m_1 / V_1$ – плотность клопа.

Ответ: $v_{ax} = \dfrac{(\rho_1 - \rho)V_1 v_{1x}}{\rho V + \rho_1 V_1}$ (м/с).

Пример 4. Граната массой 3,0 кг, летящая со скоростью 5,0 м/с, разрывается на два осколка, масса одного из них 1,0 кг, скорость этого осколка направлена перпендикулярно скорости гранаты и равна 6,0 м/с. Чему равна скорость второго осколка?

Дано:

$m = 3,0$ кг
$m_1 = 1,0$ кг
$v = 5,0$ м/с
$v_1 = 6,0$ м/с
$\alpha_1 = \pi / 2$ рад

$\vec{v}_2 = ?$

Решение

Согласно закону сохранения импульса суммарный вектор импульса замкнутой инерциальной системы остается неизменным вне зависимости от процессов, происходящих внутри этой системы. В нашем случае, поскольку на систему не действуют внешние тела, можно записать $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Тогда $\vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{p}_1$.

Изобразим рисунок к задаче (рис. 20), при этом, чтобы получить вектор $\vec{p}_2$, необходимо сложить вектор $\vec{p}$ и $\vec{p}_1' = -\vec{p}_1$ по правилу треугольника или параллелограмма:

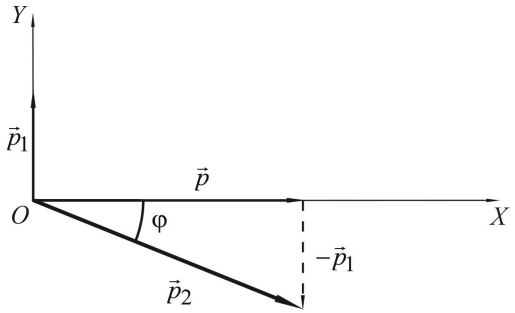


Рис. 20

Нам необходимо найти вектор $\vec{v}_2$, для этого нужно выразить его через известные параметры.

Вектор $\vec{v}_2$ связан с вектором импульса второго осколка $\vec{p}_2$ следующим образом: $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ (масса является коэффициентом пропорциональности между импульсом и скоростью), где в силу неизменности массы системы $m_2 = m - m_1$.

Тогда

$$\vec{v}_2 = \vec{p}_2 / m_2 \ . \qquad \text{(П4.1)}$$

Поэтому нам нужно найти вектор импульса второго осколка.

Найти вектор – значит найти его модуль и указать направление относительно выбранной системы отсчета. Модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов проекций вектора на соответствующие координатные оси.

Чтобы задать направление вектора **в двухмерном пространстве**, достаточно указать угол φ между этим вектором и какой-либо координатной осью (например, *OX*). Направление вектора $\vec{v}_2$ совпадает с $\vec{p}_2$, а модуль, согласно (П4.1), $|\vec{v}_2| = |\vec{p}_2| / m_2$.

Мы можем сначала найти проекции вектора импульса второго осколка на оси *OX* и *OY*, а затем найти его модуль. Но если внимательно посмотреть на рисунок к задаче, то можно заметить, что векторы $\vec{p}$, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ образуют прямоугольный треугольник, длины сторон которого численно равны $|\vec{p}|$, $|\vec{p}_1|$ и $|\vec{p}_2|$ соответственно. Из геометрии нам

известно, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, поэтому в нашем случае

$$p_2 = \sqrt{p^2 + (-p_1)^2} = \sqrt{p^2 + p_1^2} \ . \qquad (П4.2)$$

Угол φ, как легко увидеть из рис. 20, равен $\varphi = \text{arctg}(p_1 / p)$, $p = mv$, а $p_1 = m_1 v_1$.

В итоге имеем: $\varphi = \text{arctg}(6,0 / 15) \approx 22^\circ$, $p_2 = \sqrt{261} \approx 16\,\text{кг} \cdot \text{м/с}$ и $v_2 = p_2 / m_2 \approx 8,0$ (м/с).

Ответ: $\varphi = 22^\circ$ и $v_2 = 8,0$ м/с.

Эту задачу также можно решить графически, если аккуратно нарисовать векторы пропорционально их численным значениям. Тогда длину (модуль вектора) $\vec{p}_2$ можно измерить на рисунке линейкой, а угол φ – транспортиром.

Пример 5. Получите общее выражение для нахождения второй космической скорости (скорость освобождения) на поверхности небесного тела. Предполагается, что атмосфера отсутствует.

Первый вопрос, который мы должны задать себе: что такое вторая космическая скорость?

Вторая космическая скорость (параболическая скорость), или *скорость освобождения*, – наименьшая скорость, которую необходимо придать объекту, масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой небесного тела, для преодоления гравитационного притяжения этого небесного тела и ухода с замкнутой орбиты вокруг него.

Параболической вторая космическая скорость называется потому, что тела, имеющие при старте скорость, равную второй космической, движутся по параболе относительно небесного тела. Если скорость тела чуть больше, то его траектория становится гиперболой. Если чуть меньше, то она превращается в эллипс.

Если перефразировать определение второй космической скорости, то можно сказать, что если тело запущено вертикально вверх со второй космической, то оно никогда не начнет падать обратно.

Далее нужно ответить на вопрос: при каких условиях тело, запущенное вертикально вверх, не упадет обратно? Очевидно, что оно

должно улететь настолько далеко, чтобы сила взаимодействия между рассматриваемым телом и небесным объектом (например, планетой) в итоге равнялась нулю. Согласно Закону всемирного тяготения *сила гравитационного притяжения* между двумя материальными точками (сферически симметричное тело в данном контексте можно считать материальной точкой) $\left|\vec{F}\right| = GMm / r^2$, где r – кратчайшее расстояние между материальными точками (или центрами сферических тел). Ясно, что эта сила равна нулю на бесконечности. **Таким образом, вторая космическая скорость – это минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно улетело на бесконечность.**

Удобно решить обратную задачу – спросить, какую минимальную скорость получит тело на поверхности планеты, если будет падать на нее из бесконечности. Очевидно, что это именно та скорость, которую надо придать телу на поверхности планеты, чтобы вывести его за пределы ее гравитационного влияния.

Следующий вопрос, на который нам необходимо ответить: какой закон (законы) нужно использовать, чтобы описать физический процесс наиболее рациональным образом. Законы Ньютона использовать в данной задаче проблематично, лучше воспользоваться энергетическими принципами, поскольку рассматриваемая система замкнута и консервативна.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = 0,$$

где m – масса тела; M – масса планеты; r – кратчайшее расстояние между центрами сферических тел (радиус планеты плюс радиус тела, расположенного на поверхности планеты); G – гравитационная постоянная; v – вторая космическая скорость. Слева стоят кинетическая $E_к = mv^2 / 2$ и потенциальная $E_п = Mm / r$ энергии на поверхности планеты. Точка отсчета для потенциальной энергии взята на бесконечности, поэтому потенциальная энергия отрицательна. На бесконечности полная механическая энергия покоящегося тела равна нулю, поэтому справа в уравнении стоит ноль.

Решая это уравнение относительно v, получим

$$v = \sqrt{2G\frac{M}{r}}.$$

Ответ: $v = \sqrt{2G\frac{M}{r}}$ (м/с).

Успех в решении задач зависит от вашего опыта. Чем больше вы решите задач, тем лучше ваши навыки. Полезно решать близкие по содержанию задачи, в которых наблюдается эволюция условия в направлении постепенного усложнения задачи и/или поиска новых физических величин. Также следует искать разные способы решения поставленных задач.

При решении задач необходимо устанавливать общую закономерность рассматриваемых явлений путем анализа и синтеза исходных данных.

Чтобы связать явление с одним или несколькими физическими законами, нужно применить анализ: разбить сложное явление на ряд простых. Для объединения следствий, полученных из отдельных законов, в общий вывод используется синтез.

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ

В данном разделе кратко рассмотрены основные понятия и законы кинематики, даны методические рекомендации по решению задач, приведены примеры решения задач и представлены задачи для самостоятельного решения.

1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Кинематика – это раздел механики, изучающий механическое движение тел без учета обусловливающих его причин. Кинематика устанавливает математические соотношения между различными характеристиками движения, такими как перемещение, путь, скорость, ускорение, время.

Рассмотрим основные принципы кинематики на примере решения нескольких задач.

Задача 1. При какой минимальной начальной скорости можно перебросить камень массой m через дом с покатой крышей (рис. 21)? Ближайшая стена имеет высоту H, дальняя стена – высоту h, ширина дома равна l. Сопротивлением воздуха пренебречь.

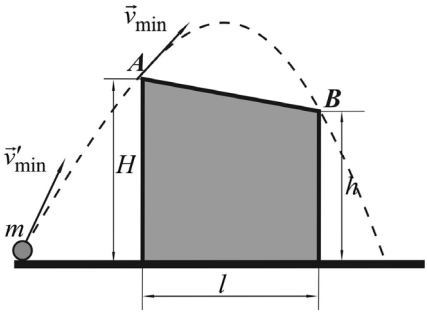


Рис. 21. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Для того чтобы решить эту задачу, необходимо разобраться, как можно описывать движение тела в пространстве.

Движение можно условно представить как последовательность положений, зафиксированных через бесконечно малые интервалы времени. Описание всех этих последовательных положений в форме математических зависимостей позволяет вычислить конкретное положение тела в любой момент времени.

Ранее во введении мы уже упоминали, что для описания положения тела в пространстве необходимо ввести *систему отсчета*. Представим, что мы выбрали систему отчета, в которой при равенстве нулю равнодействующей сил тело покоится или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью. Такая система называется инерциальной. Далее по умолчанию мы будем работать только с инерциальными системами отсчета.

Для определения положения тела в выбранной системе отсчета используется система координат. Обычно система координат выбирается так, что точкам тела отсчета отвечают неизменные во времени тройки чисел x_0, y_0, z_0. В таком случае говорят, что выбранная система координат **неподвижна относительно тела отсчета**. Можно использовать и подвижные системы координат.

Важно запомнить: **многие физические или геометрические характеристики зависят от выбора системы отсчета, но ни одна из них не зависит от выбора системы координат.**

Если тело можно заменить материальной точкой, то ее положение в трехмерной прямоугольной системе координат однозначно задается тремя координатами x, y, z. Минимальное число независимых переменных (обобщенных координат), с помощью которых можно однозначно задать (описать) положение тела в пространстве в заданный момент времени, называется *числом степеней свободы*. В нашем случае материальная точка имеет **три поступательные степени свободы**, т. е. ее движение можно описать, задав закон изменения координат вдоль каждой из координатных осей.

Чтобы наблюдать движение твердого тела относительно выбранного тела отсчета, все точки тела отсчета должны быть как-то помечены. Только в этом случае можно заметить, что рассматриваемое материальное тело перемещается из одной точки тела отсчета в другую. Если для каждой точки твердого тела задать декартовы координаты, то в силу бесконечного числа точек в твердом теле задача описания движения становится очень сложной. Чтобы решить эту проблему, нужно вспомнить, что если тело движется поступательно, то его движение

можно заменить движением материальной точки, расположенной в *центре масс* этого тела[20].

Положение центра масс определяется радиусом-вектором для дискретной механической системы:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i},$$

где m_i – масса i-й материальной точки; $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-й материальной точки системы. В случае непрерывного распределения массы

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV,$$

где $\rho(\vec{r})$ – функция распределения плотности тела; V – объем тела; M – масса тела. **Для центра масс характерно, что сумма произведений радиусов-векторов, проведенных из центра масс к точкам тела, на их массу равна нулю**.

Таким образом, движение тела описывается функцией, определяющей зависимость радиуса-вектора от времени.

Тело может вращаться вокруг оси или точки. Если все точки тела движутся по окружностям разного радиуса, центры которых лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости вращения каждой точки, и существует хотя бы одна прямая, проведенная через две точки этого тела, которая не остается параллельной себе при его движении, то такое движение называется *вращательным движением относительно неподвижной оси* (рис. 22). Заметим, что при

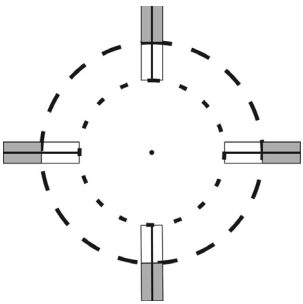


Рис. 22. Вращательное движение

[20] *Центр масс* характеризует распределение массы в теле. При движении механической системы ее центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка, имеющая массу, равную массе системы, и находящаяся под действием всех внешних сил, приложенных к системе.

вращательном движении модельных (идеализированных) объектов точки тела могут двигаться и по окружностям одинакового радиуса, например, при вращении полого цилиндра с бесконечно тонкими стенками вокруг своей оси (*оси цилиндра*).

Вращательное движение удобно описывать через углы поворота координатных осей декартовой системы координат, однозначно связанной с центром масс тела относительно некоторой неподвижной системы отсчета. Соответственно, в трехмерном пространстве таких угла три. **Поэтому у твердого тела в пространстве шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных.** Если тело движется только поступательно, то ориентация системы координат, связанной с его центром масс, не изменяется, поэтому достаточно трех координат для описания его движения.

В рассматриваемой нами **задаче 1** камень движется в поле центральных сил, поэтому центр тяжести и центр масс совпадают, а момент сил тяжести относительно центра масс равен нулю. Следовательно, тело движется только поступательно, и его можно заменить материальной точкой.

Отметим, что мы привели только два способа описания движения: *координатный* (движение описывается через зависимость координат тела от времени) и *векторный* (движение тела описывается зависимостью радиуса-вектора его центра масс от времени).

Если известны траектория и направление движения материальной точки, удобно определять ее положение *естественным способом*. Для этого используется скалярная величина *s*, называемая дуговой координатой. Это длина отрезка траектории от начала отсчета до материальной точки, взятая со знаком плюс, если отсчет ведется в положительном направлении относительно начала отсчета, и со знаком минус – если в отрицательном. При естественном способе движение описывается уравнением вида $s = s(t)$.

Для описания движения тела мало знать только его координаты, необходимо ввести и другие характеристики движения. Например, полезно знать не только куда, но и как быстро движется тело. **Для удобства** введем характеристику быстроты перемещения как отношение вектора перемещения (изменение радиуса-вектора) к промежутку времени, за которое оно произошло $\langle \vec{v} \rangle = \Delta\vec{r}/\Delta t$. Мы получили новую физическую величину, которую, как ранее упоминалось, называют *средней скоростью* движения.

Если мы хотим более точно узнать скорость движения тела, то необходимо провести измерения за меньший интервал времени. Тогда при $\Delta t \to 0$ мы получим *мгновенную скорость* движения тела, т. е. скорость в данный момент времени[21]:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.1)$$

Мгновенная скорость – это векторная величина, равная производной от радиуса-вектора по времени. Отметим, что вектор скорости сонаправлен не с вектором $\vec{r}$, а с вектором $d\vec{r}$ (рис. 23), определяющим изменение радиуса-вектора за бесконечно малый промежуток времени.

Как не сложно догадаться, учитывая, что $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, в декартовых координатах скорость выражается как

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \qquad (1.2)$$

где v_x, v_x, v_x – проекции вектора скорости на соответствующие оси. Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (1.3)$$

Вектор скорости в каждой точке, в которой находилось тело, направлен по касательной к *траектории его движения*.

Траекторией движения тела называют воображаемую линию, вдоль которой движется тело. Траектория – это кривая, соединяющая все точки, в которых находилось тело в рассматриваемый промежуток времени. Иначе говоря, *траектория* – это линия, описываемая в пространстве концом радиуса-вектора материальной точки. Длина траектории равна пройденному телом *пути*. Например, на рис. 23 *путь*, пройденный телом при перемещении из точки, радиус-вектор которой $\vec{r}_1$, в точку с ра-

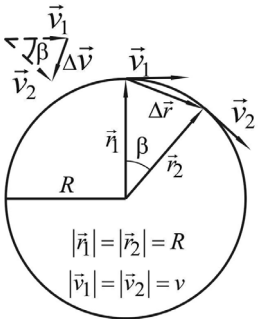


Рис. 23. Равномерное движение материальной точки по окружности

[21] На самом деле в реальности мы получим скорость за промежуток времени, в течение которого ее изменение пренебрежимо мало.

диусом-вектором $\vec{r}_2$, равен длине дуги окружности, а *перемещение* равно изменению радиус-вектора $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Модуль перемещения при двумерном движении равен $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Если уравнение движения представлено в виде

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \tag{1.4}$$

то траектория – это кривая, построенная в прямоугольной системе координат, каждая точка которой определяется значением трех координат: *x*, *y*, *z*. В системе (1.4) эти координаты связаны между собой в неявном виде, через время. Для того чтобы записать уравнение траектории, нужно представить зависимость этих координат между собой в явном виде. **Для этого из системы уравнений (1.4) нужно исключить время**. Например, пусть уравнение движения задано в виде

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 2t^2. \end{cases} \tag{1.5}$$

Тогда, выразив время из первого уравнения системы (1.5) и подставив во второе, получим

$$y = \frac{2x^2}{9}. \tag{1.6}$$

Это уравнение параболы с вершиной в начале координат.

Поскольку в **задаче 1** тело движется под действием только силы тяжести, то скорость тела меняется с течением времени как по модулю, так и по направлению.

Поэтому нам необходима количественная мера быстроты изменения скорости. Такая характеристика называется ускорением. *Ускорение* – это векторная величина, равная производной от скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} =$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}. \qquad (1.7)$$

Вернемся к **задаче 1**. Мы уже знаем, какие величины характеризуют движение тела и как они связаны между собой. Но поскольку задача не тривиальная, то ее следует упростить. Поэтому для начала решим похожую, но более простую задачу.

Задача 2. Из орудия, стоящего на высоте h_0 над уровнем горизонта, вылетает снаряд со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) время движения снаряда до падения на поверхность земли; 2) расстояние от места расположения пушки до точки падения снаряда, измеренное вдоль поверхности земли; 3) скорость снаряда в момент падения и угол падения; 4) максимальную высоту подъема снаряда над поверхностью земли; 5) уравнение траектории $y = f(x)$; 6) радиус кривизны траектории в высшей точке. Также следует построить график зависимости координаты y от времени.

Дано:

h_0

v_0

α

$t - ?$

$\Delta x - ?$

$v_2 - ?$

$\alpha_1 - ?$

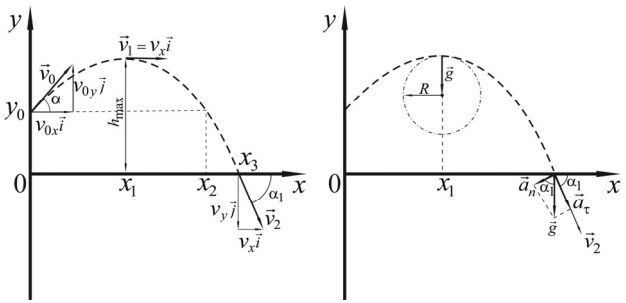
$h_{\max} - ?$

$y = f(x) - ?$

$y = y(t) - ?$

Решение

Изобразим условие задачи графически.



а *б*

Рис. 24

На рис. 24, *а* показана предполагаемая траектория движения тела в некоторой системе отсчета. **Система отсчета выбрана из соображений удобства записи уравнений движения.**

Удобнее поместить орудие в начало отсчета по оси *OX* и направить координатные оси прямоугольной системы координат горизонтально и вертикально в направлении движения.

Рассмотрим движение тела. Тело движется поступательно, а значит, его можно заменить материальной точкой. Тело вначале поднимается на максимальную высоту $h_{\max}$, а затем опускается до начальной высоты, продолжая падать до земли. Таким образом, конечная координата по оси *OY* равна нулю.

Вектор скорости, как уже было сказано ранее, можно представить в виде $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$. **Поэтому рассмотрим характер движения вдоль каждой из осей**. Движение вдоль оси *OX* является *равномерным* $(v_x = v_{0x} = \text{const})$, так как вдоль этой оси не действуют никакие силы. Движение вдоль оси *OY* является *равнопеременным* (движение с постоянным по модулю и направлению ускорением), так как вдоль этой оси действует только сила тяжести. Соответственно, полное ускорение будет постоянным и равным ускорению свободного падения вблизи поверхности Земли и направленным вдоль оси *OY*: $a_y = g_y = -g$.

Для начала запишем уравнение движения вдоль оси *OY*. Чтобы записать зависимость координаты $y(t)$ от времени, вспомним, что $v_y = dy/dt$, а $a_y = dv_y/dt$. Тогда имеем (см. прил. Б, табл. 9):

$$\begin{cases} \int\limits_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int\limits_{t_0}^{t} a_y dt, \\ \int\limits_{y_0}^{y} dy = \int\limits_{t_0}^{t} v_y dt, \\ a_y = g_y = -g, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y = v_{0y} - g\Delta t, \\ y = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (v_{0y} - g\Delta t)dt, \\ t_0 = 0, \\ v_{0y} = \text{const}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y = v_{0y} - gt, \\ y = y_0 + v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (1.8)$$

В результате мы получили общий вид уравнений движения вдоль оси *OY*. Если мы добавим к системе (1.8) уравнение движения вдоль оси *OX*, то полностью опишем процесс свободного падения снаряда, выпущенного с начальной скоростью. Решая полученную систему, мы найдем все интересующие нас величины, характеризующие движение.

Прежде чем записать уравнение движения вдоль оси *OX*, из соображений удобства найдем время движения снаряда до падения на поверхность земли.

Если в итоговом уравнении (1.8) координату y приравнять к нулю $y = 0$, то, учитывая, что по условию $y_0 = h_0$, получим

$$\begin{cases} h_0 + v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2} = 0, \\ v_{0y} = |\vec{v}_0| \sin\alpha = v_0 \sin\alpha, \end{cases} \Rightarrow h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0. \qquad (1.9)$$

В итоге у нас получилось квадратное уравнение относительно времени. Решая это уравнение и учитывая, что **время не может быть отрицательной величиной**, получим

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh_0}}{g}. \qquad (1.10)$$

Запишем систему уравнений по аналогии с (1.8) для описания движения вдоль оси *OX*:

$$\begin{cases} \int\limits_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int\limits_{t_0}^{t} a_x dt, \\ \int\limits_{x_0}^{x} dx = \int\limits_{t_0}^{t} v_x dt, \\ t_0 = 0, \\ x_0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} - a_x t, \\ x = \int\limits_0^t (v_{0x} - a_x t) dt, \\ a_x = 0, \\ v_{0x} = \text{const}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} = \text{const}, \\ x = v_{0x} t, \end{cases} \qquad (1.11)$$

где $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$. В итоге получим

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha, \\ x = v_0 t \cos\alpha. \end{cases} \qquad (1.12)$$

В силу того что вдоль оси *OX* тело движется равномерно и прямолинейно, расстояние от места расположения пушки до точки падения снаряда, измеренное вдоль поверхности Земли, равно приращению координаты Δx, что численно равно пройденному телом пути вдоль этой оси:

$$S = \Delta x = x_3 - 0 = v_0 t \cos\alpha . \tag{1.13}$$

С учетом (1.10) получим

$$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8gh_0 v_0^2 \cos^2\alpha}}{2g} . \tag{1.14}$$

Модуль вектора скорости во время падения найдем из уравнения $v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Тогда

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} . \tag{1.15}$$

Из рис. 24 видно, что

$$\cos\alpha_1 = \frac{|v_x|}{|v_2|} = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}} . \tag{1.16}$$

Максимальная высота полета ($h_{\max}$) достигается в точке с наибольшей координатой по оси *OY*. В этой точке проекция вектора скорости на ось *OY* равна нулю (поскольку $v_y = 0$). Тогда получим

$$v_0 \sin\alpha - gt' = 0 \Rightarrow t' = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} . \tag{1.17}$$

Далее подставим (1.17) в (1.8) и получим

$$h_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} . \tag{1.18}$$

Уравнение траектории в явном виде мы получим, исключив время из уравнений движения (1.8) и (1.12) относительно координат:

$$t' = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow y = h_0 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (1.19)$$

Как видим, траектория снаряда представляет собой параболу (см. рис. 24), ветви которой направлены вниз, а координаты вершины можно найти, приравняв первую производную от y по x в (1.19) к нулю. Тогда

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g},$$

$$y_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Радиус кривизны совпадает с радиусом R соприкасающейся окружности в данной точке кривой (рис. 24, *б*). Центр этой окружности называется центром кривизны. Если кривизна кривой равна нулю, то соприкасающаяся окружность вырождается в прямую. Как мы упоминали ранее, *траектория* – это линия, описываемая в пространстве концом радиуса-вектора материальной точки (см. рис. 23). Значит, радиус кривизны можно определить через изменение радиуса-вектора во времени, которое, в свою очередь, задается через изменение вектора скорости во времени, а точнее определяется значением мгновенной скорости в данной точке траектории.

Прежде чем найти радиус кривизны траектории, вспомним, что скорость – величина векторная, а значит, определяется не только численным значением, но и направлением. Полное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю и направлению. **Более удобно представить ускорение в виде векторной суммы двух компонент**:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \qquad (1.20)$$

где $\vec{a}_n$ – компонента, показывающая, как быстро изменяется скорость по направлению (быстрота поворота вектора скорости), назовем ее *нормальным* или *центростремительным ускорением*; $\vec{a}_\tau$ – компонен-

та, показывающая, как быстро изменяется скорость по абсолютной величине (по модулю), назовем ее *тангенциальным ускорением*.

Чтобы определить компоненты $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, вспомним, что $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, где $\vec{v}$ можно представить в виде произведения модуля скорости на единичный вектор, сонаправленный с вектором скорости в каждой точке траектории движения тела $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau} = v\vec{\tau}$. Тогда ускорение тела можно представить в виде

$$\vec{a} = \frac{d\left(v\vec{\tau}\right)}{dt}. \tag{1.21}$$

Уравнение (1.21) – это производная сложной функции (см. прил. Б, табл. 8)

$$\vec{a} = \frac{d\left(v\vec{\tau}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}v + \frac{dv}{dt}\vec{\tau}. \tag{1.22}$$

Вторая компонента уравнения показывает быстроту изменения скорости по модулю, следовательно,

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}. \tag{1.23}$$

Первая компонента уравнения (1.22) характеризует быстроту изменения скорости по направлению. Физический смысл отношения $d\vec{\tau}/dt$ можно получить из анализа рис. 23.

Считая угол β малым, из геометрических соображений можем записать $\beta = \Delta r / R = \Delta v / v = \Delta\tau / \tau$. Из этого выражения получим $\Delta\tau = \tau\Delta r / R = \Delta r / R$ (здесь учтено, что $|\vec{\tau}| = 1$). Разделим последнее выражение на Δt и перейдем к его пределу:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{R\Delta t} = \frac{1}{R}\frac{dr}{dt} = \frac{v}{R}. \tag{1.24}$$

Тогда

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{\tau}}{dt}v = \frac{v^2}{R}\vec{n}, \tag{1.25}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный касательной к траектории и направленный по радиусу к центру соприкасающейся окружности в данной точке траектории; R – радиус кривизны траектории.

Вернемся к **задаче 2**. Полное ускорение тела в рассматриваемой задаче равно $\vec{g}$. В общем случае (например, в точке с координатой (x_3, 0) $\vec{g} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$). В верхней точке траектории (см. рис. 24, *б*) $\vec{g} = \vec{a}_n$, так как мгновенная скорость тела в этой точке является постоянной по модулю величиной $\vec{v}_1 = v_x\vec{i}$ (сила тяжести перпендикулярна вектору скорости).

Тогда радиус кривизны можно найти из соотношения

$$\frac{v_x^2}{R} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{R} = g . \qquad (1.26)$$

Из выражения (1.26) получим, что

$$R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} .$$

Последнее, что необходимо сделать в данной задаче, это построить график $y = y(t)$. Зависимость $y = y(t)$ задана уравнением (1.8) и представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. Для наглядности построим вначале зависимость скорости от времени $v_y(t) = v_{0y} - gt$.

Как вам известно, уравнение прямой имеет вид $y = kx + C$, где k – коэффициент наклона прямой, а C – постоянная величина. Следовательно, график $v_y(t)$ представляет собой прямую с отрицательным коэффициентом наклона. Проекция скорости на ось *OY* меняет свой знак при переходе через точку *A*. При этом проекция полного ускорения на ось *OY* свой знак сохраняет и является постоянной величиной. Поэтому тело вначале движется равнозамедленно ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}$), а затем равноускоренно ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{v}$).

Чтобы найти зависимость $y(t)$, необходимо найти интеграл по времени от функции $v_y(t)$. Поскольку $v_y(t)$ – линейная функция (рис. 25), то первообразная от нее представляет собой квадратичную зависимость (параболу). Это можно понять исходя из геометрического представления интеграла.

Скорость характеризует быстроту изменения координаты, соответственно, интеграл от скорости характеризует изменение координаты по величине, т. е. численно равен площади под кривой $v_y(t)$. Таким образом, зависимость $y(t)$ показывает, как изменяется площадь S под кривой $v_y(t)$. Очевидно, что площадь под кривой $v_y(t)$ квадратично зависит от времени (рис. 25).

На рис. 25 представлен график зависимости пути, пройденного телом вдоль оси OY от времени. В начальный момент времени путь равен нулю. Путь величина положительная либо равна нулю. Путь s не может убывать. **Следует обратить внимание на то, что, поскольку производная пути по времени непрерывная функция, кривая *s*(*t*) должна быть гладкой.**

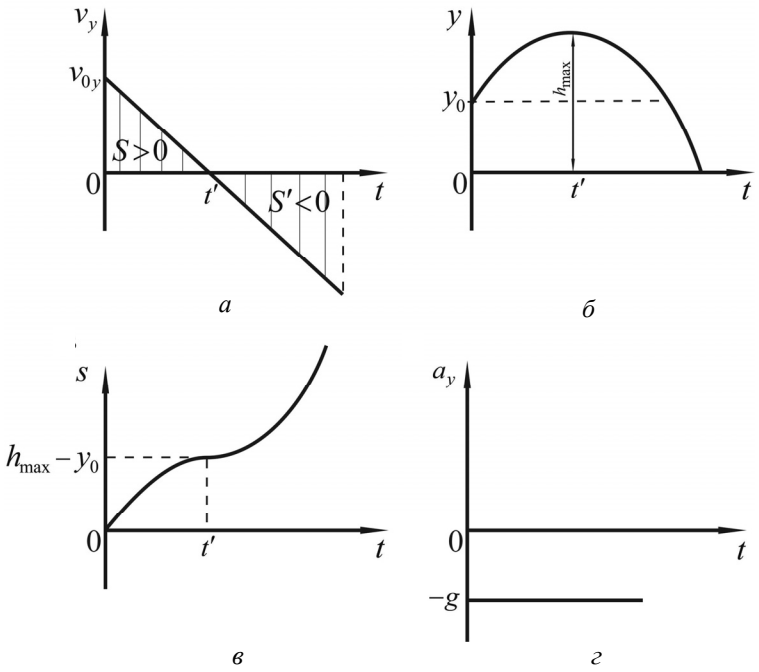


Рис. 25. Графики зависимости от времени:

а – проекции скорости тела; *б* – координаты тела; *в* – пути; *г* – проекции ускорения

Ответ: $\alpha_1 = \arccos\left(\dfrac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2+2gh_0}}\right)$; $R = \dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$;

$y = h_0 + x\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$; $v_2 = \sqrt{v_0^2+2gh_0}$; $h_{\max} = h_0 + \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$;

$t = \dfrac{v_0\sin\alpha + \sqrt{(v_0\sin\alpha)^2+2gh_0}}{g}$;

$S = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4\sin^2 2\alpha + 8gh_0v_0^2\cos^2\alpha}}{2g}$.

Теперь немного усложним **задачу 2**.

Задача 3. Из точки A, находящейся на вершине крутого обрыва на высоте H над горизонтом, бросают небольшое тело в точку B на горизонтальной поверхности, находящуюся от обрыва на расстоянии l (рис. 26). Чему равна минимальная скорость броска? Под каким углом α к горизонту при этом должен быть совершен бросок?

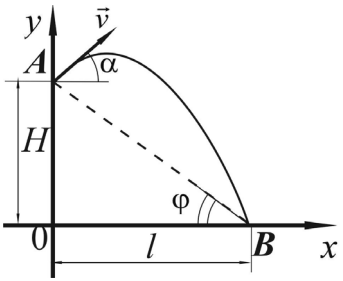


Рис. 26. Тело, брошенное под углом к горизонту с высоты H

Решение. Пусть бросок совершается со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к горизонту (рис. 26). Для того чтобы тело попало в точку B, **необходимо выполнение двух условий**:

1) горизонтальная составляющая перемещения $l = vt\cos\alpha$;

2) вертикальная составляющая перемещения $H = -vt\sin\alpha + gt^2/2$.

Исключив в этих уравнениях время, получим квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\alpha$:

$$\frac{gl^2}{2v^2}\mathrm{tg}^2\alpha - l\mathrm{tg}\alpha + \frac{gl^2}{2v^2} - H = 0\,. \qquad (1.27)$$

При данных l и H возможно три варианта решения: 1) уравнение не имеет действительных корней (дискриминант меньше нуля), т. е. v настолько мала, что ни при каком угле бросания тело не долетит до точки B ($v < v_{\min}$); 2) корни уравнения совпадают (дискриминант равен нулю), т. е. при некотором минимальном значении скорости бросания $v = v_{\min}$ существует только один угол бросания, при котором тело долетит до точки B; 3) уравнение имеет два корня (дискриминант больше нуля), т. е. при $v > v_{\min}$ тело может попасть в точку B по двум траекториям.

По условию данной задачи нас интересует второй случай. Тогда, приравняв дискриминант уравнения (1.27) к нулю, получим

$$v_{\min}^2 = g\left(\sqrt{H^2 + l^2} - H\right). \tag{1.28}$$

Угол бросания можно найти из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{\min}^2}{gl} = \sqrt{1 + \left(\frac{H}{l}\right)^2} - \frac{H}{l}. \tag{1.29}$$

Ответ: $v_{\min}^2 = g\left(\sqrt{H^2 + l^2} - H\right)$, $\alpha = \operatorname{arc}tg\left(\sqrt{1 + \left(\frac{H}{l}\right)^2} - \frac{H}{l}\right)$.

Вернемся к **задаче 1**. Требование минимальности скорости бросания камня с поверхности земли означает, что оптимальная траектория движения камня пройдет через точки крыши A и B (см. рис. 21). Причем в точке A скорость камня $v_{\min}$ будет минимально возможной.

Учитывая решение предыдущей задачи, нетрудно догадаться, что минимальная начальная скорость, с которой можно перебросить камень массой m через дом с покатой крышей (см. рис. 21), равна

$$v_{\min}^2 = g\left[\sqrt{(H-h)^2 + l^2} - (H-h)\right]. \tag{1.30}$$

Минимально возможную скорость бросания камня с земли $v'_{\min}$ можно найти из закона сохранения энергии:

$$v'^2_{\min} = v_{\min}^2 + 2gH, \tag{1.31}$$

откуда

$$v'_{\min} = \sqrt{g\left(\sqrt{(H-h)^2 + l^2} + H + h\right)}.$$

Ответ: $v'_{\min} = \sqrt{g\left(\sqrt{(H-h)^2 + l^2} + H + h\right)}$.

Рассмотрим другую задачу.

Задача 4. В момент времени $t_0 = 0$ твердое тело в виде тонкого сплошного диска радиусом $R = 1{,}0$ м начинает вращаться вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его геометрический центр. Угол поворота изменяется с течением времени по закону $\varphi = ct + bt^2$ (рад), где $c = 0{,}20$ рад/с, $b = 0{,}10$ рад/с^2. Найти величину угловой скорости, угловое ускорение в момент времени t_1, когда линейная скорость точки тела изменяет свое направление на противоположное, а также линейную скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии R от центра диска, в момент времени t_1.

Дано:	**Решение**
$R = 1{,}0$ м $\varphi = ct + bt^2$ (рад) $c = 0{,}2$ рад/с $b = 0{,}1$ рад/с^2 $t_0 = 0$	Изобразим условие задачи графически.
$\omega - ?$ $\varepsilon - ?$ $v - ?$ $a - ?$	

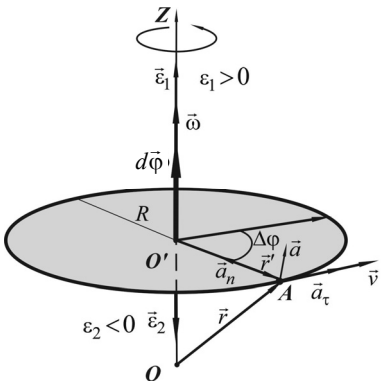


Рис. 27

В нашем случае диск совершает вращательное движение. Очевидно, что при вращательном движении точки тела движутся по окружностям, радиусы которых зависят от расстояния до оси вращения. Поэтому точки тела, находящиеся ближе к оси вращения, за одни и те же промежутки времени проходят меньший путь по сравнению с более дальними точками тела. Следовательно, линейная скорость $\vec{v}$ точки, принадлежащей телу, зависит от расстояния до оси вращения, которое определяется радиусом-вектором $\vec{r}'$ (см. рис. 27).

По этой причине для описания движения твердого тела при вращении требуется записать кинематические уравнения для каждой точки. Это существенно усложняет задачу. Для того чтобы упростить описание движение тела, необходимо ввести такие физические величины, которые были бы одинаковы для всех точек твердого тела.

Кинематическими характеристиками вращательного движения являются: *угловое перемещение*, *угловая скорость* и *угловое ускорение*, вводимые аналогично соответствующим характеристикам поступательного движения.

Поскольку расстояние между различными точками твердого тела не изменяется, все точки за время t поворачиваются на один и тот же угол $\Delta\varphi$. Поэтому положение твердого тела при вращении вокруг фиксированной оси удобно определять углом поворота (угловым перемещением) $\Delta\varphi$.

Тело может совершить поворот либо по часовой, либо против часовой стрелки. Это значит, что угол поворота должен характеризоваться не только величиной, но и направлением. Существует точка зрения, согласно которой вектор поворота, будучи направленным отрезком, не является настоящим вектором. На самом деле это не так, и мы можем ввести вектор поворота $\Delta\vec{\varphi}$ (подробнее см. [13]).

Бесконечно малому углу поворота соответствует вектор $d\vec{\varphi}$. **Направление вращения и направление вектора $d\vec{\varphi}$ принято связывать правилом правого винта** (см. рис. 27).

Правило правого винта формулируется так: если правый винт вращать в направлении вращения тела, то направление поступательного движения винта покажет направление вектора $d\vec{\varphi}$.

Векторы, направление которых вводится подобным образом, не являются истинными векторами. Это псевдовекторы (аксиальные векторы), которые мы уже упоминали во введении.

Как и в поступательном, во вращательном движении используется характеристика быстроты изменения положения – *угловая скорость* $\vec{\omega}$. По определению *мгновенная угловая скорость* равна

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (1.32)$$

Из определения следует, что направление вектора *мгновенной угловой скорости* совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$ (см. рис. 27).

Стоит обратить внимание на то, что, поскольку все точки вращающегося твердого тела за время *t* поворачиваются на один и тот же угол, **угловая скорость всех точек твердого тела одинакова**.

Во вращательном движении используется и характеристика быстроты изменения скорости – *угловое ускорение* $\vec{\varepsilon}$. По определению угловое ускорение равно

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (1.33)$$

Направление вектора углового ускорения совпадает с направлением вектора $d\vec{\omega}$, т. е. вектора приращения угловой скорости. Угловое ускорение совпадает по направлению не с угловой скоростью, а с ее приращением (см. рис. 27).

Ниже приведена связь между линейными и угловыми характеристиками вращательного движения тела вокруг закрепленной оси или движения материальной точки по окружности радиуса *R*.

Длина дуги окружности (путь) $S = \varphi R$.

Линейная скорость $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, $v = \omega R$.

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$, $a_\tau = \varepsilon R$.

Нормальное ускорение $\vec{a}_n = -\omega^2 R\frac{\vec{r}'}{r} = -\omega^2 R\vec{n}$, $a_n = \omega^2 R$.

Полное ускорение $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Вернемся к нашей задаче. Закон движения материальной точки задан в виде зависимости $\varphi(t)$. Используя (1.32) и (1.33), получим

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = c + 2bt\,, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2b\,. \tag{1.34}$$

Линейная скорость равна $v = \omega R$, а полное ускорение $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. При движении точки по окружности ее линейная скорость меняет свое направление непрерывно, и при повороте на π рад направление вектора $\vec{v}$ меняется на противоположное. Тогда

$$\varphi = ct + bt^2 = \pi \Rightarrow t^2 + \frac{c}{b}t - \frac{\pi}{b} = 0\,. \tag{1.35}$$

Решая полученное уравнение, найдем время t:

$$t = 6,7\,\text{с}\,.$$

Далее подставим полученное время в соответствующие уравнения.

Ответ: $\omega \approx 1,5\,\text{рад/с}$, $\varepsilon = 0,20\,\text{рад/с}^2$, $v \approx 1,5\,\text{м/с}$, $a \approx 0,24\,\text{м/с}^2$.

Задача 5. Определить форму траектории капель дождя на боковом стекле трамвая, движущегося горизонтально со скоростью v_1, во время его торможения с ускорением $\vec{a}$. Капли дождя падают на землю вертикально вниз, а их скорость относительно земли постоянна и равна v_2.

Для решения этой задачи нам потребуется ввести некоторый принцип, известный как *принцип относительности Галилея*.

В классической механике для описания движения тела необходимо ввести систему отсчета. Мы можем ввести любое количество тел отсчета, а значит, и систем отсчета, и они все будут равноправными. **Возникает вопрос: зависят ли законы движения (в общем случае – законы физики) от выбора системы отсчета?** Очевидно, что уравнения движения зависят от движения самого тела отсчета. С этой точки зрения возникает некоторая неопределенность в выборе систем отсчета.

Дальнейшее продвижение возможно только при принятии какого-либо принципа, выделяющего определенное семейство сходных по какому-либо свойству систем отсчета. Роль этого **принципа** играет *принцип инерции Галилея* [22]: всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.

Принцип инерции Галилея – это идея, не поддающаяся экспериментальной проверке, но являющаяся фундаментом классической физики.

Один из важнейших вопросов механики – вопрос **равномерности хода времени**. В классической механике реальное время не обсуждается, а вводится в рассмотрение *математическое время* (или просто *время*). Предполагается, что время является непрерывно меняющейся величиной, возможные значения которой образуют **одномерное** неограниченное множество. Время ориентировано – течет от прошлого к будущему, не зависит ни от каких-либо внешних обстоятельств, ни от движения, ни от выбора *инерциального* тела отсчета.

Для измерения времени применяются часы. На часы накладывается следующее ограничение: мы должны быть уверены в том, что **длительности всех минут, измеренных часами, одинаковы**. Единственным гарантом здесь выступает принцип инерции Галилея, утверждающий, что движение изолированной частицы относительно инерциального тела отсчета **называется** равномерным.

Согласно принципу инерции Галилея [22] часы считаются отпарированными в соответствии с принципом Галилея, если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния относительно любого инерциального тела отсчета.

Можно сказать, в классической механике время вводится жестко, с точностью до линейного преобразования [22]:

$$t \to kt + t_0 , \tag{1.36}$$

где t_0 определяет выбор начала отсчета времени, а масштабный множитель k – выбор единицы измерения времени.

Остается открытым вопрос о равноправности всех инерциальных тел отсчета. Согласно Галилею, *инерциальное тело отсчета*, связанное с некоторой системой координат, снабженное часами, отпарированными в соответствии с *принципом инерции*, называется *инерциальной системой отсчета*.

Инерциальных систем отсчета бесконечно много, и все они равноправны. Это утверждение носит название *принципа относительности Галилея***.**

Согласно *принципу относительности Галилея* все инерциальные системы отсчета равноправны, т. е. не существует физических экспериментов, позволяющих выделить какую-либо одну из них.

На основе принципа относительности Галилея записывается система уравнений преобразования координат и скорости при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой (*преобразования Галилея*):

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t, \\ t = t', \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \\ \vec{a} = \vec{a}', \end{cases} \tag{1.37}$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ – радиусы-векторы точки в неподвижной ИСО и **равномерно** движущейся **без вращения** со скоростью $\vec{u}$ ИСО соответственно; $\vec{v}$ (*абсолютная скорость*) – скорость точки относительно неподвижной ИСО, которая равна векторной сумме скорости точки $\vec{v}'$ (*относительная скорость*) относительно движущейся ИСО и скорости $\vec{u}$ (*переносная скорость*) движения этой системы отсчета относительно неподвижной ИСО; $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ – ускорения точки в движущейся и неподвижной ИСО соответственно; t и t' – время в движущейся и неподвижной ИСО.

Вернемся к нашей задаче.

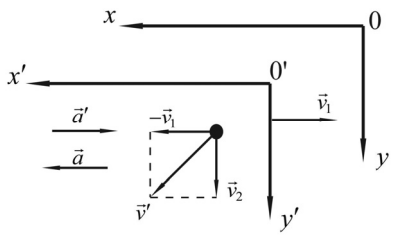


Рис. 28. Относительное движение

Изобразим условие задачи 5 графически (рис. 28). На рис. 28 показаны две системы координат: неподвижная *xy*, связанная с Землей, и движущаяся *x′y′*, связанная со стеклом трамвая.

Ось *x* направим горизонтально вдоль ускорения трамвая, а ось *y* – вертикально вниз. Оси *x′* и *y′* сонаправлены с осями *x* и *y*. Время в обеих системах отсчитываем от мо-

мента начала торможения трамвая. Будем считать, что капля дождя является материальной точкой, положение которой в момент начала торможения трамвая совпадает с началом координат системы $x'y'$.

Используя *преобразования Галилея* (1.35), запишем скорость $\vec{v}'$ и ускорение $\vec{a}'$ капли дождя относительно стекла трамвая (штриховая система координат):

$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \\ \vec{a} = -\vec{a}', \\ t = t'. \end{cases} \tag{1.38}$$

Здесь $\vec{a}$ – это ускорение движущейся системы отсчета (связанной со стеклом трамвая) относительно Земли. В (1.38) учтено, что системы движутся относительно друг друга ускоренно, но поступательно, поэтому ускорение находится по формуле

$$\vec{a}_1 = \vec{a}'' + \vec{a}_0, \tag{1.39}$$

где $\vec{a}_0$ – ускорение движущейся ИСО относительно неподвижной ИСО; $\vec{a}''$ – ускорение материальной точки относительно движущейся ИСО; $\vec{a}_1$ – ускорение точки относительно неподвижной ИСО. В нашем случае $\vec{a}_1 = 0$.

В соответствии с выбранной ИСО запишем начальные условия:

$$x'(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \tag{1.40}$$

$$v'_x(0) = v_1, \quad v'_y(0) = v_2. \tag{1.41}$$

На основе (1.38), (1.40) и (1.41) запишем систему кинематических уравнений в координатной форме, описывающих движение материальной точки:

$$\begin{cases} x'(t) = v_1 t - \dfrac{at^2}{2}, \\ y'(t) = v_2 t. \end{cases} \tag{1.42}$$

Уравнение траектории найдем, исключив время из системы (1.42):

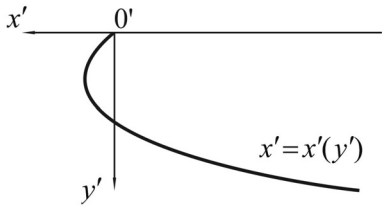


Рис. 29. Уравнение траектории движения капли относительно трамвая

$$x'(y') = v_1 \frac{y'}{v_2} - a\frac{y'^2}{2v_2^2}.$$

Как видим, траектория в системе координат, связанной со стеклом трамвая, является параболой (рис. 29) с вершиной в точке с координатами:

$$x' = \frac{v_1^2}{2a},\ y' = \frac{v_1 v_2}{a}.$$

Ответ: $x'(y') = v_1 \dfrac{y'}{v_2} - a\dfrac{y'^2}{2v_2^2}$, $x' = \dfrac{v_1^2}{2a}$, $y' = \dfrac{v_1 v_2}{a}$.

Рассмотрим последний пример решения задач по кинематике.

Задача 6. Концы твердого стержня *AB* могут свободно скользить по сторонам прямого угла *AOB*, **не отрываясь от стенок**. Найти уравнение траектории точки *M* стержня, которая делит его на части длиной *a* и *b*.

Выберем и изобразим декартову систему координат, оси которой совпадают со сторонами угла *AOB* (рис. 30).

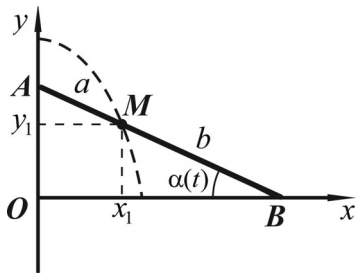


Рис. 30. Движение скользящего стержня

В соответствии с условием задачи будем считать стержень абсолютно твердым. Координаты точек тела меняются по-разному, поэтому, для того чтобы описать его движение, следует найти параметр системы (некоторую *обобщенную координату*), общий для всех точек. Таким параметром является угол $\alpha(t)$, который зависит от времени. Следовательно, положение стержня в любой момент времени *t* однозначно задается углом $\alpha(t)$ между осью *x* и стержнем *AB*.

Запишем закон движения точки M стержня в координатной форме:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos\alpha, \\ y(t) = b\sin\alpha, \\ \alpha = \alpha(t). \end{cases} \tag{1.43}$$

Искомое уравнение траектории точки P можно получить, исключив время из закона движения (1.43):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.44}$$

Уравнение (1.44) является уравнением эллипса с полуосями, совпадающими по направлению с осями выбранной системы координат и равными a и b.

Попробуйте найти скорости точек A и B в тот момент, когда стержень составляет с горизонтом угол α, если изначально этот стержень стоял вертикально.

Поскольку расстояние между точками остается постоянным, то в каждый момент скорость, с которой точка A удаляется от точки B, равна скорости, с которой точка B приближается к точке A. Иначе говоря, проекции скоростей грузов на ось стержня в любой момент времени равны

$$v_B \cos\alpha = v_A \sin\alpha .$$

Мы записали уравнение кинематической связи.

Для описания систем, состоящих из нескольких связанных тел (точек), используют *уравнения кинематической связи* – уравнения, связывающие кинематические характеристики различных тел системы.

Существует два способа нахождения уравнений кинематической связи.

1. Принцип независимых перемещений, согласно которому перемещение какого-либо тела в системе связанных тел можно представить в виде векторной суммы независимых перемещений, каждое из которых обусловлено перемещением соответствующего другого тела системы при покоящихся остальных телах.

2. Принцип постоянства кинематических характеристик: в этом случае необходимо записать величины постоянных кинематических характеристик элементов связей (нитей, блоков, поверхностей и т. д.) через координаты тел системы, используя свойства этих элементов

(нерастяжимость, неподвижность, недеформированность), и продифференцировать эти величины по времени.

Дальнейшее решение продолжите самостоятельно.

1.2. ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ

Основной задачей кинематики является определение кинематических характеристик тел, движущихся относительно данной системы отсчета.

Приведем краткую **классификацию задач по кинематике** [23]:

1) кинематика материальной точки (в том числе движение по окружности);

2) относительность движения (принцип суперпозиции движений);

3) кинематика простейших механических систем (в том числе вращательное движение);

4) уравнения кинематической связи.

Задачи в кинематике довольно разнообразны. Ниже приведена общая схема решения задач по кинематике [23].

I. **Для начала необходимо определиться с моделями материальных объектов и явлений.**

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.

2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).

3. Обозначить на схематическом чертеже все кинематические характеристики движения (перемещение, скорость, ускорение и время).

4. Определить характер движения (поступательное или вращательное).

5. Изобразить и обозначить кинематические характеристики тел или материальных точек.

6. Выбрать модели тел (материальных точек) и их движения (если это не сделано в условии задачи).

II. **Записать полную систему уравнений для искомых величин.**

1. Записать кинематические законы движения для каждого из движущихся тел (материальных точек) в векторной форме.

2. При решении задач на движение материальной точки по окружности необходимо дополнительно учесть связь между угловыми и линейными характеристиками.

3. Записать в проекциях на оси координат:

а) законы движения;

б) законы изменения скорости;

в) законы изменения ускорения.

4. Переписать полученные уравнения с учетом начальных условий.

5. Записать уравнения кинематических связей (для твердых тел или систем материальных точек).

6. Проверить, является ли полученная система уравнений полной.

7. При необходимости, используя кинематические связи, геометрические соотношения и специальные условия, данные в задаче, составить недостающие уравнения.

8. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи (например, заданные соотношения между характеристиками системы).

III. **Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.**

1. Решить систему полученных уравнений относительно неизвестных.

2. Записать ответ в общем виде.

3. Провести анализ решения (проверить размерность и убрать «нефизичные» корни, рассмотреть характерные случаи, установить область применимости).

4. Получить численный результат (если это требуется в условии задачи). При этом все величины должны быть приведены в одну систему единиц измерения.

Часто у студентов вызывают затруднения задачи на относительность движения (подробнее см. работу [1]). Основой для их решения является закон сложения скоростей (см. выражение (1.35)). Необходимо сделать выбор условно неподвижной системы отсчета и подвижной системы. В качестве неподвижной системы обычно выбирают Землю или тела, покоящиеся относительно Земли. В случае, если в задаче заданы движения двух одинаковых тел, то в качестве подвижной системы отсчета можно выбрать любое тело, так как в этом случае относительная скорость одна и та же.

Далее следует выбрать систему координат и **от векторной формы закона сложения скоростей перейти к скалярной форме** (записать закон сложения проекций скоростей на выбранные оси координат).

Иногда в условии задачи заданы углы между векторами скоростей. В этом случае соответствующие векторы скоростей можно определить

из треугольников (используя тригонометрические преобразования), основаниями которых являются рассматриваемые векторы.

Также имеется группа графических задач. Например, по графику зависимости координаты от времени следует построить зависимость проекций скорости и ускорения от времени или по графикам зависимости проекций скорости и ускорения необходимо построить график зависимости координаты от времени (обратная задача). Для решения этих задач следует знать и уметь выводить законы равномерного и равнопеременного движения тел, уметь представлять их графически.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Ниже приведены вопросы для самоконтроля, отвечая на которые можно проверить, достаточно ли хорошо вы усвоили теоретический материал по разделу «Кинематика».

1. Что изучает кинематика?
2. Что такое механическое движение?
3. Что означает относительность движения?
4. Что такое тело отсчета? Исходя из каких соображений выбирают тело отсчета?
5. Что такое система отсчета?
6. Что такое система координат? Для чего она необходима?
7. Что означает однородность пространства и времени?
8. Что означает изотропность пространства?
9. Что такое материальная точка? Имеет ли материальная точка массу?
10. Что такое абсолютно твердое тело?
11. Какие кинематические характеристики движения материальной точки вам известны?
12. Что такое траектория материальной точки?
13. Какие способы описания движения материальной точки используются в кинематике?
14. Что такое радиус-вектор? Где он начинается и где заканчивается?
15. Что такое вектор перемещения? Как он связан с радиусом-вектором?
16. Что такое путь? При каких условиях путь может использоваться для описания изменения положения материальной точки в пространстве?

17. Что является мерой быстроты изменения положения материальной точки?

18. Дайте определение средней скорости.

19. Докажите, что в случае **равнопеременного движения** средняя скорость может быть рассчитана по формуле $\langle v_x \rangle = (v_x + v_{0x})/2$.

20. Дайте определение вектора мгновенной скорости материальной точки. Как направлен этот вектор?

21. Что является мерой быстроты изменения скорости?

22. Дайте определение вектора мгновенного ускорения. Как направлен этот вектор?

23. Что такое тангенциальное ускорение? Мерой чего является тангенциальное ускорение?

24. Что такое нормальное ускорение? Мерой чего является нормальное ускорение?

25. Как направлены векторы тангенциального и нормального ускорения?

26. Как связаны вектор полного ускорения и векторы тангенциального и нормального ускорения? Как связаны между собой модули векторов полного, нормального и тангенциального ускорений?

27. Сформулируйте определение поступательного и вращательного движения.

28. Чем обусловлена необходимость введения угловых кинематических характеристик для описания вращательного движения?

29. Что является мерой изменения положения тела при его вращении вокруг неподвижной оси?

30. Что является мерой быстроты изменения положения тела при его вращении вокруг неподвижной оси?

31. Дайте определение средней угловой скорости.

32. Дайте определение мгновенной угловой скорости.

33. Как направлены векторы углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения?

34. Что является мерой быстроты изменения угловой скорости?

35. Дайте определение вектора мгновенного углового ускорения.

36. Как связаны векторы скорости и угловой скорости при вращении тела относительно неподвижной оси?

37. Как связаны векторы ускорения и углового ускорения при вращении тела относительно неподвижной оси?

38. Запишите преобразования Галилея. Что они позволяют вычислить?

39. Какое предположение о длительности измеряемого временного промежутка между двумя событиями в разных системах отсчета лежит в основе преобразований Галилея?

40. Как соотносятся ускорения материальной точки в системах отсчета, которые **равномерно** движутся относительно друг друга?

41. Как соотносятся ускорения материальной точки в системах отсчета, которые **равноускоренно** движутся относительно друг друга?

42. Сформулируйте принцип относительности Галилея.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Уровень 1

1.1. Начальное значение радиуса-вектора в координатной форме равно $\vec{r}_1 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$, конечное значение $\vec{r}_2 = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти: а) приращение радиуса-вектора; б) модуль приращения радиуса-вектора; в) приращение модуля радиуса-вектора.

1.2. Вектор $\vec{v}$ изменил направление на обратное. Найти приращение: а) $\Delta\vec{v}$; б) $|\Delta\vec{v}|$; в) $\Delta|\vec{v}|$.

1.3. Два тела движутся так, что их координаты меняются в зависимости от времени по законам $x_1(t) = 10 - 2t$ (м), $x_2(t) = 2 + 2t$ (м). Какой путь пойдет первое тело до встречи со вторым?

1.4. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2 + C$, где $A = 5{,}00$ м/с; $B = -5{,}00 \cdot 10^{-2}$ м/с^2; $C = 10{,}0$ м. Определить: а) момент времени, в который скорость $\vec{v}$ материальной точки равна нулю; б) координату в этот момент. Построить графики зависимости координаты движения от времени.

1.5. Тело первую часть пути l_1 двигалось со средней скоростью $v_1 = 10$ м/с, а вторую часть пути l_2 – со средней скоростью $v_2 = 10$ км/ч. Найти l_2, если суммарный путь $L = 15$ км тело проходит за $t = 180$ мин.

1.6. На рис. 31 приведен график зависимости проекции ускорения a_x движущейся материальной точки от времени t. Построить графики зависимостей проекции скорости v_x, координаты x и пути s от времени для этого движения, если начальная скорость тела $v_x(0) = v_{0x} = 0$ и начальная координата $x(0) = x_0 = 0$.

1.7. Для движения в плоскости *XOY*, заданного вектором $\vec{r} = t^2\vec{i} + 2t^3\vec{j}$, определить и построить радиус-вектор материальной точки, вектор скорости и вектор ускорения в моменты времени: 1) $t = 0$ с; 2) $t = 1$ с; 3) $t = 3$ с от начала движения.

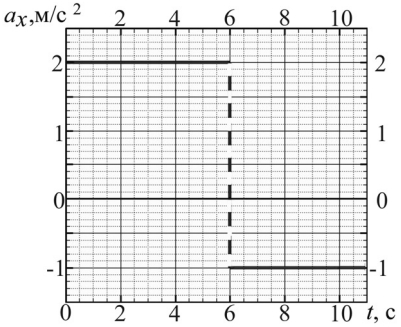


Рис. 31

1.8. Определить путь *s*, проходимый частицей, движущейся по прямолинейной траектории в течение 15 с, если ее скорость изменяется по закону $v(t) = 20 + 4{,}0t^2$ (м/с). В начальный момент времени путь равен нулю.

1.9. Материальная точка падает с высоты $H = 50$ м с начальной скоростью $v_0 = 1{,}0$ м/с. Найдите путь, пройденный материальной точкой за последнюю секунду своего движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.10. Тело подброшено вертикально вверх с начальной скоростью 15 м/с. Определить время между двумя моментами прохождения телом отметки половины максимальной высоты. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.11. Пуля пробила два вертикально закрепленных листа бумаги, расположенных на расстоянии друг от друга $l = 40$ м. Отверстие во втором листе оказалось на $H = 15$ м ниже, чем в первом. Определить модуль скорости v пули при подлете к первому листу, если она подлетела к нему, двигаясь горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.12. С башни высотой $H = 45$ м брошен под углом к горизонту $\alpha = 45°$ небольшой камень массой $m = 1{,}0$ кг. На какое расстояние вдоль горизонтальной оси переместился камень, если его начальная скорость $v_0 = 36$ км/ч?

1.13. С самолета, летящего горизонтально с постоянной скоростью $v_0 = 125$ м/с на высоте $h = 1960$ м, сброшен небольшой предмет массой $m = 5{,}0$ кг. На каком расстоянии от самолета будет находиться предмет: а) через $t_1 = 10$ с после выбрасывания; б) через $t_2 = 30$ с? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.14. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = (A + Bt^2)\vec{i} + Ct \cdot \vec{j}$, где $A = 10$ м, $B = -2{,}5$ м/с^2, $C = 4{,}0$ м/с. Для момента времени $t = 1{,}0$ с вычислить: 1) модуль полного ускорения a; 2) модуль тангенциального ускорения a_τ; 3) модуль центростремительного ускорения a_n.

1.15. Найти скорость $\vec{v}$ относительно берега реки: а) лодки, идущей по течению; б) лодки, идущей против течения; в) лодки, идущей под углом $\alpha = 90°$ к течению. Скорость течения реки равна 5,0 м/с, скорость лодки относительно воды $v_0 = 10$ м/с.

1.16. В безветренную погоду самолет затрачивает на перелет между городами 7 ч. На сколько минут увеличивается время полета, если будет дуть боковой ветер со скоростью 15 м/с перпендикулярно линии полета? Скорость самолета относительно воздуха равна 350 км/ч.

1.17. Лодка перемещается относительно воды в реке со скоростью $\vec{v}_1$ под углом α к направлению скорости течения $\vec{v}_2$. Определить скорость $\vec{v}_0$ лодки относительно берега и перемещение за время t.

1.18. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость ω зависит от угла поворота φ согласно закону $\omega = \omega_0 - C\varphi$, где ω_0 и C – положительные постоянные величины. В момент времени $t = 0$ угол поворота $\varphi = 0$. Найти зависимость от времени: 1) $\varphi(t)$; 2) $\omega(t)$.

1.19. В момент времени $t = 0$ материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом $R = 100$ м так, что угол поворота изменяется с течением времени по закону $\varphi = ct + bt^2$ (рад), где $c = 0{,}10$ рад/с; $b = 0{,}30$ рад/с^2. Найти: 1) величину угловой скорости; 2) угловое ускорение; 3) линейную скорость и ускорение точки в момент времени, когда она изменяет направление вектора скорости на противоположное.

1.20. Сколько оборотов сделали колёса автомобиля после включения тормоза до полной остановки, если в момент начала торможения автомобиль имел скорость 70 км/ч и остановился за 4,0 с после начала торможения? Диаметр колес 0,65 м. Чему равно среднее угловое ускорение колес при торможении?

Уровень 2

1.21. На рис. 32 приведен график зависимости проекции скорости v_x движущейся материальной точки от времени t. Построить графики зависимостей координаты x и пути s, пройденного телом, от времени для этого движения. Начальная координата $x_0 = 0$.

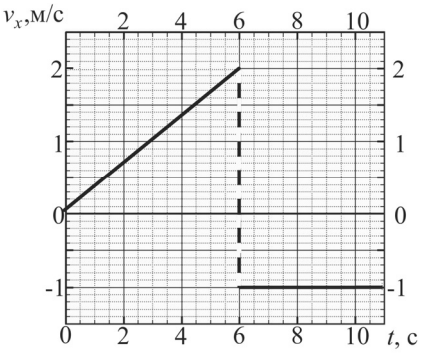


Рис. 32

1.22. Материальная точка падает с высоты $H = 50$ м с начальной скоростью $v_0 = 1{,}0$ м/с. Найти отношение пути, пройденного материальной точкой за первую секунду своего движения, к пути, пройденным ей за последнюю секунду. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.23. Материальная точка движется по окружности радиусом $R = 15$ м. Движение точки описывается уравнением $S = Bt^3$, где $B = 10$ м/с^3. В какой момент времени t нормальное ускорение a_n точки будет равно половине тангенциального a_τ?

1.24. Автомобиль движется по мокрому асфальту со скоростью 60 км/ч. Принимая радиус колеса равным 0,60 м, найти, на какую максимальную высоту могут забрасываться капли воды, отрывающиеся от колес.

1.25. Небольшое тело скользит со скоростью $v_0 = 5{,}0$ м/с по горизонтальной плоскости, приближаясь к прямоугольной яме. Яма образована двумя отвесными параллельными стенками, находящимися на расстоянии $d = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ м друг от друга. Глубина ямы $h = 1{,}5$ м/с. Определить, сколько раз тело ударится о стенки, прежде чем упадет на дно. Удар о стенку считать абсолютно упругим (модуль скорости не меняется и угол отражения равен углу падения).

1.26. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли с постоянной вертикальной скоростью $v_0 = 10{,}0$ м/с. При этом дует горизонтальный ветер, благодаря которому шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $v_x = \beta h$ (м/с) (β – постоянная, h – высо-

та подъема). Найти расстояние *s* по горизонтали, на которое будет снесен ветром шар к моменту времени, когда он поднимется на высоту $h = 100$ м, если $\beta = 1\text{с}^{-1}$.

1.27. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью v_0, перпендикулярной направлению течения реки. Модуль скорости течения реки, ширина которой *d*, нарастает от берегов к середине реки по параболическому закону, изменяясь от нуля до $v_{\max}$. Причем максимальное значение скорости $v_{\max}$ достигается посередине между берегами. Найти уравнение траектории лодки и время ее движения *t*.

1.28. Вниз по течению в направлении деревни плывет плот, к которому привязана лодка. Когда до деревни остается 20 км, лодка отделяется от плота. Через 40 мин она достигает деревни и, повернув обратно, подходит к плоту, когда до деревни остается 8 км. Какова скорость течения?

1.29. Два диска, соединенные невесомым нерастяжимым ремнем, равномерно вращаются без скольжения ремня на дисках. Первый диск радиусом $R = 20{,}00 \cdot 10^{-3}$ м вращается с частотой $\nu_1 = 60{,}00$ Гц, второй – с угловой скоростью $\omega_1 = 251{,}2$ рад/с. Найти модуль линейной скорости точек ремня.

1.30. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}01t$ рад/с^2. Через какое время после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела составит угол 60° с вектором скорости?

Уровень 3

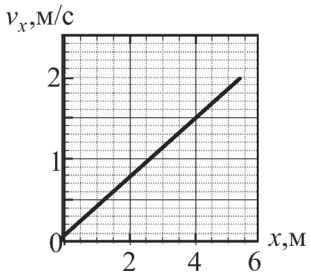


Рис. 33

1.31. На рис. 33 приведен график зависимости проекции скорости v_x движущейся материальной точки от координаты *x*. Построить графики зависимостей координаты *x* и пути *s*, пройденного телом, от времени для этого движения. Начальная координата $x_0 = 0$.

1.32. Из трех труб с одинаковой скоростью бьют струи воды под углами 60°, 45° и 30° к горизонту. Найти соотношения между

наибольшими высотами подъема трех струй воды, вытекающих из каждой трубы, а также между дальностями их падения на горизонтальную плоскость, если первые две трубы расположены на поверхности Земли, а третья – на высоте $h = 1,0$ м над Землей.

1.33. С какой наименьшей скоростью и под каким углом к горизонту надо бросить мяч, чтобы забросить его на крышу дома высотой h с расстояния l от ближней стены дома? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.34. Снаряд вылетает со скоростью v_0 из пушки, стоящей у основания горы, составляющей угол α с горизонтом, под углом β к поверхности горы. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить дальность L полета снаряда вдоль склона и максимальную высоту H подъема над склоном.

1.35. Спортсмен направляет водные лыжи под углом α к буксировочному тросу (как показано на рис. 34), а буксирующий его катер движется со скоростью v_1 под углом β к тросу. Трос не провисает. Найти скорость спортсмена v_2.

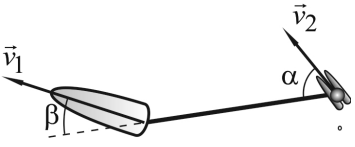


Рис. 34

Может ли скорость спортсмена превышать скорость катера?

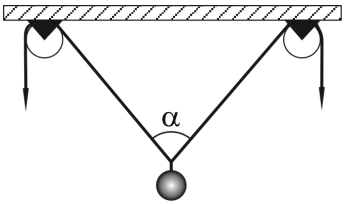


Рис. 35

1.36. Груз поднимается при помощи двух неподвижных блоков. Определить скорость груза в момент, когда угол между нитями равен α, если нити вытягиваются с одинаковыми и постоянными скоростями v (рис. 35).

1.37. На человека, находящегося в открытом поле, надвигается со скоростью $\vec{v}_1$ полоса дождя шириной L. Человек находится на расстоянии l напротив центра этой полосы. С какой минимальной скоростью $\vec{v}_2$ должен двигаться человек, чтобы остаться сухим?

1.38. Материальная точка движется в плоскости. Ее координаты x и y зависят от времени t по закону $x = a\cos\omega t$ и $y = b\cos(\omega t + \varphi)$, где a, b, ω и φ – постоянные величины. Определить форму траектории и найти векторы скорости и ускорения.

1.39. Шар радиусом $R_{ш} = 2{,}5$ см катится в горизонтальной плоскости без скольжения по кольцевым рельсам. Радиус кривизны наружного рельса $R_1 = 10$ см, внутреннего – $R_1 = 7$ см. Полный оборот вокруг своей оси шар делает за время $t = 5$ с. Определить величину и направление полной угловой скорости шара.

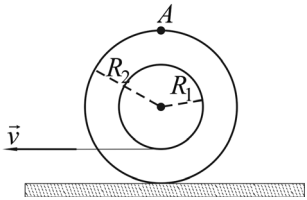


Рис. 36

1.40. Катушка с намотанной на нее нитью лежит на горизонтальней поверхности стола (рис. 36) и может катиться по ней без скольжения. С какой скоростью будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}$? Радиус внутренней части катушки R_1, внешней – R_2. Каковы будут скорость и ускорение точки *A*?

2. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Сила – векторная физическая величина, являющаяся мерой взаимодействия тел. Она характеризуется направлением, модулем и точкой приложения.

Единица измерения силы в системе СИ [F] = Н (ньютон).

Точка приложения силы – материальная точка, на которую действует сила.

Момент силы относительно неподвижной точки О – это физическая величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного от точки O к точке приложения силы, на вектор этой силы:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

где $\vec{M}$ – момент силы, $\vec{F}$ – сила, $\vec{r}$ – радиус-вектор.

Первый закон Ньютона. Существуют системы отсчета, называемые *инерциальными*, в которых если на **материальную точку** не действуют другие тела $\left(\text{или их действия скомпенсированы } \sum_i \vec{F}_i = 0\right)$, то тело сохраняет состояние равномерного прямолинейного движения или состояние покоя.

Второй закон Ньютона. Если на **материальную точку** в **инерциальной системе отсчета** действуют некомпенсированные силы, то она будет двигаться с ускорением, прямо пропорциональным геометрической сумме векторов этих сил и обратно пропорциональным массе этого тела:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_i}{m}.$$

Второй закон Ньютона можно сформулировать в следующей форме:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \ ,$$

где $\vec{p}$ – вектор импульса материальной точки.

Третий закон Ньютона. При взаимодействии **материальных точек** в **инерциальных системах отсчета** силы всегда появляются парами, при этом эти силы:

– равны по модулю;

– противоположны по направлению;

– лежат на одной прямой;

– одной природы;

– приложены к разным телам (поэтому никогда не могут скомпенсировать друг друга):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \, .$$

Уравнение движения – второй закон Ньютона, записанный в векторной форме или в проекциях на оси инерциальной системы отсчета:

$$ma = \sum_i F_i \text{ или } \begin{cases} ma_x = \sum_i F_{ix,} \\ ma_y = \sum_i F_{iy}, \\ ma_z = \sum_i F_{iz}. \end{cases}$$

Заметим, что уравнение движения можно записать в проекциях на любую, в том числе и на произвольно движущуюся относительно инерциальной системы отсчета ось.

Законы динамики – это законы Ньютона и законы, описывающие индивидуальные свойства сил.

Виды сил

I. *Силы тяготения* (обусловлены гравитационным полем).

Закон всемирного тяготения. Все тела притягиваются друг к другу (см. рис. 37). Сила притяжения между телами (материальными точками) равна $F = G m_1 m_2 / r^2$, где m_1, m_2 – массы притягивающихся тел;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная; r – расстояние между центрами тел.

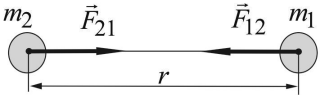


Рис. 37. Закон всемирного тяготения

Если одно из взаимодействующих тел – планета Земля, а другое находится вблизи поверхности Земли, то $F = GM_з m / R_з^2$, где $GM_з / R_з^2 = g = 9{,}8$ м/с^2 – ускорение свободного падения на поверхности Земли, тогда $\vec{F} = m\vec{g}$. Таким образом, сила тяжести есть частный случай силы тяготения.

II. *Силы упругости* (обусловлены электромагнитным взаимодействием между молекулами (рис. 38)).

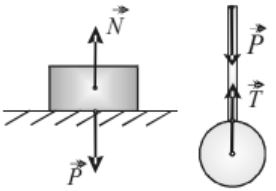


Рис. 38. Силы упругости

1. *Нормальная реакция опоры* N – это сила, с которой опора действует на находящееся на ней тело. Нормальная реакция опоры всегда направлена перпендикулярно опоре (на рис. 38 точку приложения силы N для наглядности сместили в центр масс тела).

2. *Сила натяжения нити* T – это сила, с которой **нить воздействует** на тело. Она направлена вдоль нити. Для невесомой нерастяжимой нити сила натяжения в каждой точке нити одинакова (на рис. 38 точку приложения силы T для наглядности сместили в центр масс шара).

3. *Вес тела* P – это сила, с которой **тело действует** на горизонтальную опору или растягивает подвес вследствие притяжения его к Земле. По *третьему закону Ньютона* $\vec{N} = -\vec{P}$; $\vec{T} = -\vec{P}$.

Закон Гука. При упругих деформациях $F_{(\text{упр})x} = -k\Delta x = k(x_1 - x_2)$, где $F_{(\text{упр})x}$ – проекция силы на ось OX; k – коэффициент упругости (жесткость); x – смещение при деформации. Закон Гука можно записать также в виде $\sigma = E|\varepsilon|$, где механическое напряжение $\sigma = F_{\text{упр}} / S$ – величина, равная отношению модуля силы упругости к площади S поперечного сечения; E – *модуль упругости* (*модуль Юнга*), характеризующий сопротивляемость материала упругой деформации; $\varepsilon = \Delta x / x_0$ – относительное удлинение. Единица измерения механического напряжения и модуля Юнга в смстеме СИ: [σ] = [E] = Па (*паскаль*).

Рассмотрим диаграмму растяжений (рис. 39): *OA* – область упругой деформации, описывается законом Гука; $\sigma(A)$ – предел пропорциональности; *AB* – область, в которой еще не возникает заметных остаточных деформаций; $\sigma(B)$ – предел упругости; *CD* – область текучести материала; $\sigma(E)$ – предел прочности образца; *EK* – разрушение образца.

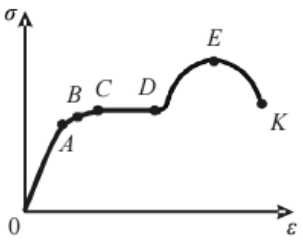


Рис. 39. Диаграмма растяжения

III. *Силы трения* (имеют электромагнитную природу). Причина сил трения – неровности соприкасающихся поверхностей.

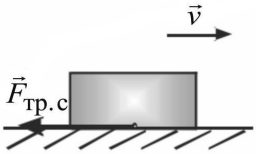


Рис. 40. Сила трения скольжения

1. $F_{\text{тр.с}}$ возникает при скольжении одного тела по поверхности другого (рис. 40). Она всегда направлена против скорости движения вдоль соприкасающихся поверхностей. Закон Кулона–Амонтона: $F_{\text{тр.с}} = \mu N$, где μ – коэффициент трения скольжения (он зависит от материала трущихся поверхностей и их обработки); N – нормальная реакция опоры.

2. Сила трения покоя $F_{\text{тр.п}}$ препятствует началу движения тела и равна приложенной силе, стремящейся вывести тело из состояния покоя (рис. 41). Сила трения покоя может изменяться от нуля до некоторого максимального значения $F_{\text{тр.п(max)}}$, которое несколько больше (приблизительно равно) силе трения скольжения: $F_{\text{тр.п(max)}} \geq F_{\text{тр.с}}$.

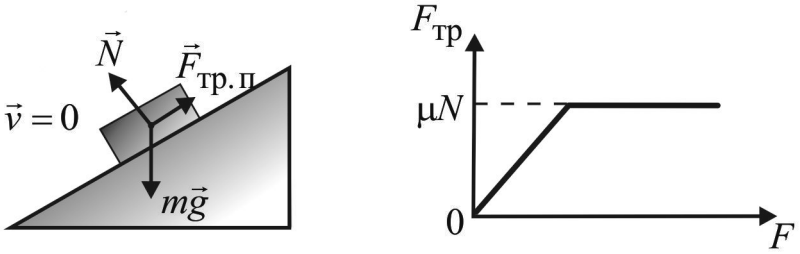


Рис. 41. Сила трения покоя

3. Сила трения качения $F_{\text{тр.к}}$ возникает при перекатывании тел друг по другу, $F_{\text{тр.к}} = Nf/R$ (рис. 42), где N – нормальная реакция опоры; f – *коэффициент трения качения*, **имеющий размерность длины** (в отличие от *коэффициента трения скольжения*, который **безразмерен**); R – радиус катящегося тела. Происхождение трения качения можно наглядно представить себе следующим образом. Когда шар или цилиндр катится по поверхности другого тела, он немного вдавливается в поверхность этого тела, слегка сжимаясь (рис. 42). Таким образом, **катящееся тело все время как бы вкатывается на горку**. Вместе с тем происходит отрыв участков одной поверхности от другой, а силы сцепления, действующие между этими поверхностями, препятствуют этому. Оба этих явления и вызывают силы трения качения.

Пока тело находится в покое на горизонтальной поверхности в поле сил тяжести, а внешняя сила отсутствует, нормальная реакция опоры лежит на той же линии, что и сила тяжести. Когда тело катится, то в силу деформации поверхности нормальная реакция опоры по-прежнему параллельна и противоположно направлена силе тяжести, но не лежит с ней на одной линии. Объясняется это тем, что фактически вследствие деформаций тел касание их происходит вдоль некоторой площадки (рис. 42). Давление со стороны катящегося тела возрастает вдоль площадки, а значит, и сила нормальной реакции N оказывается смещенной. Иначе, в отсутствие деформации, качение должно было бы начаться под действием любой сколь угодно малой силы. Чем тверже поверхности, тем меньше вдавливание и трение качения.

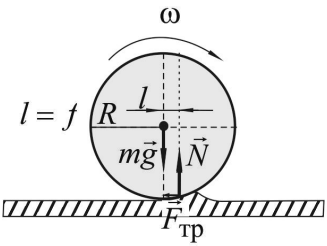


Рис. 42. Сила трения качения

Коэффициент трения качения равен расстоянию между прямыми, вдоль которых действуют сила тяжести (или прижимающая сила) и сила нормальной реакции опоры (рис. 42).

Примеры решения задач

Задача 1. На **невесомой** и **нерастяжимой** нити, переброшенной через неподвижный **невесомый** *блок* (рис. 43), подвешены грузы массами m и $2m$. С каким ускорением будут двигаться грузы, если их отпустить? Трением в блоке пренебречь.

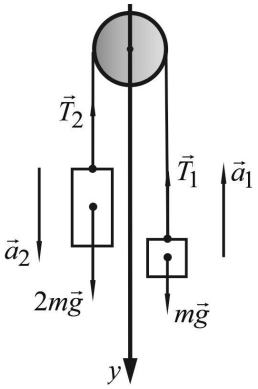


Рис. 43

Анализ условия:

- в задаче описаны два связанных груза;
- на каждый груз действуют сила тяжести и одинаковая по модулю сила натяжения нити $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T$ (**следствие невесомости нити**)[22];
- грузы жестко связаны **нерастяжимой** нитью, значит, они оба движутся с **одинаковым** ускорением $\left(\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a\right)$, связанным по *второму закону Ньютона* с равнодействующей силой для каждого груза;
- естественно предположить, что более тяжелый груз будет двигаться *вниз* (по направлению силы тяжести).

Решение

Тела движутся вдоль вертикального направления, поэтому направим координатную ось вертикально, например вниз. Применим второй закон Ньютона для каждого тела:

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1,$$

$$2m\vec{g} + \vec{T}_2 = 2m\vec{a}_2.$$

Запишем в проекции на ось y и получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2mg - T = 2ma, \\ mg - T = -ma. \end{cases}$$

Остается решить систему и найти ускорение:

$$\begin{cases} 2mg - T = 2ma, \\ mg - T = -ma. \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого: $2mg - mg = 2ma + ma$. Тогда $a = g/3$ (м/с^2).

[22] Тела в данной задаче можно считать материальными точками, поэтому точки приложения сил можно было бы свести в одну точку.

Ответ: $a = \dfrac{g}{3}$ (м/с^2).

Задача 2. Два бруска массами m_1 и m_2, соединенные шнуром, лежат на столе. На первый брусок действует сила F, направленная под углом α к горизонту. Коэффициент трения брусков о стол μ. Определить ускорение, с которым движутся бруски и силу натяжения шнура.

Анализ условия:

- в задаче описаны два связанных бруска;
- на каждый брусок действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, силы натяжения нити $\vec{T}$, сила $\vec{F}$, действующая на первый брусок;
- если нить **невесома и нерастяжима**, сила натяжения в любой ее точке одинакова $\left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_1\right| = T$;
- грузы связаны, значит, они движутся с **одинаковым** ускорением.

Решение

Изображаем силы, действующие на каждое из тел системы: силы тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$, силы натяжения шнура $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, силы нормальной реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ и $\vec{F}_{\text{тр2}}$, силу $\vec{F}$ (рис. 41).

Выбираем систему координат, указываем направление ускорения системы $\vec{a}$.

Запишем основное уравнение динамики для **первого тела**:

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр1}} = m_1\vec{a}.$$

В проекции на оси x и y:

$$\begin{cases} x: \ -T_1 + F\cos\alpha - F_{\text{тр1}} = m_1 a, \\ y: \ F\sin\alpha + N_1 - m_1 g = 0, \\ F_{\text{тр1}} = \mu N_1 = \mu\left(m_1 g - F\sin\alpha\right). \end{cases}$$

Тогда

$$-T_1 + F\cos\alpha - \mu\left(m_1 g - F\sin\alpha\right) = m_1 a\,.$$

Для **второго** тела

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2} = m_2\vec{a}.$$

В проекции на оси x и y:

$$\begin{cases} x:\ T_2 - F_{\text{тр}2} = m_2 a, \\ y:\ N_2 - m_2 g = 0, \\ F_{\text{тр}2} = \mu N_2 = \mu m_2 g. \end{cases}$$

Тогда

$$T_2 - \mu m_2 g = m_2 a\ .$$

Учитывая, что $T_1 = T_2 = T$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -T + F\cos\alpha - \mu(m_1 g - F\sin\alpha) = m_1 a, \\ T - \mu m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - \mu(m_1 g - F\sin\alpha) - \mu m_2 g = (m_1 + m_2)a, \\ F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2)a. \end{cases}$$

Ускорение системы

$$a = \frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m_1 + m_2} - \mu g\ .$$

Сила натяжения

$$T = m_2 a + \mu m_2 g.$$

$$T = m_2\left(\frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m_1 + m_2} - \mu g\right) + \mu m_2 g\ ,$$

$$T = \frac{F m_2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m_1 + m_2}\ .$$

Ответ: $a = \dfrac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m_1 + m_2} - \mu g$, $T = \dfrac{Fm_2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m_1 + m_2}$.

Задача 3. Груз массой 2,0 кг расположен на наклонной поверхности с углом наклона 30° к горизонту и связан **невесомой** и **нерастяжимой** нитью, перекинутой через **невесомый** блок с вертикально висящим грузом массой 1,5 кг. Коэффициент трения первого груза о плоскость 0,20. Определить ускорение грузов. Трением в блоке пренебречь.

Решение

На каждое из тел системы действуют силы тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$. Кроме этого, на первое тело, находящееся на наклонной плоскости, действуют сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$. Учитывая, что блок **невесом**, нить **невесома** и **нерастяжима**, сила натяжения нити в любой ее точке будет одинаковой. Выполним чертеж, указывая на нем все приложенные силы. Для того чтобы указать направление силы трения, необходимо установить направление движения грузов. Для этого сравним составляющие сил тяжести каждого из тел на соответствующие направления возможного движения:

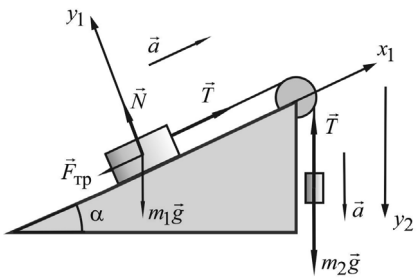


Рис. 42

$$m_1 g\sin\alpha = 2\cdot 9{,}8\cdot\sin 30° = 9{,}8\ \text{Н},$$

$$m_2 g = 1{,}5\cdot 9{,}8 = 14{,}7\ \text{Н}.$$

Так как сила трения не может изменить направления движения тел, второй груз движется вертикально вниз, первый поднимается по наклонной плоскости вверх.

Выбираем направления соответствующих осей для каждого из тел, указываем направления ускорений (рис. 42). Так как тела связаны, они движутся с одинаковым по величине ускорением.

Запишем основное уравнение динамики для каждого из тел:

$$\vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m_1\vec{a},$$

$$\vec{T} + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}.$$

Для первого тела в проекции на оси x_1 и y_1:

$$\begin{cases} x_1:\ T - F_{\text{тр}} - m_1 g\sin\alpha = m_1 a, \\ y_1:\ N - m_1 g\cos\alpha = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m_1 g\cos\alpha. \end{cases}$$

Тогда

$$T - m_1 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = m_1 a\ .$$

Для второго тела в проекции на ось y_2:

$$y_2:\ -T + m_2 g = m_2 a\ .$$

Получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} T - m_1 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = m_1 a, \\ -T + m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

Сложим полученные уравнения:

$$m_2 g - m_1 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = (m_1 + m_2)\,a\ .$$

Ускорение тел

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}\ .$$

Подставляя данные, получим

$$a = 9{,}8\,\frac{1{,}5 - 2(\sin 30° + 0{,}2\cos 30°)}{2 + 1{,}5} = 0{,}43\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a = 0{,}43\ \text{м/с}^2$.

Задача 4. Определить, при каких значениях угла α цилиндр радиуса R, лежащий на наклонной плоскости (рис. 43), остается в покое, если коэффициент трения качения равен f, коэффициент трения скольжения равен μ.

Решение

На цилиндр действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры в точке контакта $\vec{N}$, касательная составляющая реакции в точке контакта $\vec{F}_{\text{тр}}$ (сила трения), пара сил с моментом трения качения $\vec{M}_{F\text{тр}}$. Введем систему координат, как показано на рис. 43, и составим уравнения равновесия:

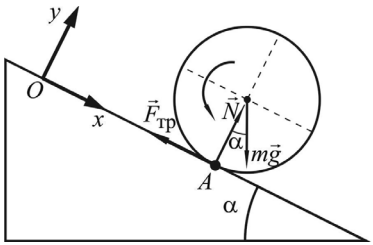


Рис. 43

$$\sum F_{ix} = -F_{\text{тр}} + mg\sin\alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = N - mg\cos\alpha = 0,$$

$$\sum M_A\left(\vec{F}\right) = M_{F\text{тр}} - mg \cdot R\sin\alpha = 0.$$

Кроме того, должны выполняться неравенства:

$$F_{\text{тр}} \le \mu N,$$

$$M_{F\text{тр}} \le fN.$$

Из первых уравнений мы можем определить N, $F_{\text{тр}}$, $M_{F\text{тр}}$. Подставив эти величины в последние два неравенства, получим

$$\text{tg}\alpha \le \mu,$$

$$\text{tg}\alpha \le f / R.$$

Эти неравенства должны удовлетворяться одновременно. В тех случаях, когда $f/R < \mu$, потеря равновесия происходит путем перехода к качению, так как при увеличении угла α сначала нарушится нера-

венство $M_{F\text{тр}} \le fN$, а если $\mu < f/R$, то нарушится неравенство $F_{\text{тр}} \le \mu N$ и цилиндр начнет скользить.

Ответ: $\text{tg}\alpha \le \mu \wedge \text{tg}\alpha \le f / R$.

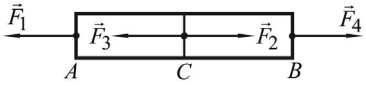


Рис. 44

Задача 5. Жесткость куска проволоки равна *k*. Чему равна жесткость половины этого куска проволоки (см. рис. 44)?

Решение

Разобьем мысленно кусок проволоки пополам. Так как вся проволока находится в равновесии, то проецируем на ось, параллельную проволоке:

$$F_1 - F_4 = 0,$$

$$F_1 = F_4,$$

а так как куски *AC* и *CB* находятся в равновесии, то

$$\begin{cases} F_1 - F_2 = 0, \\ F_3 - F_4 = 0. \end{cases}$$

Из этого следует, что они равны по модулю, поэтому из закона Гука

$$F = k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2,$$

откуда следует, что $\Delta l_1 = \Delta l_2$. С другой стороны, для всего куска

$$F = k\Delta l;\ \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 2\Delta l_1.$$

Получаем $k_1 = 2k$.

Ответ: $k_1 = 2k$.

2.2. ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

Задачи по динамике можно разделить на два класса: *прямая задача* и *обратная задача динамики.*

Прямая задача динамики – найти закон движения тела или системы тел, если известны силы, действующие на эти тела.

Обратная задача динамики материальной точки – найти действующие на тело или систему тел силы, если известны законы движения этих тел.

Большинство задач содержат в себе элементы как прямой, так и обратной задач динамики. Как правило, одна из этих задач имеет основное, другая – подчиненное по отношению к условию задачи значение.

Ниже представлена общая схема решения задач динамики с помощью законов Ньютона [23, 24].

I. Определиться с моделями материальных объектов и явлений.

1. Нарисовать чертеж, на котором изобразить рассматриваемые тела.

2. Выбрать систему отсчета и изобразить на чертеже ее систему координат (из соображений удобства).

3. Изобразить и обозначить все силы и необходимые кинематические характеристики системы.

4. Выбрать модели тел и их движения (если это не сделано в условии задачи).

II. Записать полную систему уравнений для искомых величин.

1. Записать уравнения движения в проекциях на оси координат для всех тел системы.

2. При необходимости использовать третий закон Ньютона.

3. Использовать законы, описывающие индивидуальные свойства сил:

а) закон всемирного тяготения;

б) закон Гука;

в) закон Амонтона–Кулона и т. д.

4. Записать уравнения кинематических связей.

5. Использовать результаты ранее решенных задач и особые условия задачи.

III. Получить искомый результат в аналитическом и численном видах.

1. Решить систему полученных уравнений.

2. Провести анализ решения (проверить размерность и лишние корни, рассмотреть предельные и частные случаи, установить область применимости).

3. Получить численный результат.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что изучает динамика?

2. Какое движение называют движением по инерции? Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная?

3. Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать? Каковы единицы измерения массы, силы?

4. Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона? Почему?

5. Сформулировав три закона Ньютона, покажите, какова взаимосвязь между этими законами.

6. Сформулируйте условия, при которых ускорение прямо пропорционально силе.

7. Сформулируйте закон всемирного тяготения.

8. Что такое сила тяжести и вес тела?

9. Когда можно наблюдать состояние невесомости?

10. Как можно найти коэффициент трения скольжения?

11. При каких условиях возникает сила трения скольжения?

12. Как направлена сила трения скольжения?

13. Как можно найти коэффициент трения покоя?

14. Сформулируйте условия, при которых возникает сила трения покоя.

15. Как направлена сила трения покоя?

16. Как можно найти коэффициент трения качения?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Уровень 1

2.1. Два ученика на роликовых коньках держатся за веревку, протянутую между ними. Когда они начинают вдвоем вытягивать веревку, первый начинает двигаться с ускорением. С каким ускорением дви-

жется второй, если его масса в 1,5 раза меньше? Силой трения между землей и роликами пренебречь.

2.2. В лифте, движущемся вниз, вес тела массой 100 кг равен 1100 Н. Найти значение величины ускорения лифта.

2.3. Плотность некоторой планеты равна плотности Земли, радиус планеты в два раза меньше радиуса Земли. Чему равно отношение первых космических скоростей спутников планеты и Земли v_1 / v_2 ?

2.4. Спутник запущен на круговую орбиту, расположенную в плоскости экватора, и вращается в направлении вращения Земли. Известно, что спутник проходит над некоторой точкой экватора семь раз в сутки. Чему равно отношение радиуса орбиты этого спутника к радиусу орбиты геостационарного спутника?

2.5. Через невесомый блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены два груза массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг. С каким ускорением движется второй груз? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Трения нет.

2.6. На гладкой горизонтальной плоскости лежит брусок массой $m_1 = 1{,}0$ кг, упирающийся в другой брусок массой $m_2 = 1{,}5$ кг. На первый брусок в направлении второго действуют силой $F_1 = 2{,}0$ Н. С какой силой F_2 первый брусок давит на второй?

2.7. Тело массой $m = 1{,}0$ кг лежит на гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Какую по величине силу F, параллельную плоскости, надо приложить к телу, чтобы оно двигалось с ускорением $a = 5{,}0$ м/с^2, направленным горизонтально, поперек наклонной плоскости? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2.8. Четыре одинаковые пружины жесткостью k = 5 Н/м каждая соединили параллельно и подвесили на них груз массой $m_1 = 1{,}0$ кг. На какую длину Δl они растянутся? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2.9. Тело массой $m = 2{,}0$ кг вращается по окружности радиусом R = 1 м со скоростью v = 3 м/с. Чему равна величина центростремительной силы F, удерживающей тело при таком вращении?

2.10. На гладкой горизонтальной плоскости находятся два тела массами $m_1 = 2{,}0$ кг и $m_2 = 3{,}0$ кг, соединенные пружиной жесткостью k = 20 Н/м. За веревку, привязанную ко второму телу, всю систе-

му тянут вдоль плоскости с силой F = 5 Н. Чему равна деформация Δl пружины?

Уровень 2

2.11. На материальную точку массой m = 500 г действуют две силы: $F_1 = 2{,}0$ Н и $F_2 = 3{,}0$ Н. Найти угол между векторами этих сил, если под их действием материальная точка движется с ускорением a = 8 м/с^2.

2.12. Грузовик взял на буксир легковой автомобиль массой m = 2000 кг и, двигаясь равноускоренно без начальной скорости, за время t = 50 с проехал по прямой s = 400 м. Насколько при этом удлинился трос, соединяющий автомобили, если его жесткость $k = 2{,}0 \cdot 10^6$ Н/м? Трение не учитывать.

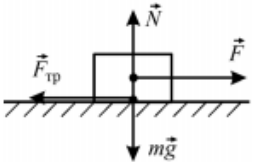


Рис. 48

2.13. На тело массой m = 1 кг, лежащее на горизонтальной поверхности, начинает действовать постоянная, направленная горизонтально сила F (рис. 48). Коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0{,}2$. Определить ускорение тела, если модуль силы: а) F = 0,5 Н; б) F = 2 Н; в) F = 2,5 Н. Считать $g = 10$ м/с^2. Построить график зависимости силы трения $F_{тр}$ от силы F.

2.14. Точку подвеса массивного шарика на навесной нити перемещают в горизонтальном направлении с постоянным ускорением так, что нить составляет с вертикалью постоянный угол α (рис. 49). Найти величину угла α, если ускорение a задано.

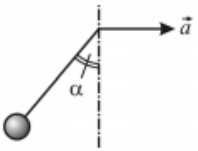


Рис. 49

2.15. Тело массой m = 1 кг, брошенное под углом к горизонту, имеет в верхней точке траектории полное ускорение $a = 12$ м/с^2. Определить сопротивление среды в этой точке. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2.16. Два груза массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 50$ г соединены нитью, перекинутой через блок (рис. 50). Грузы прижимают друг друга с по-

стоянной силой F = 1,0 Н. Коэффициент трения между ними $\mu = 0{,}10$. Найти ускорение, с которым движутся грузы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

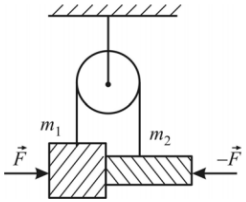


Рис. 50

2.17. Летчик массой m = 70 кг описывает на самолете «мертвую петлю» радиусом R = 100 м, т. е. самолет движется по окружности указанного радиуса в вертикальной плоскости. Скорость самолета v = 180 км/ч. С какой силой прижимается летчик к сиденью в верхней и нижней точках петли? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. (**Указание**: сила, с которой летчик прижимается к сиденью в данном случае, – сила нормального давления, равная по величине силе нормальной реакции опоры.)

2.18. Первый в мире космонавт Ю.А. Гагарин на корабле «Восток-1» двигался вокруг Земли по круговой орбите на высоте H = 251 км над поверхностью Земли. Радиус Земли R_3 = 6037 км. Определить период обращения космического корабля вокруг Земли. Ускорение свободного падения у полюсов g = 9,8 м/с^2.

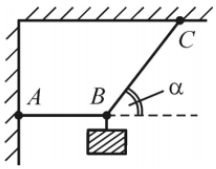


Рис. 51

2.19. Груз массой M удерживается нитями AB и BC в положении, показанном на рис. 51. Найти натяжение нитей, если нить AB горизонтальна, а нить BC образует с горизонтом угол α.

2.20. Бревно массой m тянут за веревку длиной L, прикрепленную к центру тяжести бревна, с постоянной скоростью по горизонтальной поверхности, прилагая силу F. Конец веревки поднят над точкой крепления на высоту H. Найти коэффициент трения бревна о горизонтальную поверхность.

Уровень 3

2.21. Если к телу, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложить силу F = 120 Н под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, то тело будет скользить по поверхности равномерно. С каким ускорением будет двигаться тело, если ту же по величине силу приложить под углом $\beta = 30°$ к горизонту? Масса тела $m = 25$ кг, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2.22. На неподвижный брусок, помещенный на горизонтальную поверхность, подействовали с силой $\vec{F}$. При каких значениях угла α между силой $\vec{F}$ и вертикалью брусок будет оставаться неподвижным независимо от величины прикладываемой силы? Коэффициент трения μ между бруском и поверхностью задан.

2.23. На наклонную плоскость поместили брусок и приложили к нему силу $\vec{F}$, направленную вверх вдоль плоскости и «равную» по модулю удвоенной силе тяжести бруска *mg*. Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 1{,}0$. При каком угле α наклона плоскости к горизонту ускорение бруска будет минимальным? Найти это ускорение. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2.24. Парашютист массой $m_1 = 80$ кг спускается на парашюте с установившейся скоростью $v_1 = 5{,}0$ м/с. Какой будет установившаяся скорость, если на том же парашюте будет спускаться мальчик массой $m_2 = 40$ кг? Массой парашюта пренебречь. Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости.

2.25. Автомобиль заезжает на наклонную плоскость. Коэффициент трения скольжения между колесами и плоскостью $\mu = 0{,}6$; коэффициент трения качения $f = 0{,}10$. При каком максимальном угле наклона плоскости к горизонту автомобиль сможет по ней подниматься, двигаясь равномерно?

2.26. Однородный стержень длиной *l* нижним концом касается гладкой горизонтальной поверхности. Верхний конец стержня подвешен так, что стержень образует с горизонтальной поверхностью угол α. Нить пережигают. В какую сторону и на какое расстояние сместится нижний конец стержня в процессе падения?

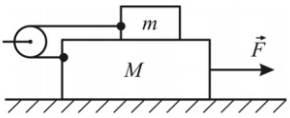


Рис. 52

2.27. В системе массы брусков *m* = 1 кг и *M* = 2 кг; горизонтальная сила, приложенная к нижнему бруску, *F* = 25 Н; ускорение, с которым движутся тела, $a = 1{,}0$ м/с^2 (рис. 52). Определить коэффициент трения скольжения, если он одинаков для всех трущихся поверхностей. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2.28. Через блок переброшена нить, к одному концу которой привязан груз массой $m_1 = 100$ г, а по другому скользит кольцо массой

$m_2 = 250$ г. С каким ускорением движется кольцо, если груз m_1 неподвижен (рис. 53)? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

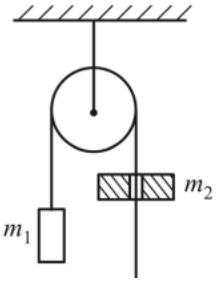


Рис. 53

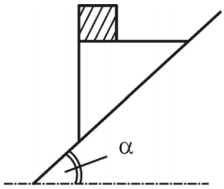


Рис. 54

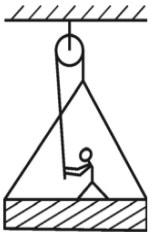


Рис. 55

2.29. С наклонной плоскости соскальзывает без трения клин, на верхней горизонтальной грани которого находится брусок массой m = 100 г. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$ (рис. 54). Брусок по клину не скользит. Найти силу трения, действующую на брусок при движении клина. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2.30. Человек массой M стоит на горизонтальной платформе массой m и поднимает себя вместе с платформой с помощью веревки, перекинутой через блок (рис. 55). С какой силой он должен тянуть веревку вниз при равномерном подъеме? С какой силой человек при этом давит на платформу?

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Импульс (*количество движения*) – векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости:

$$\vec{p} = m\vec{v} .$$

Единица измерения импульса в системе СИ: [p] = [кг · м/с].

Импульс силы – это векторная физическая величина, равная произведению силы на время ее действия, мера воздействия силы на тело за данный промежуток времени:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} .$$

Закон сохранения импульса. Импульс **замкнутой инерциальной** системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const} .$$

Закон сохранения импульса можно применять и для незамкнутых систем в следующих случаях:

1) внешние силы есть, но их геометрическая сумма равна нулю;

2) если проекции сил на какое-либо направление в сумме равны нулю, сохраняется проекция импульса на это направление;

3) внешние силы значительно меньше внутренних сил (обычно пренебрегают силами трения, сопротивления).

Работа постоянной силы при **поступательном прямолинейном** движении – скалярная величина, равная проекции силы $\vec{F}$ на направление $\vec{\tau}$ перемещения точки ее приложения, умноженной на величину этого перемещения s :

$$A = \vec{F} \cdot \vec{\tau} \cdot s = (F \cos\alpha)s = F_\tau \cdot s \ .$$

В общем случае *механическая работа* равна

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds \ ,$$

где F_τ – проекция силы на направление перемещения точки ее приложения.

Мощность – физическая величина, измеряемая отношением работы к промежутку времени, в течение которого она совершается (**работа, совершаемая силой в единицу времени**). Если работа совершается равномерно, то мощность N

$$N = \frac{A}{t} \ ,$$

где A – работа, совершенная силой за время t. В общем случае мощность

$$N = \frac{dA}{dt} \ .$$

Средней мощностью $N_{\text{ср}}$ за время Δt называют отношение

$$N_{\text{ср}} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \ ,$$

где ΔA – работа, совершенная силой за время Δt.

Мгновенная мощность равняется произведению *мгновенной скорости* на проекцию силы в направлении перемещения:

$$N = F_S \cdot v = vF \cos\alpha = \vec{v} \cdot \vec{F} \ .$$

Кинетическая энергия механической системы – это энергия механического движения этой системы.

Кинетическая энергия тела

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2},$$

где m – масса, v – скорость тела. Работа силы на некотором пути численно равняется разности кинетических энергий тела в конечном и начальном его положениях (**теорема об изменении кинетической энергии**):

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = E_{\text{к}} - E_{\text{к}0}.$$

Потенциальная энергия – механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести

$$E_{\text{п}} = mgh,$$

где m – масса; g – ускорение свободного падения; h – высота, отсчитываемая от нулевого уровня, для которого потенциальная энергия $E_{\text{п}} = 0$.

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2}kx^2,$$

где x – абсолютная деформация; k – коэффициент жесткости пружины.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тел

$$E_{\text{п}} = -G\frac{m_1 m_2}{r},$$

где m_1, m_2 – массы тел, r – расстояние между центрами масс тел, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Полная механическая энергия системы тел – энергия, равная сумме кинетических энергий тел и потенциальной энергии их взаимодействия.

*Закон сохранения полной **механической** энергии*. Полная механическая энергия **замкнутой системы** тел, взаимодействующих посредством *консервативных сил* (*потенциальных сил*)[23], есть величина постоянная:

$$E_{\text{п}} + E_k = \text{const}\,.$$

Закон сохранения полной энергии. Полная энергия **замкнутой системы** тел есть величина постоянная:

$$E = \text{const}\,.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Тело массой $m = 5$ кг брошено под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти модуль от изменения $\Delta\vec{p}$ импульса тела за время полета.

Дано:

$v_0 = 20\,\text{м/с}$
$\alpha = 30°$
$m = 5$ кг

$\Delta p - ?$

Решение

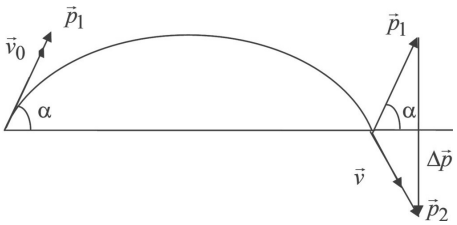


Рис. 56

Импульс тела является векторной величиной, поэтому для определения величины изменения импульса обязательно выполним чертеж (рис. 56), на

[23] *Консервативные силы* (*потенциальные силы*) – это силы, работа которых **определяется только начальным и конечным положением точки приложения этих сил,** т. е. **не зависит** от вида траектории движения тела (материальной точки), к которому приложены эти силы, от точки приложения сил и закона движения этой точки. К таким силам относятся силы тяготения и упругости. Работа консервативных сил по любой замкнутой траектории равна нулю.

котором изобразим начальный и конечный импульсы тела. Учитываем, что направление импульса совпадает с направлением скорости.

Строим вектор изменения импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$.

Величина импульсов по определению: $p_1 = mv_0$, $p_2 = mv$.

При отсутствии сопротивления воздуха конечная скорость по модулю равна начальной: $v_0 = v$.

Тогда $p_1 = p_2 = mv_0$.

Из рис. 56 видно, что модуль от изменения импульса $\Delta p = 2p_1 \sin\alpha = 2mv_0 \sin\alpha$. Тогда

$$\Delta p = 2 \cdot 5 \cdot 20 \cdot \sin 30° = 100 \text{ кг·м/с}.$$

Ответ: $\Delta p = 100$ кг $\cdot$ м/с.

Задача 2. Снаряд массой 20 кг, летящий горизонтально со скоростью 500 м/с, попадает в платформу с песком массой 10 т и застревает в нем. Определить скорость, с которой начинает двигаться платформа.

Дано:

$v_1 = 500$ м/с

$m = 10^4$ кг

$m_1 = 20$ кг

$v_2 - ?$

Решение

Выполняем чертеж (рис. 57), изображаем тела, указывая направления скоростей каждого из них.

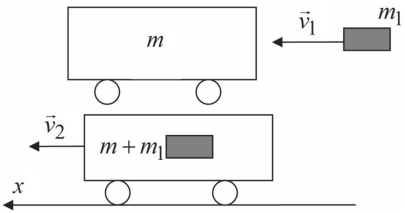


Рис. 57

Снаряд и платформу можно рассматривать как систему двух взаимодействующих тел. Эта система не является замкнутой, так как на нее действуют сила тяжести, сила нормальной реакции и сила трения. Если пренебречь действием силы трения на платформу, то, учитывая, что сила тяжести и сила нормальной реакции направлены вертикально, проекция сил на горизонтальное направление равна нулю.

В нашем случае будет сохраняться проекция импульса на ось *x*: $p_x = \text{const}$.

Запишем закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1\vec{v}_1 = (m + m_1)\vec{v}_2 .$$

В проекции на ось *x*:

$$m_1 v_1 = (m + m_1)v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1 v_1}{m + m_1} .$$

Выполним проверку единиц измерения:

$$[v] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{кг}}\right] = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right].$$

Подставляем данные: $v_2 = \dfrac{20 \cdot 500}{10000 + 20} = 0{,}998 \approx 1$ м/с.

Ответ: $v_2 = 1$ м/с.

Задача 3. Тело массой *m* = 5,0 кг движется по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. На отрезке пути, равном *s* =1,0 м, на него действует постоянная сила $F = 20$ Н в направлении движения. Изменение кинетической энергии тела на этом отрезке пути $\Delta E_k = 30$ Дж. Определить значение коэффициента трения.

Дано:

$m = 5{,}0$ кг
$s = 1{,}0$ м
$\alpha = 30°$
$F = 20$ Н
$\Delta E_k = 30$ Дж

$\mu - ?$

Решение

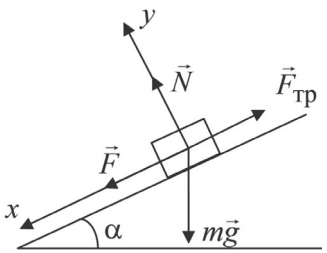


Рис. 58

На тело, движущееся по наклонной плоскости, действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила $\vec{F}$. Изобразим эти силы на рисунке (рис. 58).

Изменение кинетической энергии $\Delta E_k = A$, где A – работа, совершаемая всеми силами, действующими на тело.

Работа силы $\vec{F}$ равна $A_1 = Fs\cos\varphi_1$, где φ_1 – угол между направлением силы и направлением перемещения. В нашем случае $\varphi_1 = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1$.

Работа силы тяжести $A_2 = mgs\sin\alpha$.

Работа силы трения $A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}s\cos\varphi_2 = -F_{\text{тр}}s$

$(\varphi_2 = 180° \Rightarrow \cos\varphi_2 = -1)$.

Сила нормальной реакции опоры перпендикулярна перемещению, поэтому работы не совершает.

Тогда

$$\Delta E_k = (F + mg\sin\alpha - F_{\text{тр}})s\,,$$

$$F_{\text{тр}} = kN = \mu mg\cos\alpha\,,$$

$$\Delta E_k = (F + mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)s = (F + mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha))s\,,$$

$$\mu = \text{tg}\alpha - \frac{1}{mg\cos\alpha}\left(\frac{\Delta E_k}{s} - F\right).$$

Выполним проверку единиц измерения:

$$[\mu] = \left[\frac{1}{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2}\left(\frac{\text{Дж}}{\text{м}} - \text{Н}\right)\right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2}\right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{Н}}\right] = [1].$$

Подставим данные: $\mu = \text{tg}30° - \dfrac{1}{5{,}0\cdot 9{,}8\cdot\cos 30°}\left(\dfrac{30}{1{,}0} - 20\right) = 0{,}34$.

Ответ: $\mu = 0{,}34$.

Задача 4. Два небольших стальных шарика подвешены на невесомых нерастяжимых нитях. Массы шариков равны m_1 и m_2, длины нитей l_1 и l_2 соответственно. Первый шарик отклоняют на угол α и отпускают. На какой угол β отклонится после удара второй шарик? Удар **центральный** и **абсолютно упругий**.

Дано:

m_1
m_2
l_1
l_2
α

$\beta - ?$

Решение

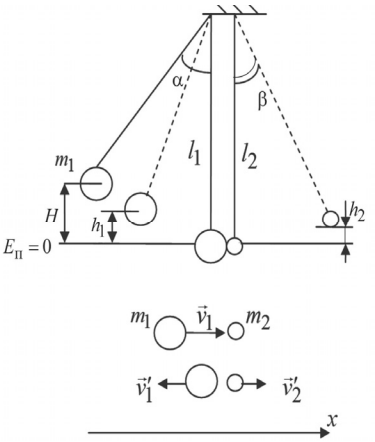


Рис. 59

Выполним рисунок (рис. 59). Рассмотрим систему, состоящую из двух шариков. Внешней силой для этой системы является сила тяжести. Чтобы сделать систему замкнутой, включим в нее Землю.

Для замкнутой системы тел применим законы сохранения полной механической энергии и импульса.

Выбирем нулевой уровень потенциальной энергии в нижнем положении шариков.

Согласно закону сохранения энергии потенциальная энергия первого шара переходит в его кинетическую энергию перед ударом:

$$m_1 g H = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gH} \ ,$$

где H – высота, на которую поднят центр масс шара.

По условию столкновение **абсолютно упругое**.

Согласно закону сохранения энергии кинетическая энергия первого шара после упругого удара расходуется на сообщение кинетической энергии обоим шарам:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \Rightarrow m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2 v_2'^2 .$$

Высота, на которую поднимаются шары после удара, из **закона сохранения механической энергии**:

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 g h_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{v_1'^2}{2g},$$

$$\frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_2 g h_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{v_2'^2}{2g}.$$

Из рис. 56 следует, что

$$H = l_1 - l_2\cos\alpha = l_1(1-\cos\alpha),$$

$$h_2 = l_2(1-\cos\beta).$$

Определим скорости шаров перед столкновением.

Предположим, что после удара шары будут двигаться в противоположных направлениях.

Из закона сохранения импульса для упругого удара $m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$; $m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow m_1\left(v_1 + v_1'\right) = m_2 v_2'$.

Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2 v_2'^2, \\ m_1\left(v_1 + v_1'\right) = m_2 v_2'. \end{cases} \tag{3.1}$$

Разделим первое уравнение в системе (3.1) на второе:

$$v_1 - v_1' = v_2' .$$

$$m_1\left(v_1' + v_1'\right) = m_2\left(v_1 - v_1'\right),$$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gH},$$

$$v_2' = v_1 - v_1' = v_1\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) = v_1\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2m_2\sqrt{2gH}}{m_1 + m_2}.$$

Тогда

$$h_2 = \frac{v_2'^2}{2g} = H\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2,$$

$$l_2(1 - \cos\beta) = l_1(1 - \cos\alpha)\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = 1 - \frac{l_1}{l_2}(1 - \cos\alpha)\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2,$$

$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{l_1}{l_2}(1 - \cos\alpha)\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right).$$

Ответ: $\beta = \arccos\left(1 - \frac{l_1}{l_2}(1 - \cos\alpha)\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right)$.

3.2. ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Алгоритм решения задач на применение закона сохранения импульса

1. Выполнить чертеж, изобразив на нем тела и векторы скоростей и импульсов тел системы непосредственно перед и после взаимодействия.

2. Проверить систему взаимодействующих тел на замкнутость.

3. Записать закон сохранения импульса в векторной форме.

4. Записать проекции импульсов на выбранные оси координат.

5. Решить полученную систему скалярных уравнений относительно неизвестных величин в общем виде.

6. Проверить размерность и выполнить расчет.

Алгоритм решения задач на закон сохранения энергии

1. Выполнить схематический чертеж. Обозначить на нем кинематические характеристики начального и конечного состояний системы.

2. Проверить систему на замкнутость.

3. Если система тел замкнута, решение проводится по закону сохранения механической энергии.

4. Если система тел не замкнута или нельзя пренебречь силой трения, то изменение механической энергии равно работе внешних сил.

5. Выбрать нулевой уровень потенциальной энергии (произвольно).

6. Записать формулы механической энергии в начальном и конечном положениях.

7. Установить связь между кинематическими характеристиками.

8. Решить полученную систему уравнений относительно неизвестных величин в общем виде.

9. Проверить размерность и выполнить расчет.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определения импульса тела и импульса силы. Как связаны импульс тела и импульс силы?

2. Сформулируйте закон сохранения импульса. При каких условиях он выполняется?

3. Что такое энергия?

4. Что такое работа? Как найти работу постоянной силы? Как найти работу системы сил?

5. Что такое мощность?

6. Какая энергия называется кинетической? Чему она равна?

7. Какая энергия называется потенциальной? Чему она равна в поле тяжести Земли, в гравитационном поле, в поле упругих сил?

8. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.

9. Какой удар называется неупругим? Как найти скорость тел после неупругого удара?

10. Какой удар называется упругим? Какие законы сохранения при этом выполняются? Как найти скорости тел после упругого удара?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Уровень 1

3.1. С высоты h = 2,0 м на стальную плиту свободно падает шарик массой $m = 200$ г и отскакивает на высоту $h_1 = 1,0$ м. Определить величину изменения импульса шарика при ударе.

3.2. Человек везет сани по горизонтальной поверхности, натягивая веревку с силой 49 Н. Веревка образует с горизонтальным направлением угол $60°$. Определить работу, совершаемую человеком на пути в 100 м.

3.3. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять груз массой 5,0 кг на высоту 10 м с постоянным ускорением 2,0 м/с? Как изменится работа, совершаемая при равномерном перемещении груза?

3.4. Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела массой 1,0 кг от 2,0 до 6,0 м/с на пути в 10 м. На всем пути действует сила трения 2,0 Н.

3.5. Тело массой $m = 1,0$ кг падает с высоты $h = 20$ м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти среднюю по времени мощность, развиваемую силой тяжести на пути h, и мгновенную мощность на высоте 10 м.

3.6. Камень массой 0,20 кг брошен со скоростью 20 м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Найти кинетическую, потенциальную и полную энергии камня через время t = 1 с после начала движения.

3.7. Вагон массой m = 35 т движется на упор со скоростью v = 0,2 м/с. При полном торможении вагона буферные пружины сжимаются на расстояние $\Delta L = 12$ см. Определить максимальную силу F_{max} сжатия буферных пружин и продолжительность Δt торможения.

3.8. Граната, летящая со скоростью 10 м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составила 60 % массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью 25 м/с. Чему равна скорость меньшего осколка?

3.9. Свинцовый шар массой 500 г, движущийся со скоростью 0,60 м/с, сталкивается с неподвижным шаром из воска массой 100 г. Определить кинетическую энергию шаров после удара.

3.10. Конькобежец, стоящий на льду, бросает вдоль поверхности льда камень массой $m = 0,50$ кг. За время t = 2,0 с камень прошел до остановки расстояние s = 20 м. С какой скоростью после броска камня начнет двигаться конькобежец, если его масса M = 60 кг?

Уровень 2

3.11. Шарик массой m = 20 г движется по гладкому столу со скоростью $v = 2{,}0$ м/с. Под действием некоторой силы он поворачивает на угол 90° без изменения модуля скорости. Определить среднюю величину этой силы, если она действовала в течение времени $\Delta t = 0{,}10$ с.

3.12. Камень массой 100 г, соскользнувший с наклонной плоскости высотой 3 м, приобрел в конце ее скорость 6 м/с. Найти работу силы трения.

3.13. Определить работу, совершаемую при подъеме груза массой m = 50 кг по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ к горизонту на расстояние s = 4 м, если время подъема t = 2 с, а коэффициент трения $\mu = 6{,}0 \cdot 10^{-2}$.

3.14. Платформа, нагруженная песком M = 2,0 т, стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой m = 8,0 кг и застревает в нем. Принимая силу трения равной 0,10 mg, определить, сколько метров пройдет платформа до остановки, если в момент попадания скорость снаряда $v = 450$ м/с, а ее направление – сверху вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту.

3.15. На покоящийся шар массой $m_1 = 5{,}0$ кг налетает со скоростью $v_2 = 5{,}0$ м/с шар массой $m_2 = 3{,}0$ кг. Направление движения второго шара изменяется на угол $\alpha = 45°$. Определить скорости шаров после удара, если удар шаров был абсолютно упругим.

3.16. Камень, падая с высоты 5 м, углубляется в мягкий грунт на 2 см. Чему равна средняя сила удара, если масса камня 5 кг?

3.17. Из ствола автоматического пистолета вылетела пуля массой $m_1 = 10$ г со скоростью $v_1 = 300$ м/с. Затвор пистолета массой $m_2 = 200$ г прижимается к стволу пружиной, жесткость которой k = 25 кН/м. На какое расстояние отойдет затвор после выстрела? Считать, что пистолет жестко закреплен.

3.18. Из пружинного пистолета выстрелили вертикально вниз в мишень, находящуюся на расстоянии 2,0 м от него. Совершив работу 0,12 Дж, пуля застряла в мишени. Какова масса пули, если пружина была сжата перед выстрелом на 2,0 см, а ее жесткость 100 Н/м?

3.19. Молотом массой 5,0 кг, имеющим скорость 10 м/с, ударяют по куску железа на наковальне. Общая масса куска железа и наковальни 100 кг. Считая удар неупругим, найти работу деформации и КПД удара.

3.20. Два шарика, массы которых $m = 0{,}10$ кг и $M = 0{,}20$ кг, висят, соприкасаясь, на вертикальных нитях длиной l = 1,5 м (рис. 60). Маленький шарик отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости. Какое количество теплоты выделится в результате абсолютно неупругого удара шариков?

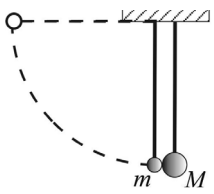


Рис. 60

Уровень 3

3.21. Тело скользит с наклонной плоскости высотой h и углом наклона α к горизонту и движется далее по горизонтальному участку. Принимая коэффициент трения на всем пути постоянным и равным μ, определить расстояние s, пройденное телом на горизонтальном участке, до полной остановки.

3.22. Определить, во сколько раз уменьшится скорость шара, движущегося со скоростью v_1, при его соударении с покоящимся шаром, масса которого в n раз больше массы налетающего шара. Удар считать центральным и абсолютно упругим.

3.23. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 10 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка, массы которых соотносятся как 1:2. Осколок меньшей массы полетел горизонтально со скоростью 20 м/с. На каком расстоянии от места выстрела упадет второй осколок? Считать поверхность земли плоской и горизонтальной.

3.24. Пуля летит горизонтально со скоростью $v_0 = 150$ м/с, пробивает стоящий на горизонтальной поверхности льда брусок и продолжает движение в прежнем направлении со скоростью $v_0 / 3$. Масса бруска в 10 раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между бруском и льдом $\mu = 0{,}10$. На какое расстояние s сместится брусок к моменту, когда его скорость уменьшится на 10 %?

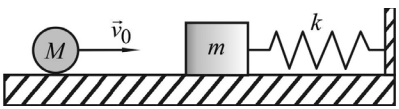


Рис. 61

3.25. На гладкой горизонтальной плоскости покоится брусок массой m = 60 г, прикрепленный к концу легкой пружины жесткости k = = 40 Н/м. Другой конец пружины закреплен неподвижно (рис. 61). В брусок попадает пластилиновый шарик массой M = 40 г, летящий

горизонтально со скоростью $v_0 = 2{,}0$ м/с. После удара брусок с прилипшим к нему шариком движется поступательно вдоль оси пружины. Каково максимальное сжатие пружины?

3.26. Шар массой $m_1 = 2{,}0$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и при этом теряет 40 % кинетической энергии. Определить массу m_2 большего шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

3.27. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Масса первого шара 0,20 кг, масса второго – 0,10 кг. Первый шар отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту 4,5 см, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если: а) удар упругий; б) удар неупругий?

3.28. Определить работу A растяжения двух соединенных последовательно пружин с коэффициентами жесткости $k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 250$ Н/м, если первая пружина при этом растянулась на $\Delta L = 2{,}0$ см.

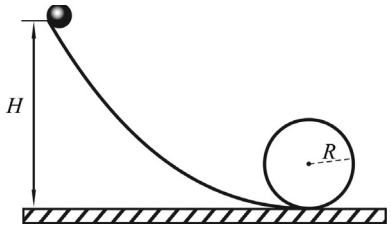


Рис. 62

3.29. Шарик может скользить по желобу, изображенному на рис. 62. С какой минимальной высоты h должен соскальзывать шарик, чтобы он в течение одного полного оборота не оторвался от поверхности желоба? Радиус закругления желоба равен R.

3.30. Из пушки массой $M = 2540$ кг, находящейся у подножья наклонной плоскости, вылетает в горизонтальном направлении снаряд массой $m = 12$ кг с начальной скоростью $v_0 = 800$ м/с. На какую высоту поднимется пушка по наклонной плоскости в результате отдачи, если угол наклона плоскости $\alpha = 5{,}0°$, а коэффициент трения пушки о плоскость $\mu = 0{,}12$?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Горлов Б.Б.* Физика. Теория, задачи, тесты: учеб. пособие для поступающих в вузы, перераб. и доп. / Б.Б. Горлов, А.В. Баранов, Г.Е. Невская. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 280 с.

2. *Кравченко Н.С.* Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме / Н.С. Кравченко, О.Г. Ревинская; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического ун-та, 2011. – 88 с.

3. *Кунце Х.-И.* Методы физических измерений: пер. с нем. / Х.-И. Кунце. – М.: Мир, 1989. – 216 с.

4. *Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности / Л.А. Сена – М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1969. – 304 с.

5. SI Brochure: The International System of Units (SI) (англ.) // Bureau International des Poids et Mesures [Электронный ресурс]. – 8-е издание, 2006; обновлено в 2014. – Режим доступа: http://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/ (дата обращения: 09.10.2016).

6. *Пилоян Р.А.* Основы научно-исследовательской деятельности (на примере физкультурного вуза): учеб. пособие / Р.А. Пилоян. – Малаховка: МГАФК, 1997. – 63 с.

7. Философия: Энциклопедический словарь / под ред. А.А. Ивина. – М.: Гардарики, 2004. – 1072 с.

8. *Петров А.В*. Моделирование систем: учеб. пособие / А.В. Петров. – Иркутск: Изд-во Иркутского госуд. техн. ун-та, 2000. – 268 с.

9. *Перегудов Ф.И.* Введение в системный анализ / Ф.И. Перегудов, Ф.П. Тарасенко. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.

10. *Разумовский В.Г.* Научный метод познания и обучение / В.Г. Разумовский, В.В. Майер // Физика в школе. – М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2004. – 463 с.

11. *Петров Н.Ю.* Физическая лаборатория школьника. Часть 2: учеб.-метод. пособие / Н.Ю. Петров, Н.Ю. Березин, В.В. Христофоров. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015. – 108 с.

12. *Готман А.Ш.* Тензорное исчисление: учеб. пособие / А.Ш. Готман. – Новосибирск: Новосибирская гос. акад. вод. трансп., 2007. – 129 с.

13. *Жилин П.А*. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П.А. Жилин. – СПб.: Нестор, 2001. – 274 с.

14. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д.В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2005. – 304 с.

15. *Бородихин В.М.* Линейная алгебра. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: учеб. пособие / В.М. Бородихин, А.П. Путинцева, Э.Г. Соснина. – Новосибирск, 2004. – 156 с.

16. *Фихтенгольц Г.М*. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 томах. Т. 1 / пред. и прим. А.А. Флоринского. – М.: Физматлит, 2003. – 680 с.

17. *Бородихин В.М.* Высшая математика: учеб. пособие / В.М. Бородихин, М.Ю. Васильчик, Н.В. Вахрушев, В.А. Селезнев, В.В. Хаблов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. – Т. 1. – 280 с.

18. *Виленкин Н.Я.* Что такое прои.зводная / Н.Я. Виленкин, А.Г. Мордкович // Квант. – 1975. – № 12. – С. 10–18.

19. *Балаш В.А*. Задачи по физике и методы их решения: учеб. пособие / В.А. Балаш. – М.: Просвещение, 1983. – 434 с.

20. *Петров Н.Ю.* Физическая лаборатория школьника. Ч. 3: учеб.-метод. пособие / Н.Ю. Петров, Н.Ю. Березин, В.В. Христофоров. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – 76 с.

21. *Паршаков А.Н.* Принципы и практика решения задач по общей физике: учеб. пособие / А.Н. Паршаков. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – Ч. 1: Механика. Физика макросистем. – 249 с.

22. *Жилин П.А.* Теоретическая механика: учеб. пособие. / П.А. Жилин. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. – 146 с.

23. *Русаков В.С*. Механика. Методика решения задач: учеб. пособие / В.С. Русаков, А.И. Слепков, Е.А. Никанорова, Н.И. Чистякова. – М.: Физический факультет МГУ, 2010. – 368 с.

24. *Цеплин Е.Е*. Краткий справочник по физике: учеб. пособие / Е.Е. Цеплин, С.Н. Цеплина. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2009. – 65 с.

25. *Крамор В.С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор. – М.: Просвещение, 1990. – 416 с.

26. *Двайт Г.Б.* Тригонометрические функции / Г.Б. Двайт // Таблицы интегралов и другие математические формулы. – 4-е изд. – М.: Наука, 1973. – 228 с.

27. *Бронштейн И.Н.* Прямолинейная тригонометрия / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев // Справочник по математике. – Изд. 7-е, стереотипное. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1967. – 544 с.

28. *Савельев И.В*. Сборник вопросов и задач по физике: учеб. пособие / И.В. Савельев. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 288 с.

29. ГОСТ 8.417-2002. Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы величин. – Взамен ГОСТ 8.417–81.; введ. 01.09.2003. – М.: Стандартинформ, 2010. – 32 с.

30. Symbols, Units and Nomenclature in Physics: Document U. I. P. 20 (1987). – International Union of Pure and Applied Physics. S. U. N. Commission / пер. с англ. А.А. Радцига. – 60 p.

31. Symbols, Units, Nomenclature and Fundamental Constants in Physics: 1987 revision (2010 reprint). – International Union of Pure and Applied Physics. Commission C2 – SUNAMCO / Prepared by E. Richard and Cohen Pierre Giacomo. – 67 p.

32. Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry / E.R. Cohen et al. – IUPAC Green Book, 3rd Edition, 2nd Printing, IUPAC & RSC Publishing, Cambridge, 2008 – 236 p.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Тесты для самостоятельного решения

Методические указания к выполнению зачетной работы по механике

1. Зачетная работа содержит шесть заданий: три задания части ***A*** и три задания части ***B***.

2. В заданиях части ***A*** предлагается выбрать верный вариант из предложенных. Каждое задание должно сопровождаться кратким решением / пояснением.

3. При выполнении зачетной работы требуется обязательно привести развернутые решения / пояснения к заданиям частей ***B***.

4. Возможные оценки заданий частей ***A*** – 0–1 балл.

5. Возможные оценки заданий части ***B*** – 0–2 балла.

6. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

ВАРИАНТ **№ 1**

Часть *A*

A1. Два тела движутся так, что их координаты меняются в зависимости от времени по законам $x_1(t) = 1 + 5t$ (м), $x_2(t) = 4 + t$ (м).

До встречи со вторым телом первое пройдет путь, равный…

1) 5 м;
2) 6 м;
3) 9 м.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

A2. В каком из перечисленных случаев вес тела, подвешенного на пружине, будет наибольшим?

1) Груз покоится.
2) Движется с ускорением, направленным вверх.
3) Движется с ускорением, направленным вниз.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

A3. Тело массой m под действием постоянной вертикальной силы F_0 поднимается на высоту $H/2$. Чему равна работа силы тяжести?

а) 0;

b) $(F_0 - mg)H/2$;

c) $mgH/2$;

d) $-mgH/2$;

e) $-F_0 H$.

Правильный ответ . . .
(***указать букву***)

Часть *B*

B1. Тело брошено вниз со скоростью 20 м/с с высоты 25 м. Скорость, с которой тело упадет на землю, равна . . .

(***численное значение***)

B2. За какое время колесо, имеющее угловую скорость 6π рад/с, совершит 600 оборотов?

(***численное значение***)

B3. Транспортер поднимает песок на автомашину, совершая при этом работу, равную 1000 Дж. Длина транспортера 5,00 м, а угол наклона к горизонту $\alpha = 45,0°$. Масса поднятого песка равна . . .

(***численное значение***)

ВАРИАНТ **№ 2**

Часть *A*

A1. Два тела движутся так, что их координаты меняются в зависимости от времени по законам $x_1(t) = 4 - 2t$ (м), $x_2(t) = -6 + 3t$ (м).

До встречи с первым телом второе пройдет путь, равный:

1) 4 м;

2) 6 м;

3) 3 м.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

A2. При движении гири в инерциальной системе отсчета вверх ее вес увеличился вдвое. Проекция ускорения, с которым поднимают гирю, на направление движения равна:

a) $-g$;

b) g;

c) $2g$;

d) $0,5g$;

e) $-0,5g$.

Правильный ответ . . .
(***указать букву***)

A3. Тело массой m под действием постоянной горизонтальной силы F_0 перемещается по направлению действия силы на расстояние L. Чему равна работа силы F_0, если коэффициент трения равен μ?

a) 0;
b) $(F_0 + \mu mg)L$;
c) μmgL;
d) $-\mu mgL$;
e) $F_0 L$.

Правильный ответ . . .
(***указать букву***)

Часть *B*

B1. Начальное значение радиуса-вектора $\vec{r}_1 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$, конечное значение $\vec{r}_2 = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Приращение радиуса-вектора равно . . .

(***выразить через заданные величины***)

B2. Найти угловую скорость часовой стрелки часов.

(***численное значение***)

B3. Мяч массой 0,4 кг свободно падает с высоты 8 м. Кинетическая энергия мяча на высоте 6 м равна . . .

(***численное значение***)

ВАРИАНТ **№ 3**

Часть *A*

A1. Движение материальной точки вдоль оси *x* описывается уравнением

$$x(t) = 4 - 3t + 4t^2.$$

В момент времени *t* = 2 с проекция скорости на ось *x* равна:
1) 6 м/с;
2) –6 м/с;
3) 5 м/с;
4) –5 м/с;
5) 0.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

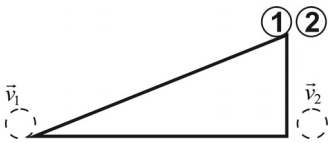
A2. В инерциальной системе отсчета тело массой 4 кг движется по прямой вдоль горизонтальной поверхности в одном направлении под действием постоянной силы, равной 6 Н. На какую величину

увеличится импульс тела за 10 с движения, если коэффициент трения $\mu = 0{,}1$?

1) На 40 кг · м/с;
2) 0;
3) 20 кг · м/с;
4) –40 кг · м/с.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

A3. Два одинаковых шарика 1 и 2, находящиеся на наклонной плоскости, имели начальную скорость, равную нулю. Затем один из них начал двигаться по наклонной плоскости, а другой падать вниз по вертикали. Как соотносятся модули конечных скоростей их движения v_1 и v_2? Трение и сопротивление воздуха не учитывать.

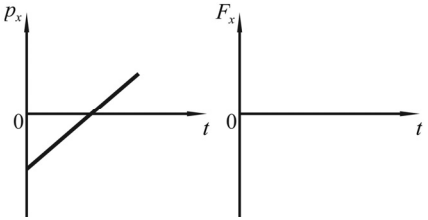


1) $v_1 = 0{,}5v_2$;
2) $v_1 = v_2$;
3) $v_1 = 2v_2$;
4) $v_1 = 4v_2$.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

Часть *B*

B1. На рисунке представлена зависимость проекции импульса тела от времени $p_x(t)$. Изобразить зависимость проекции силы, действующей на тело от времени.



B2. Тело массой 2,0 кг находится на горизонтальной поверхности. Если на тело действует сила 10 Н, направленная под углом 45° к горизонту, то тело движется равномерно. Определить ускорение тела, если угол между направлением той же по величине силы и горизонтом будет равен 30°.

(***численное значение***)

B3. Тело движется под действием постоянной силы 15 Н с постоянной скоростью 2,0 м/с. Мощность, развиваемая двигателем, равна . . .

(***численное значение***)

ВАРИАНТ **№ 4**

Часть *A*

A1. По шоссе в одном направлении одновременно начинают двигаться две машины. Машины движутся в инерциальной системе отсчета равномерно и прямолинейно. Скорость первой машины 36 км/ч, а второй – 72 км/ч. Известно, что вторая машина обгонит первую через 30 мин после начала движения. На каком расстоянии друг от друга находились машины в начальный момент времени?

1) 36 км;
2) 11 км;
3) 18 км;
4) 1080 км;
5) 5 км.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

A2. Два неупругих шара движутся в инерциальной системе отсчета навстречу друг другу со скоростями 1,0 и 5,0 м/с. Каково **изменение** импульса системы после удара, если масса шаров равна 1,0 кг и 2,0 кг соответственно?

1) 0 кг · м/с;
2) 3,0 кг · м/с;
3) 9,0 кг · м/с;
4) 11 кг · м/с.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

A3. Высота полета искусственного спутника над Землей увеличилась с 400 до 600 км. Как изменились в результате этого скорость спутника и его потенциальная (гравитационная) энергия по **абсолютной** величине?

1) Уменьшилась.
2) Увеличилась.
3) Не изменилась.

Скорость спутника	Потенциальная энергия

(***записать в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины***)

Часть *B*

B1. Мальчик массой m качается на качелях с длиной подвеса l. Его скорость при прохождении положения равновесия равна $\vec{v}$. Модуль силы, с которой мальчик давит на сидение в этом положении $F_д =$ . . .

(***выразить через заданные величины***)

B2. Шар массой 3 кг, движущийся со скоростью 24 м/с, налетает на покоящийся шар и после абсолютно упругого столкновения отскакивает от него под углом 90° к первоначальному направлению своего движения со скоростью 12 м/с. Определить массу второго шара.

(***численное значение***)

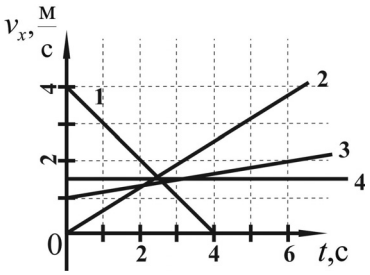
B3. Найти работу, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на 3,0 см, если под действием силы 40 Н пружина сжимается на 2,0 см.

(***численное значение***)

ВАРИАНТ **№ 5**

Часть *A*

A1. Какой из графиков, представленных на рисунке, соответствует движению с максимальным по модулю ускорением при одинаковых направлениях векторов скорости и ускорения?



(*указать номер*)

A2. В инерциальной системе отсчета неупругий шар массой m, движущийся со скоростью $v_1 = 30$ м/с, догоняет шар массой $2m$, движущийся со скоростью $v_2 = 15$ м/с. Найти скорость шаров после соударения.

1) 20 м/с;
2) 25 м/с;
3) 5 м/с;
4) 0.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

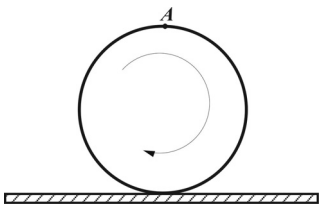
A3. Для того чтобы увеличить кинетическую энергию тела в 4 раза, нужно:

1) скорость тела уменьшить в 2 раза;
2) скорость тела увеличить в 2 раза;
3) скорость тела увеличить в 4 раза;
4) скорость тела уменьшить в 4 раза.

Правильный ответ . . .
(***указать номер***)

Часть *B*

B1. Определить, на сколько метров путь, пройденный свободно падающим телом в десятую секунду после начала падения, больше пути,



пройденного в предыдущую секунду. Начальная скорость тела равна нулю.

(***численное значение***)

B2. Диск катится по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью. Частота вращения диска ν, радиус R. Определить скорость v точки ***A*** диска относительно поверхности.

$v = \ldots$

(***выразить через заданные величины***)

B3. Груз массой m под действием силы, параллельной наклонной плоскости, поднимается по наклонной плоскости с ускорением $g/2$. Длина наклонной плоскости l, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Трением о плоскость пренебречь.

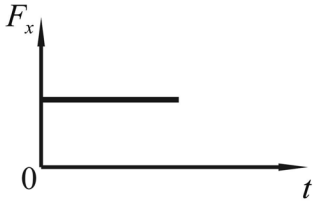
Работа силы $A = \ldots$

(***выразить через заданные величины***)

Ответы на тестовые задания

Номер варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A1	1	2	3	3	1
A2	*2*	*b*	3	1	1
A3	*d*	*e*	2	1; 1	2
B1	$v = 30$ м/с с	$\Delta\vec{r} = -5\vec{i} + \vec{j} - 10\vec{k}$	*	$F_д = m\left(\frac{v^2}{l} + g\right)$	$\Delta S = 10$ м
B2	$T = 200$ с	$\omega = 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ рад/с	$a = 0{,}21$ м/с^2	3 кг	$\upsilon = 4\pi\nu R$ (м/с)
B3	$m = 28.3$ кг	$E_к = 8$ Дж	$N = 30$ Вт	$A = 1{,}8$ Дж	$A = mgl$ (Дж)

(*) Ответ на вопрос B1, вариант 3:



ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица 1

Основные единицы международной системы единиц (СИ) и измеряемые ими величины

Измеряемая величина		Единица			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Определение
			международное	русское	
Длина	*L*	метр	m	м	Метр есть длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени 1/299 792458 с
Масса	*M*	килограмм	kg	кг	Килограмм есть единица массы, равная массе международного прототипа килограмма (В 2011 году CGPM пришла к соглашению, что килограмм должен быть переопределен на основе постоянной Планка, но окончательное решение отложено до 2018 года)
Время	*T*	секунда	s	с	Секунда есть время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133
Электрический ток (сила электрического тока)	*I*	ампер	A	А	Ампер есть сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал

Окончание табл. 1

Измеряемая величина		Единица			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Определение
			международное	русское	
					бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	K	К	Кельвин есть единица термодинамической температуры, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды
Количество вещества	N	моль	mol	моль	Моль есть количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг. При применении моля структурные элементы должны быть специфицированы и могут быть атомами, молекулами, ионами, электронами и другими частицами или специфицированными группами частиц
Сила света	J	кандела	cd	кд	Сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср

Таблица 2

Производные единицы СИ, наименования и обозначения которых образованы с использованием наименований и обозначений основных единиц СИ

Измеряемая величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			международное	русское
Площадь	L^2	квадратный метр	m^2	$м^2$
Объем	L^3	кубический метр	m^3	$м^3$
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	m/s	м/с
Импульс	MLT^{-1}	килограмм на метр в секунду	$kg \cdot m/s$	кг · м/с
Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	m/s^2	$м/с^2$
Волновое число	L^{-1}	метр в минус первой степени	m^{-1}	$м^{-1}$
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	kg/m^3	$кг/м^3$
Удельный объем	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	m^3/kg	$м^3/кг$
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	A/m^2	$А/м^2$
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	A/m	А/м
Яркость	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	cd/m^2	$кд/м^2$

Таблица 3

Примеры производных единиц СИ, имеющие специальные наименования и обозначения

Измеряемая величина		Единица			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Выражение через основные и дополнительные единицы СИ
			международное	русское	
Плоский угол	–	радиан	rad	рад	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{m}^{-1}=1$
Телесный угол	–	стерадиан	sr	ср	$\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{m}^{-2}=1$
Частота	T^{-1}	герц	Hz	Гц	s^{-1}
Сила	LMT^{-2}	ньютон	N	Н	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Pa	Па	$\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	L^2MT^{-2}	джоуль	J	Дж	$\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Мощность	L^2MT^{-3}	ватт	W	Вт	$\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-3}$
Электрический заряд	TI	кулон	C	Кл	$\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}$
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	V	В	$\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-3}\cdot\mathrm{A}^{-1}$
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	F	Ф	$\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{A}^2$
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Q	Ом	$\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-3}\cdot\mathrm{A}^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	S	См	$\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{A}^2$
Световой поток	J	люмен	lm	лм	$\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}$
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	lx	лк	$\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}$

Окончание табл. 3

Измеряемая величина		Единица			
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение		Выражение через основные и дополнительные единицы СИ
			международное	русское	
Момент силы	L^2MT^{-2}	ньютон-метр	$\mathrm{N \cdot m}$	Н · м	$\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}}$
Поверхностное натяжение	MT^{-2}	ньютон на метр	N/m	Н/м	$\mathrm{kg \cdot s^{-2}}$
Пространственная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	$\mathrm{C/m^3}$	$\mathrm{Кл/м^3}$	$\mathrm{m^{-3} \cdot s \cdot A}$
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	V/m	В/м	$\mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}}$
Теплопроводность	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	$\mathrm{W/(m \cdot K)}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{K}}$	$\mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}}$
Молярная энтропия, молярная теплоемкость	$L^2MT^2\Theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	$\mathrm{J/(mol \cdot K)}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$	$\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
Диэлектрическая проницаемость	$L^{-1}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	F/m	Ф/м	$\mathrm{m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2}$
Магнитная проницаемость	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	H/m	Гн/м	$\mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}}$
Плотность магнитного потока, магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	T	Тл	$\mathrm{kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}}$

Таблица 4

Некоторые внесистемные единицы, допустимые к применению наравне с единицами СИ

Наименование величины	Единица			
	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ
		международное	русское	
Масса	тонна	t	т	$1 \cdot 10^3$ kg
	атомная единица массы	u	а.е.м	$1,6605402 \cdot 10^{-27}$ kg
Время	минута	min	мин	60 s
	час	h	ч	3600 s
	сутки	d	сут	86400 s
Объем	литр	l	л	$1 \cdot 10^{-3}\ m^3$
Длина	астрономическая единица	ua	а.е	$1,49598 \cdot 10^{11}\ m$
	световой год	ly	св. год	$9,4605 \cdot 10^{15}\ m$
	парсек	pc	пк	$3,0857 \cdot 10^{16}\ m$
	ангстрем	Å	Å	$1 \cdot 10^{-10}\ m$
Оптическая сила	диоптрия	–	дптр	$1 \cdot m^{-1}$
Энергия	электрон-вольт	eV	эВ	$1,60218 \cdot 10^{-19}\ J$
	киловатт-час	kW · h	кВт · ч	$3,6 \cdot 10^6\ J$
Полная мощность	вольт-ампер	V · A	В · А	–
Реактивная мощность	вольт-ампер реактивный (вар)	var	вар	–

Таблица 5

Основные физические постоянные

Наименование	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	c	$2,99792458 \cdot 10^{8}$ м/с
Элементарный заряд	e	$1,602176565(\pm 35) \cdot 10^{-19}$ Кл*
Масса покоя электрона	m_e	$9,10938291(\pm 40) \cdot 10^{-31}$ кг $5,4857990946 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.
Масса покоя нейтрона	m_n	$1,674927211(\pm 84) \cdot 10^{-27}$ кг $1,00866491600(\pm 43)$ а.е.м.
Масса покоя протона	m_p	$1,672621637(\pm 83) \cdot 10^{-27}$ кг $1,007276466812(\pm 90)$ а.е.м.
Гравитационная постоянная	G	$6,67384(\pm 80) \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Электрическая постоянная (диэлектрическая постоянная)	$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8,854187817620 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,25663706 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Постоянная в законе Кулона	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$8,9875517873681764 \cdot 10^{9}$ Н·м^2/Кл^2 (или Ф$^{-1}$·м)
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02214129(\pm 27) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	k_B	$1,3806488(\pm 13) \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Фарадея	$F = N_A e$	$96485,3399(\pm 24)$ Кл/моль
Универсальная газовая постоянная	$R = k_B N_A$	$8,314472(\pm 15)$ Дж/(моль·(К)
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	V_m	$22,413996(\pm 39) \cdot 10^{-3}$ м^3/моль

Окончание табл. 5

Наименование	Обозначение	Значение
Постоянная Планка	h	$6,62606957(\pm 29)\cdot 10^{-34}$ Дж·с $4,135667516(\pm 91)\cdot 10^{-15}$ эВ·с
	$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$	$1,054571726(\pm 47)\cdot 10^{-34}$ Дж·с $6,58211928(\pm 15)\cdot 10^{-16}$ эВ·с
Абсолютный ноль температуры	T_0	$0\,K = -273,15$ °C
Температура тройной точки воды	–	$273,16\,K = 0,01$ °C
Скорость звука в воздухе при нормальных условиях**	–	331,46 м/с
Стандартное ускорение свободного падения на поверхности Земли	g	9,80665 м/с^2
Постоянная Ридберга	$R_\infty = \dfrac{m_e k^2 e^4}{4\pi\hbar^3}$	$1,0973731568539(\pm 55)\cdot 10^7$ м$^{-1}$
Радиус 1-й боровской орбиты	$a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$	$5,2917720859(\pm 36)\cdot 10^{-11}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$	$927,400915(\pm 23)\cdot 10^{-26}$ Дж·Тл$^{-1}$
Удельный заряд электрона	$\dfrac{e}{m_e}$	$-1,758820088(\pm 39)\cdot 10^{11}$ Кл/кг
Средний радиус Земли	$R_з$	$6,371\cdot 10^6$ м
Масса Земли	$M_з$	$5,9736\cdot 10^{24}$ кг
Постоянная Стефана–Больцмана	$\sigma = \dfrac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$	$5,670373(\pm 21)\cdot 10^{-8}$ Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$

*Число в скобках после значения показывает квадратическую погрешность (квадратичное отклонение) в последних значащих цифрах на уровне 1σ (среднеквадратическое отклонение).

***Нормальные условия* (н. у., англ. *Standard temperature and pressure*, *STP*) – физические условия, с которыми обычно соотносят свойства веществ. Нормальные условия

определены *IUPAC* (Международным союзом практической и прикладной химии) следующим образом:

- атмосферное давление 101 325 Па = 760 мм рт. ст.;
- температура воздуха 273,15 К = 0 °С.

При н. у. плотность воздуха 1,293 кг/м^3.

Стандартные условия (ст. у., англ. *Standard Ambient Temperature and Pressure*, *SATP*) – значения температуры и давления, при которых определяются значения различных количественных характеристик веществ, зависящие от давления и температуры, определены *IUPAC* (Международным союзом практической и прикладной химии) следующим образом:

- давление 1 бар = 10^5 Па = 750,06 мм рт. ст.;
- температура 298,152 К = 25 °С.

При ст. у. молярная концентрация вещества 1 моль·дм$^{-3}$.

Таблица 6

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц*

Десятичный множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		международное	русское
Кратные			
10^{24}	иотта	Y	И
10^{21}	зетта	Z	З
10^{18}	экса	E	Э
10^{15}	пета	P	П
10^{12}	тера	T	Т
10^{9}	гига	G	Г
10^{6}	мега	M	М
10^{3}	кило	k	к
10^{2}	гекто	h	Г
10^{1}	дека	da	Да
Дольные			
10^{-1}	деци	d	д
10^{-2}	санти	c	С
10^{-3}	милли	m	м

Окончание табл. 6

Десятичный множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		международное	русское
10^{-6}	микро	μ	мк
10^{-9}	нано	n	н
10^{-12}	пико	p	п
10^{-15}	фемто	f	ф
10^{-18}	атто	a	а
10^{-21}	зепто	z	з
10^{-24}	иокто	y	и

*Наименования и обозначения единиц времени (минута, час, сутки), плоского угла (градус, минута, секунда), астрономической единицы, диоптрии и атомной единицы массы **не допускается** применять с приставками.

Таблица 7

Греческий алфавит

Буква	Русское название	Буква	Русское название
Αα	альфа	Νν	ню
Ββ	бета	Ξξ	кси
Γγ	гамма	Οο	омикрон
Δδ	дельта	Ππ	пи
Εε	эпсилон	Ρρ	ро
Ζζ	дзета	Σσ	сигма
Ηη	эта	Ττ	тау
Θθ	тэта	Υυ	ипсилон
Ιι	йота	Φφ	фи
Κκ	каппа	Χχ	хи
Λλ	ламбда	Ψψ	пси
Μμ	мю	Ωω	омега

Таблица 8

Производные некоторых элементарных функций

Функция $f(x)$	Погрешность Производная функции $f'(x)$
$C \cdot x$ $C = \text{const}$	C
$x + C$	1
$C \cdot xy(x)$	$C\left(xy' + yx'\right)$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
C^x	$C^x \ln(C)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Окончание табл. 8

Функция $f(x)$	Погрешность
	Производная функции $f'(x)$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$y = f(x),\ x = \phi(y)$ $f\left[\phi(y)\right] \equiv y$	$y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$
$y = \arcsin x,\ \ x = \sin y$	$y'_x = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(g(x))$	$\dfrac{df(g)}{dg} \cdot \dfrac{dg(x)}{dg} = f'_g g'_x$

Таблица 9

Некоторые математические формулы[1]

Тригонометрические тождества
Основные тригонометрические формулы
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$ $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
Формулы сложения и вычитания аргументов
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};\quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$
Формулы двойного угла
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

Продолжение табл. 9

Тригонометрические тождества
$\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$; $\quad \mathrm{ctg}2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$
Формулы тройного угла
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ $\mathrm{tg}3\alpha = \dfrac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$; $\quad \mathrm{ctg}3\alpha = \dfrac{3\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}^3\alpha}{1-3\mathrm{ctg}^2\alpha}$
Формулы понижения степени
$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$; $\quad \cos^3\alpha = \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \dfrac{1-\cos 4\alpha}{8}$ $\sin^3\alpha\cos^3\alpha = \dfrac{3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha}{32}$
Формулы преобразования произведений функций
$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$ $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2}$ $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$
Формулы преобразования суммы функций
$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\quad \mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

Продолжение табл. 9

Тригонометрические тождества
Универсальная тригонометрическая подстановка
$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$
Формула сложения гармонических колебаний[2]
$A\sin\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\varphi)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{B}{A}$
Формула Эйлера
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
Основные теоремы
Теорема косинусов[3]
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
Теорема синусов[4]
$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$
Формулы Виета[5]
$a_1 = -(C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$ $a_2 = C_1C_2 + C_1C_3 + \ldots + C_1C_n + C_2C_3 + \ldots + C_{n-1}C_n$

Продолжение табл. 9

Основные теоремы

$$a_3 = -\left(C_1C_2C_3 + C_1C_2C_4 + ... + C_{n-2}C_{n-1}C_n\right)$$

...

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}\left(C_1C_2...C_{n-1} + C_1C_2...C_{n-2}C_n + ... + C_2C_3...C_n\right)$$

$$a_n = (-1)^n C_1C_2...C_n$$

Формулы приближенных вычислений[6]

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x, \quad \Delta x < 0.093$$

$$\sqrt{1-\Delta x} \approx 1 - \frac{1}{2}\Delta x, \quad \Delta x < 0.085$$

$$\left(x_0 + \Delta x\right)^n \approx {x_0}^n + n{x_0}^{n-1}\Delta x$$

$$\sqrt{xy} \approx \frac{x+y}{2}, \quad x \to y$$

$$\frac{1}{1 \pm \Delta x} \approx 1 \mp \Delta x, \quad \Delta x < 0.031$$

$$\sin\Delta x \approx \Delta x, \quad \Delta x < 0.077 \text{ рад}$$

$$\cos\Delta x \approx 1 - \frac{\Delta x^2}{2}, \quad \Delta x < 0.387 \text{ рад}$$

$$\mathrm{tg}\Delta x \approx \Delta x + \frac{\Delta x^3}{3}; \quad \mathrm{ctg}\Delta x \approx \frac{1}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{3}$$

$$e^{\pm\Delta x} \approx 1 \pm \Delta x, \quad \Delta x < 0.045$$

$$\ln(1 \pm \Delta x) \approx \pm\Delta x, \quad \Delta x < 0.045$$

Смешанное произведение

$$\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{b}\left[\vec{c},\vec{a}\right] = \vec{c}\left[\vec{a},\vec{b}\right]$$

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

Продолжение табл. 9

Формулы вычисления некоторых интегралов
$\int 0\,\mathrm{d}x = C$
$\int a\,\mathrm{d}x = ax + C$
$\int x^n\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{n-1} + C_1, n \neq -1, \\ \ln\lvert x\rvert + C_2,\ n = -1 \end{cases}$
$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln\lvert\ln x\rvert + C$
$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
$\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$
$\int \dfrac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
$\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$
$\int_0^\infty e^{-\beta x} dx = \dfrac{1}{\beta};\quad \int_0^\infty e^{-\beta x} x dx = \dfrac{1}{\beta^2}$

Окончание табл. 9

Формулы вычисления некоторых интегралов
$\int_0^\infty e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}; \quad \int_0^\infty e^{-\beta x^2} x dx = \frac{1}{2\beta}$ $\int_0^\infty e^{-\beta x^2} x^2 dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}; \quad \int_0^\infty e^{-\beta x^2} x^3 dx = \frac{1}{2\beta^2}$

[1] Таблица составлена на основе работ [25–28].

[2] $A, B \in R$ и $A^2 + B^2 \neq 0$.

[3] a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – соответственно противолежащие им углы.

[4] a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – соответственно противолежащие им углы.

[5] $C_1, C_2, ..., C_n$ – корни уравнения $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0$.

[6] Формулы справедливы для малых Δx. Неравенства указывают значения Δx, при которых расчет по приближенным формулам приводит к ошибкам, не превышающим 0,1 %.

Таблица 10

Значения некоторых математических функций и констант

$e^{1} = 2,718281828$	$\ln x = 2,3026 \lg x$
$\lg e = 0,434294481$	$\pi = 3,141592654$
$\ln 10 = 2,302585093$	$\pi^2 = 9,869604401$
$\lg x = 0,4343 \ln x$	$\sqrt{\pi} = 1,772453851$

Таблица 11

Примеры обозначения физических величин[1]

Наименование величины		Обозначение	Единица СИ	
русское	международное		международное обозначение	русское обозначение
Пространство и время				
Время	Time	t	s	с
Высота	Height	h	m	м
Диаметр	Diameter	d	m	м
Длина	Length	l, L, a	m	м
Длина пути (элемент пути)	Path (element of path)	s (ds)	m	м
Объем, вместимость	Volume	V, v	m^3	$м^3$
Период	Period, periodic time	T	s	с
Площадь	Area	A, S	m^2	$м^2$
Радиус-вектор (вектор положения)	Position vector	r	m	м
Скорость линейная[2]	Velocity	υ, u	$m \cdot s^{-1}$	$м \cdot с^{-1}$
Скорость угловая[3]	Angular velocity	$\boldsymbol{\omega}$	$rad \cdot s^{-1}$, s^{-1}	$рад \cdot с^{-1}$, $с^{-1}$
Ускорение линейное	Acceleration	a	$m \cdot s^{-2}$	$м \cdot с^{-2}$
Ускорение свободного падения[4]	Acceleration of free fall	g	$m \cdot s^{-2}$	$м \cdot с^{-2}$
Угловое ускорение[5]	Angular acceleration	$\boldsymbol{\alpha}$	$rad \cdot s^{-2}$	$рад \cdot с^{-2}$
Частота	Frequency	f, ν	Hz	Гц
Частота угловая (радиальная частота, циклическая частота, круговая частота)[6]	Angular frequency (circular frequency)	ω	$rad \cdot s^{-1}$, s^{-1}	$рад \cdot с^{-1}$, $с^{-1}$

Продолжение табл. 11

Наименование величины		Обозначение	Единица СИ	
русское	международное		международное обозначение	русское обозначение
Механические величины				
Вес	Weight[7]	P, G, W	N	Н
Давление	Pressure	p, P	Pa	Па
Импульс (количество движения)	Momentum[8]	p	$\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$	$\mathrm{кг \cdot м \cdot с^{-1}}$
Коэффициент полезного действия[9]	Energy conversion efficiency	η	%	%
Коэффициент трения	Friction coefficient	μ, f	–	–
Масса	Mass	m	kg	кг
Механическое напряжение (нормальное)	Normal stress	σ	Pa	Па
Механическое напряжение (тангенциальное)	Shear stress	τ	Pa	Па
Модуль упругости (модуль Юнга)	Modulus of elasticity, Young's modulus	E, Y	Pa	Па
Момент силы	Moment of force	M	$\mathrm{N \cdot m}$	$\mathrm{Н \cdot м}$
Мощность	Power	P	W	Вт
Плотность	(mass) density	ρ	$\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$	$\mathrm{кг \cdot м^{-3}}$
Поверхностное натяжение	Surface tension	γ, σ	$\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $\mathrm{J \cdot m^{-2}}$	$\mathrm{Н \cdot м^{-1}}$, $\mathrm{Дж \cdot м^{-2}}$
Гравитационная постоянная	Gravitational constant	G	$\mathrm{N \cdot m^2 kg^{-2}}$	$\mathrm{Н \cdot м^2 кг^{-2}}$
Работа	Work	W, A	J	Дж
Сила	Force	F	N	Н

Окончание табл. 11

Наименование величины		Обозначение	Единица СИ	
русское	международное		международное обозначение	русское обозначение
Механические величины				
Энергия	Energy	$E,\ W$	J	Дж
Энергия кинетическая	Kinetic energy	E_k, T, K	J	Дж
Энергия потенциальная	Potential energy	E_p, V, Φ, U	J	Дж

[1] Величины, выделенные **жирным** шрифтом, – **векторные**. Таблица составлена на основе работ [5, 29–32].

[2] Также существует термин Speed: $\upsilon = |\boldsymbol{\upsilon}| = |\dot{\boldsymbol{r}}| = |d\boldsymbol{r}/dt|$. Скорость иногда обозначается символом $\boldsymbol{v}$.

[3] Угловая скорость может рассматриваться в качестве вектора (псевдовектора), перпендикулярного к плоскости вращения, который задается векторным произведением $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$.

[4] Также существует понятие standard acceleration of gravity (standard acceleration of free fall) – стандартное («нормальное») ускорение свободного падения $g = 9{,}80665\ \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ (фиксированное).

[5] Как и угловая скорость, является псевдовектором. Зачастую обозначается символом ε.

[6] Вводятся единицы измерения: радиан (рад) и стерадиан (ср) для плоского угла и телесного угла соответственно. Так как они имеют размерность 1 (т. е. безразмерны), то могут быть включены в выражения для производных единиц СИ (при необходимости) или опущены, если ясность и смысл не теряются. **Единица герц (Гц) недопустима к использованию для угловой частоты.**

[7] Следует подчеркнуть, что в отечественной литературе понятие «вес» имеет несколько иной смысл, чем термин weight, который более близок к понятию «сила тяжести». Понятию «вес» наиболее подходит английское apparent weight.

[8] В англоязычной литературе также встречается термин impulse $\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{F} dt$, тогда как $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$.

[9] Не входят в систему СИ (по решению Генеральной конференции по мерам и весам они «допускаются для использования совместно с СИ») единицы относительных и логарифмических величин, такие как процент. Коэффициент полезного действия может измеряться в долях.

Таблица 12

Рекомендуемые математические символы[1]

Наименование		Обозначение
русское	международное	
Общие обозначения		
Общие знаки и символы		
Равенство	Equal to	=
Неравенство	Not equal to	≠
Тождественное равенство	Identically equal to	≡
Равенство по определению	by definition equal to	$\underline{\underline{\text{def}}}$, :=
Соответствие	Corresponds to	≙
Приближенное равенство[2]	Approximately equal to	≈
Асимптотическое равенство	Asymptotically equal to	≃
Пропорциональность[3]	Proportional to	∝
Стремление к…	Approaches	→
Знак «больше»	Greater than	>
Знак «меньше»	Less than	<
Знак «много больше»	Much greater than	≫
Знак «много меньше»	Much less than	≪
Знак «больше или равен»	Greater than or equal to	≥
Знак «меньше или равен»	Less than or equal to	≤
Отношение длины окружности к ее диаметру (Пи)	Ratio of the circumference of a circle to its diameter (Pi)	π
Бесконечность	Infinity	∞
Операции		
Знак «сложение»	Plus	+

Продолжение табл. 12

Наименование		Обозначение
русское	международное	
Знак «вычитание»	Minus	$-$
Знак «сложение или вычитание»	Plus or minus	$\pm$
Знак «вычитание или сложение»	Minus or plus	$\mp$
a умножить на b	a multiplied by b	ab, $a \cdot b$, $a \times b$
a разделить на b (4)	a divided by b	a/b, $\frac{a}{b}$, ab^{-1}
a возвести в n-ю степень	a raised to the power n	a^n
Абсолютная величина (абсолютное значение, модуль) a	Magnitude of a	$\lvert a \rvert$
Корень квадратный из a	Square root of a	$\sqrt{a}$, $a^{1/2}$
Корень n-й степени из a	nth root of a	$a^{1/n}$, $\sqrt[n]{a}$
Среднее значение a	Mean value of a	$\overline{a}$, $\langle a \rangle$
p-факториал	Factorial p	$p!$
Сумма (сумма a_i)	Summation (sum of a_i)	$\Sigma\left(\sum a_i, \sum_i a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$
Произведение	Product (product of a_i)	$\Pi\left(\prod a_i, \prod_i a_i, \prod_{i=1}^{n} a_i\right)$
Функции		
Экспоненциальная функция от x	Exponential of x	$\exp x$, e^x
Логарифмическая функция от x по основанию a	Logarithm to the base a of x	$\log_a x$

Продолжение табл. 12

Наименование		Обозначение
русское	международное	
Натуральный логарифм от x	Natural logarithm of x	$\ln x,\ \log_e x$
Десятичный логарифм от x	Common logarithm of x (logarithm to the base 10 of x)	$\lg x,\ \log_{10} x$
Двоичный логарифм от x	Binary logarithm of x (logarithm to the base 2 of x)	$\mathrm{lb}\, x,\ \log_2 x$
Функция «синус x»[5]	Sine of x	$\sin x$
Функция «косинус x»	Cosine of x	$\cos x$
Функция «тангенс x»	Tangent of x	$\tan x,\ \mathrm{tg}\, x$
Функция «котангенс x»	Cotangent of x	$\cot x,\ \mathrm{ctg}\, x$
Функция «секанс x»	Secant of x	$\sec x$
Функция «косеканс x»	Cosecant of x	$\mathrm{cosec}\, x,\ \csc x$
Конечное приращение переменной x	Finite increase of x (change in x)	Δx
Вариация переменной x	Variation of x infinitesimal variation of x)	δx
Полный дифференциал переменной x	Total differential of x	dx
Функция от переменной x	Function of x	$f(x)$
Предел функции $f(x)$	Limit of $f(x)$ (limit of $f(x)$ as x tends to a)	$\lim\limits_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} f(x)$
Производная функции f (первая)	Derivative of f (1st derivative of f)	$\dfrac{df}{dx},\ df/dx,\ f'$
Производная функции f (вторая)	2nd derivative of f	$\dfrac{d^2 f}{dx^2},\ d^2 f/dx^2,\ f''$

Продолжение табл. 12

Наименование		Обозначение
русское	международное	
Производная функции f (n-й степени)	n th derivative of f	$\frac{d^n f}{dx^n}$, $d^n f / dx^n$, $f^{(n)}$
Производная функции f по времени	Time derivative of f	$\dot{f}$
Частная производная функции f	Partial derivative of f	$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial f / \partial x$, $\partial_x f$, f_x
Полный дифференциал функции f	Total differential of f	df
Вариация функции f	Variation of f (infinitesimal variation of f)	δf
Сигнум-функция[6] от a	Signum a (sign of a)	$\operatorname{sgn} a$
Наибольшее целое число, меньшее или равное $a (\le a)$	Greatest integer $\le a$	$\operatorname{ent} a$, $[a]$
Векторное исчисление		
Векторная величина	Vector	A, a
Модуль вектора	Absolute value	$\lvert A \rvert$, A
Единичный вектор	Unit vector	e_a, $\hat{a}$
Единичные координатные векторы (орты)	Unit coordinate vectors (unit vectors in Cartesian coordinate system)	e_x, e_y, e_z, i, j, k
Скалярное произведение векторов a и b	Scalar product of a and b	$a \cdot b$
Векторное произведение векторов[7] a и b	Vector product of a and b	$a \times b$, $a \wedge b$
Градиент скаляра φ	Gradient (gradient of a scalar field φ)	$\operatorname{grad} \varphi$, $\nabla \varphi$

Продолжение табл. 12

Наименование		Обозначение
русское	международное	
Тензор второго порядка	Second order tensor	A
Теория множеств		
Множество натуральных чисел (включая ноль)	The set of positive integers and zero	N
Множество целых чисел	The set of all integers	Z
Множество рациональных чисел	The set of rational numbers	Q
Множество вещественных (действительных) чисел	The set of real numbers	R
Множество комплексных чисел	The set of complex numbers	C
Знак «объединение»	Union	$\cup$
Знак «пересечение»	Intersection	$\cap$
Знак «является элементом множества» (x принадлежит множеству A)	Is an element of (x belongs to A)	$\in$
Знак «не является элементом множества» (x не принадлежит множеству A)	Is not an element of (x does not belong to A)	$\notin$
Знак «содержит»	Is included in	$\subseteq$, $\subset$
Символическая логика		
Отрицание	Negation (negation of…, not)	$\neg$
Импликация («если… то…»)	Implication	$\Rightarrow$
Эквивалентность (биимпликация)	Equivalence, bi-implication (…is equivalent to…)	$\Leftrightarrow$
Квантор общности	Universal quantifier	$\forall$
Квантор существования	Existential quantifier	$\exists$

Окончание табл. 12

Наименование		Обозначение
русское	международное	
Обозначение периодических величин		
Мгновенное значение	Instantaneous value	$x,\ x(t)$
Максимальное значение	Maximum value	$\hat{x},\ x_{\max}$
Минимальное значение	Minimum value	$\check{x},\ x_{\min}$
Среднее значение	Mean value	$\overline{x},\ \langle x \rangle$
Среднеквадратичное значение (эффективное значение, действующее значение)	Rms value	$X,\ \tilde{x},\ x_{\text{rms}},\ x_{\text{eff}}$
Матричное исчисление		
Произведение матриц A и B	Product of A and B	AB
Матрица, обратная к A	Inverse of A (inverse of a square matrix A)	A^{-1}
Единичная матрица	Unit matrix	E, I
Матрица, транспонированная к A	Transpose of matrix A	$A^{\mathrm{T}},\ \tilde{A}$

[1] Таблица составлена на основе работ [31, 32].

[2] Для обозначения приближенного равенства иногда используется символ $\sim$. Его лучше ставить в тексте, а в формуле – символ $\approx$.

[3] Иногда используется символ $\sim$, который также применяется для обозначения эквивалентности функций и подобия геометрических фигур.

[4] Иногда для обозначения математической операции «a разделить на b» используют запись $a:b$. Однако этот символ в основном используется для выражения отношения (например, пространственный масштаб на картах $1:200\ 000$ означает, что 1 см на карте соответствует 200 000 см на местности).

[5] Обозначение обратной тригонометрической функции (аркфункции) получается добавлением приставки arc («арк») к названию соответствующей ей тригонометрической функции.

[6] $\operatorname{sgn} a = a/|a|$, если $a \neq 0$, и $\operatorname{sgn} a = 0$, если $a = 0$.

[7] Также часто можно встретить обозначение $[a,b]$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Дано:	**Решение:**
Найти:	

Ответ:

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Таблица 1

Основные физические формулы по разделам классической механики

КИНЕМАТИКА	
Модуль перемещения	$\|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Одномерное равномерное движение	$x = x_0 + \upsilon_x t$ $s = x - x_0 = \upsilon_x t$
Одномерное равноускоренное движение	$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t, \quad x = x_0 + \upsilon_{0x} t + a_x t^2 / 2,$ $s = \left\|\upsilon_{0x} t + a_x t^2 / 2\right\|$
Безвременное уравнение связи между скоростью и перемещением	$s_x = \dfrac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}$
Закон сложения скоростей	$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{u}_{\text{перен}}$
Средняя скорость	$\langle\vec{v}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \left\|\langle\vec{v}\rangle\right\| \le \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$
Равноускоренное движение тела в двух измерениях	$\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_{0x} t + a_x t^2 / 2, \\ y = y_0 + \upsilon_{0y} t + a_y t^2 / 2, \end{cases} \quad \begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t, \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t \end{cases}$
Движение тела, брошенного под углом к горизонту	$\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_{0x} t, \\ y = y_0 + \upsilon_{0y} t - g t^2 / 2, \end{cases} \quad \begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{0x} = \text{const}, \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} - g t \end{cases}$
Радиус-вектор центра масс дискретной механической системы	$\vec{r}_c = \dfrac{\sum\limits_i m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i}$
Координаты центра масс системы	$x_c = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$ $y_c = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$ $z_c = \dfrac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$

Продолжение табл. 1

КИНЕМАТИКА	
Линейная скорость	$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},\ v = \omega R$
Линейное ускорение	$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$
Тангенциальное ускорение	$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau},\ a_\tau = \varepsilon R$
Нормальное (центростремительное) ускорение	$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$
Полное ускорение	$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$
Длина дуги окружности	$S = \varphi R$
Равномерное вращение	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$
Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Частота вращения	$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$
Период вращения	$T = \frac{2\pi}{\omega}$
Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
ДИНАМИКА	
Момент силы относительно неподвижной точки	$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$
Второй закон Ньютона	$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_i}{m}$ $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$
Средняя сила, действующая на тело за время Δt	$\left\langle \vec{F} \right\rangle = \Delta\vec{p} \,/\, \Delta t$

Продолжение табл. 1

ДИНАМИКА	
Импульс силы	$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$
Третий закон Ньютона	$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
Силы тяготения	$\vec{F} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}$
Относительное удлинение	$\varepsilon = \dfrac{x}{l_0}$
Закон Кулона–Амонтона	$F_{\text{тр.с}} = \mu_{\text{с}} N$
Сила трения покоя	$F_{\text{тр.п}} \le \mu_{\text{п}} N$
Сила трения качения	$F_{\text{тр.к}} = N\dfrac{f}{R}$
Закон Гука	$F_{(\text{упр})x} = -k\Delta x = k\left(x_1 - x_2\right)$ $\sigma = E\lvert\varepsilon\rvert;\ \ \varepsilon = \Delta x / x_0$ $\sigma = \dfrac{F_{\text{упр}}}{S}$
Давление	$P = \dfrac{F_{\perp}}{S}$
МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА И ЭНЕРГИЯ	
Работа постоянной силы при поступательном прямолинейном движении	$A = \vec{F}\cdot\vec{\tau}S = \left(F\cos\alpha\right)S = F_{\tau}S$
Механическая работа	$A_{1-2} = \int\limits_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{s_1}^{s_2} F_{\tau}ds$
Мощность	$N = \dfrac{dA}{dt}$
Кинетическая энергия твердого тела	$E_K = m\dfrac{\upsilon^2}{2}$
Потенциальная энергия силы тяжести	$U = mgh$

Окончание табл. 1

МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА И ЭНЕРГИЯ	
Потенциальная энергия гравитационных сил	$E_{\text{п}} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$
Потенциальная энергия силы упругости	$U = k\dfrac{x^2}{2}$
Теорема о кинетической энергии	$\Delta E_к = E_{K2} - E_{K1} = \sum\limits_i A_i^{\text{внеш}} + \sum\limits_i A_i^{\text{внут}}$
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ	
Закон сохранения импульса	$\sum\limits_i \vec{p}_i = \text{const}, \quad \vec{p}_i = m_i\vec{\upsilon}_i$
Закон сохранения механической энергии	$E = E_K + U = \text{const}$
Неупругий удар двух тел	$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}, \quad E_{\text{к}1} \neq E_{\text{к}2}$
Упругий удар двух тел	$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2$ $m_1\dfrac{\upsilon_1^2}{2} + m_2\dfrac{\upsilon_2^2}{2} = m_1\dfrac{\upsilon_1'^2}{2} + m_2\dfrac{\upsilon_2'^2}{2}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
ВВЕДЕНИЕ 5
В1. Первичные понятия 5
В2. Элементы математического аппарата 16
1. Векторы и системы координат 16
2. Операции над векторами 26
3. Физический смысл производной. Дифференцирование и интегрирование 31
В3. Основы решения задач 38
1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ 55
1.1. Теоретический материал и примеры решения задач 55
1.2. Общая схема решения задач кинематики 80
Вопросы для самоконтроля 82
Задачи для самостоятельного решения 84
2. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ 91
2.1. Теоретический материал и примеры решения задач 91
2.2. Общая схема решения задач динамики 103
Вопросы для самоконтроля 104
Задачи для самостоятельного решения 104
3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА 110
3.1. Теоретический материал и примеры решения задач 110
3.2. Общая схема решения задач на законы сохранения 119

Вопросы для самоконтроля 120
Задачи для самостоятельного решения 121
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 125
ПРИЛОЖЕНИЯ 128
Приложение А 128
Приложение Б 134
Приложение В 161
Приложение Г 162

Петров Никита Юрьевич
Кренева Елена Ивановна
Мирсияпов Марис Рафаэльевич

ФИЗИКА

ВВОДНЫЙ КУРС

Механика

Учебное пособие

Редактор *М.О. Мокшанова*
Выпускающий редактор *И.П. Бровановa*
Корректор *Л.Н. Кинщт*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 26.09.2017. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 9,76. Печ. л. 10,5. Изд. № 380/16. Заказ № 1188. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20