

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. ШТЫГАШЕВ, Ю.Г. ПЕЙСАХОВИЧ

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ
МЕХАНИКА
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2017

УДК 53(076.1)
Ш 948

Рецензенты:

канд. техн. наук, доцент *В.В. Христофоров*
канд. физ.-мат. наук, доцент *А.В. Баранов*

Работа подготовлена на кафедре общей физики
для студентов I курса АВТФ

Штыгашев А.А.

Ш 948 Задачи по физике. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество: учебное пособие / А.А. Штыгашев, Ю.Г. Пейсахович. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 160 с.

ISBN 978-5-7782-3186-3

Пособие соответствует первой части рабочей программы по физике для студентов АВТФ, обучающихся по направлениям: «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии», «Программная инженерия», «Информационная безопасность», «Биотехнические системы и технологии», «Машиностроение», «Приборостроение», «Управление в технических системах» и по специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем». Приведены задачи и примеры их решения по всем темам разделов: механика, молекулярная физика и термодинамика, электричество. Предназначено для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

УДК 53(076.1)

ISBN 978-5-7782-3186-3

© Штыгашев А.А., Пейсахович Ю.Г., 2017
© Новосибирский государственный
технический университет, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Решение учебных физических задач является важнейшей частью курса физики. Это позволяет глубже понять природу физических законов и освоить элементарные методики их практического применения. Для того чтобы научиться хорошо решать задачи по физике, необходимо на практических занятиях и самостоятельно прорешать определенное количество достаточно стандартных задач. Решение задач по физике – это активная индивидуальная форма учебной деятельности. С каждой решенной или разобранный задачей растут понимание предмета, профессиональное мастерство студента и уверенность в своих силах, что является немаловажным в процессе обучения и приобретения жизненного опыта.

Специфика физических задач, в отличие от математических и технических, состоит в том, что в них переплетаются качественные и количественные аспекты, которые тем не менее обычно не очень сложно разделить между собой в процессе решения. Это позволяет в конечном счете описать конкретное физическое явление в природе или в технике, и в этом отношении они интересны для любого мыслящего человека.

Решение задач – творческий процесс, как правило, он неформализуем, но можно выделить основные логические этапы и шаги алгоритмической процедуры решения, применимые к широкому кругу физических задач.

1. Внимательно прочитать условие задачи и понять, к какому разделу физики относится данная задача. Вспомнить основные физические законы и формулы этого раздела (их, на удивление, совсем немного, и они имеют довольно простой смысл). Выделить заданные физические величины и те величины, которые надо найти.

2. Сделать эскизный рисунок или схему, на рисунке указать основные векторные и скалярные физические величины.

3. Выписать математические уравнения, связывающие физические величины задачи.

4. Решить систему уравнений. Желательно сначала найти аналитическое решение и проанализировать его. Определить размерность найденных величин, а затем произвести числовые расчеты с требуемой точностью.

5. Полученное решение следует проанализировать на выполнение фундаментальных законов и на соответствие здравому смыслу в очевидных предельных случаях.

6. Выписать ответ.

Весь материал пособия распределен по темам, соответствующим рабочей программе курса физики АВТФ. Каждая тема содержит краткий теоретический раздел справочного характера, примеры решения типовых задач, список задач для аудиторной работы и задания на дом.

Задачи подбирались из апробированных задачников для студентов высших технических учебных заведений, список которых приведен в конце пособия [1–3].

Практикум 1

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Мгновенная скорость материальной точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{i} v_x + \mathbf{j} v_y + \mathbf{k} v_z, \quad (1.1)$$

где $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ – перемещение частицы за промежуток времени Δt ; $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ – радиус-вектор, задающий положение материальной точки относительно системы отсчета, с которой связана декартова система координат с осями $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; x, y, z – проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на координатные оси. Законом движения материальной точки в векторной форме называется временная зависимость $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, а законом движения в координатной форме – зависимость $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Проекции вектора скорости $v_x = dx / dt$, $v_y = dy / dt$, $v_z = dz / dt$, а модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Средняя скорость за время Δt

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Путь, пройденный материальной точкой вдоль траектории за промежуток времени от t до $t + \Delta t$

$$\Delta s = \int_t^{t+\Delta t} v(t) dt. \quad (1.3)$$

Средняя путевая скорость

$$\bar{v} = \Delta s / \Delta t. \quad (1.4)$$

Классический закон сложения скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета; $\mathbf{v}'$ – скорость этой точки относительно системы отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{V}$.

Ускорение материальной точки

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = i a_x + j a_y + k a_z, \quad (1.6)$$

где $a_x = dv_x / dt$, $a_y = dv_y / dt$, $a_z = dv_z / dt$ – проекции вектора ускорения;

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.7)$$

– модуль ускорения.

При криволинейном движении удобно представить вектор ускорения $\mathbf{a}$ в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих, называемых тангенциальным ускорением $\mathbf{a}_\tau$ (направлено по касательной к траектории коллинеарно вектору скорости $\mathbf{v}$) и нормальным ускорением $\mathbf{a}_n$ (направлено перпендикулярно к вектору скорости $\mathbf{v}$ в сторону вогнутости траектории):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n. \quad (1.8)$$

Модули этих ускорений равны

$$a_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (1.9)$$

где R – радиус кривизны траектории.

Пример 1.1. Начальное значение радиуса-вектора равно $\mathbf{r}_1 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, конечное значение равно $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Найти: а) приращение радиуса-вектора $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; б) модуль приращения радиуса-вектора $|\Delta \mathbf{r}|$; в) приращение модуля радиуса-вектора $\Delta |\mathbf{r}|$.

Решение

По определению

$$\text{а) } \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{i}(x_2 - x_1) + \mathbf{j}(y_2 - y_1) + \mathbf{k}(z_2 - z_1),$$

$$\Delta \mathbf{r} = (-1 - 4)\mathbf{i} + (-2 + 3)\mathbf{j} + (2 - 12)\mathbf{k} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 10\mathbf{k};$$

$$\text{б) } |\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

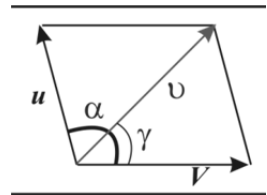
$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(-1-4)^2 + (-2+3)^2 + (2-12)^2} = \sqrt{126};$$

$$\text{в) } |\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{1+4+4} - \sqrt{16+9+144} = 3-13 = -10.$$

Ответ: а) $\Delta \mathbf{r} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 10\mathbf{k}$; б) $|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{126}$; в) $|\Delta \mathbf{r}| = -10$.

Пример 1.2. Лодка перемещается относительно воды в реке со скоростью $\mathbf{u}$ под углом α к направлению скорости течения $\mathbf{V}$. Скорость течения $\mathbf{V}$ параллельна береговой линии. Определить величину v и направление скорости лодки относительно берега, а также перемещение лодки за время t .



К примеру 1.2

Решение

По теореме сложения скоростей скорость $\mathbf{v}$ лодки относительно берега равна векторной сумме

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{V}. \quad (1.10)$$

Возведем это выражение в квадрат $v^2 = u^2 + V^2 + 2\mathbf{uV}$. Раскрывая скалярное произведение $\mathbf{uV} = uV \cos \alpha$, получим абсолютное значение скорости $v = \sqrt{u^2 + V^2 + 2uV \cos \alpha}$. Обозначим через γ угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$, он характеризует направление скорости лодки относительно берега. Спроецируем равенство (1.10) на направление вектора $\mathbf{V}$ (см. рисунок), получим $v \cos \gamma = u \cos \alpha + V$, откуда $\cos \gamma = (u \cos \alpha + V)/v$. (Проверьте, что это выражение согласуется с выражением $\sin \gamma = u \sin \alpha / v$, которое следует из теоремы синусов для треугольника, образованного векторами $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{V}$.)

Перемещение лодки за время t относительно воды в реке равно $\Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{ut}$, а относительно берега равно $\Delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{vt}$.

Ответ: $v = \sqrt{u^2 + V^2 + 2uV \cos \alpha}$, $\cos \gamma = (u \cos \alpha + V)/v$, $\Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{ut}$, $\Delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{vt}$.

Пример 1.3. Рядом с поездом на одной линии с передними буферами электровоза стоит путевой обходчик. В тот момент, когда поезд начал двигаться с ускорением 0.15 м/с^2 , обходчик начал идти в том же направлении со скоростью 1.5 м/с . Через сколько времени поезд догонит человека?

Определить скорость поезда в этот момент и путь, пройденный обходчиком и поездом за это время.

Решение

Направим ось x вдоль железнодорожного пути в направлении движения. Пусть x_0 – координата обходчика и буферов электровоза в момент начала движения. Обозначим через x_1 , v_1 и a_1 координату, скорость и ускорение путевого обходчика, а через x_2 , v_2 и a_2 – координату, скорость и ускорение буферов электровоза. Закон движения путевого обходчика $x_1(t) = x_0 + v_1 t$, а поезда $x_2(t) = x_0 + a_2 t^2 / 2$. Момент встречи t_r определяется уравнением $x_1(t_r) = x_2(t_r)$, т. е. $x_0 + v_1 t_r = x_0 + a_2 t_r^2 / 2$. Это уравнение имеет два решения: $t_{r0} = 0$ – время начала движения и $t_r = 2v_1 / a_2$ – момент обгона. Подставляя данные, получаем $t_r = 2 \cdot 1.5 / 0.15 = 20 \text{ с}$. В момент обгона скорость поезда $v_2(t_r) = a_2 t_r = 0.15 \cdot 20 = 3.0 \text{ м/с}$, а длина пройденного пути $x_1(t_r) - x_0 = x_2(t_r) - x_0 = a_2 t_r^2 / 2 = 0.15 \cdot 20^2 / 2 = 30 \text{ м}$.

Ответ: $t_r = 20 \text{ с}$; $v_2(t_r) = 3.0 \text{ м/с}$, $x_1(t_r) - x_0 = x_2(t_r) - x_0 = 30 \text{ м}$.

Пример 1.4. С высокой башни горизонтально бросили камень со скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Найти радиус кривизны R траектории камня в момент времени $t = 3 \text{ с}$ после начала движения.

Решение

Радиус кривизны R входит в формулу для нормального ускорения $a_n = v^2 / R$, где v – скорость камня, т. е. чтобы найти $R = v^2 / a_n$, необходимо знать a_n и v . Учтем, что полное ускорение камня $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ постоянно и равно ускорению свободного падения $a = g$, поэтому нормальное ускорение есть $a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}$. Скорость камня в момент времени t после броска равна $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$. Тангенциальное

(касательное) ускорение равно $a_\tau = dv/dt$. Вычисляя производную, получим $a_\tau = g^2 t / v$. Таким образом, $R = v^2 / \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = \frac{1}{g v_0} (v_0^2 + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}} = 305.6 \approx 3.0 \cdot 10^2$ м.

Ответ: $R = 3 \cdot 10^2$ м.

Пример 1.5. Из трех труб, расположенных на поверхности Земли, с одинаковой скоростью бьют струи воды под углами $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$ и $\alpha_3 = 30^\circ$ к горизонту. Найти соотношения между наибольшими высотами подъема трех струй, а также между дальностями их падения на горизонтальную плоскость.

Решение

Движение частиц воды будем описывать уравнениями движения тела, брошенного под углом α к горизонту:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t, \\ y = y_0 + v_{0y}t - gt^2/2, \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_{0x}, \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases} \quad (1.11)$$

с начальными условиями $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Время подъема t_h определяется условием $v_y(t_h) = 0$, тогда $t_h = v_{0y} / g$ и максимальная высота подъема есть $h = y_0 + v_{0y}^2 / 2g = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$. Время падения t_l определяется условием $y(t_l) = 0$, т. е. квадратным уравнением $y_0 + v_{0y}t_l - gt_l^2/2 = 0$, и дается соответствующим корнем $t_l = v_{0y} / g + \sqrt{v_{0y}^2 / g^2 + 2y_0 / g} = 2v_{0y} / g = 2v_0 \sin \alpha / g$. Дальность точки падения равна $l = x_0 + v_{0x}t_l = v_0^2 \sin 2\alpha / g$.

Таким образом, отношение высот подъема трех струй воды $h_1 : h_2 : h_3 = \sin^2 \alpha_1 : \sin^2 \alpha_2 : \sin^2 \alpha_3 = 3 : 2 : 1$, а отношение их дальностей падения $l_1 : l_2 : l_3 = \sin 2\alpha_1 : \sin 2\alpha_2 : \sin 2\alpha_3 = \sqrt{3} / 2 : 1 : \sqrt{3} / 2$.

Ответ: $h_1 : h_2 : h_3 = 3 : 2 : 1$, $l_1 : l_2 : l_3 = \sqrt{3} / 2 : 1 : \sqrt{3} / 2$.

Задачи для аудиторной работы

A1.1. Вектор скорости $\mathbf{v}$ изменил направление на обратное. Найти: а) приращение вектора скорости $\Delta \mathbf{v}$; б) модуль его приращения $|\Delta \mathbf{v}|$ и в) приращение модуля $\Delta |\mathbf{v}|$.

A1.2. Штурман круизного лайнера, идущего со скоростью V на северо-восток, определил величину и направление относительной скорости $\mathbf{u}$ проходящего вблизи танкера. При этом оказалось, что относительная скорость $\mathbf{u}$ направлена точно на запад. Найти скорость танкера.

A1.3. Из одного и того же места начали равноускоренно двигаться в одном направлении две точки, причем вторая точка начала свое движение через две секунды после первой. Первая точка имела начальную скорость 1 м/с и ускорение 2 м/с², вторая точка – начальную скорость 10 м/с и ускорение 1 м/с². Через сколько времени и на каком расстоянии от исходного положения вторая точка догонит первую?

A1.4. Камень брошен с башни горизонтально с начальной скоростью 15 м/с. Найти нормальное и тангенциальное ускорение камня через одну секунду после начала движения.

A1.5. Сколько оборотов сделали колеса автомобиля до полной остановки после включения тормоза, если в момент начала торможения автомобиль имел скорость 60 км/ч и остановился через три секунды после начала торможения? Диаметр колес 70 см.

A1.6. На перроне стоит человек. Мимо него равноускоренно движется поезд. Первый вагон проехал мимо человека за время 1 с, второй вагон за 1.5 с. Длина вагона 12 м. Найти ускорение поезда и его скорость в начале наблюдения.

A1.7. Автомобиль движется по мокрому асфальту со скоростью 72 км/ч. Принимая радиус колеса равным 0.5 м, найти, на какую высоту забрасываются капли воды, отрывающиеся от колес.

Задание на дом

B1.1. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 4$ м/с, $B = -0.05$ м/с². Определить момент времени, в который скорость точки равна нулю. Найти координату и ускорение точки в этот момент времени. Построить графики зависимости от времени для координаты, пути, скорости и ускорения материальной точки.

В1.2. Камень падает с высоты 1.2 км. Какое расстояние пролетит камень за последнюю секунду своего падения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

В1.3. Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению $\mathbf{r} = At^3\mathbf{i} + Bt^2\mathbf{j}$. Найти зависимости $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{a}(t)$.

В1.4. По дуге радиусом 10 м движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки равно 4.9 м/с^2 , в этот момент времени векторы полного и нормального ускорения образуют угол 60 градусов. Найти скорость и тангенциальное ускорение.

В1.5. Движение материальной точки по плоской кривой задано уравнениями $x = A_1 t^3$ и $y = A_2 t$, где $A_1 = 1 \text{ м/с}^3$, $A_2 = 2 \text{ м/с}$. Найти явное уравнение траектории, а также скорость и полное ускорение материальной точки в момент времени $t = 0.8 \text{ с}$.

Практикум 2

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

Второй закон Ньютона

$$ma = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{a}$ – ускорение тела массы m под действием суммы приложенных к нему сил $\mathbf{F}_i$.

Алгоритм решения динамических задач

1. Сделать схематический рисунок системы, изобразить на нем рассматриваемые в задаче основные векторы, характеризующие силы, ускорения, скорости, импульсы, моменты и т. п.
2. Выбрать наиболее удобную систему отсчета и ориентацию координатных осей.
3. Записать систему уравнений динамики в векторной форме для всех тел с учетом заданных связей.
4. Записать эти уравнения в проекциях на оси выбранной системы координат.
5. Решить полученную систему алгебраических и/или дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.
6. Привести ответ к наиболее удобной алгебраической форме и проверить на размерность и предельные случаи.
7. Подставить численные значения заданных величин и произвести приближенные вычисления.
8. Записать ответ и дать физическую интерпретацию результата.

Пример 2.1. Два бруска массами $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 10$ кг находятся на гладкой горизонтальной поверхности, связанные невесомой нитью, которая разрывается при силе натяжения $T = 24$ Н. Какую максимальную силу тяги $\mathbf{F}$ можно приложить к а) меньшему грузу? б) к большему грузу?

Решение

Пусть ось x сонаправлена с вектором силы $\mathbf{F}$, а ось y направлена вертикально вверх. Изобразим на рис. 2.1 приложенные к брускам силы тяжести $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ и нормальной реакции N_1 , N_2 (направлены по оси y), силы натяжения нитей T_1 , T_2 и тяги $\mathbf{F}$ (направлены по оси x).

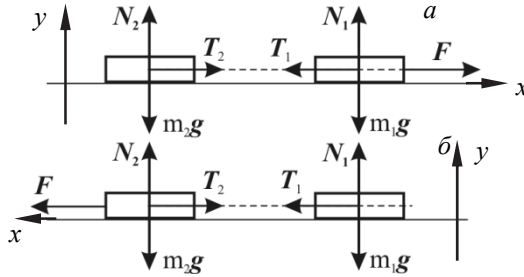


Рис. 2.1. К примеру 2.1

Если ускорение брусков a направлено по оси x , то в случае а) согласно второму закону Ньютона

$$m_1 a = F + N_1 + T_1 + m_1 g ,$$

$$m_2 a = N_2 + T_2 + m_2 g .$$

Проецируя на ось y , имеем соотношения между абсолютными величинами вертикальных сил $N_1 = m_1 g$, $N_2 = m_2 g$.

Проецируя на ось x , имеем

$$\begin{cases} m_1 a = F - T_1, \\ m_2 a = T_2. \end{cases}$$

Невесомость нити обеспечивает равенство $T_1 = T_2 \equiv T$, из второго уравнения системы получаем $a = \frac{T}{m_2}$, тогда первое уравнение дает

$$F = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) T , \text{ откуда следует, что } F_{1\max} = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) T_{\max} .$$

В случае б) аналогичные соотношения принимают вид

$$m_1 a = N_1 + T_1 + m_1 g ,$$

$$m_2 a = F + N_2 + T_2 + m_2 g ,$$

$$N_1 = m_1 g, \quad N_2 = m_2 g, \quad \begin{cases} m_1 a = T_1, \\ m_2 a = F - T_2, \end{cases} \quad T_1 = T_2 \equiv T,$$

$$a = \frac{T}{m_1}, \quad F = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) T, \quad \text{откуда} \quad F_{2\max} = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) T_{\max}.$$

Подставляя численные значения, получаем $F_{1\max} = 36 \text{ Н}$, $F_{2\max} = 72 \text{ Н}$.

Ответ: $F_{1\max} = 36 \text{ Н}$, $F_{2\max} = 72 \text{ Н}$.

Пример 2.2. Тело массой $m = 2 \text{ кг}$ находится на горизонтальной поверхности. Если на тело действует сила тяги $F = 10 \text{ Н}$, направленная под углом $\alpha_1 = 45^\circ$ к горизонту, то тело движется равномерно. Определить ускорение тела, если угол между направлением той же по величине силы тяги и горизонтом будет равен $\alpha_2 = 30^\circ$.

Решение

Запишем второй закон Ньютона

$$ma = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_1 + m\mathbf{g},$$

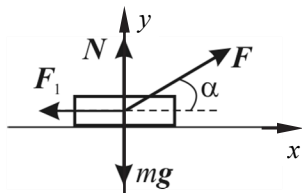


Рис. 2.2. К примеру 2.2

где ускорение тела $\mathbf{a}$ и сила трения $\mathbf{F}_1$ направлены по оси x , а силы тяжести $m\mathbf{g}$ и нормальной реакции $\mathbf{N}$ направлены по оси y , $\mathbf{F}$ — сила тяги, направленная под углом α к горизонту (см. рис. 2.2).

Перепишем это уравнение в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси

$$\begin{cases} ma = F \cos \alpha - F_1, \\ 0 = N + F \sin \alpha - mg. \end{cases} \quad (2.2)$$

Сила трения $F_1 = \mu N$ (μ — коэффициент трения), а силу реакции N найдем из второго уравнения системы (2.2): $N = mg - F \sin \alpha$. При $\alpha = \alpha_1$ ускорение равно нулю, и из первого уравнения (2.2) $0 = F \cos \alpha_1 - \mu(mg - F \sin \alpha_1)$ найдем коэффициент трения $\mu = F \cos \alpha_1 / (mg - F \sin \alpha_1) = 0.48$. Тогда при $\alpha = \alpha_2$ имеем $F_1 = \mu \times$

$\times (mg - F \sin \alpha_2)$, и первое уравнение (2.2) дает ускорение $a_2 = \frac{1}{m} \times$

$$\times (F \cos \alpha_2 - F_1) = \frac{F}{m} \left(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \frac{mg - F \sin \alpha_2}{mg - F \sin \alpha_1} \right) = 0.21 \approx 0.2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_2 \approx 0.2 \text{ м/с}^2$.

Пример 2.3. Найти силу тяги, которую развивает мотор автомобиля, движущегося в гору с постоянным ускорением $a = 1 \text{ м/с}^2$. Масса автомобиля $m = 1 \text{ т}$, уклон прямолинейной трассы составляет $h = 1 \text{ м}$ на каждые $l = 25 \text{ м}$ пути, коэффициент трения $\mu = 0.1$.

Решение

Автомобиль моделируем бруском на плоскости с углом наклона к горизонту α . Для решения задачи введем декартову систему координат с осью x параллельно и осью y перпендикулярно наклонной плоскости вверх. Изобразим на рис. 2.3 приложенные к автомобилю силы тяжести mg , нормальной реакции N , трения F_1 и тяги F .

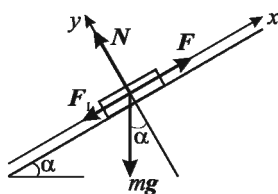


Рис. 2.3. К примеру 2.3

Второй закон Ньютона $ma = F + N + F_1 + mg$ в проекциях на координатные оси принимает вид

$$\begin{cases} ma = F - F_1 - mg \sin \alpha, \\ 0 = N - mg \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.3)$$

Сила трения $F_1 = \mu N$, а силу реакции N найдем из второго уравнения системы (2.3): $N = mg \cos \alpha$, тогда сила тяги есть $F = m(a + g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha))$, где $\sin \alpha = h/l \approx 0.04$ и $\cos \alpha = \cos(\arcsin(h/l)) \approx 0.9992$. Подставляя численные значения в расчетную формулу, получаем $F = 1000(1 + 9.8(0.04 + 0.1 \cdot 0.9992)) = 2371 \text{ Н} \approx 2.4 \text{ кН}$.

Ответ: $F \approx 2.4 \text{ кН}$.

Пример 2.4. Груз массой $m = 10 \text{ кг}$ поднимается вверх с помощью системы подвижного и неподвижного блоков. Определить ускорение груза a , если к концу нити, перекинутой через неподвижный блок, приложена сила $F = 60 \text{ Н}$. Массами нитей и блоков пренебречь.

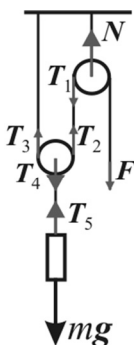


Рис. 2.4. К примеру 2.4

Решение

Изобразим на рис. 2.4 действующие силы.

Из невесомости нитей и блоков с учетом третьего закона Ньютона следует цепочка условий связи для абсолютных значений сил натяжения нитей:

$$T_3 = T_2 = T_1 = F, \quad T_5 = T_4 = 2F.$$

Проекция второго закона Ньютона для груза $ma = mg + T_5$ на вертикальную ось дает $ma = T_5 - mg = 2F - mg$, откуда $a = 2F / m - g = 2 \cdot 60 / 10 - 9.8 = 2.2 \text{ м/с}^2$.

Ответ: $a = 2.2 \text{ м/с}^2$.

Пример 2.5. Моторная лодка массой $m = 400 \text{ кг}$ начинает движение по озеру. Сила тяги мотора равна $F = 200 \text{ Н}$. Определить скорость лодки через $t = 20 \text{ с}$ после начала движения, считая силу сопротивления $F_k = kv$ пропорциональной модулю скорости лодки $v = |v|$. Коэффициент сопротивления $k = 20 \text{ кг/с}$.

Решение

В уравнении второго закона Ньютона $ma = F + F_k + mg + F_A$ выталкивающая сила Архимеда F_A компенсирует силу тяжести mg , а ускорение $a = dv/dt$. Проецируя векторы силы и ускорения на горизонтальное направление вдоль вектора скорости, получаем $dv/dt = F - kv$. Это дифференциальное уравнение первого порядка подстановкой $v = u + F/k$ преобразуем в дифференциальное уравнение $mdu/dt = -ku$ с разделяющимися переменными $du/u = -(k/m)dt$, общее решение которого имеет вид $u = A \exp(-kt/m)$. Возвращаясь к переменной v , получаем $v = F/k + A \exp(-kt/m)$. Постоянную интегрирования A найдем из начального условия $v(0) = 0$, т. е. $F/k + A = 0$, откуда $A = -F/k$. Таким образом, искомая формула имеет вид

$$v = (F/k)(1 - \exp(-kt/m)). \quad (2.4)$$

Подставляя численные значения заданных величин, получаем $v = 10(1 - \exp(-20 \cdot 20 / 400)) = 6.3$ м/с.

При $t \rightarrow \infty$ предельная скорость равна $v_{\infty} = F / k = 10$ м/с.

Ответ: $v = 6.3$ м/с.

Задачи для аудиторной работы

A2.1. Два груза массами 5 и 10 кг находятся на горизонтальной поверхности, связаны нитью, которая разрывается при силе натяжения 24 Н. Какую максимальную силу можно приложить: к меньшему грузу? к большему грузу? Коэффициенты трения грузов принять равными $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$.

A2.2. На столе лежат три бруска массами 1, 1.5 и 2.5 кг. Они связаны друг с другом невесомыми нерастяжимыми нитями. На первый брусок действует сила 10 Н, направленная вдоль стола. Определить ускорение брусков и силу натяжения нитей. Коэффициент трения брусков о стол 0.05.

A2.3. Автомобиль массой 3 т движется в гору с постоянной скоростью. Найти силу тяги мотора автомобиля, если угол наклона трассы 30° , коэффициент трения 0.1.

A2.4. Вычислить время, за которое тело соскользнет с наклонной плоскости высотой 26 см с углом наклона 60° , если по наклонной плоскости с углом наклона 45° и тем же коэффициентом трения оно движется равномерно.

A2.5. Катер массой 2 т трогается с места и в течение 10 с развивает при движении по спокойной воде скорость 4 м/с. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости, определить скорость лодки через 20 с после начала ее движения. Коэффициент сопротивления 20 кг/с.

Задание на дом

B2.1. На столе лежит брусок массой $m_1 = 4$ кг. К бруску привязан конец шнура, перекинутого через невесомый блок на краю стола. С каким ускорением будет двигаться брусок, если к другому концу шнура привязать гиру массой $m_2 = 1$ кг?

B2.2. Два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 4$ кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением будут двигаться бруски, если

к одному из них приложить силу 10 Н, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения шнура, соединяющего бруски, если силу 10 Н приложить: к первому бруску? ко второму бруску? Трением пренебречь.

В2.3. Наклонная плоскость, образующая угол 25° с горизонтом, имеет длину 2 м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за две секунды. Определить коэффициент трения тела о плоскость.

В2.4. Материальная точка массой 2 кг движется под действием силы F согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1 \text{ м/с}^2$, $D = -0.2 \text{ м/с}^3$. Найти значения этой силы в моменты времени 2 с и 5 с. В какой момент времени сила равна нулю?

Практикум 3

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

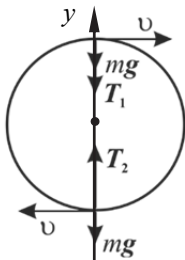


Рис. 3.1. К примеру 3.1

Пример 3.1. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости (рис. 3.1). Найти массу камня, если разность между максимальной и минимальной силами натяжения равна 10 Н.

Решение

Согласно второму закону Ньютона

$$ma = T + mg. \quad (3.1)$$

Сила натяжения веревки T имеет противоположные направления и разные абсолютные значения: в верхней точке окружности T_1 , в нижней точке окружности T_2 .

Запишем проекции векторного уравнения (3.1) на ось y в нижней и верхней точках траектории:

$$\begin{cases} ma = T_2 - mg, \\ -ma = -T_1 - mg. \end{cases} \quad (3.2)$$

Сравнивая левые части системы (3.2), имеем $T_2 - mg = T_1 + mg$, откуда $m = (T_2 - T_1) / 2g = 10 / 19.6 = 0.51$ кг.

Ответ: $m \approx 0.51$ кг.

Пример 3.2. Метатель посылает молот массой $m = 5$ кг на расстояние $l = 70$ м по траектории, обеспечивающей максимальную дальность броска при данной начальной скорости. Какая сила действует на спортсмена при ускорении молота? Разгон ведется по окружности радиусом $R = 2.0$ м. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

Пусть начальная скорость молота при броске равна v_0 . Центробежное ускорение $a_n = v_0^2 / R$ определяется силой F , действующей на молот, $F = ma_n$. По третьему закону Ньютона эта сила F

равна по модулю силе F' , действующей на спортсмена. В примере 1.5 получено выражение для дальности полета $l = v_0^2 \sin 2\alpha / g$, откуда следует, что $v_0^2 = gl / \sin 2\alpha$, и для достижения наибольшей дальности полета молота угол бросания α должен быть равен 45° . С учетом сказанного выше $F' = mv_0^2 / R = mgl / R \sin 2\alpha = 1715 \text{ Н} \approx 1.7 \text{ кН}$.

Ответ: $F' = 1.7 \text{ кН}$.

Пример 3.3. Старый проигрыватель пластинок имел три частоты вращения: $\nu = 33, 45$ и 78 об/мин. На пластинку кладут пластмассовую шайбу. Оказывается, что на третьей скорости шайба приходит в движение, если расстояние между шайбой и осью вращения превышает $R = 10$ см. Определите коэффициент трения μ между шайбой и пластинкой.

Решение

При скольжении шайбы возникает сила трения скольжения $F_\mu = \mu N$, и согласно второму закону Ньютона $ma = F_\mu + mg + N$. Проецируем это уравнение на горизонтальную и вертикальную оси, получаем

$$\begin{cases} ma = \mu N, \\ 0 = N - mg, \end{cases} \quad (3.3)$$

откуда $ma = \mu mg$. Учитывая, что центростремительное ускорение равно $a = \omega^2 R$, где $\omega = 2\pi\nu$, получаем расчетную формулу $\mu = 4\pi^2 \nu^2 R / g$. Подставляя численные значения, находим, что коэффициент трения равен $\mu = 0.68$.

Ответ: $\mu = 0.68$.

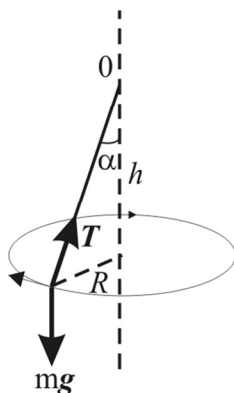


Рис. 3.2. К примеру 3.4

Пример 3.4. Грузик массой $m = 100$ г, прикрепленный к нити, движется равномерно по окружности в горизонтальной плоскости (конический маятник) (рис. 3.2). Расстояние от точки подвеса до горизонтальной плоскости $h = 1$ м. Найти угловую скорость ω .

Решение

Согласно второму закону Ньютона $ma = mg + T$, где T – сила натяжения нити.

Проецируя векторы сил и ускорения на горизонтальную и вертикальную оси, получаем

$$\begin{cases} ma = T \sin \alpha, \\ 0 = T \cos \alpha - mg, \end{cases} \quad (3.4)$$

где α – угол между нитью и вертикальной осью. Из системы уравнений (3.4) получаем: $T = mg / \cos \alpha$, $ma = mg \tan \alpha$, $a = g \tan \alpha$. Учитывая, что центростремительное ускорение равно $a = \omega^2 R$, получаем $\omega^2 R = g \tan \alpha$. С учетом $\tan \alpha = R / h$ имеем $\omega^2 = g / h$ и окончательно получаем $\omega = \sqrt{g / h}$. Подставляя численные значения, находим, что угловая скорость равна $\omega = 3.1$ рад/с.

Ответ: $\omega = 3.1$ рад/с.

Задачи для аудиторной работы

А3.1. Трамвай массой 5 т идет по закруглению радиусом 128 м. Найти силу бокового давления колес на рельсы при скорости 9 км/ч.

А3.2. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью 72 км/ч, делая поворот радиусом 100 м. На какой угол при этом он должен наклониться, чтобы не упасть при повороте?

А3.3. При какой скорости автомобиля давление, оказываемое им на вогнутый мост, в два раза больше давления на выпуклый мост? Радиусы кривизны в обоих случаях равны 30 м.

А3.4. Трек для испытания автомобилей на кривых участках пути имеет виражи, профиль которых в поперечном сечении представляет прямую, наклоненную к горизонту так, что внешний край трека выше внутреннего. С какой наименьшей и наибольшей скоростью можно ехать по виражу, имеющему радиус поворота 50 м и угол наклона 30° к горизонту. Коэффициент трения шин о поверхность трека 0.5.

А3.5. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске лежит груз на расстоянии 10 см от оси вращения. Найти коэффициент трения между

диск и грузом, если при частоте вращения 0.5 об/с груз начинает скользить по поверхности диска.

A3.6. Грузик, привязанный к шнуру длиной 50 см, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Какой угол образует шнур с вертикалью, если частота вращения 1 об/с?

Задание на дом

B3.1. Диск радиусом 40 см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит кубик. Принимая коэффициент трения равным 0.4, найти частоту вращения, при которой кубик соскользнет с диска.

B3.2. Акробат на мотоцикле описывает «мертвую петлю» радиусом 4 м. С какой наименьшей скоростью должен проезжать акробат верхнюю точку петли, чтобы не сорваться?

B3.3. Грузик, привязанный к нити длиной 1 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определить период обращения, если нить отклонена на угол 60° от вертикали.

B3.4. Автомобиль массой 5 т движется со скоростью 36 км/ч по выпуклому мосту. Определить силу давления автомобиля на мост в его верхней части, если радиус кривизны моста равен 50 м.

B3.5. Автомобиль проезжает поворот, радиус кривизны которого равен 200 м. Коэффициент трения колес о покрытие дороги равен 0.1 (гололед). При какой скорости автомобиля начнется его занос?

Практикум 4

РАБОТА И МОЩНОСТЬ

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

УПРУГИЙ И НЕУПРУГИЙ УДАР

Элементарная работа силы $\mathbf{F}$ на малом перемещении $d\mathbf{r}$

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = F \cos \alpha dr . \quad (4.1)$$

Мощность силы $\mathbf{F}$

$$N = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = Fv \cos \alpha , \quad (4.2)$$

где α – угол между силой $\mathbf{F}$ и перемещением $d\mathbf{r}$ (скоростью $\mathbf{v}$).

Полная работа силы $\mathbf{F}$ на траектории L

$$A = \int_L \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_L F \cos \alpha dr . \quad (4.3)$$

Импульс силы за малый промежуток времени dt

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt . \quad (4.4)$$

Импульс материальной точки массой m , движущейся со скоростью $\mathbf{v}$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} .$$

Импульс системы N материальных точек (импульс тела)

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_C , \quad \mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i , \quad (4.5)$$

где $m = \sum_{i=1}^N m_i$ – полная масса, $\mathbf{v}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i\mathbf{v}_i$ – скорость центра масс.

Закон сохранения импульса замкнутой системы

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i\mathbf{v}_i = \text{const} . \quad (4.6)$$

Кинетическая энергия материальной точки

$$E_K = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (4.7)$$

Кинетическая энергия системы N материальных точек

$$E_K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i}. \quad (4.8)$$

Закон изменения кинетической энергии

$$A = E_{K2} - E_{K1}, \quad (4.9)$$

где A – полная работа всех сил по переводу системы из состояния с кинетической энергией E_{K1} в состояние с кинетической энергией E_{K2} .

Потенциальная сила

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U(\mathbf{r}) = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}\right), \quad (4.10)$$

где $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия.

Работа потенциальных сил

$$A = U_1 - U_2, \quad (4.11)$$

где U_1 – потенциальная энергия в начальном состоянии; U_2 – потенциальная энергия в конечном состоянии.

Закон сохранения механической энергии E в замкнутой системе при действии только консервативных сил

$$E = E_K + U = \text{const}, \quad (4.12)$$

где E_K и U – полные кинетическая и потенциальная энергии системы.

При *упругом соударении* тел сохраняются как полный импульс, так и полная механическая энергия системы тел. В частности, при *упругом центральном (лобовом) соударении* двух тел массами m_1 и

m_2 , движущихся со скоростями v_1 и v_2 , их скорости после соударения равны:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.13)$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (4.14)$$

При *неупругом соударении тел* полный импульс системы сохраняется, а полная механическая энергия не сохраняется и частично переходит в тепловую энергию. При *абсолютно неупругом соударении* два тела после соударения слипаются. В частности, при *абсолютно неупругом центральном (лобовом) соударении* двух тел массами m_1 и m_2 , движущихся со скоростями v_1 и v_2 , их скорость после слипания равна

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.15)$$

Пример 4.1. Какова должна быть минимальная мощность двигателя, обеспечивающая взлет самолета? Технические данные самолета: масса 1 т, длина разбега 100 м, взлетная скорость 80 км/ч. Принять коэффициент трения при разбеге 0.2, а движение во время разбега считать равноускоренным.

Решение

Мощность двигателя равна $N = Fv$, где F – сила тяги двигателя, v – скорость самолета. Согласно второму закону Ньютона $ma = F - \mu mg$. Ускорение a дается кинематическим соотношением $a = v^2 / 2x$, где x – длина разбега. Тогда $F = ma + \mu mg$, а мощность $N = Fv = (v^2 / 2x + \mu g)mv = 98.4 \text{ кВт} = 134 \text{ л.с.}$, учитывая, что $1 \text{ л.с.} = 736 \text{ Вт}$.

Ответ: $N \approx 98 \text{ кВт} \approx 130 \text{ л.с.}$

Пример 4.2. На тонкой нити длиной $l = 50$ см подвешен пружинный пистолет так, что ствол расположен горизонтально. На какой угол α отклонится нить после выстрела, если пуля массой $m_1 = 20$ г при вылете имеет скорость $v_1 = 10$ м/с? Масса пистолета $m_2 = 200$ г.

Решение

Из закона сохранения импульса $m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$ получаем скорость пистолета сразу после выстрела $v_2 = m_1 v_1 / m_2$, а из закона сохранения энергии $m_2 v_2^2 / 2 = m_2 g h$ выражаем высоту отклонения пистолета $h = v_2^2 / 2g$. С другой стороны, высота h равна: $h = l - l \cos \alpha$. Приравняв правые части, выражаем $\cos \alpha = 1 - v_2^2 / 2gl$, откуда $\alpha = \arccos(1 - m_1^2 v_1^2 / 2gl m_2^2) \approx 0.456 \text{ рад} \approx 26^\circ$.

Ответ: $\alpha \approx 26^\circ$.

Пример 4.3. Граната массой $m = 2.5 \text{ кг}$, летящая со скоростью $v = 8 \text{ м/с}$, разрывается на два осколка. Один из них имеет массу $m_1 = 1 \text{ кг}$ и скорость $v_1 = 4 \text{ м/с}$, которая направлена перпендикулярно скорости гранаты. Чему равна скорость v_2 второго осколка?

Решение

Согласно закону сохранения импульса $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, где $\mathbf{p}$ – импульс гранаты; $\mathbf{p}_1$ – импульс первого осколка; $\mathbf{p}_2$ – импульс второго осколка. В проекциях на направления векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1$ имеем: $p = p_2 \cos \varphi$ и $p_1 - p_2 \sin \varphi = 0$, где $p = mv$, $p_1 = m_1 v_1$, $p_2 = m_2 v_2$, $m_2 = m - m_1$.

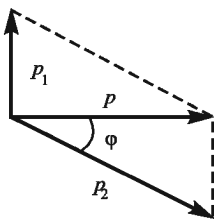


Рис. 4.1. К примеру 4.3

Как видно из рис. 4.1, угол φ вылета второго осколка равен $\varphi = \arctg(p_1 / p) = \arctg(4 / 20) \approx 11^\circ 20'$, величина импульса второго осколка равна $p_2 = \sqrt{p^2 + p_1^2} = 20.4 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, а его скорость $v_2 = p_2 / m_2 = 13.6 \text{ м/с}$.

Ответ: $\varphi \approx 11^\circ 20'$ и $v_2 = 13.6 \text{ м/с}$.

Пример 4.4. Два одинаковых шарика упруго сталкиваются друг с другом. После соударения первый шарик, имевший до удара скорость $v_1 = 5.0 \text{ м/с}$, начинает двигаться под углом $\alpha = 60^\circ$ к первоначальному направлению, а второй шарик останавливается. Найти скорость v'_1 первого шарика после соударения.

Решение

Выпишем законы сохранения импульса

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' \quad (4.16)$$

и энергии

$$m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 = m_1 v_1'^2 / 2, \quad (4.17)$$

где $\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$, $\mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2$ (и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$) – импульсы (и скорости) первого и второго шариков до соударения, $\mathbf{p}_1' = m_1 \mathbf{v}_1'$ (и $\mathbf{v}_1'$) – импульс (и скорость) первого шарика после соударения, массы шариков равны $m_1 = m_2$. В соответствии с

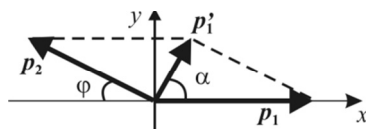


Рис. 4.2. К примеру 4.4

выражением (4.16) построим треугольник импульсов (рис. 4.2). Пусть ось x направлена вдоль $\mathbf{p}_1$, а угол φ характеризует направление вектора $\mathbf{p}_2$.

Проецируем импульсы на оси координат и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} p_1 - p_2 \cos \varphi = p_1' \cos \alpha, \\ p_2 \sin \varphi = p_1' \sin \alpha, \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v_1 - v_2 \cos \varphi = v_1' \cos \alpha, \\ v_2 \sin \varphi = v_1' \sin \alpha, \\ v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2. \end{cases} \quad (4.18)$$

Используя тригонометрическое тождество $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, исключаем угол φ из первого $v_2^2 \cos^2 \varphi = (v_1 - v_1' \cos \alpha)^2$ и второго $v_2^2 \sin^2 \varphi = (v_1' \sin \alpha)^2$ уравнений системы (4.18), получим

$$v_2^2 = v_1^2 - 2v_1 v_1' \cos \alpha + v_1'^2. \quad (4.19)$$

Третье уравнение системы (4.18) дает $v_2^2 = v_1'^2 - v_1^2$. Приравняв правые части двух последних выражений, имеем $v_1' = v_1 / \cos \alpha = 5 / 0.5 = 10$ м/с.

Ответ: $v_1' = 10$ м/с.

Пример 4.5. Человек массой $m_1 = 80$ кг, бегущий со скоростью $v_1 = 10$ м/с, догоняет тележку массой $m_2 = 100$ кг, движущуюся со скоростью $v_2 = 8$ м/с, и вскакивает на нее. С какой скоростью v будет двигаться тележка?

Решение

Импульс бегущего человека равен $p_1 = m_1 v_1$, импульс пустой тележки $p_2 = m_2 v_2$, а импульс тележки с человеком на ней равен $p = (m_1 + m_2) v$.

Закон сохранения импульса $p_1 + p_2 = p$ дает уравнение $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$, откуда $v = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$. Подставляя численные значения величин, получаем $v = (800 + 800) / 180 = 8.9$ м/с.

Ответ: $v = 8.9$ м/с.

Пример 4.6. Три лодки с равными массами $M_1 = M_2 = M_3 \equiv M = 250$ кг идут друг за другом с одинаковыми скоростями $v_1 = v_2 = v_3 \equiv v = 5$ м/с. Из второй лодки одновременно в первую и третью бросают грузы массой по $m = 25$ кг со скоростью $u = 2$ м/с относительно второй лодки. Определить скорость лодок после переброски грузов.

Решение

При взаимодействии каждой лодки с соответствующими грузами выполняется закон сохранения импульса. Удобно провести рассмотрение в системе отсчета, связанной с неподвижной водой. Найдем проекции векторов скоростей и импульсов на направление исходного движения лодок. Для груза, брошенного в первую лодку, эти проекции равны $u_+ = v + u$ и $p_+ = m u_+ = m(v + u)$, а для груза, брошенного в третью лодку, они равны $u_- = v - u$ и $p_- = m u_- = m(v - u)$. До переброски грузов импульс каждой лодки равен $p = M v$. После переброски грузов первая лодка имеет массу $M + m$, скорость v_1 и импульс $(M + m) v_1$, вторая лодка имеет массу $M - 2m$, скорость v_2 и импульс $(M - 2m) v_2$, третья лодка имеет массу $M + m$, скорость v_3 и импульс $(M + m) v_3$.

Таким образом, закон сохранения импульса позволяет записать следующие уравнения.

1. Для первой лодки

$$Mv + m(v + u) = (M + m)v_1,$$

откуда

$$v_1 = v + u \frac{m}{M + m}, \quad v_1 \approx 5.2 \text{ м/с.}$$

2. Для второй лодки

$$Mv = m(v + u) - m(v - u) + (M - 2m)v_2,$$

откуда

$$v_2 = \frac{Mv - m(v + u) + m(v - u)}{M - 2m} = 5.75 \approx 5.8 \text{ м/с.}$$

3. Для третьей лодки

$$Mv - m(v - u) = (M + m)v_3,$$

откуда

$$v_3 = v - u \frac{m}{M + m}, \quad v_3 = 4.82 \approx 4.8 \text{ м/с.}$$

Ответ: $v_1 = 5.2 \text{ м/с}$, $v_2 = 5.8 \text{ м/с}$, $v_3 = 4.8 \text{ м/с}$.

Задачи для аудиторной работы

A4.1. Какую мощность должен развивать трактор при перемещении прицепа массой 5 т вверх по уклону со скоростью 3.6 км/ч, если угол наклона 20° , а коэффициент трения прицепа 0.2?

A4.2. Пуля массой $m = 9 \text{ г}$ ударяется о маятник массой $M = 1 \text{ кг}$ и длиной нити подвеса, равной $l = 1 \text{ м}$, и застревает в нем, в результате нить отклонилась на угол $\varphi = \pi / 3$. Какая доля кинетической энергии пули перейдет в тепло?

A4.3. Два шара массами 200 г и 800 г, подвешенные на двух параллельных нитях длиной 2 м, касаются друг друга. Меньший шар отводят на 90° от начального положения и отпускают. Найти скорости шаров после столкновения, считая: 1) удар абсолютно упругим, 2) удар абсолютно неупругим. Какая часть энергии пойдет на нагревание шаров?

A4.4. При бета-распаде первоначально покоящегося нейтрона образуется протон, электрон и нейтрино. Импульсы протона и электрона p_1 и p_2 , угол между ними α . Определить импульс нейтрино.

A4.5. На подножку вагонетки, которая движется прямолинейно со скоростью 15 м/с, прыгает человек в направлении, перпендикулярном к ходу вагонетки. Масса вагонетки 250 кг. Какой станет скорость вагонетки, если масса человека 80 кг?

A4.6. Две лодки массой 100 кг каждая идут вдоль параллельных прямых навстречу друг другу с одинаковой скоростью 5 м/с. Когда лодки встречаются, из первой во вторую перебрасывают груз массой 25 кг. Найти новые скорости лодок.

Задание на дом

B4.1. Под действием постоянной силы вагонетка прошла путь 5 м и приобрела скорость 2 м/с. Определить работу силы, если масса вагонетки равна 400 кг и коэффициент трения 0.01.

B4.2. Тело массой 50 кг падает с высоты 25 м. Определить среднюю и мгновенную мощности, развиваемые силой тяжести. Сопротивлением воздуха пренебречь.

B4.3. При выстреле из орудия снаряд массой 10 кг получает кинетическую энергию 1.8 МДж. Определить кинетическую энергию ствола орудия вследствие отдачи, если масса ствола орудия равна 600 кг.

B4.4. Два неупругих шара массами 2 и 3 кг движутся со скоростями соответственно 8 и 4 м/с. Определить увеличение внутренней энергии шаров при их столкновении в двух случаях: 1) меньший шар нагоняет больший; 2) шары движутся навстречу друг другу.

B4.5. Шар массой 2 кг налетает на покоящийся шар массой 8 кг. Импульс движущегося шара равен 10 кг·м/с. Удар шаров центральный, упругий. Определить после удара: 1) импульсы шаров; 2) изменение импульсов; 3) кинетические энергии шаров; 4) изменение кинетической энергии первого шара; 5) долю кинетической энергии, переданной первым шаром второму.

Практикум 5

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{n}, \quad (5.1)$$

где $d\varphi$ – малый угол поворота за время dt ; $\mathbf{n}$ – единичный вектор, направление которого определяется правилом буравчика.

Линейная скорость

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5.2)$$

материальной точки при вращательном движении с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, радиус-вектор $\mathbf{r}$ отсчитывается от оси вращения.

Угловое ускорение

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (5.3)$$

Момент инерции материальной точки, вращающейся вокруг оси

$$J = mr^2, \quad (5.4)$$

где m – масса материальной точки; r – расстояние от нее до оси вращения.

Момент инерции системы N материальных точек, вращающихся вокруг z-оси

$$J = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (5.5)$$

где m_i – масса i -й материальной точки; r_i – расстояние от нее до оси вращения.

Момент инерции твердого тела, вращающегося вокруг оси z

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho(r) r^2 dV, \quad (5.6)$$

где $\rho(r) = dm / dV$ – плотность тела; r – расстояние от элемента объема dV до оси вращения, в цилиндрической системе координат $dV = 2\pi r dr dz$.

Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2, \quad (5.7)$$

где J – момент инерции твердого тела массой m относительно некоторой оси z ; J_C – момент инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела; a – расстояние между осями.

Момент импульса материальной точки

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (5.8)$$

Момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг оси z

$$L_z = J\omega. \quad (5.9)$$

Момент силы

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (5.10)$$

Проекция момента силы на ось z

$$M_z = F_{\perp} l, \quad (5.11)$$

где $F_{\perp}$ – проекция силы на плоскость, перпендикулярную к оси z ; l – плечо силы.

Закон изменения момента импульса

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (5.12)$$

Основной закон динамики вращательного движения тела

$$M_z = J\varepsilon. \quad (5.13)$$

Пример 5.1. Известно, что Луна обращена к Земле одной стороной и совершает полный оборот вокруг Земли за время $T_M = 27.3$ суток. Найти угловую скорость вращения Луны вокруг ее оси. Сравнить эту скорость с угловой скоростью суточного вращения Земли с периодом $T_E = 24$ ч.

Решение

Луна участвует одновременно в нескольких вращательных движениях, основными из них являются вращение вокруг Земли с угловой скоростью $\omega_M = 2\pi / T_M$ и вращение вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0 (рис. 5.1). Покажем, что $\omega_0 = \omega_M$. Пусть в некоторый момент времени Луна находилась на своей орбите, причем плоскость, перпендикулярная радиусу R земной орбиты, содержала прямую AB . После того как Луна переместилась за время t в другое положение, измеряемое углом φ , плоскость повернулась на такой же угол φ , следовательно, угловая скорость обращения Луны по орбите вокруг Земли в точности равна угловой скорости вращения Луны вокруг своей оси

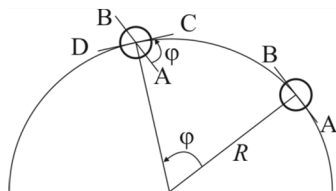


Рис. 5.1. К примеру 5.1

$$\omega_M = 2\pi / T_M = 2\pi / (27.3 \cdot 24 \cdot 3600) = 2.66 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость суточного вращения Земли вокруг собственной оси равна $\omega_E = 2\pi / T_E = 2\pi / (24 \cdot 3600) = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, откуда $\omega_E / \omega_M = 27.3$.

Ответ: $\omega_M = 2.66 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, $\omega_E / \omega_M = 27.3$.

Пример 5.2. Катушка с намотанной нитью может катиться по поверхности стола без проскальзывания. С какой скоростью и в каком направлении будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении вправо со скоростью $v_A = 1 \text{ см/с}$? Диаметр внутреннего цилиндра намотки $R_1 = 1.8 \text{ см}$, диаметр внешней части обода $R_2 = 3.6 \text{ см}$.

Решение

Движение катушки является суперпозицией вращательного движения вокруг оси O и горизонтального поступательного движения со скоростью v_0 (рис. 5.2). В отсутствие проскальзывания точка B сопри-

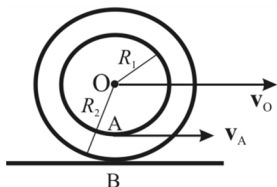


Рис. 5.2. К примеру 5.2

косновения катушки со столом имеет нулевую скорость относительно стола. Поэтому движение катушки в каждый момент времени удобно описывать как чисто вращательное движение с угловой скоростью $\omega = v_0 / R_2$ вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку B соприкосновения с поверхностью стола. Скорость v_A точки A сходата нити с катушки равна $v_A = \omega(R_2 - R_1)$, а

скорость оси катушки O направлена вправо и равна $v_0 = \omega R_2$. Исключая ω , получим $v_0 = v_A R_2 / (R_2 - R_1) = 2$ см/с.

Ответ: $v_0 = 2$ см/с.

Пример 5.3. Записать выражение для вектора момента импульса L материальной точки массой $m = 0.1$ кг, движущейся со скоростью $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ м/с в точке $\mathbf{r} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ м относительно начала координат.

Решение

Импульс материальной точки есть $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = 0.5\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k}$ кг·м/с, момент импульса равен

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} =$$

$$= (yp_z - zp_y)\mathbf{i} + (zp_x - xp_z)\mathbf{j} + (xp_y - yp_x)\mathbf{k}. \quad (5.14)$$

Учитывая, что $x = 1$ м, $y = 2$ м, $z = 3$ м, а $p_x = 0.5$ кг·м/с, $p_y = 0.4$ кг·м/с, $p_z = 0.3$ кг·м/с, получаем $\mathbf{L} = -0.6\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j} - 0.6\mathbf{k}$ кг·м²/с.

Ответ: $\mathbf{L} = -0.6\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j} - 0.6\mathbf{k}$ кг·м²/с.

Пример 5.4. Тонкая однородная пластинка массой $m = 0.6$ кг имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти ее момент инерции относительно оси, совпадающей с одним из катетов, длина которого $a = 0.2$ м.

Решение

По определению (5.6) момент инерции есть $J = \int_m r^2 dm$.

Направим ось y декартовой системы координат перпендикулярно оси вращения OO , как показано на рис. 5.3.

Тогда $r = y$ – расстояние от оси до параллельной оси тонкой полоски длиной l и шириной dy с массой $dm = \rho l dy$, где $\rho = m / S$ – плотность вещества. Площадь треугольной пластинки $S = a^2 / 2$, т. е. $\rho = 2m / a^2$, длину l найдем из пропорции $\frac{AB}{BC} = \frac{a-y}{l} = 1$, откуда $l = a - y$. В итоге получаем

$$J = \int_m r^2 dm = \rho \int_0^a y^2 (a - y) dy = \rho \frac{a^4}{12} = \frac{1}{6} ma^2 = 0.6 \cdot 0.04 / 6 = 0.004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $J = 0.004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

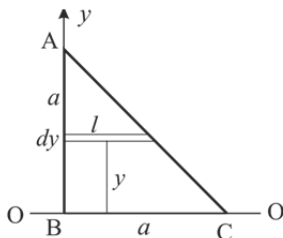


Рис. 5.3. К примеру 5.4

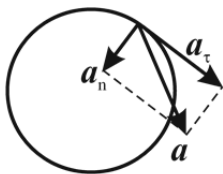


Рис. 5.4. К примеру 5.5

Пример 5.5. Диск радиусом $R = 10$ см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0.5 \text{ рад/с}^2$. Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорение точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения (рис. 5.4).

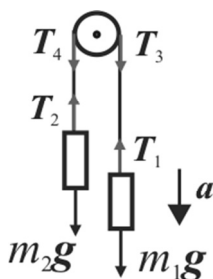
Решение

Нормальное ускорение точек на окружности диска $a_n = \omega^2 R$, тангенциальное ускорение $a_\tau = dv / dt = R d\omega / dt$, где угловая скорость равна $\omega = \varepsilon t$. Тогда $a_n = R \varepsilon^2 t^2 = 0.1 \cdot 0.25 \cdot 4 = 0.1 \text{ м/с}^2$. Тангенциальное

ускорение $a_\tau = R\varepsilon = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05 \text{ м/с}^2$. Полное ускорение $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \approx 0.11 \text{ м/с}^2$.

Ответ: $a_n = 0.1 \text{ м/с}^2$, $a_\tau = 0.05 \text{ м/с}^2$, $a = 0.11 \text{ м/с}^2$.

Пример 5.6. Две гири с массами $m_1 = 2 \text{ кг}$ и $m_2 = 1 \text{ кг}$ соединены нитью, перекинутой через блок массой $m = 1 \text{ кг}$ (рис. 5.5). Найти ускорение, с которым движутся гири, и силы натяжения нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском, трением пренебречь.



Решение

Блок имеет массу, проскальзывания нитей о блок нет и суммарный вращающий момент от сил натяжения нитей T_3 и T_4 не равен нулю. Составим динамические уравнения движения

$$\begin{cases} J\varepsilon = M_3 + M_4, \\ m_1 a = m_1 g + T_1, \\ m_2 a = m_2 g + T_2 \end{cases}$$

Рис. 5.5. К примеру 5.6 и спроецируем векторы первого уравнения на направление, задаваемое правилом буравчика, а векторы второго и третьего уравнения – на ось, направленную вертикально вниз:

$$\begin{cases} J\varepsilon = M_3 - M_4, \\ m_1 a = m_1 g - T_1, \\ -m_2 a = m_2 a - T_2. \end{cases}$$

Момент инерции диска радиуса r равен $J = mr^2 / 2$, а модули моментов сил натяжения нитей $M_3 = rT_3$ и $M_4 = rT_4$. Согласно третьему закону Ньютона $T_1 = T_3$ и $T_2 = T_4$. Угловое ускорение связано с ускорением грузов как $\varepsilon = a / r$, поэтому система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} ma / 2 = T_1 - T_2, \\ m_1 a = m_1 g - T_1, \\ m_2 a = -m_2 a + T_2. \end{cases}$$

Складываем эти уравнения и получаем $(m/2 + m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g$, откуда $a = (m_1 - m_2)g / (m/2 + m_1 + m_2) = 2.8 \text{ м/с}^2$.

Силы натяжения $T_1 = m_1(g - a) = 2(9.8 - 2.8) = 14.0 \text{ Н}$, $T_2 = m_2 \times (g + a) = (9.8 + 2.8) = 12.6 \text{ Н}$.

Ответ: $a = 2.8 \text{ м/с}^2$, $T_1 = 14.0 \text{ Н}$, $T_2 = 12.6 \text{ Н}$.

Задачи для аудиторной работы

A5.1. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0.20 \text{ рад/с}^2$. Найти полное ускорение точки на ободе колеса в момент времени 2.5 с, если скорость точки в этот момент равна 0.65 м/с.

A5.2. На цилиндр, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, намотана нить. К концу нити привязали грузик и предоставили ему возможность опускаться. Двигаясь равноускоренно, грузик за время 3 с опустился на 1.5 м. Определить угловое ускорение цилиндра, если его радиус 4 см.

A5.3. Тело массой 1 кг в поле силы тяжести брошено вертикально вверх с начальной скоростью 10 м/с из точки с координатами (0, 2) м, а затем упало в ту же точку. Найти изменение момента импульса ΔL относительно начала координат за все время движения. Ось z направлена вверх. Сопротивлением воздуха пренебречь. Учесть, что после прохождения максимальной высоты направление момента импульса изменится на противоположное.

A5.4. Найти момент инерции тонкого проволочного кольца радиусом $a = 0.2 \text{ м}$ и массой $m = 0.5 \text{ кг}$ относительно оси, совпадающей с его диаметром.

A5.5. На барабан радиусом 50 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 10 кг. Найти момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорением 2.04 м/с^2 .

A5.6. Три маленьких шарика массой по 10 г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 20 см и скреплены между собой невесомыми стержнями. Определить момент инерции системы относительно оси: 1) перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через его центр; 2) лежащей в плоскости треугольника и проходящей через одну из его высот и середину противоположной стороны.

Задание на дом

B5.1. Определить момент инерции тонкого однородного стержня длиной 30 см и массой 100 г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) его конец; 2) точку, отстоящую от конца стержня на треть его длины.

B5.2. Вычислить момент инерции проволочного прямоугольника со сторонами 12 см и 16 см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины малых сторон. Масса равномерно распределена по длине проволоки с линейной плотностью 0.1 кг/м.

B5.3. Тонкий однородный стержень длиной 50 см и массой 0.4 кг вращается с угловым ускорением 3 рад/с^2 вокруг оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент сил.

B5.4. Вал массой 100 кг и радиусом 5 см вращался с частотой 8 об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой 40 Н, под действием которой вал остановился через 10 с. Определить коэффициент трения.

B5.5. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузики массой 100 г и 110 г. С каким ускорением будут двигаться грузики, если масса блока 0.4 кг?

Практикум 6

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Закон сохранения момента импульса

$$L = \text{const} \quad \text{при} \quad M = 0. \quad (6.1)$$

Закон сохранения момента импульса тела, вращающегося вокруг оси z

$$L_z = J\omega = \text{const} \quad \text{при} \quad M_z = 0. \quad (6.2)$$

Элементарная работа момента силы при повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ вокруг оси z

$$dA = M_z d\varphi. \quad (6.3)$$

Мощность момента силы

$$N = M_z \omega. \quad (6.4)$$

Кинетическая энергия вращательного движения тела вокруг неподвижной оси

$$E_K = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (6.5)$$

Кинетическая энергия вращательного и поступательного движения тела

$$E_K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (6.6)$$

где v_C – скорость центра масс тела; ω и J – угловая скорость и момент инерции вращения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Пример 6.1. Горизонтально расположенный деревянный стержень массой $m_2 = 0.8$ кг и длиной $l = 1.8$ м может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попада-

ет пластмассовый шарик массой $m_1 = 0.003$ кг, летящий перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью $v = 50$ м/с, и упруго отражается. Определить угловую скорость ω вращения стержня и скорость шарика сразу после удара.

Решение

Запишем закон сохранения момента импульса

$$L_1 = L'_1 + L_2,$$

где L_1 и L'_1 – моменты импульса шарика до и после удара; L_2 – момент импульса стержня после удара. Спроецируем векторное уравнение и моменты на ось вращения $L_1 = -L'_1 + L_2$, где $L_1 = m_1 v l / 2$, $L'_1 = m_1 v' l / 2$ (v' – скорость шарика после удара); $L_2 = J\omega$ и $J = m_2 l^2 / 12$, откуда

$$m_1(v + v') = m_2 l \omega / 6. \quad (6.7)$$

Запишем закон сохранения энергии $m_1 v^2 / 2 = m_1 (v')^2 / 2 + J\omega^2 / 2$ в виде уравнения

$$m_1(v - v')(v + v') = m_2 l^2 \omega^2 / 12. \quad (6.8)$$

Из системы уравнений (6.7) и (6.8) получаем $\omega = 2(v - v') / l$, это выражение подставим в (6.7), что дает уравнение $m_1(v + v') = m_2(v - v') / 3$, из которого следует $v' = (m_2 - 3m_1)v / (m_2 + 3m_1) = (0.80 - 0.01)50 / 0.81 = 48.77$ м/с и $\omega = 2(50 - 48.77) / 1.8 = 1.37$ рад/с.

Ответ: $v' \approx 48.8$ м/с, $\omega \approx 1.37$ рад/с.

Пример 6.2. Ротор мотора снабжен тормозом. Тормоз состоит из двух дисков радиусом $R = 0.15$ м. Первый диск закреплен на торце оси ротора и вращается вместе с ним. Второй диск, лишенный возможности вращаться, соосно параллелен первому диску и может прижиматься к нему с силой $F = 100$ Н. Тормоз включают в момент, когда ротор вращается по инерции со скоростью $\omega_0 = 50$ рад/с. Момент инерции ротора вместе с укрепленным на нем диском тормоза $J = 0.628$ кг · м². Коэффициент трения скольжения между поверхностями дисков не за-

висит от относительной скорости и равен $\mu = 0.25$. Считая, что сила F равномерно распределена по поверхности дисков, определить, сколько оборотов N успеет сделать ротор до остановки.

Решение

Число оборотов ротора N до остановки за время t найдем, исключая t из кинематических соотношений $\varphi = \omega_0 t - \varepsilon t^2 / 2$ и $\omega_0 = \varepsilon t$, тогда $\varphi = \omega_0^2 / 2\varepsilon$ и $N = \varphi / 2\pi = \omega_0^2 / 4\pi\varepsilon$.

Чтобы найти угловое ускорение ε , воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения $J\varepsilon = M$, где момент силы торможения рассчитывается по формуле (рис. 6.1):

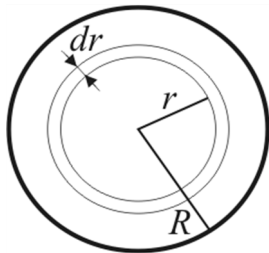


Рис. 6.1. К примеру 6.2

$$M = \mu \int_S |r \times f| dS = \mu \int_S r f 2\pi r dr, \text{ где } f = F / S, S = \pi r^2, dS = 2\pi r dr, \text{ откуда } M = \mu f 2\pi \int_0^R r^2 dr = \mu 2f(\pi R^2)R / 3 = \mu 2FR / 3.$$

Таким образом, угловое ускорение $\varepsilon = 2\mu FR / 3J$, а число оборотов $N = 3J\omega_0^2 / 8\mu FR = 50$.

Ответ: $N = 50$.

Пример 6.3. Космическая станция в виде цилиндра радиусом $R = 200$ м и массой $m_1 = 5000$ т вращается с угловой скоростью $\omega = 0.5$ рад/с вокруг оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно основаниям цилиндра. Предмет массой $m_2 = 100$ кг, летевший со скоростью $v = 20$ км/с по касательной к поверхности станции, захватывается специальным устройством. Определить изменение угловой скорости станции после столкновения.

Решение

Будем считать, что масса станции равномерно распределена по ее поверхности и момент инерции станции относительно оси вращения равен $J_1 = m_1 R^2$, а момент инерции предмета равен $J_2 = m_2 R^2$. Согласно закону сохранения момента импульса $J_1 \omega + L_2 = (J_1 + J_2) \omega'$, где $L_2 = R m_2 v$ – момент импульса предмета до захвата; ω' – угловая ско-

рость станции после захвата, откуда $\omega' = (J_1\omega + m_2 Rv) / (J_1 + J_2) = 0.502$ рад/с. Изменение угловой скорости равно $\Delta\omega = \omega' - \omega = 0.02$ рад/с.

Ответ: $\Delta\omega = \omega' - \omega = 0.02$ рад/с.

Пример 6.4. Горизонтальная платформа в виде однородного диска радиусом $R = 1.5$ м и массой $m_1 = 100$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $\nu = 10$ об/мин. Человек массой $m_2 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Какую работу совершает человек при этом переходе?

Решение

Считая систему «платформа–человек» замкнутой, воспользуемся законом сохранения момента импульса в проекции на ось вращения

$$L_1 + L_2 = L'_1, \quad (6.9)$$

где абсолютные величины моментов импульсов относительно оси вращения равны $L_1 = J_1\omega$ (диск с $J_1 = m_1 R^2 / 2$, ω – начальная угловая скорость); $L_2 = J_2\omega$ (человек на краю диска с $J_2 = m_2 R^2$), $L'_1 = J_1\omega'$ (ω' – конечная угловая скорость диска), из (6.9) следует, что $\omega' = (J_1 + J_2)\omega / J_1$, т. е. $\omega' = 1.2\pi(1 + 1.2) = 2.3$ рад/с = 22 об/мин.

Кинетическая энергия в начальном состоянии $E_{K1} = (J_1 + J_2)\omega^2 / 2 = (m_1 / 2 + m_2)R^2\omega^2 / 2 = 47.3$ Дж, а в конечном состоянии – $E_{K2} = J_1\omega'^2 / 2 = m_1 R^2\omega'^2 / 4 = 299$ Дж. Совершенная человеком работа равна разности этих энергий $A_{12} = E_{K2} - E_{K1} \approx 250$ Дж.

Ответ: $\omega' = 2.3$ рад/с, $A_{12} = 250$ Дж.

Пример 6.5. В середине осени 2014 года комета диаметром 50 км прошла мимо Марса со скоростью 56 км/с на расстоянии $37 \cdot 10^3$ км. Оценить возможное изменение угловой скорости вращения Марса в результате воображаемого столкновения с кометой в экваториальной плоскости, если бы направление скорости относительно нормали к поверхности планеты составило $\alpha = 60^\circ$ (рис. 6.2). Масса Марса

$M = 6.4185 \cdot 10^{23}$ кг, радиус $R = 3389.5$ км, период суточного вращения $T = 24.6229$ ч.

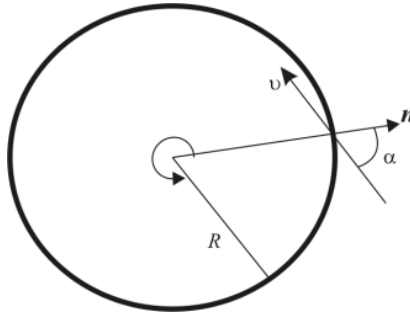


Рис. 6.2. К примеру 6.5

Решение

Угловая скорость вращения Марса до столкновения $\omega = 2\pi / T = 7.088 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Будем считать, что комета ударила по ходу вращения планеты, поэтому в результате удара угловая скорость вращения Марса должна увеличиться. Запишем закон сохранения момента импульса $L_1 + L_2 = L'_1$ в проекциях на ось вращения

$$L_1 + L_2 = L'_1, \quad (6.10)$$

где $L_1 = J_1\omega$ – момент импульса Марса до столкновения; $J_1 = (2/5)MR^2$ – его момент инерции; $L_2 = |\mathbf{R} \times m\mathbf{v}| = Rm v \sin(\pi - \alpha) = Rm v \sin \alpha$ – момент импульса кометы до столкновения; $L'_1 = J'_1\omega'$, $J'_1 = (2/5)MR^2 + mR^2$ и ω' – момент импульса, момент инерции и угловая скорость системы после столкновения. В итоге из (6.10) получаем $\omega' = (J_1\omega + Rm v \sin \alpha) / J'_1$.

Кометы в основном состоят из льда, плотность которого $\rho = 1000$ кг/м³. Тогда, считая, что форма головы кометы приблизительно сферическая, оценим массу кометы как $m = \rho \pi D^3 / 6 = 6.55 \cdot 10^{16}$ кг. После воображаемого столкновения угловая скорость Марса стала бы равна $\omega' = (J_1\omega + Rm v \sin \alpha) / J'_1 = 7.09 \cdot 10^{-5}$ рад/с, а увеличение угловой

скорости достигло бы величины $\Delta\omega = \omega' - \omega = 2.1 \cdot 10^{-9}$ рад/с. За год опережение суточного хода времени вследствие удара составило бы $\Delta t = 2.1 \cdot 10^{-9} \cdot 3.15 \cdot 10^7 \approx 0.066$ с.

Ответ: $\Delta\omega = \omega' - \omega = 2.1 \cdot 10^{-9}$ рад/с.

Задачи для аудиторной работы

А6.1. Горизонтально расположенный деревянный стержень массой $m_2 = 0.8$ кг и длиной $l = 1.8$ м может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает и застревает в нем пуля массой $m_1 = 0.003$ кг, летящая перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью 50 м/с. Определить угловую скорость вращения стержня.

А6.2. Деревянный стержень массой 6 кг и длиной 2 м может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. В нижний конец стержня попадает пуля массой 6.1 г, летевшая со скоростью 315 м/с перпендикулярно стержню и оси, и застревает в нем. Определить кинетическую энергию стержня сразу после попадания пули.

А6.3. Наибольшее расстояние от Солнца до Земли $1.52 \cdot 10^{11}$ м, наименьшее $1.47 \cdot 10^{11}$ м, среднее расстояние $1.495 \cdot 10^{11}$ м. Исходя из этих данных найти среднюю $\bar{v}$, максимальную $v_{\max}$ и минимальную $v_{\min}$ скорости движения Земли при ее движении по орбите. Сравнить полученные значения.

А6.4. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом 2 м, стоит человек массой 80 кг. Масса платформы равна 240 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найти, с какой угловой скоростью станет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью 2 м/с относительно платформы.

А6.5. Найти линейные скорости центров масс шара, сплошного цилиндра и полого цилиндра, скатывающихся без проскальзывания с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости 30° , высота 0.5 м, начальная скорость всех тел равна нулю.

Задание на дом

В6.1. Однородный тонкий стержень массой 200 г и длиной 1 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. В нижний конец стержня попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально со скоростью 10 м/с, и прилипает к стержню. Масса шарика 10 г. Определить угловую скорость стержня сразу после удара.

В6.2. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой 400 г, летящий в горизонтальном направлении со скоростью 20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии 80 см от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, если их суммарный момент инерции равен $6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$?

В6.3. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой 60 кг. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы 240 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

В6.4. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках за нижний конец стержень длиной 2.4 м и массой 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения скамьи. Угловая скорость скамьи Жуковского с человеком равна 1 об/с. С какой скоростью будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции равен $6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$?

В6.5. Пуля массой 10 г летит со скоростью 800 м/с, вращаясь около продольной оси с частотой 3000 об/с. Принимая пулю за цилиндр диаметром 7.6 мм, определить полную кинетическую энергию пули.

Практикум 7

СИЛЫ ИНЕРЦИИ

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

РЕАКТИВНАЯ СИЛА

Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета (НИСО):

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{cor}} + m\mathbf{r}' \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{\text{in}}, \quad (7.1)$$

где $\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ – кориолисова сила; $\mathbf{F}_c = m\omega^2 \mathbf{r}'_{\perp}$ – центробежная сила; $\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\mathbf{A}$ – поступательная сила инерции; $\mathbf{a}'$ – ускорение тела массой m относительно НИСО; $\mathbf{F}$ – внешняя сила; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения НИСО; $\mathbf{A}$ – ускорение поступательного движения НИСО; $\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}'$ – радиус-вектор и скорость тела относительно НИСО, $\mathbf{r}'_{\perp}$ – компонента вектора $\mathbf{r}'$, перпендикулярная оси вращения.

Уравнение движения тела переменной массы m (уравнение Мещерского)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt}, \quad (7.2)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость тела; $\mathbf{F}$ – внешняя сила; $\mathbf{u}$ – относительная скорость отделяющихся (при $dm/dt < 0$) или присоединяющихся (при $dm/dt > 0$) к телу частиц.

Пример 7.1. Какую мощность развивает сила Кориолиса?

Решение

Мощность силы Кориолиса $\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ равна $N = \mathbf{F}_{\text{cor}} \mathbf{v}' = 2m(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega})\mathbf{v}' = 2m(\mathbf{v}' \times \mathbf{v}')\boldsymbol{\omega} = 0$, поскольку из векторного анализа известно, что смешанное произведение векторов не изменяет своей величины при циклической перестановке сомножителей $(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}$, т. е. $(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega})\mathbf{v}' = (\mathbf{v}' \times \mathbf{v}')\boldsymbol{\omega} = 0$, так как $\mathbf{v}' \times \mathbf{v}' = 0$. Таким образом, сила Кориолиса не совершает работу.

Ответ: $N = 0$ Вт.

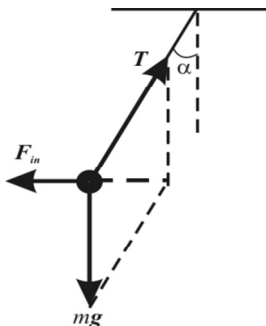


Рис. 7.1. К примеру 7.2

Пример 7.2. Определите скорость поезда в момент начала торможения, считая его движение равнозамедленным, если он остановился, пройдя путь $S = 200$ м, а подвешенный в вагоне отвес при торможении отклонился на угол $\alpha = 5^\circ$ от вертикального направления (рис. 7.1).

Решение

В неинерциальной системе отсчета на покоящееся относительно вагона тело действуют сила тяжести mg , сила натяжения нити T и сила инерции $F_{in} = -mA$, где A – ускорение вагона. Результирующая всех сил равна нулю, т. е. $mg + T - mA = 0$. Проецируя это уравнение на горизонтальную и вертикальную координатные оси, получаем

$$\begin{cases} -mA + T \sin \alpha = 0, \\ T \cos \alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $T = mg / \cos \alpha$, а из первого уравнения $A = g \tan \alpha$. В кинематике (см. практикум 1) было получено соотношение $s = v_0^2 / 2A$, т. е. $v_0 = \sqrt{2sA} = \sqrt{2sg \tan \alpha} = 18.5$ м/с.

Ответ: $v_0 = 18.5$ м/с = 66.7 км/ч.

Пример 7.3. Движение частицы массой $m = 10$ г рассматривается в системе отсчета, вращающейся относительно инерциальной системы отсчета с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Какую работу совершают над частицей силы инерции при ее перемещении из точки, отстоящей от оси вращения на расстояние $R_1 = 1$ м, в точку, отстоящую от оси на расстояние $R_2 = 2$ м?

Решение

Как показано в примере 7.1, кориолисова сила не производит работы. В данном случае работу совершает только центробежная сила инерции, равная $F_c = m\omega^2 r'_\perp$, т. е.

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_c d\mathbf{r} = \int_1^2 m\omega^2 \mathbf{r}'_{\perp} d\mathbf{r}'_{\perp} = m\omega^2 \int_{R_1}^{R_2} r'_{\perp} dr'_{\perp} = m\omega^2 \left(R_2^2 - R_1^2 \right) / 2 = 1.5 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A_{12} = 1.5$ Дж.

Пример 7.4. На широте $\varphi = 45^\circ$ в северном полушарии из ружья горизонтально в плоскости меридиана произведен выстрел по мишени, установленной на расстоянии $l = 100$ м от снайпера (рис. 7.2). Центр мишени находится на оси ружейного ствола. Приближенно считая, что пуля летит с постоянной скоростью $v = 500$ м/с, определить, на какое расстояние и в какую сторону отклонится пуля от центра мишени, если выстрел произведен в северном направлении. Сопротивлением воздуха пренебречь. Период вращения Земли $T = 24$ ч.

Решение

Уравнение движения для пули запишем относительно Земли, с которой связана неинерциальная система отсчета, вращающаяся с угловой скоростью $\omega = 2\pi / T = 7.27 \cdot 10^{-5}$ рад/с: $m\mathbf{a}' = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{кор}}$, где $\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ – сила Кориолиса.

Направление координатных осей показано на рис. 7.2 (ось y направлена вертикально вверх к плоскости рисунка), т. е. $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_z \mathbf{k}$, $\omega_x = \omega \cos \varphi$, $\omega_z = \omega \sin \varphi$, а скорость $\mathbf{v} = v \mathbf{i}$.

Вычисляя векторное произведение, получаем

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v & 0 & 0 \\ \omega_x & 0 & \omega_z \end{vmatrix} = -v\omega_z \mathbf{j}.$$

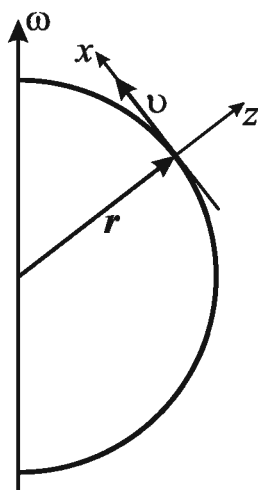


Рис. 7.2. К примеру 7.4

Спроецируем уравнение движения на координатные оси:

$$\begin{cases} ma_x = 0, \\ ma_y = -2m\upsilon\omega_z, \text{ или} \\ ma_z = -mg, \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = 0, \\ a_y = -2\upsilon\omega_z, \\ a_z = -g. \end{cases}$$

Время полета пули t определяем, интегрируя первое из этих дифференциальных уравнений: $a_x = 0$, $\upsilon_x = \upsilon$, $l = \upsilon t$, $t_1 = l / \upsilon = 0.2$ с. Смещение в поперечном направлении найдем, интегрируя второе дифференциальное уравнение: $a_y = -2\upsilon\omega \sin \phi$, $y_1 = a_y t_1^2 / 2 = -1.03 \cdot 10^{-3}$ м, т. е. пуля отклоняется на восток. Смещение пули по вертикали вниз (падение в поле тяжести) найдем, интегрируя третье дифференциальное уравнение: $a_z = -g$, $z_1 = -gt_1^2 / 2 = -0.196$ м.

Ответ: $y_1 = -1.03 \cdot 10^{-3}$ м, $z_1 = -0.196$ м.

Пример 7.5. Железнодорожная платформа массой $m_0 = 20.9$ т начинает двигаться под действием постоянной силы тяги $F = 25$ кН. Из неподвижного бункера сверху на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянная и равна $\mu = 500$ кг/с. Найти зависимости от времени скорости и ускорения платформы, если сила сопротивления движению $F_\mu = 24$ кН. При длине платформы $L = 13.3$ м найти промежуток времени t_1 , в течение которого она находится под бункером, и ее массу m_1 в конце этого промежутка.

Решение

Интегрируя дифференциальное уравнение $\mu = dm / dt$ с начальным условием $m(0) = m_0$, найдем линейный закон изменения массы платформы с песком $m = m_0 + \mu t$. В этом случае уравнение движения тела переменной массы (7.2) $ma = F - F_\mu - \mu \upsilon$, так как $u = -\upsilon$, $a = d\upsilon / dt$, есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно скорости

$$(m_0 + \mu t) \frac{d\upsilon}{dt} = \Delta F - \mu \upsilon, \quad (7.3)$$

где $\Delta F = F - F_\mu$. Разделяя переменные в (7.3) и интегрируя, получим общее решение:

$$v = \frac{\Delta F}{\mu} + \frac{C}{m_0 + \mu t},$$

постоянную интегрирования C находим из начального условия $v(0) = 0$, что дает $C = m_0 \Delta F / \mu$. Таким образом, зависимость скорости от времени описывается выражением

$$v = (F - F_\mu)t / (m_0 + \mu t), \quad (7.4)$$

дифференцируя которое найдем зависимость ускорения от времени

$$a = (F - F_\mu)m_0 / (m_0 + \mu t)^2. \quad (7.5)$$

Далее проинтегрируем (7.4) по времени с учетом $v = dx / dt$, получим зависимость пройденного расстояния от времени

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \frac{F - F_\mu}{\mu^2} \left(m_0 \ln \frac{m_0}{m_0 + \mu t} + \mu t \right). \quad (7.6)$$

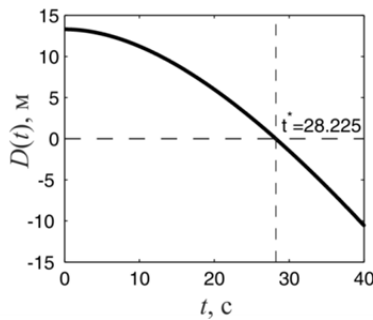


Рис. 7.3. К примеру 7.5

Из нелинейного уравнения $x(t_1) = L$ найдем время погрузки t_1 . Для этого численно построим график функции $D(t) = L - x(t)$ и определим точку его пересечения с осью абсцисс (рис. 7.3). В итоге получим ис-

комое численное решение $t_1 = 28.2$ с, а масса платформы с песком $m_1 = m_0 + \mu t_1 = 35$ т.

Ответ: $v(t)$ (см. (7.4)), $a(t)$ (см. (7.5)), $t_1 = 28.2$ с, $m_1 = 35$ т.

Пример 7.6. Стартовая масса ракеты-носителя «Протон» равна $m_0 = 705$ т, скорость истечения газов $u = 1000$ м/с. Найти скорость ракеты через $t = 100$ с после старта, считая, что скорость изменения массы ракеты постоянна и равна $\mu = 5000$ кг/с.

Решение

Для описания реактивного движения используют уравнение Мещерского (7.2), в котором v – скорость ракеты; u – относительная скорость истечения продуктов реакции ракетного двигателя; F – результирующая всех внешних сил, а скорость изменения массы ракеты определяется конкретной моделью. В проекции на вертикальную ось имеем $ma = -mg + u\mu$, где $a = dv/dt$, $\mu = dm/dt$. Принимая модель

линейного изменения массы $m = m_0 - \mu t$, получаем $\frac{dv}{dt} = -g + \frac{u\mu}{m_0 - \mu t}$.

Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдем $v - v_0 = -gt +$

$$+ \int_0^t \frac{u\mu dt}{m_0 - \mu t}, \text{ откуда } v = v_0 - gt + u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right).$$

Подставляя численные значения параметров с учетом начального условия $v_0 = 0$, получаем значение скорости ракеты $v = 255$ м/с.

Ответ: $v = 255$ м/с.

Задачи для аудиторной работы

A7.1. С каким наименьшим горизонтально направленным ускорением должна двигаться наклонная плоскость с углом наклона 30° , чтобы лежащее на ней тело поднималось по наклонной плоскости? Коэффициент трения между телом и плоскостью равен 0.2.

A7.2. На горизонтально расположенном диске, вращающемся вокруг вертикальной оси, на расстоянии 8 см от оси вращения лежит тело. Определить коэффициент трения между диском и телом, если при угловой скорости 5 рад/с тело начинает скользить по поверхности диска.

A7.3. Электровоз массой 100 т движется с севера на юг в северном полушарии по горизонтальному прямолинейному пути со скоростью 30 м/с на широте 60° . Определить горизонтальную составляющую силы, с которой электровоз давит на рельсы.

A7.4. Вагонетка с песком движется под действием постоянной силы 100 Н. В начальный момент времени масса вагонетки с песком равна 500 кг, а ее скорость равна нулю. В днище вагонетки имеется отверстие, через которое песок высыпается со скоростью 5 кг/с. Найти скорость и ускорение вагонетки в момент времени 10 с. Масса пустой тележки равна 100 кг.

A7.5. Ракета зависла над стартовым столом, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью 900 м/с. Найти время, в течение которого ракета может оставаться в покое, если начальная масса топлива составляет 25 % ее массы без топлива.

Задание на дом

B7.1. С каким горизонтально направленным ускорением должна двигаться наклонная плоскость с углом наклона 30° , чтобы при отсутствии трения находящееся на ней тело не перемещалось относительно плоскости?

B7.2. Нижняя полусфера радиусом 2 м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, делая 1 об/с. Внутри полусферы находится шарик массой 2 кг. Найти высоту шарика, соответствующую положению равновесия шарика относительно дна полусферы, и силу реакции полусферы.

B7.3. Какую работу совершает над частицей кориолисова сила при перемещении частицы относительно вращающейся системы отсчета из точки 1 на экваторе в диаметрально противоположенную точку 2?

B7.4. В точке, расположенной на широте 60° , из ружья произведен выстрел строго вертикально вверх. Через некоторое время пуля упала на Землю. Определить, насколько сместилась упавшая пуля от точки выстрела, если ее начальная скорость 200 м/с. Соппротивление воздуха не учитывать.

B7.5. Ракета зависла над стартовым столом, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью 900 м/с. Найти массу газов, которую должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы остаться на постоянной высоте, если начальная масса ракеты с топливом равна 10 т.

Практикум 8

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Гармонические колебания

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (8.1)$$

где A – амплитуда; $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi / T_0$ – циклическая частота; $\nu_0 = 1 / T_0$ – частота; T_0 – период; $\omega_0 t + \alpha$ – фаза; α – начальная фаза. Раскрывая косинус суммы, придаем (8.1) вид

$$x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t; \quad (8.2)$$

$$c_1 = A \cos \alpha, \quad c_2 = -A \sin \alpha;$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -c_2 / c_1.$$

Комплексная форма записи (8.1)

$$x = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{A} e^{i\omega_0 t} \right\}, \quad \tilde{A} = A e^{i\alpha}. \quad (8.3)$$

Скорость

$$v \equiv dx / dt \equiv \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (8.4)$$

Ускорение

$$a \equiv \ddot{x} \equiv d^2 x / dt^2 = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (8.5)$$

Дифференциальное уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8.6)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k / m}$ – для пружинного маятника; m – масса маятника; k – жесткость пружины; $\omega_0 = \sqrt{g / l}$ – для математического маятника; g – ускорение свободного падения; l – длина маятника; $\omega_0 = \sqrt{mgl / J}$ – для физического маятника; e – расстояние от точки подвеса до центра маятника; J – момент инерции маятника.

Пример 8.1. Материальная точка совершает колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что в момент $t = 0$ заданы начальные смещение $x(0) = 0$ и скорость $v = v(0) < 0$. Определить фазу колебания и моменты времени в течение первого периода: 1) когда скорость $v_1 = 6$ см/с и смещение $x_1 < 0$; 2) когда смещение $x_2 = 1$ см и скорость $v_2 > 0$.

Решение

Запишем (8.1) и (8.4) при $t = 0$ и приравняем начальным условиям $x(0) = A \cos(\alpha) = 0$, откуда следует, что $\alpha = \pi / 2$, так как $v(0) = -\omega_0 A \sin(\alpha) < 0$, т. е. $v(0) \approx -12.6$ см/с. Таким образом,

$$x = A \cos(\omega_0 t + \pi / 2) \text{ и } v = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \pi / 2).$$

В предлагаемых к рассмотрению случаях имеем:

$$1) \omega_0 t_1 + \pi / 2 = (-1)^n \arcsin(-v_1 / \omega_0 A) + \pi n, \text{ где}$$

$$-\pi / 2 \leq \arcsin(-v_1 / \omega_0 A) \leq \pi / 2.$$

При $n = 0$ получим $\omega_0 t_1 + \pi / 2 = \arcsin(-v_1 / \omega_0 A) = 0.498$ и $x_1 = A \cos(\omega_0 t_1 + \pi / 2) = 3.52 > 0$ – это решение не удовлетворяет условию задачи. При $n = 1$ получаем искомое решение $\omega_0 t_1 + \pi / 2 = -\arcsin(-v_1 / \omega_0 A) + \pi = 2.64$ и $x_1 = -3.52 < 0$, что имеет место в момент времени $t_1 = (2.64 - \alpha) / \omega_0 = 0.342$ с;

$$2) \omega_0 t_2 + \pi / 2 = \pi n + 0.5\pi(1 - (-1)^n) + (-1)^n \arccos(x_2 / A), \text{ где}$$

$$0 \leq \arccos(x_2 / A) \leq \pi.$$

При $n = 0$ имеем $\omega_0 t_2 + \pi / 2 = \arccos(0.25) = 1.32$, но $v_2 = v(t_2) = -12.2$ см/с – это решение не удовлетворяет условию задачи, однако при $n = 1$ получаем решение $\omega_0 t_2 + \pi / 2 = 2\pi - \arccos(0.25) = 4.97 \approx 5.0$ и $v_2 = v(t_2) = 12.2$ см/с, что имеет место в момент времени $t_2 = (4.97 - \pi / 2) / \omega_0 = 1.08 \approx 1.1$ с.

Ответ: 1) $\omega_0 t_1 + \pi / 2 = 2.6$, $t_1 = 0.34$ с; 2) $\omega_0 t_2 + \pi / 2 \approx 5.0$, $t_2 \approx 1.1$ с.

Пример 8.2. Для материальной точки, совершающей колебания по закону $x = A \cos \omega t$, где $A = 20$ см, $\omega = 2\pi / 3$ с⁻¹, найти возвращающую силу F в момент $t_1 = 1.0$ с и полную энергию E . Масса материальной

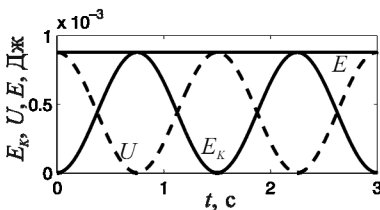


Рис. 8.1. К примеру 8.2

точки равна $m = 10$ г. Построить графики зависимости от времени потенциальной U , кинетической E_K и полной E энергий.

Решение

Возвращающая сила описывается законом упругости Гука $F = -kx$, где для пружинного маятника $k = m\omega^2$, тогда $F = -m\omega^2 A \cos \omega t$. В момент времени $t_1 = 1$ с возвращающая сила равна $F_1 = -m\omega^2 A \cos \omega t_1 = 4.4$ мН. Потенциальная энергия частицы $U = kx^2 / 2 = m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t / 2$, кинетическая энергия $E_K = mv^2 / 2 = m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t / 2$, а полная механическая энергия $E = E_K + U = m\omega^2 A^2 / 2$ не зависит от времени и равна $E = 0.88$ мДж. На рис. 8.1 изображены графики временной зависимости потенциальной энергии, кинетической энергии и полной энергии.

Ответ: $F_1 = 4.4$ мН, $E = 0.88$ мДж.

Пример 8.3. Тонкий обруч, подвешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене (рис. 8.2). Радиус обруча равен $R = 30$ см. Вычислить период T колебаний обруча.

Решение

Уравнение колебаний обруча как физического маятника выводится из уравнения динамики вращательного движения $J\varepsilon = M$, где J – момент инерции обруча относительно горизонтальной оси, проходящей через гвоздь. Согласно теореме Штейнера, он равен $J = J_C + mR^2 = 2mR^2$, так как $J_C = mR^2$, m – масса обруча. Угловое ускорение $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2 = \ddot{\varphi}$, а вращающий момент силы тяжести $M = -mgR \sin \varphi$, где φ – угол отклонения от вертикали прямой, проходящей через центр масс обруча и гвоздь.

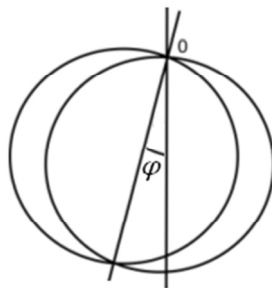


Рис. 8.2. К примеру 8.3

$\sin \varphi \approx \varphi$, и уравнение движения приобретает вид $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$, где $\omega^2 = mgR / J$. Таким образом, $\omega = \sqrt{g / 2R}$, а период колебаний равен $T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{2R / g} \approx 11.55$ с.

Ответ: $T \approx 1.55$ с.

Пример 8.4. В открытую с обоих концов U-образную трубку с площадью поперечного сечения $S = 0.4 \text{ см}^2$ быстро вливают ртуть массой $m = 200$ г. Определить период T колебаний ртути.

Решение

Возвращающая сила относительно положения равновесия равна $F = \rho g S (2y)$, где $\rho = 13\,600 \text{ кг/м}^3$ – плотность ртути; y – отклонение высоты столбика ртути от положения равновесия, а $2y$ – разность высот в левом и правом колене трубки. Уравнение движения ртути имеет вид $m\ddot{y} = -2\rho g S y$. Приводя это уравнение к виду $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, получаем $\omega = \sqrt{2\rho g S / m}$. Период колебаний $T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{m / 2\rho g S} = 0.86$ с.

Ответ: $T = 0.86$ с.

Пример 8.5. Складываются два гармонических колебания $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1.5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2.0$ см. Начальные фазы колебаний $\alpha_1 = \pi / 2$ и $\alpha_2 = \pi / 3$. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания (рис. 8.3).

Решение

Результирующее колебание $x = x_1 + x_2$ описывается уравнением

$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

где $\omega = \omega_1 = \omega_2 = 2\pi / T_1$. Амплитуду A и начальную фазу α найдем из векторной диаграммы $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$, $\alpha = \arctg \left(\frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \right)$.

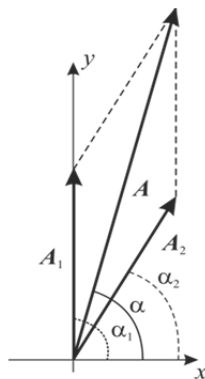


Рис. 8.3. К примеру 8.5

Подставляя численные значения, получаем $A \approx 3.9$ см и $\alpha = 1.3$ рад.

Ответ: $A = 3.9$ см и $\alpha = 1.3$ рад.

Пример 8.6. Движение точки на плоскости задано уравнениями $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A_2 \sin(\omega(t + \tau))$, где $A_1 = 10$ см, $A_2 = 5$ см, $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$, $\tau = \pi/4$ с. Найти уравнение траектории и скорость точки в момент времени $t_1 = 0.5$ с.

Решение

Обозначим $\alpha = \omega\tau$. Преобразуем уравнение для y как $y/A_2 = \sin(\omega t + \alpha) = \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha$, расписывая синус суммы. Выразим отсюда $\cos \omega t$ и возведем его в квадрат. Воспользуемся ра-

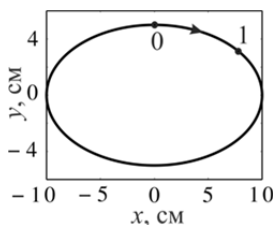


Рис. 8.4. К примеру 8.6

венством $\cos^2 \omega t = 1 - \sin^2 \omega t$ и в полученном выражении исключим время, подставляя $\sin \omega t = x/A_1$ из уравнения для x . Тогда явное уравнение траектории принимает вид

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} \cos \alpha + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2 \alpha.$$

Модуль скорости точки равен $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где

$$v_x = \dot{x} = \omega A_1 \cos \omega t \quad \text{и} \quad v_y = \dot{y} = \omega A_2 \cos(\omega t + \alpha),$$

в момент $t_1 = 0.5$ с получим $v_1 = 13.7$ см/с. На рис. 8.4 указаны: 0 – начальное положение точки и 1 – положение точки в момент времени 0.5 с. Движение точки происходит по часовой стрелке.

Ответ: $v_1 = 13.7$ см/с.

Задачи для аудиторной работы

A8.1. Материальная точка совершает колебания по закону (8.1) с $\alpha = 0$, амплитуда колебаний равна 5 см, частота $\omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}$. Определить модуль ускорения точки в момент времени, когда ее скорость равна 8 см/с.

A8.2. Колебания материальной точки массой 100 г происходят согласно уравнению $x = A \cos \omega t$, где $A = 5$ см, $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$. Определить

максимальные значения возвращающей силы F_m и кинетической энергии E_{km} .

A8.3. Однородный диск радиусом 30 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период его колебаний?

A8.4. Ареометр массой 50 г представляет собой запаянную с обоих концов трубку диаметром 1 см и плавает в жидкости. Если погрузить его немного в жидкость и отпустить, то он начнет совершать колебания с периодом 1.6 с. Считая колебания незатухающими, найти плотность жидкости.

A8.5. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1$ с и амплитудами $A_1 = 1$ см и $A_2 = 1$ см. Начальные фазы колебаний $\alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_2 = 0$. Определить амплитуду A и начальную фазу α результирующего колебания.

A8.6. Движение точки задано уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \sin \omega t$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 1$ см. Найти явное уравнение траектории и скорость точки, построить траекторию, указав направление движения точки.

Задание на дом

B8.1. Материальная точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, наибольшая скорость 20 см/с. Найти угловую частоту колебаний и максимальное ускорение точки.

B8.2. Материальная точка массой 50 г совершает свободные колебания, уравнение которых имеет вид $x = A \cos \omega t$, где $A = 10$ см, $\omega = 5 \text{ с}^{-1}$. Найти силу, действующую на точку в момент, когда фаза равна 60° .

B8.3. Диск радиусом 24 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса перпендикулярно плоскости диска. Определить приведенную длину и период колебаний такого маятника.

B8.4. Набухшее бревно, сечение которого постоянно по всей длине, погрузилось вертикально в воду так, что над поверхностью находится лишь малая (по сравнению с длиной) его часть. Период колебаний бревна 5 с. Определить длину бревна.

В8.5. Складываются два гармонических колебания одного направления и одинаковой частоты $x_1 = A_1 \sin \omega t$ и $x_2 = A_2 \sin \omega(t + \tau)$, где $A_1 = A_2 = 1$ см, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$, $\tau = 0.5$ с. Найти закон результирующего колебания и определить суммарное смещение в момент времени $t = 2$ с.

В8.6. Двумерное движение точки задано уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \cos 2\omega t$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 1$ см. Найти уравнение траектории.

Практикум 9

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ. ДОБРОТНОСТЬ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Уравнение движения пружинного маятника с затуханием

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (9.1)$$

где r – коэффициент сопротивления среды; $\beta = r / 2m$ – коэффициент затухания колебаний; $\omega_0 = \sqrt{k / m}$ – собственная частота незатухающих колебаний.

Уравнение затухающего колебательного движения маятника

$$x = A(t) \cos(\omega t + \alpha). \quad (9.2)$$

Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (9.3)$$

Период затухающих колебаний

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (9.4)$$

Амплитуда затухающих колебаний

$$A(t) = A e^{-\beta t}. \quad (9.5)$$

Временем релаксации колебаний τ называют промежуток времени, в течение которого амплитуда $A(t)$ уменьшается в $e (= 2.718)$ раз,

$$\frac{A(t)}{A(t + \tau)} = e^{\beta\tau}, \quad \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (9.6)$$

Число колебаний N_τ за время релаксации τ равно

$$N_\tau = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}, \quad (9.7)$$

где λ – логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \left(\frac{A(t)}{A(t+T)} \right) = \beta T. \quad (9.8)$$

Добротность колеблющейся системы характеризует темп релаксации (затухания) колебаний в системе и определяется как произведение 2π на отношение энергии $E(t)$, запасенной системой в момент времени t к убыли этой энергии за период колебания, т. е.

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}. \quad (9.9)$$

При слабом затухании $\beta \ll \omega_0$ добротность системы описывается простым выражением

$$Q \approx \frac{\pi}{\lambda} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (9.10)$$

Уравнение вынужденных колебаний пружинного маятника

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t, \quad (9.11)$$

где $f = F / m$, а F – амплитуда внешней периодической силы, действующей на маятник с частотой ω .

Уравнение стационарного вынужденного колебательного движения

$$x = A(\omega) \cos(\omega t + \alpha(\omega)). \quad (9.12)$$

Амплитуда вынужденных колебаний (рис. 9.1, а)

$$A(\omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}. \quad (9.13)$$

Фаза вынужденных колебаний (рис. 9.1, б) определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (9.14)$$

Резонансная частота вынужденных колебаний

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (9.15)$$

Резонансная амплитуда вынужденных колебаний

$$A_r = A(\omega_r) = \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{f}{2\beta\omega_0}. \quad (9.16)$$

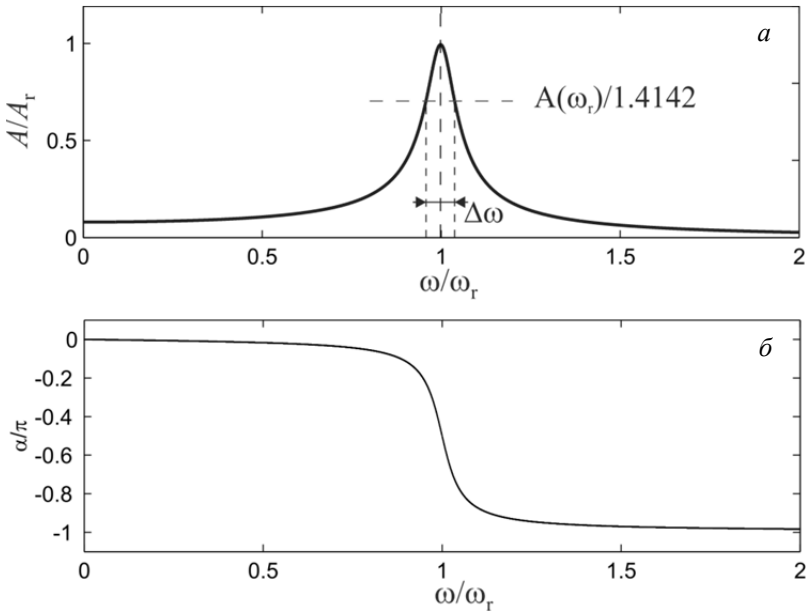


Рис. 9.1. Амплитудно-частотная характеристика (а), фазочастотная характеристика (б). Здесь $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\beta$ – ширина резонансной кривой на высоте $A(\omega_r)/\sqrt{2}$

Пример 9.1. Период затухающих колебаний $T = 4$ с; логарифмический декремент затухания $\lambda = 1.6$ с; начальная фаза колебаний $\alpha = -\pi/2$. В момент времени $t_1 = T/4$ смещение точки $x_1 = 4.5$ см. Написать уравнение движения для этого колебания.

Решение

Из (9.8) найдем $\beta = \lambda / T = 0.4 \text{ с}^{-1}$. Используя (9.2) и (9.5), запишем уравнение колебания в момент времени t_1 : $x_1 = A e^{-\beta t_1} \cos(\omega t_1 + \alpha)$, из которого найдем амплитуду: $A = x_1 e^{\beta t_1} / \cos(\omega t_1 + \alpha)$. Подставляя численные значения параметров, получаем $A = 6.7 \text{ см}$. Искомое уравнение колебаний имеет вид $x = 6.7 e^{-0.4t} \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ см}$.

Ответ: $x = 6.7 e^{-0.4t} \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ см}$.

Пример 9.2. При наблюдении затухающих колебаний оказалось, что для двух последовательных колебаний амплитуда второго меньше амплитуды первого на 60 %. Период колебаний $T = 0.5 \text{ с}$. Определить коэффициент затухания β и собственную частоту незатухающих колебаний ω_0 .

Решение

По условию задачи $A(t+T) / A(t) = 0.6$. Тогда, учитывая (9.8), получаем $\beta = -\ln(A(t+T) / A(t)) / T$. Частоту незатухающих колебаний вычислим по (9.3): $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, где $\omega = 2\pi / T$. Подставляя численные значения, получаем $\beta = -\ln(0.60) / 0.50 = 1.022 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_0 = 12.61 \text{ с}^{-1}$. Частота затухающих колебаний $\omega = 2\pi / T \approx 12.56 \text{ с}^{-1}$ меньше частоты незатухающих колебаний ω_0 .

Ответ: $\beta \approx 1.02 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 \approx 12.6 \text{ с}^{-1}$.

Пример 9.3. Гиря массой $m = 0.5 \text{ кг}$ подвешена к пружине жесткостью $k = 20 \text{ Н/м}$ и совершает свободные затухающие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания колебаний $\lambda = 0.004$. Определить число N полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в два раза. За какое время произойдет это уменьшение?

Решение

Пусть t_1 – промежуток времени, за который амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в n_1 раз, тогда $n_1 = \exp(\beta t_1)$ и $t_1 = \ln n_1 / \beta$.

Полное число колебаний есть $N = [t_1 / T]$, где $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – период затухающих колебаний. Из (9.8) имеем $\beta = \lambda / T$, тогда $T = T_0 \sqrt{1 + \lambda^2 / 4\pi^2}$, где $T_0 = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{m / k}$. Подставляя численные значения параметров, получаем: $T = T_0 \sqrt{1 + \lambda^2 / 4\pi^2} = 0.99$ с; $t_1 = \ln n_1 / \beta \approx 172$ с и $N = [\ln n_1 / \lambda] = [173.3] \approx 173$.

Ответ: $N = 173$, $t_1 \approx 172$ с.

Пример 9.4. Найти фазу α вынужденных колебаний при резонансе, если собственная частота $\omega_0 = 50$ с⁻¹ и коэффициент затухания $\beta = 5.2$ с⁻¹.

Решение

Используя (9.14) и (9.15), представим аргумент арктангенса (9.14) в виде $\frac{-2\beta\omega_r}{\omega_0^2 - \omega_r^2} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{-\beta} \approx -9.51$, тогда искомая разность фаз равна

$$\alpha = \arctg \left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{-\beta} \right) = -1.466 = -84^\circ.$$

Ответ: $\alpha = -84^\circ$.

Пример 9.5. Шарик массой $m = 50$ г подвешен к пружинке жесткостью $k = 20$ Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой $\omega = 25$ с⁻¹ шарик совершает установившиеся колебания в некоторой среде. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на 0.75π . Найти добротность для колебаний шарика в этой среде.

Решение

По условию задачи: $\alpha = -0.75\pi$, $\omega_0^2 = k / m = 400$ с⁻². Добротность вычислим по (9.10): $Q = \pi / \lambda = \pi / \beta T$, где $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – период затухающих колебаний, а коэффициент затухания колебаний найдем из фазочастотной характеристики (9.14): $\beta = -(\omega_0^2 - \omega^2) \operatorname{tg} \alpha / 2\omega$.

Подставляя численные значения, получаем $\beta = 4.5 \text{ с}^{-1}$, $T = 0.3 \text{ с}$ и $Q \approx 2.2$.

Ответ: $Q \approx 2.2$.

Пример 9.6. Под действием момента сил $M = M_m \cos \omega t$ тело совершает установившиеся вынужденные крутильные колебания по закону $\varphi = \varphi_m \cos(\omega t + \alpha)$. Найти работу сил трения, действующих на тело, за период колебания.

Решение

Работа сил трения при установившихся колебаниях равна работе внешних сил (6.3) за период $A = \int_0^{2\pi} M d\varphi$. Дифференциальный элемент

угла поворота равен $d\varphi = (d\varphi / dt) dt = -\omega \varphi_m \sin(\omega t + \alpha) dt$.

Учитывая, что $\sin(\omega t + \alpha) = \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha$, имеем $A =$

$$= -\omega M_m \varphi_m \int_0^T \cos \omega t (\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha) dt.$$
 После интегрирования

получаем
$$A = -\omega M_m \varphi_m \frac{T}{2} = -\pi M_m \varphi_m.$$

Ответ: $A = -\pi M_m \varphi_m$.

Задачи для аудиторной работы

A9.1. Материальная точка совершает колебания по закону $x = 5 \exp(-0.25t) \cos(\pi t / 2)$ см. Определить скорость точки в моменты времени, равные 0, T , $2T$, $3T$ и $4T$.

A9.2. Начальная амплитуда затухающих колебаний $A_0 = 3$ см. Через $t_1 = 10$ с амплитуда стала $A_1 = 1$ см. Через какое время амплитуда станет равной 0.3 см?

A9.3. Найти число полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в два раза. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0.01$.

A9.4. Найти максимальное значение амплитуды смещения осциллятора, совершающего установившиеся колебания под действием вынуждающей гармонической силы с амплитудой $F_m = 2.5 \text{ Н}$, если ча-

стота затухающих колебаний данного осциллятора $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ и коэффициент сопротивления $r = 0.5 \text{ кг/с}$.

A9.5. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления $r = 1 \text{ г/с}$. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_r = 0.5 \text{ см}$ и частота собственных колебаний равна 10 Гц .

A9.6. Под действием вынуждающей вертикальной силы $F = F_m \times \cos \omega t$ тело, подвешенное на пружинке, совершает установившиеся вынужденные колебания по закону $x = A(\omega) \cos(\omega t + \alpha)$. Найти работу силы F за период колебания.

Задание на дом

B9.1. За 8 мин амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшилась в три раза. Определить коэффициент затухания.

B9.2. Логарифмический декремент затухания колебаний маятника равен 0.003 . Определить число N полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза.

B9.3. За 8 мин амплитуда затухающих колебаний пружинного маятника с грузом массой 5 г уменьшилась в три раза. Определить коэффициент сопротивления среды.

B9.4. Вагон массой 80 т имеет четыре рессоры. Жесткость пружин каждой рессоры равна $k = 500 \text{ кН/м}$. При какой скорости вагон начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельсов, если длина рельса равна 12.5 м ?

B9.5. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой 1000 Гц . Определить частоту собственных колебаний, если резонансная частота равна 998 Гц .

B9.6. Определить логарифмический декремент затухания колебаний системы, если резонанс наблюдается в ней при частоте, которая на $\Delta \nu = 2 \text{ Гц}$ меньше, чем собственная частота $\nu_0 = 10 \text{ кГц}$.

B9.7. Пружинный маятник (жесткость пружины $k = 10 \text{ Н/м}$, масса груза $m = 0.1 \text{ кг}$) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0.02 \text{ кг/с}$. Определить коэффициент затухания и резонансную амплитуду, если амплитудное значение вынуждающей силы $F_0 = 10 \text{ мН}$.

Практикум 10

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

Уравнение Менделеева–Клапейрона. Газовые законы

$$pV = \nu RT, \quad (10.1)$$

где p – давление; V – объем; T – температура; $\nu = m / \mu = N / N_A$ – число молей; m – масса; μ – молярная масса; N – число молекул газа, $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро; $R = 8.31 \text{ Дж моль}^{-1} \text{ К}^{-1}$ – универсальная газовая постоянная.

Основное кинетическое уравнение для идеального газа:

$$p = nkT, \quad (10.2)$$

где $n = N / V$ – концентрация; $k = R / N_A = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж К}^{-1}$ – постоянная Больцмана.

Закон Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + \dots = (\nu_1 + \nu_2 + \dots)RT / V, \quad (10.3)$$

$$p_1 = n_1 kT, \quad n_1 = N_1 / V, \quad \nu_1 = m_1 / \mu_1;$$

$$p_2 = n_2 kT, \quad n_2 = N_2 / V, \quad \nu_2 = m_2 / \mu_2, \dots$$

Закон Бойля–Мариотта

$$pV = \text{const}, \quad T = \text{const}. \quad (10.4)$$

Закон Гей-Люссака

$$V / T = \text{const}, \quad p = \text{const}. \quad (10.5)$$

Закон Шарля

$$p / T = \text{const}, \quad V = \text{const}. \quad (10.6)$$

Пример 10.1. Сколько атомов ртути содержится в воздухе объемом $V = 1 \text{ м}^3$ при температуре $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, если парциальное давление паров ртути при этой температуре составляет $p = 133 \text{ мПа}$? Молярная масса ртути $\mu = 0.2006 \text{ кг/моль}$.

Решение

Из уравнения Менделеева–Клапейрона (10.1) количество молей ртути $\nu = m / \mu = pV / RT = 0.133 / (8.31 \cdot 293) = 5.46 \cdot 10^{-5} \text{ моль}$, а концентрация атомов ртути есть $n = \nu N_A / V = 5.46 \cdot 10^{-5} N_A = 3.3 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

Ответ: $n = 3.3 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

Пример 10.2. В сосуде объемом $V = 3 \text{ л}$ находится $m_1 = 4 \text{ мг}$ гелия, $m_2 = 70 \text{ мг}$ азота и $N_3 = 5 \cdot 10^{21}$ молекул водорода. Каково давление смеси, если температура смеси $T = 300 \text{ К}$? Молярные массы: гелия $\mu_1 = 0.004 \text{ кг/моль}$, молекулярного азота $\mu_2 = 0.028 \text{ кг/моль}$, молекулярного водорода $\mu_3 = 0.002 \text{ кг/моль}$.

Решение

Из уравнения Менделеева–Клапейрона (10.1) парциальные давления газов

$$p_1 = m_1 RT / \mu_1 V = 831 \approx 830 \text{ Па}, \quad p_2 = m_2 RT / \mu_2 V = 2077 \approx 2080 \text{ Па}, \\ p_3 = N_3 RT / N_A V = 6902 \approx 6900 \text{ Па}.$$

Согласно закону Дальтона (10.3), давление смеси равно

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 830 + 2080 + 6900 = 9800 \text{ Па}.$$

Ответ: $p = 9800 \text{ Па}$.

Пример 10.3. Сколько качаний поршневого насоса n потребуется для того, чтобы давление в баллоне объемом $V_0 = 1.5 \text{ л}$ уменьшить в 100 раз? Объем камеры насоса $V_1 = 0.1 \text{ л}$. Изменением температуры при откачивании газа пренебречь.

Решение

Пусть начальное давление газа равно p_0 . Так как увеличение объема газа происходит изотермически, то используем закон Бойля–Мариотта (10.4): $p_0 V_0 = p_1 (V_0 + V_1)$ для первого качания, $p_1 V_0 =$

$= p_2(V_0 + V_1)$ для второго качания, ..., $p_{n-1}V_0 = p_n(V_0 + V_1)$ для n -го качания, откуда давления в баллоне и в камере насоса после каждого качания: $p_1 = p_0q$, $p_2 = p_1q = p_0q^2$, ..., $p_n = p_{n-1}q = p_0q^n$, где $q = V_0 / (V_0 + V_1) = 0.938$. Обозначим $p_0 / p_n = \eta$. Тогда, логарифмируя $q^{-n} = \eta$, имеем $n = -\ln \eta / \ln q$. Подставляя $\eta = 100$, получаем $n = -\ln 100 / \ln 0.938 = 71.36 \approx 71$.

Ответ: $n = 71$.

Пример 10.4. Давление в цилиндре паровой машины объемом $V = 20$ л после открывания клапана уменьшилось на $\Delta p = 0.81$ МПа. Какова масса Δm пара, выпущенного из цилиндра? Температуру пара считать равной $T = 100$ °С. Молярная масса водяного пара $\mu = 0.018$ кг/моль.

Решение

Начальное состояние пара в цилиндре описывается уравнением Менделеева–Клапейрона $p_1V = m_1RT / \mu$, конечное состояние пара – уравнением $p_2V = m_2RT / \mu$. Вычитая второе уравнение из первого, получаем $\Delta pV = \Delta mRT / \mu$, где $\Delta p = p_1 - p_2$, $\Delta m = m_1 - m_2$, откуда $\Delta m = \Delta pV\mu / RT$ и $\Delta m = 0.81 \cdot 10^6 \cdot 0.02 \cdot 0.018 / 8.31 \cdot 373 = 0.094$ кг.

Ответ: $\Delta m = 0.094$ кг.

Пример 10.5. Приняв, что воздух по массе состоит из 76 % азота, 23 % кислорода и 1 % аргона, найти массу одного моля воздуха. Молярные массы: молекулярного кислорода $\mu_2 = 0.032$ кг/моль, аргона $\mu_3 = 0.040$ кг/моль.

Решение

Парциальные давления азота (индекс 1), кислорода (индекс 2) и аргона (индекс 3), а также полное давление воздуха (без индекса) найдем из (10.1): $p_1V = m_1RT / \mu_1$, $p_2V = m_2RT / \mu_2$, $p_3V = m_3RT / \mu_3$ и $pV = mRT / \mu$. Складываем парциальные давления смеси газов (10.3):

$$(p_1 + p_2 + p_3)V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3} \right) RT. \text{ С учетом уравнения (10.3) полу-}$$

чаем $mRT/\mu = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2 + m_3/\mu_3)RT$ и окончательно $1/\mu = m_1/m\mu_1 + m_2/m\mu_2 + m_3/m\mu_3$. Учитывая молярные массы компонент воздуха, имеем $1/\mu = 34.58$ моль/кг, т. е. молярная масса воздуха $\mu = 0.029$ кг/моль.

Ответ: $\mu = 0.029$ кг/моль.

Пример 10.6. При аэродинамическом торможении в атмосфере планеты температура внутри автоматического спускаемого аппарата повысилась с $T_1 = 293$ К до $T_2 = 353$ К. Какую часть воздуха необходимо выпустить, чтобы давление внутри аппарата не изменилось?

Решение

Будем считать, что процесс состоит из двух этапов: 1) изохорного повышения давления; 2) удаления из системы части газа; на втором этапе система не замкнутая. Термодинамические параметры начального состояния обозначим индексом 1, а конечного – индексом 2. Доля воздуха, которую надо выпустить через выпускной клапан, есть $\Delta m/m_1$, где $\Delta m = m_2 - m_1$, m_1 – масса воздуха внутри аппарата до срабатывания клапана; m_2 – масса воздуха после сброса давления. Конечным состоянием является состояние, при котором давление газа равно начальному $p_2 = p_1$. Для газа внутри аппарата в начальном и конечном состояниях справедливо (10.1): $p_1V = m_1RT_1/\mu$ и $p_2V = m_2RT_2/\mu$, левые части равны, поэтому равны и правые части: $m_1RT_1/\mu = m_2RT_2/\mu$, т. е. $m_1T_1 = m_2T_2$. Тогда $\Delta m = m_1 - m_2 = m_1 \times (1 - T_1/T_2)$ и доля выпускаемой части воздуха равна $\Delta m/m_1 = (1 - T_1/T_2) = 1 - 293/353 = 0.17$.

Ответ: $\Delta m/m_1 = 0.17$.

Пример 10.7. Для погружения подводных лодок используют цистерны, в которые заливают забортную воду. При подъеме лодки воду из цистерн выдавливают сжатым воздухом. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки сжатым воздухом, находящимся в баллоне под давлением $p_1 = 150$ атм при температуре $T_1 = 300$ К? Баллон имеет емкость $V_1 = 40$ л, лодка находится на глу-

бине $h = 20$ м, где температура воды $T_2 = 280$ К. Атмосферное давление принять равным $p_0 = 1$ атм, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.

Решение

При открытии крана воздух вытесняет из цистерны некоторое количество воды объемом V_2 и давление в системе становится равным давлению воды на глубине $p_2 = p_0 + \rho gh$. Масса воздуха m в системе не изменяется. Запишем уравнение (10.1) для двух состояний воздуха: 1) до выпуска воздуха из баллона $p_1 V_1 = mRT_1 / \mu$ и 2) после его расширения в цистерну $p_2 (V_1 + V_2) = mRT_2 / \mu$. Исключая m , имеем $p_1 V_1 / T_1 = (p_0 + \rho gh)(V_1 + V_2) / T_2$, откуда выражаем объем вытесненной воды $V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_0 + \rho gh} \frac{T_2}{T_1} - V_1 \approx 1.87$ м³.

Ответ: $V_2 = 1.87$ м³.

Задачи для аудиторной работы

A10.1. Низкое давление, получаемое с помощью совершенной вакуумной техники, приблизительно равно 10^{-12} Па. Сколько молекул воздуха содержится при таком давлении в 1 см³ при температуре 273 К?

A10.2. В баллоне вместимостью 30 л находится кислород при давлении 7.3 МПа и температуре 264 К. Затем часть газа из баллона выпустили, причем температура газа повысилась до 290 К, а давление упало до 2.94 МПа. Найти количество кислорода, выпущенного из баллона.

A10.3. Камеру автомобильной шины накачивают с помощью насоса, работающего от двигателя. Сколько времени потребуется, чтобы накачать камеру от давления 1 атм до давления 5 атм, если объем автомобильной камеры 6 л, при каждом ходе насос захватывает из атмосферы столб воздуха высотой 10 см и диаметром 10 см? Время одного качания 1.5 с, температуру считать постоянной.

A10.4. Давление воздуха в бутылке равно 0.1 МПа при температуре 280 К. На сколько нужно нагреть бутылку, чтобы пробка вылетела? Без нагревания пробку можно вынуть, прикладывая к ней силу 10 Н. Сечение пробки 2 см².

A10.5. Два цилиндра вместимостью 200 см³ и 100 см³ разделены подвижным поршнем, не проводящим тепло. Сначала температура газа

в цилиндрах 300 К, а его давление 0.1013 МПа, затем меньший цилиндр охладили льдом до 273 К, а больший нагрели до 373 К. Какое давление установится в цилиндрах?

A10.6. Баллон вместимостью 50 л заполнили воздухом при 300 К до давления 10 МПа. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если вытеснение производится на глубине 40 м? Температура воздуха после расширения 276 К.

Задание на дом

B10.1. В сосуде вместимостью 2 л находится кислород, количество вещества которого равно 0.2 моль. Определить плотность газа.

B10.2. Колба вместимостью 0.5 л содержит газ при нормальных условиях. Определить число молекул газа, находящихся в колбе.

B10.3. В баллоне содержится газ при температуре 273 К. До какой температуры нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза?

B10.4. Баллон вместимостью 20 л содержит углекислый газ массой 500 г под давлением 1.3 МПа. Определить температуру газа.

B10.5. Газовая смесь, состоящая из кислорода и азота, находится в баллоне под давлением 1 МПа. Определить парциальные давления кислорода и азота, если массовая доля кислорода в смеси равна 0.2.

Практикум 11

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ГАЗА

Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_d \rangle, \quad (11.1)$$

где n – концентрация молекул; $\langle \varepsilon_d \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул массы m , имеющая вид

$$\langle \varepsilon_d \rangle = m v_T^2 / 2 = (3/2) kT. \quad (11.2)$$

Средняя квадратичная (тепловая) скорость молекул

$$v_T = \sqrt{3RT / \mu} = \sqrt{3kT / m}. \quad (11.3)$$

Число классических степеней свободы молекулы идеального газа

$$i = i_1 + i_2 + 2i_3. \quad (11.4)$$

Число поступательных степеней свободы $i_1 = 3$. Число вращательных степеней свободы для объемной молекулы $i_2 = 3$, а для линейной молекулы $i_2 = 2$. Число колебательных степеней свободы для объемной молекулы из s атомов равно $i_3 = 3s - 6$, а для линейной молекулы равно $i_3 = 3s - 5$.

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = (1/2) kT. \quad (11.5)$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = iN \langle \varepsilon_1 \rangle = i\nu RT / 2, \quad (11.6)$$

где ν – число молей газа.

Степенью диссоциации α называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул.

Пример 11.1. Раскаленная плазма солнечной короны имеет температуру $T = 2.0 \cdot 10^6$ К. Какова средняя квадратичная скорость свободных электронов в такой плазме?

Решение

В соответствии с формулой (11.3), учитывая, что масса электрона $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг, получаем $v_T = \sqrt{3kT / m_e} = 9.5 \cdot 10^6$ м/с.

Ответ: $v_T = 9.5 \cdot 10^6$ м/с.

Пример 11.2. Кислород массой $m = 12.0$ г находится при температуре $T = 973$ К, при этом 40 % молекул диссоциировало на атомы. Чему равна внутренняя энергия газа? Считать, что колебательные степени свободы молекул кислорода при этой температуре «заморожены» и не дают вклада во внутреннюю энергию.

Решение

Средняя тепловая энергия двухатомной молекулы кислорода O_2 равна $\langle \epsilon_{O_2} \rangle = (i_{O_2} / 2) kT$, где $i_{O_2} = 5$, а средняя тепловая энергия свободного атома кислорода O равна $\langle \epsilon_O \rangle = (i_O / 2) kT$, $i_O = 3$. Пусть $N = mN_A / \mu$ — число молекул до диссоциации, а продиссоциировало αN молекул ($\alpha = 40$ %), тогда внутреннюю энергию газа U найдем как полную среднюю энергию теплового движения частиц $U = N_{O_2} \langle \epsilon_{O_2} \rangle + N_O \langle \epsilon_O \rangle$, где $N_{O_2} = N(1 - \alpha)$ — число недиссоциированных молекул кислорода, $N_O = 2N\alpha$ — число свободных атомов кислорода. В итоге получаем $U = mN_A \left((1 - \alpha) i_{O_2} + 2\alpha i_O \right) kT / 2\mu \approx 8200$ Дж.

Ответ: $U \approx 8.2$ кДж.

Пример 11.3. При температуре $T = 1000$ К возбуждены поступательные, вращательные и колебательные степени свободы четырехатомных объемных молекул, образующих идеальный газ. Найти среднюю тепловую энергию молекулы такого газа. Какая часть этой энер-

гии приходится на долю поступательного движения? Найти внутреннюю энергию одного моля газа.

Решение

Согласно формуле (11.4) число степеней свободы объемной молекулы из $s=4$ атомов равно $i = i_1 + i_2 + 2i_3$, где $i_1=3$, $i_2=3$, $i_3=3s-6=6$, тогда $i=18$. Средняя энергия молекулы газа $\langle \varepsilon \rangle = (i/2)kT = 9kT = 1.2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Доля энергии, приходящаяся на поступательное движение $\eta = i_1 / i = 3/18 \approx 0.17$. Внутренняя энергия одного моля газа согласно формуле (11.6) равна $U = (i/2)N_A kT = (i/2)RT = 74\,790 \approx 75\,000$ Дж.

Ответ: $\langle \varepsilon \rangle = 1.2 \cdot 10^{-19}$ Дж, $\eta = 0.17$, $U = 75$ кДж.

Пример 11.4. При какой температуре энергия теплового движения атомов гелия будет достаточной, для того чтобы преодолеть земное тяготение и покинуть земную атмосферу?

Решение

Скорость, с которой тела могут покинуть нашу планету, называется второй космической скоростью, она равна $v_2 = \sqrt{2gR} = 11.2$ км/с, где g – ускорение свободного падения, $R = 6380$ км – радиус Земли. Для получения искомой оценки примем, что средняя квадратичная скорость (11.3) теплового движения атомов гелия равна второй космической скорости, тогда $v_2^2 = 3RT / \mu$, следовательно, искомая температура по порядку величины равна $T = \mu v_2^2 / 3R \approx 2 \cdot 10^4$ К.

Ответ: $T \approx 2 \cdot 10^4$ К.

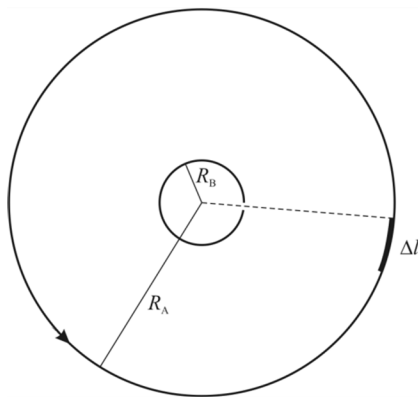
Пример 11.5. На пути пучка молекул, излучаемых молекулярной «печкой» с температурой $T=2000$ К, находится медная стенка, на которой молекулы оседают. Найти давление, испытываемое стенкой, если концентрация молекул в пучке $n = 10^{16}$ м³. Стенка расположена перпендикулярно пучку.

Решение

Импульс силы, действующей на стенку при абсолютно неупругом соударении одной молекулы, равен $\Delta p = F\Delta t$, где $\Delta p = p_1 - p_2$ – изменение импульса молекулы от начального импульса $p_1 = m\upsilon$ до конечного $p_2 = 0$, Δt – время соударения, υ – средняя скорость налетающих молекул, т. е. $F\Delta t = m\upsilon$. За время Δt на малую площадку стенки площади ΔS попадут молекулы из эффективного цилиндра с основанием ΔS и высотой $l = \upsilon\Delta t$. Среднее число таких молекул равно $N = n l \Delta S = n \upsilon \Delta S \Delta t$. Импульс суммарной силы $F_N = NF$ действия этих молекул равен $F_N \Delta t = Nm\upsilon = nm\upsilon^2 \Delta S \Delta t$. Давление молекулярного пучка на стенку равно $p = F_N / \Delta S$, в итоге получаем $p = nm\upsilon^2$. Квадрат тепловой скорости молекул оценим с помощью формулы (11.3), т. е. $m\upsilon^2 = 3kT$, тогда $p = 3nkT \approx 8.2 \cdot 10^{-4}$ Па.

Ответ: $p = 8.2 \cdot 10^{-4}$ Па.

Пример 11.6. В соответствии с методом Штерна определения тепловой скорости атомов серебра, испускаемых нагретым источником, этот источник (разогретая серебряная нить) помещают внутрь неподвижного цилиндра B радиусом $R_B = 0.01$ м с тонкой продольной щелью. При этом на внутренней поверхности соосного неподвижного медного полированного цилиндра A радиусом $R_A = 0.1$ м напротив щели образуется узкая серебряная полоска. При вращении цилиндра A против часовой стрелки с частотой $\nu = 2400$ об/мин середина серебряной полоски на цилиндре A сместилась на $\Delta l = 3.2$ мм. Определить из этих данных тепловую скорость атомов серебра, сравнить полученный результат со средней квадратичной скоростью. Найти относительную погрешность, если температура нити равна $T = 2000$ К. Молярная масса серебра $\mu = 0.108$ кг/моль.



К примеру 11.6

Решение

Расстояние от внутреннего цилиндра (см. рисунок) до внешнего частица атомного пучка, имеющая скорость v , пролетит за время $\tau = (R_A - R_B) / v$. За это время внешний цилиндр повернется на угол $\Delta\varphi = \omega\tau$, где $\omega = 2\pi\nu$, связанный с длиной отрезка дуги $\Delta l = R_A\Delta\varphi$ линейного перемещения точек этого цилиндра, тогда $\tau = \Delta l / \omega R_A$. Приравнявая правые части полученных выражений $(R_A - R_B) / v = \Delta l / \omega R_A$, находим искомую скорость атомов серебра в пучке $v = (R_A - R_B)\omega R_A / \Delta l = 707$ м/с.

Тепловая скорость, соответствующая температуре источника атомов серебра, $v_T = \sqrt{3RT / \mu} = 680$ м/с.

Относительную ошибку измеренной тепловой скорости частиц пучка определим как $\delta v = |v - v_T| / v = 0.04$.

Ответ: $v \approx 710$ м/с, $\delta v \approx 0.04$.

Задачи для аудиторной работы

A11.1. Температура в межзвездном пространстве составляет 2.7 К. Какова среднеквадратическая скорость молекул водорода при такой температуре?

A11.2. Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул водорода, содержащихся в одном моле при 291 К.

A11.3. Средняя энергия молекул одноатомного идеального газа равна $6.00 \cdot 10^{-21}$ Дж. Давление газа 0.2 МПа. Найти концентрацию молекул газа.

A11.4. Найти внутреннюю энергию 20 г кислорода при температуре 293 К. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая на вращательное движение?

A11.5. Найти внутреннюю энергию двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом 2 л под давлением 0.15 МПа.

A11.6. Как изменится средняя квадратичная скорость молекул кислорода, находящихся в сосуде объемом 2.5 л при нормальных условиях, если газ расширяется до объема 5 л: а) изотермически; б) изобарически?

A11.7. На пути направленного молекулярного пучка, излучаемого накаливаемой нитью, в вакууме стоит «зеркальная стенка». Найти давление, испытываемое этой стенкой, если температура нити, из которой вылетают атомы серебра, равна 1500 К, концентрация атомов в пучке 10^{11} м^{-3} , стенка расположена перпендикулярно направлению движения частиц в пучке.

Задание на дом

B11.1. Определить давление идеального газа при двух значениях температуры газа 3 К и 1000 К. Принять концентрацию молекул газа равной $\approx 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

B11.2. В колбе вместимостью 100 см^3 содержится некоторый газ при температуре 300 К. На сколько понизится давление газа в колбе, если вследствие утечки из колбы выйдет 10^{20} молекул?

B11.3. Давление газа 1 мПа, концентрация его молекул $\approx 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Определить температуру газа и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа.

B11.4. Определить среднюю кинетическую энергию ε_3 поступательного движения и среднее значение полной кинетической энергии молекулы водяного пара при температуре 600 К. Найти кинетическую энергию поступательного движения всех молекул пара, содержащего один киломоль вещества.

B11.5. Определить среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы молекулы азота, при температуре 1000 К, а также среднюю кинетическую энергию поступательного движения, среднюю кинетическую энергию вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии молекулы азота.

Практикум 12

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

Вероятность того, что характеризующая молекулу случайная величина p принимает значения из дифференциально малого интервала $[p, p + dp]$, есть

$$dW(p) = f(p)dp, \quad (12.1)$$

где $f(p) = dW(p) / dp = dN / N$ – функция распределения (плотность вероятности), а dN – число молекул, для которых величина p лежит в интервале $[p, p + dp]$, N – полное число молекул. Вероятность того, что случайная величина p принимает значения из конечного интервала $[a, b]$ есть

$$W(a, b) = \int_a^b f(p)dp. \quad (12.2)$$

Распределение Максвелла по значениям проекции v_x скорости молекул

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right), \quad (12.3)$$

где m – масса молекулы.

Распределение Максвелла по абсолютным значениям v скорости молекул

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \quad (12.4)$$

Средняя квадратичная (тепловая) скорость молекул

$$v_T = \sqrt{3RT / \mu} = \sqrt{3kT / m}. \quad (12.5)$$

Средняя (арифметическая) скорость молекул

$$\bar{v} = \sqrt{8RT / \pi \mu} = \sqrt{8kT / \pi m} . \quad (12.6)$$

Наиболее вероятная скорость молекул

$$v_p = \sqrt{2RT / \mu} = \sqrt{2kT / m} . \quad (12.7)$$

Используя наиболее вероятную скорость v_p , можно обезразмерить выражения (12.3) и (12.4), вводя относительные скорости $u_x = v_x / v_p$, $u = v / v_p$ и представляя интегралы типа (12.2) в удобной для вычисления форме:

$$W(u_{x1}, u_{x2}) = \int_{u_{x1}}^{u_{x2}} f(u_x) du_x, \quad f(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u_x^2), \quad (12.8)$$

$$W(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} F(u) du, \quad F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2). \quad (12.9)$$

Распределение Максвелла по энергиям E молекул

$$f(E) = \frac{dW(E)}{dE} = (2/\sqrt{\pi})(kT)^{-3/2} \sqrt{E} \cdot \exp(-E / kT). \quad (12.10)$$

Распределение Больцмана по координатам $\mathbf{r}$ молекулы

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{U(\mathbf{r})}{RT}\right), \quad (12.11)$$

где $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия молекулы; $n(\mathbf{r})$ – концентрация в точке $\mathbf{r}$; n_0 – концентрация в тех точках, где $U(\mathbf{r}) = 0$.

Барометрическая формула

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right), \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right), \quad \frac{\mu}{R} = \frac{m}{k}, \quad (12.12)$$

где p и ρ – давление и плотность газа на высоте h , p_0 и ρ_0 – на поверхности Земли.

Пример 12.1. При температуре $T=400$ К наиболее вероятная скорость молекул газа из одинаковых молекул равна 1820 м/с. Определить химическую природу этих молекул.

Решение

Из (12.7) выражаем молярную массу газа $\mu = 2RT / v_p^2 = 0.002$ кг/моль, следовательно, газ – молекулярный водород.

Ответ: $\mu = 0.002$ кг/моль, газ H_2 .

Пример 12.2. Определите, какая часть молекул азота при температуре $T=423$ К обладает скоростями от $v_1=300$ м/с до $v_2=800$ м/с?

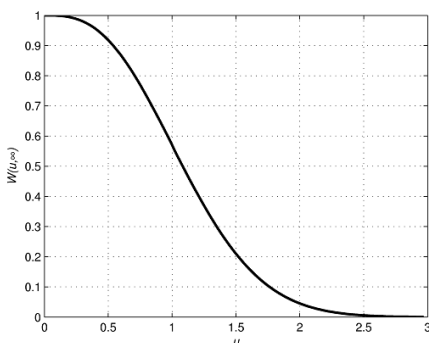


Рис. 12.1. Вероятность $W(u, \infty)$ в зависимости от u

Решение

Найдем согласно (12.7) наиболее вероятную скорость: $v_p = \sqrt{2RT / \mu} = 501$ м/с, тогда границы интегрирования в (12.9) будут равны $u_1 = v_1 / v_p = a = 0.6$, $u_2 = v_2 / v_p = b = 1.6$. Грубая оценка доли молекул (см. рис. 12.1) дает $W(0.6; 1.6) \approx W(0.6; \infty) - W(1.6; \infty) = 0.9 - 0.2 = 0.7$. Уточним оценку прямым интегрированием по методу прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = \Delta x \sum_{n=1}^{N-1} f(x_n), \quad (12.13)$$

где $x_n = a + n\Delta x$, $\Delta x = (b - a) / N$;

$$W(u_1, u_2) = \Delta u \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{N-1} u_n^2 \exp(-u_n^2).$$

Имеем $W(0.6, 1.6) = 0.7047$ при $N = 100$; $W(0.6, 1.6) = 0.7052$ при $N = 1000$. Округлим до двух значащих цифр. Таким образом, более точная оценка составляет $W \approx 0.71$.

Ответ: $W \approx 0.71$.

Пример 12.3. Энергия ионизации атомов водорода составляет $E_i = 13.6$ эВ. Найти, при какой температуре 10 % всех атомов водорода имеет энергию поступательного движения атомов, превышающих энергию ионизации.

Решение

В безразмерных единицах $\varepsilon = E / kT$ распределение молекул по энергиям (12.10) принимает следующий вид:

$$dW(\varepsilon) = \left(2 / \sqrt{\pi}\right) \sqrt{\varepsilon} \cdot \exp(-\varepsilon) d\varepsilon,$$

а вероятность того, что атомы водорода имеют кинетическую энергию ε , большую некоторой энергии ε_m , есть функция

$$W(\varepsilon_m, \infty) = \int_{\varepsilon_m}^{\infty} \left(2 / \sqrt{\pi}\right) \sqrt{\varepsilon} \cdot \exp(-\varepsilon) d\varepsilon, \quad (12.14)$$

график которой приведен на рис. 12.2. Из этого рисунка определим при $W(\varepsilon_m, \infty) = 0.1$ значение энергии $\varepsilon_m \approx 3.1$. Более точный расчет по (12.13) дает значение $\varepsilon_m = 3.13$, тогда температура атомарного газа равна $T = E_i / k\varepsilon_m \approx 5.05 \cdot 10^4$ К.

Ответ: $T \approx 5.05 \cdot 10^4$ К.

Пример 12.4. Кирпичная труба высотой $h = 25$ м выпускает дым при температуре $t_1 = 58$ °С. Определить перепад давления на входе в трубу, обеспечивающий тягу. Температура наружного воздуха $t_0 = -40$ °С, давление на поверхности земли $p_0 = 760$ мм рт. ст.

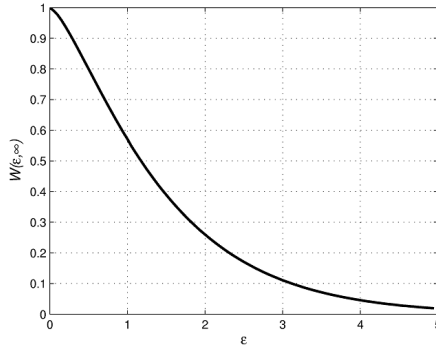


Рис. 12.2. Вероятность $W(\varepsilon, \infty)$ в зависимости от ε , где $\varepsilon = E / kT$

Решение

Считаем, что температура газов в трубе постоянная и равна $T_1 = t_1 + 273$ К, тогда согласно барометрической формуле давление газов на высоте h внутри трубы равно

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_1}\right),$$

где p_1 – давление воздуха в печке у входа в трубу на уровне поверхности земли, $\mu = 0.029$ кг/моль. Давление p'_2 наружного воздуха на той же высоте (на срезе трубы) равно

$$p'_2 = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_0}\right),$$

где $T_0 = t_0 + 273$ К. Очевидно, что $p_2 = p'_2$, тогда

$$p_1 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_1}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_0}\right).$$

Искомый перепад давлений внутри печи равен

$$\begin{aligned}\Delta p &= p_0 - p_1 = p_0 - p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_0} + \frac{\mu gh}{RT_1}\right) = \\ &= p_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_0}\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)\right)\right) = 109 \text{ Па.}\end{aligned}$$

Ответ: $\Delta p = 109 \text{ Па}$.

Задачи для аудиторной работы

A12.1. Температура водорода 550 К. Определите отношение числа молекул этого газа, компоненты скоростей которых лежат в интервале от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул, компоненты скоростей которых лежат в интервале от 1500 до 1510 м/с.

A12.2. Температура кислорода 500 К. Определите долю молекул этого газа, чьи модули скоростей больше наиболее вероятной скорости (использовать рис. 12.1).

A12.3. Энергия ионизации атомов калия равна 4.34 эВ. Найти, при какой температуре 10 % всех атомов калия имеют кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию, необходимую для ионизации отдельных атомов калия.

A12.4. Французский физик Перрен с помощью микроскопа измерял зависимость концентрации взвешенных частиц красителя в растворе от их положения по высоте в сосуде и, применяя барометрическую формулу Больцмана, экспериментально получил значение числа Авогадро N_A . В одном из опытов Перрен нашел, что при расстоянии между двумя слоями 100 мкм число взвешенных частиц красителя в одном слое вдвое больше, чем в другом. Температура раствора равна 293 К, частицы красителя имеют диаметр 0.3 мкм и взвешены в жидкости, плотность которой на 200 кг/м³ меньше плотности частиц. Найти по этим данным число Авогадро.

A12.5. Определить массу воздуха m в цилиндре с основанием 1 м² и высотой $h_1 = 1 \text{ м}$, $h_2 = 1 \text{ км}$, $h_3 = 10 \text{ км}$. Считать, что воздух находится при нормальных условиях.

A12.6. В атмосфере находятся частицы пыли, имеющие массу $m = 8 \cdot 10^{-22}$ кг и объем $V = 5 \cdot 10^{-22}$ м³. Найти уменьшение их концентрации на высотах $h_1 = 1.5$ м и $h_2 = 15$ м. Считать, что воздух находится при нормальных условиях.

Задание на дом

B12.1. Определите температуру молекулярного водорода, при котором отношение числа молекул этого газа, скорости которых лежат в интервале от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул, скорости которых лежат в интервале от 1500 до 1510 м/с, равно единице.

B12.2. Определить долю W молекул, энергия которых заключена в пределах от 0 до $0.01kT$.

B12.3. Водород находится при нормальных условиях и занимает объем 1 см³. Определить число молекул в этом объеме, обладающих скоростями, меньшими 1 м/с.

B12.4. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу 10^{-18} г. Во сколько раз уменьшится их концентрация при увеличении высоты на 10 м? Температура воздуха 300 К.

B12.5. На какой высоте над поверхностью Земли атмосферное давление вдвое меньше, чем на его поверхности? Считать температуру воздуха равной 290 К и не изменяющейся с высотой.

Практикум 13

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Вероятность того, что частица в некоторой среде, пройдя путь x , испытает столкновение на отрезке $[x, x + dx]$, равна $dW(x, x + dx) = w(x)dx$, где $w(x)$ – плотность распределения вероятности:

$$w(x) = \exp(-x/\lambda)/\lambda, \quad (13.1)$$

где $\lambda = 1/\sqrt{2} \cdot \sigma n = \tau \bar{v}$ – средняя длина свободного пробега частиц; σ – эффективное сечение столкновения частиц, равное $\sigma = \pi d^2$; d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация; $\bar{v}$ – средняя скорость частиц; τ – среднее время свободного пробега частиц.

Диффузия. Закон Фика

$$J_n = -D \frac{dn}{dx} S, \quad D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda, \quad (13.2)$$

где $J_n = dN/dt$ – поток диффузии частиц с концентрацией n через сечение площади S ; dN – число диффундирующих частиц за время dt ; D – коэффициент диффузии.

Внутреннее трение. Вязкость. Закон Ньютона

$$F = -\eta \frac{dv}{dy} S, \quad \eta = \frac{1}{3} n m_0 \bar{v} \lambda, \quad (13.3)$$

где F – сила внутреннего трения жидкости или газа вдоль поверхности площади S ; η – коэффициент вязкости; v – скорость потока; m_0 – масса частиц жидкости или газа.

Теплопроводность. Закон Фурье

$$J_Q = -\lambda_T \frac{dT}{dx} S, \quad \lambda_T = \frac{1}{3} c_V \rho \bar{v} \lambda, \quad (13.4)$$

где J_Q – поток тепловой энергии через сечение площади S ; T – температура; λ_T – коэффициент теплопроводности; c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме; ρ – плотность.

Пример 13.1. Какая часть молекул азота, находящегося при температуре $T = 273$ К и давлении $p = 0.018$ мм рт. ст., имеет длину свободного пробега, лежащую в интервале от $x_1 = 2.5$ до $x_2 = 3.5$ мм? Эффективный диаметр молекулы азота $d = 0.38$ нм. Давление 1 мм рт. ст. = 133.3 Па.

Решение

Микроскопическая длина свободного пробега – случайная величина. Искомую вероятность найдем из формулы (13.1) интегрированием

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) dx = \exp(-r_1) - \exp(-r_2),$$

где $r_1 = x_1 / \lambda$, $r_2 = x_2 / \lambda$, а средняя длина свободного пробега $\lambda = 1 / \sqrt{2} \cdot \sigma n$. Концентрация азота $n = p / kT = 6.37 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$; эффективное поперечное сечение молекулы азота $\sigma = \pi d^2 = 4.5 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$, т. е. $\lambda = 1 / \sqrt{2} \sigma n = 2.45 \cdot 10^3$ м и $r_1 = x_1 / \lambda = 1.02$, $r_2 = x_2 / \lambda = 1.43$, тогда $W(x_1, x_2) = 0.121$.

Ответ: $W(x_1, x_2) = 0.121$.

Пример 13.2. Расстояние между катодом и анодом в газоразрядной трубке равно $L = 15$ см. Какое давление газа p надо создать в трубке, чтобы электроны не сталкивались с молекулами по пути от катода к аноду? Температура газа $T = 300$ К; эффективный диаметр молекулы $d = 0.3$ нм. Средняя длина свободного пробега λ_1 электрона в газе в $\alpha = 5.7$ раза больше, чем λ у молекул газа.

Решение

Электроны почти не сталкиваются с молекулами при малом давлении в трубке, пока $\lambda_1 > L$. С ростом давления λ и λ_1 убывают, частота столкновений электронов с молекулами резко возрастает при таком давлении, когда $L = \lambda_1$. Это условие позволяет оценить верхнюю границу давления газа, при котором можно не учитывать столкновения электронов с молекулами. Средняя длина свободного пробега электронов равна $\lambda_1 = \alpha \lambda$, где $\lambda = 1 / \sqrt{2} \cdot \sigma n$, что дает $n = \alpha / \sqrt{2} \cdot \sigma \lambda_1$. Учитывая, что $\sigma = \pi d^2 = 2.83 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$, найдем давление газа в трубке $p = nkT = \alpha kT / \sqrt{2} \cdot \sigma L = 0.39$ Па.

Ответ. При давлении газа $p \leq 0.393$ Па электроны почти не рассеиваются в трубке на пути от катода к аноду.

Пример 13.3. Оценить коэффициент диффузии D кислорода при давлении 1 атм и $T = 273$ К, эффективный диаметр молекулы кислорода $d = 0.36$ нм.

Решение

По формуле (13.2) коэффициент диффузии равен $D = \bar{v}\lambda / 3$. При заданных условиях ($T = 273$ К, $p = 1.013 \cdot 10^5$ Па) средняя скорость молекул кислорода $\bar{v} = \sqrt{8RT / \pi\mu} = 425$ м/с, концентрация частиц $n = p / kT$ и средняя длина их свободного пробега равна $\lambda = 1 / \sqrt{2} \times \sigma n = kT / \sqrt{2} \cdot \sigma p = 6.46 \cdot 10^{-8}$ м, откуда $D = \bar{v}\lambda / 3 = 9.15 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Ответ: $D = 9.15 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Пример 13.4. Найти массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 100$ см² за время $t = 10$ с, если в направлении, перпендикулярном площадке, градиент плотности равен $\Delta\rho / \Delta x = 1.26$ кг/м⁴. Температура азота $T = 300$ К, средняя длина свободного пробега молекул равна $\lambda = 10$ мкм.

Решение

Поток массы азота равен $J_m = m_0 J_n = m_0 dN / dt = dm / dt$, где $m = m_0 N$ – полная масса азота; m_0 – масса одной молекулы азота, плотность азота $\rho = m_0 n$. Согласно закону Фика (13.2), масса газа, прошедшего вследствие диффузии, равна $m = -D \frac{d\rho}{dx} St \approx D \left| \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \right| St$, так как $d\rho / dx \approx -|\Delta\rho / \Delta x|$. Коэффициент диффузии найдем по выражению (13.2), где средняя скорость молекул $\bar{v} = \sqrt{8RT / \pi\mu} = 476$ м/с, что дает $D = \bar{v}\lambda / 3 = 1.59 \cdot 10^3$ м²/с, следовательно, масса азота, прошедшего через площадку за 10 с, равна $m = 2.0 \cdot 10^{-4}$ кг.

Ответ: $m = 2.0 \cdot 10^{-4}$ кг.

Пример 13.5. Самолет летит со скоростью $v = 830$ км/ч. Считая, что слой воздуха у крыла, увлекаемый вследствие вязкости, имеет толщину $\Delta y = 4$ см, найти касательную силу F , действующую на единицу площади поверхности крыла. Температура воздуха $T = 233$ К, эффективный диаметр молекулы воздуха принять равным $d = 0.3$ нм.

Решение

Согласно закону вязкости Ньютона, на единицу площади поверхности крыла действует касательная сила трения (13.3), где $S = 1$ м², средняя скорость молекул воздуха равна $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi\mu} = 412$ м/с. Упростим второе выражение (13.3) $\eta = nm_0\bar{v}\lambda/3 = \mu\bar{v}/(3\sqrt{2} \cdot \pi N_A d^2)$, так как $\mu = N_A m_0$, $\lambda = 1/\sqrt{2} \cdot \sigma n$, $\sigma = \pi d^2$. Подставляя численные значения, получаем $\eta = 1.66 \cdot 10^{-5}$ Па · с. Сила трения на единицу площади поверхности равна $F/S = \eta(\Delta v/\Delta y) = 0.095$ Н/м².

Ответ: $F/S = 0.095$ Н/м².

Пример 13.6 Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной $h = 0.1$ м могут свободно вращаться вокруг общей оси. Радиус внешнего цилиндра $R_2 = 0.050$ м, радиус внутреннего цилиндра $R_1 = 0.048$ м. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях: $T_0 = 273$ К, $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Па. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 40\pi$ рад/с. Внешний цилиндр сначала неподвижен. Определите, через какое время с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет угловую скорость $\omega_2 = 2\pi$ рад/с? Масса внешнего цилиндра $m = 0.100$ кг, эффективный диаметр молекул воздуха $d = 0.3$ нм.

Решение

Описанная конструкция является основой ротационных вискозиметров. На внешний цилиндр действует момент силы $M = R_2 F$ внутреннего трения (13.3), вызывая угловое ускорение, которое определим из основного уравнения вращательного движения $J\varepsilon = M$, где $J = mR_2^2$ — момент инерции внешнего цилиндра. Поскольку угловое ускорение не зависит от времени, то искомое время находится из соотношения $t = \omega_2/\varepsilon$. Найдем силу внутреннего трения (13.3): коэффициент вязко-

сти $\eta = nm_0 \bar{v} \lambda / 3$, где $v = \sqrt{8RT / \pi m} = 446$ м/с, $n = p_0 / kT_0 = 2.689 \cdot 10^{25}$ м⁻³, $\sigma = \pi d^2 = 2.83 \cdot 10^{-19}$ м², $\lambda = 1 / \sqrt{2} \sigma n = 9.30 \cdot 10^{-8}$ м, $m_0 = \mu / N_A$, следовательно, $\eta = n \mu v \lambda / 3 N_A = 1.79 \cdot 10^{-5}$ Па · с. Угловое ускорение $\varepsilon = R_2 F / m R_2^2 = \eta |\Delta v| S / m R_2 |\Delta R|$, где $|\Delta v| = \omega_1 R_1$, $|\Delta R| = R_2 - R_1$, $S = 2\pi R_2 h$. Подставляя численные значения величин, получаем $\varepsilon = 0.340$ рад/с², а искомое время раскрутки $t = \omega_2 / \varepsilon = 18.5$ с.

Ответ: $t = 18.5$ с.

Пример 13.7. Для расчета отопительной системы требуется знать потерю тепла за счет теплопроводности через единицу площади поверхности стены здания в течение суток. Толщина кирпичной стены $L_1 = 40$ см, температура стены изнутри $T_1 = 291$ К, снаружи $T_2 = 253$ К. Определите потери тепла Q через единицу площади поверхности кирпичной стены. Какой толщины L_2 должна быть деревянная стена, чтобы потеря теплоты была такой же? Какой толщины L_3 должна быть стена, изготовленная из сэндвич-панели, чтобы потеря теплоты была такой же? Коэффициенты теплопроводности: кирпичной кладки — $\lambda_{T1} = 0.70$ Вт/м · К, дерева поперек волокон — $\lambda_{T2} = 0.175$ Вт/м · К, минеральной ваты сэндвич-панели — $\lambda_{T3} = 0.054$ Вт/м · К.

Решение

Найдем потери энергии за сутки $Q = J_Q S t$, где $t = 24$ ч, S — площадь поверхности стены. Поток J_Q определяется законом Фурье (13.4). Для кирпичной стены получим $J_{Q1} = \lambda_{T1} (T_1 - T_2) / L_1 = 66.5$ Вт/м² и потери энергии за сутки $Q_1 = 5.75$ МДж. Найдем толщину деревянной стены из бруса с эквивалентными потерями тела: $Q_2 = J_{Q2} S t$, где $J_{Q2} = \lambda_{T2} (T_1 - T_2) / L_2$. Считая, что $Q_2 = Q_1$, получим $\lambda_{T1} / L_1 = \lambda_{T2} / L_2$, откуда $L_2 = L_1 \lambda_{T2} / \lambda_{T1} = 0.10$ м. Для сэндвич-панели с эквивалентными потерями тела: $\lambda_{T1} / L_1 = \lambda_{T3} / L_3$ и $L_3 = L_1 \lambda_{T3} / \lambda_{T1} = 0.031$ м.

Ответ: $Q_1 = 5.75$ МДж, $L_2 = 0.10$ м, $L_3 = 0.031$ м.

Задачи для аудиторной работы

A13.1. Определить относительную долю молекул, длина свободного пробега которых меньше 0.5λ .

A13.2. Вакуум считается высоким, если длина свободного пробега молекул больше линейных размеров сосуда, в котором находится газ. Оцените давление, ниже которого вакуумом является высоким для шарообразного сосуда диаметром 3 см, заполненного воздухом при температуре 300 К. Эффективный диаметр молекулы воздуха принять равным 0.3 нм.

A13.3. При помощи ионизационного манометра, установленного на искусственном спутнике Земли, определили, что на высоте 300 км от поверхности Земли концентрация частиц газа в атмосфере $n = 10^{15} \text{ м}^{-3}$. Найти среднюю длину свободного пробега частиц газа на этой высоте. Эффективный диаметр молекулы воздуха на высоте 300 км принять равным 0.2 нм.

A13.4. Коэффициенты диффузии и вязкости при некоторых условиях равны $D = 1.42 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ и $\eta = 8.5 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$. Найти число молекул водорода в единице объема, его плотность, среднюю длину свободного пробега и среднюю скорость его молекул. Эффективный диаметр d молекулы водорода принять равным 0.28 нм.

A13.5. Определите массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку 100 см^2 за минуту, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен 1 кг/м^4 . Температура азота 300 К, давление азота 10 Па, эффективный диаметр молекулы азота принять равным 0.38 нм.

A13.6. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено газом. Радиусы цилиндров равны 5 и 5.2 см. Высота внутреннего цилиндра 25 см. Внешний цилиндр вращается со скоростью 360 об/мин. Для того чтобы внутренний цилиндр оставался неподвижным, к нему надо приложить касательную силу 1.38 мН. Определить вязкость газа между цилиндрами.

A13.7. Какое количество энергии теряет помещение за час через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы 4 м^2 , расстояние между ними 30 см, температура внутри помещения 291 К, температура наружного воздуха 253 К. Температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур внутри помещения и наружного воздуха. Дав-

ление воздуха 1 атм. Эффективный диаметр молекулы воздуха принять равным 0.3 нм.

Задание на дом

В13.1. Баллон вместимостью 10 л содержит водород массой 1 г. Определить среднюю длину свободного пробега молекул.

В13.2. Найти среднее число столкновений, испытываемых в течение 1 с молекулой кислорода при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы кислорода принять равным 0.36 нм.

В13.3. Коэффициент диффузии кислорода при температуре 273 К равен $0.19 \text{ см}^2/\text{с}$. Определить среднюю длину свободного пробега молекул кислорода.

В13.4. Найти среднюю длину свободного пробега молекул азота при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы азота принять равным 0.38 нм. Динамическая вязкость азота равна $17 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$.

В13.5. При нормальных условиях динамическая вязкость воздуха равна $17.2 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$. Найти для тех же условий теплопроводность воздуха.

Практикум 14

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ РАБОТА И ТЕПЛОТА ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ ТЕПЛОЕМКОСТЬ. РАБОТА ПРИ ИЗОПРОЦЕССАХ

Первое начало термодинамики – закон сохранения энергии в термодинамических процессах

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}. \quad (14.1)$$

Термодинамическая работа

$$A_{12} = \int_1^2 p dV. \quad (14.2)$$

Изменение внутренней энергии системы

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1. \quad (14.3)$$

Теплоемкость

$$C_0 = \delta Q / dT. \quad (14.4)$$

Молярная теплоемкость $C = c \mu$, где c – удельная теплоемкость.

Уравнение Майера для одного моля идеального газа

$$C_p = C_V + R, \quad (14.5)$$

$$C_V = (\delta Q / dT)_V = \delta U / dT = iR / 2, \quad (14.6)$$

$$C_p = (\delta Q / dT)_p = (i + 2)R / 2. \quad (14.7)$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2} \nu RT = \nu C_V T. \quad (14.8)$$

Изотермический процесс: $T = \text{const}$, $pV = \text{const}$,

$$A_T = Q_T = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad \Delta U_T = 0. \quad (14.9)$$

Изобарический процесс: $p = \text{const}$, $V / T = \text{const}$,

$$A_p = p(V_2 - V_1), \quad Q_p = \nu C_p(T_2 - T_1), \quad \Delta U_p = \nu C_V(T_2 - T_1). \quad (14.10)$$

Изохорический процесс: $V = \text{const}$, $p / T = \text{const}$,

$$A_V = 0, \quad Q_V = \Delta U_V = \nu C_V(T_2 - T_1). \quad (14.11)$$

Адиабатический процесс: $S = \text{const}$, $pV^\gamma = \text{const}$, $TV^{\gamma-1} = \text{const}$,
 $Tr^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}$,

$$\gamma = C_p / C_V = (i + 2) / i,$$

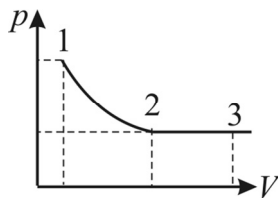
$$Q_S = 0, \quad A_S = -\Delta U_S = \nu C_V(T_1 - T_2), \quad (14.12)$$

$$A_S = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) = \nu \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (14.13)$$

Пример 14.1. В изотермическом процессе идеальный газ совершил работу $A_T = 1$ кДж. Затем газу сообщили еще $Q_p = 1$ кДж теплоты, но уже изобарно. Насколько увеличилась внутренняя энергия этого газа, если газ одноатомный?

Решение

Пусть изотермический процесс происходит между состояниями 1 и 2 (см. рисунок), а изобарический – между состояниями 2 и 3. Полное изменение внутренней энергии равно $\Delta U_{13} = i \frac{\nu}{2} R \Delta T_{31}$, где $\Delta T_{31} = T_3 - T_1 = T_3 - T_2$, поскольку в изотермическом процессе темпера-



К примеру 14.1

тура постоянная $T_1 = T_2$ и внутренняя энергия газа не изменяется.

В изобарическом процессе $Q_p = Q_{23} = \nu C_p (T_3 - T_2) = \nu \frac{i+2}{2} R \Delta T_{31}$, так

как $C_p = \frac{i+2}{2} R$, откуда $\frac{\nu}{2} R \Delta T_{31} = \frac{Q_{23}}{i+2}$, т. е. $\Delta U_{13} = \frac{i}{i+2} Q_{23} = 600$ Дж.

Ответ: $\Delta U_{13} = 600$ Дж.

Пример 14.2. Воздух в комнате нагрели от температуры $t_1 = 15^\circ \text{C}$ до температуры $t_2 = 25^\circ \text{C}$. При этом давление воздуха не изменилось и равно давлению вне комнаты, равному $p = 1$ атм. Изменилась ли внутренняя энергия воздуха внутри комнаты. Объем комнаты $V = 40$ м³.

Решение

При нагревании часть воздуха выходит из комнаты. Согласно формуле (14.8) внутренняя энергия в начальном состоянии $U_1 = i\nu_1 RT_1 / 2$, а в конечном состоянии $U_2 = i\nu_2 RT_2 / 2$, где $T_1 = t_1 + 273 = 288$ К, $T_2 = t_2 + 273 = 298$ К. С помощью уравнения Менделеева–Клапейрона (10.1) для начального и конечного состояний $p_1 V = \nu_1 RT_1$ и $p_2 V = \nu_2 RT_2$ найдем $U_1 = i\nu_1 RT_1 / 2 = ip_1 V_1 / 2 = ipV / 2$ и $U_2 = i\nu_2 RT_2 / 2 = ip_2 V_2 / 2 = ipV / 2$, т. е. внутренняя энергия не изменяется $\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = 0$, так как $p_2 = p_1 = p$, $V_2 = V_1 = V$. Считая $i = 5$, вычислим эту внутреннюю энергию воздуха в комнате: $U = ipV / 2 = 10^7$ Дж.

Ответ: $\Delta U_{12} = 0$ Дж, $U = 10^7$ Дж.

Пример 14.3. В теплоизолированном сосуде при температуре $T_1 = 800$ К находится один моль углекислого газа и один моль молекулярного водорода. Происходит химическая реакция $\text{CO}_2 + \text{H}_2 = \text{CO} + \text{H}_2\text{O}$. Найти температуру газа T_2 , после того как все молекулы прореагируют. Во сколько раз возрастет давление? Обозначим полное

число степеней свободы молекул углекислого газа CO_2 $i_1 = 6$, водорода H_2 $i_2 = 5$, угарного газа CO $i_3 = 5$, водяного пара H_2O $i_4 = 6$.

Решение

В результате химической реакции водорода с углекислым газом образуется угарный газ и вода, при этом выделяется некоторое количество теплоты Q , что приводит к увеличению температуры и давления смеси газов.

Поскольку сосуд хорошо теплоизолирован, то теплообмен с внешней средой отсутствует, и так как $V = \text{const}$, то работа газом не производится, $A_{12} = 0$ Дж, а выделившееся тепло идет на увеличе-

ние внутренней энергии $Q = \Delta U_{12}$, где $\Delta U_{12} = \left(\frac{i_3}{2} \nu_3 + \frac{i_4}{2} \nu_4 \right) RT_2 - \left(\frac{i_1}{2} \nu_1 + \frac{i_2}{2} \nu_2 \right) RT_1$, причем число молей всех компонент одинаково:

$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 \equiv \nu$. Откуда в нашем случае имеем $2Q / \nu(i_3 + i_4)R = T_2 - T_1$ и $T_2 = T_1 + 2Q / (i_3 + i_4)R \approx 1700$ К при $\nu = 1$ моль. Взяв отношение уравнений Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний $p_1 V = \nu RT_1$ и $p_2 V = \nu RT_2$, получим $p_2 / p_1 = T_2 / T_1 = 2.07$.

Ответ: $T_2 \approx 1700$ К, $p_2 / p_1 \approx 2.1$.

Пример 14.4. Для движения торпеды раньше использовался двигатель, работающий на сжатом воздухе. Оцените максимальную полезную работу, производимую двигателем, если объем сжатого воздуха $V = 200$ л, а давление $p = 20$ МПа. Торпеда отрегулирована на движение в воде на глубине $h = 3$ м. Температура сжатого воздуха и воды $T = 280$ К. Считая движение торпеды равномерным, оцените силу тяги двигателя, если радиус действия торпеды $l = 2$ км.

Решение

Процесс расширения воздуха является изотермическим, начальное давление в баллоне $p_1 = 2 \cdot 10^7$ Па, конечное давление p_2 газа в воздушных пузырях за торпедой складывается из атмосферного давления p_0 на уровне моря и гидростатического давления ρgh , т. е.

$p_2 = p_0 + \rho gh$, где ρ – плотность воды. Работа при изотермическом расширении газа равна $A = p_1 V_1 \ln(V_2 / V_1) = p_1 V_1 \ln(p_1 / p_2)$. Подставляя численные значения, получаем оценку максимальной полезной работы $A = 0.4 \cdot 10^7 \ln(2 \cdot 10^7 / 1.31 \cdot 10^5) \approx 2 \cdot 10^7$ Дж. Оценку силы тяги можно получить, зная радиус l действия торпеды, поскольку $A = Fl$, откуда $F = A / l \approx 10$ кН.

Ответ: $A \approx 2 \cdot 10^7$ Дж, $F \approx 10$ кН.

Пример 14.5. Автомобильная камера накачана до давления $p_1 = 220$ кПа при температуре $T_1 = 290$ К. Во время движения она нагрелась до температуры $T_2 = 330$ К и с шумом лопнула. Считая процесс, происходящий после повреждения камеры, адиабатным, определить изменение температуры вышедшего из нее воздуха. Внешнее давление $p_0 = 100$ кПа.

Решение

Рассмотрим происходящее как два последовательных термодинамических процесса: первый – изохорическое нагревание воздуха в камере; второй – адиабатическое расширение воздуха. В изохорическом процессе имеем $p_1 / T_1 = p_2 / T_2$, $p_2 = p_1 T_2 / T_1 = 250$ кПа, в адиабатическом процессе – $T_2 p_2^{(1-\gamma)/\gamma} = T_0 p_0^{(1-\gamma)/\gamma}$, где T_0 – температура воздуха в конце адиабатического расширения $T_0 = T_2 p_2^{(1-\gamma)/\gamma} / p_0^{(1-\gamma)/\gamma}$, где $\gamma = 1.4$. Найдем разность температур $\Delta T = T_2 - T_0 = T_2 \left(1 - (p_2 / p_0)^{(1-\gamma)/\gamma}\right) = 330(1 - 2.5^{-0.4/1.4}) = 76$ К.

Ответ: $\Delta T = 76$ К.

Примечание. Самые большие грузовики трудятся в карьерах, их грузоподъемность более 300 т. Например, БелАЗ-75710 имел рекордную грузоподъемность 450 т. Оцените, насколько понизится температура вышедшего газа, если лопнет шина такого грузовика.

Пример 14.6. Влажный воздух содержит 20 % пара. Принимая сухой воздух за двухатомный газ с эффективными молярной массой $\mu_1 = 0.029$ кг/моль и числом степеней свободы молекулы $i_1 = 5$, определите удельную теплоемкость влажного воздуха при постоянном объ-

еме и отношение молярных теплоемкостей $\gamma = C_p / C_V$. У водяного пара молярная масса $\mu_2 = 0.018$ кг/моль, а число степеней свободы молекулы $i_2 = 6$.

Решение

Пусть m_1 – масса воздуха, m_2 – масса водяного пара, $m = m_1 + m_2$ – масса смеси. Удельная теплоемкость смеси воздуха и водяного пара при постоянном объеме есть $c_V = \tilde{C}_V / m$, где полная теплоемкость смеси равна $\tilde{C}_V = (i_1 v_1 + i_2 v_2) R / 2$. Учитывая, что $v_1 = m_1 / \mu_1$, $v_2 = m_2 / \mu_2$, а массовая доля компонент смеси $\alpha_1 = m_1 / m = 0.8$, $\alpha_2 = m_2 / m = 0.2$, получим $c_V = (i_1 \alpha_1 / 2\mu_1 + i_2 \alpha_2 / 2\mu_2) R = 850$ Дж/(кг · К).

Полное число молей в смеси $\nu = \nu_1 + \nu_2$ позволяет определить молярную массу μ смеси, так как $\nu = m / \mu$, откуда $\mu = \mu_1 \mu_2 / (\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1) = 0.0258$ кг/моль. Тогда молярные теплоемкости равны $C_V = \mu c_V$ и $C_p = C_V + R$ (уравнение Майера (14.5)), а показатель адиабаты $\gamma = (C_V + R) / C_V = 1 + R / \mu c_V = 1.38 \approx 1.4$.

Ответ: $c_V = 850$ Дж/кг · К, $\gamma \approx 1.4$.

Пример 14.7. Смешали две части водорода и одну часть кислорода (по объему). Общая масса смеси $m = 72$ г, температура $T = 290$ К. Определить молярную теплоемкость C_V и внутреннюю энергию U смеси газов. Молярные массы водорода $\mu_1 = 0.002$ кг/моль, кислорода $\mu_2 = 0.032$ кг/моль, а числа степеней свободы молекул у них одинаковы: $i = i_1 = i_2 = 5$.

Решение

Внутренняя энергия смеси идеальных газов есть сумма внутренних энергий компонент $U = U_1 + U_2$, где $U_1 = \nu_1 i_1 R T / 2$, $U_2 = \nu_2 i_2 R T / 2$, так что в данном случае $U = \nu C_V T$, где $C_V = i R / 2 = 20.78$ Дж/моль · К – молярная теплоемкость смеси при постоянном объеме, а полное число молей смеси ν найдем с помощью закона Авогадро: «в равных объемах содержится равное количество молей газов при одинаковых термодинамических условиях». Тогда в нашем случае $\nu_1 = 2\nu_2$, а $m_1 = \nu_1 \mu_1$ –

масса водорода, $m_2 = \nu_2 \mu_2$ – масса кислорода, причем масса смеси $m = m_1 + m_2 = 2\nu_2 \mu_1 + \nu_2 \mu_2$, откуда $\nu_2 = m / (2\mu_1 + \mu_2)$. Число молей смеси газов есть $\nu = \nu_1 + \nu_2 = 4 + 2 = 6$ моль. В итоге внутренняя энергия смеси $U = \nu C_V T = 36\,149$ Дж.

Ответ: $C_V = 20.8$ Дж/моль · К, $U \approx 36$ кДж.

Пример 14.8. В результате обратимого адиабатического расширения температура $m = 1$ кг азота понижается на $\Delta T = 20$ К. Определить работу, совершаемую газом при расширении. Учесть, что колебательные степени свободы молекул азота при рассматриваемых температурах не возбуждаются.

Решение

Для расчета работы адиабатического расширения удобно использовать формулу (14.12): $A_{12} = \nu C_V (T_1 - T_2)$, где $T_1 - T_2 = \Delta T$, $C_V = iR / 2$, $i = 5$. Учитывая, что $\nu = m / \mu = 1 / 0.028 = 35.7$ моль и $\gamma = (i + 2) / i = 1.4$, находим величину работы адиабатического расширения $A_{12} = \nu i R \Delta T / 2 = 14\,839$ Дж

Ответ: $A_{12} = 14.8$ кДж.

Задачи для аудиторной работы

A14.1. Один моль идеального двухатомного газа сначала изохорически нагрели, а затем изобарически охладили до первоначальной температуры 300 К, уменьшив при этом объем газа в три раза. Какое количество теплоты отдал газ на первом участке? Какая работа совершена газом на втором участке?

A14.2. Расширяясь, один моль водорода совершил работу, равную 10 Дж. Какое количество теплоты было подведено к газу, если газ расширился: а) изотермически; б) изобарически?

A14.3. Принимая, что процесс распространения звука в воздухе является адиабатическим, Пьер Лаплас для скорости звука получил формулу $v = \sqrt{\gamma p / \rho}$, где p – давление, ρ – плотность воздуха, $\gamma = C_p / C_V$ – показатель адиабаты. Докажите: а) что скорость звука в воздухе является функцией температуры, б) что скорость звука при

температуре $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ равна 332 м/с ; определите скорость звука при температуре $22.5\text{ }^{\circ}\text{C}$.

A14.4. Воздух, занимавший объем 10 л при давлении 1 атм , был адиабатически сжат до объема 1 л . Под каким давлением находился воздух после сжатия?

A14.5. При адиабатическом увеличении объема кислорода в 10 раз его внутренняя энергия уменьшилась на 42 кДж . Начальная температура была равна 280 К . Найдите массу кислорода.

A14.6. Сравнить конечные температуры и объемы воздуха при его сжатии в поршневом компрессоре от 1 до 5 атм : а) адиабатически, б) изотермически.

A14.7. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_P для газовой смеси, состоящей из 7 г азота и 20 г аргона. Газы идеальные.

Задание на дом

B14.1. Каковы удельные теплоемкости c_V и c_P смеси газов, содержащей 10 г кислорода и 20 г азота?

B14.2. Газ, занимавший объем 12 л под давлением 100 кПа , был изобарно нагрет от температуры 300 К до температуры 400 К . Определить работу расширения газа.

B14.3. При адиабатном сжатии кислорода массой 1 кг совершена работа, равная 100 кДж . Определить конечную температуру газа, если до сжатия кислород находился при температуре 300 К .

B14.4. Водород занимает объем 10 м^3 при давлении 100 кПа . Газ нагрели при постоянном объеме до давления 300 кПа . Определить: 1) изменение внутренней энергии; 2) работу, совершенную газом; 3) количество теплоты, сообщенной газу.

B14.5. Водяной пар расширяется при постоянном давлении. Определить работу расширения, если пару передано количество теплоты, равное 4 кДж .

Практикум 15

ЦИКЛЫ. ЦИКЛ КАРНО. ЭНТРОПИЯ

Коэффициент полезного действия (КПД) η тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}, \quad (15.1)$$

где Q_1 – количество теплоты, переданной нагревателем рабочему телу; Q_2 – количество теплоты, отданной рабочим телом холодильнику; $A = Q_1 - |Q_2|$ – полная механическая работа, произведенная рабочим телом за цикл.

Коэффициент полезного действия η_K цикла Карно

$$\eta_K = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (15.2)$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

Коэффициент преобразования энергии (КПЭ)

$$\chi \equiv \frac{|Q_1|}{|A|}. \quad (15.3)$$

Коэффициент преобразования энергии для цикла Карно

$$\chi_K = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (15.4)$$

Коэффициент преобразования холодильной машины КПХ (холодильный коэффициент)

$$\varepsilon \equiv \frac{|Q_2|}{|A^*|}, \quad (15.5)$$

где Q_2 – количество теплоты, отнятой у охлаждаемого тела; A^* – полная работа над рабочим телом за цикл.

Коэффициент преобразования холодильной машины, работающей по обратному циклу Карно

$$\varepsilon_K = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (15.6)$$

Энтропия

$$S = k \ln(\Gamma_0), \quad (15.7)$$

где Γ_0 – статистический вес макросостояния.

Изменение энтропии в равновесном процессе

$$dS \equiv \frac{\delta Q}{T}, \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (15.8)$$

Пример 15.1. КПД паровой машины составляет половину КПД идеальной тепловой машины, которая работает по циклу Карно в том же интервале температур. Температура пара, поступающая из котла в паровую машину, равна $T_1 = 500$ К, температура конденсата $T_2 = 350$ К. Определить мощность паровой машины, если она за один час потребляет уголь массой $m = 200$ кг с теплотворной способностью $\lambda = 31$ МДж/кг.

Решение

Найдем КПД паровой машины $\eta = 0.5\eta_K$, $\eta_K = (T_1 - T_2) / T_1 = 0.3$, т. е. $\eta = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$. С другой стороны, $\eta = A / Q_1$, где A и Q_1 – совершенная паровой машиной работа и поглощенное ею тепло за время $t = 1$ ч. Количество теплоты $Q_1 = \lambda m$, тогда $A = \eta Q_1 = \eta \lambda m$, а мощность паровой машины равна $P = A / t = \eta \lambda m / t \approx 260$ кВт.

Ответ: $P \approx 260$ кВт.

Пример 15.2. Некоторое количество идеального газа в цилиндре под поршнем совершает цикл, состоящий из двух изобар при давлениях p_1 и p_2 и из двух изотерм при температурах T_1 и T_2 . Докажите, что КПД этого цикла меньше, чем КПД цикла Карно с теми же изотермами.

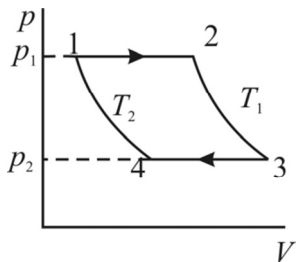


Рис. 15.1. К примеру 15.2

Решение

Изобразим цикл на pV -диаграмме. Прономеруем вершины как показано на рис. 15.1.

Каждая вершина криволинейного четырехугольника изображает макросостояние со следующими термодинамическими параметрами: 1 – p_1, T_2, V_1 ; 2 – p_1, T_1, V_2 ; 3 – p_2, T_1, V_3 ; 4 – p_2, T_2, V_4 . Полная работа за цикл равна $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$, где работа в изопроцессах на соответствующих участках цикла дается формулами: $A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = \nu R(T_1 - T_2)$, $A_{23} = \nu RT_1 \ln(p_1 / p_2)$, $A_{34} = p_2(V_4 - V_3) = -\nu R(T_1 - T_2)$, $A_{41} = -\nu RT_2 \ln(p_1 / p_2)$. Таким образом, полная работа за цикл $A = \nu R(T_1 - T_2) \ln(p_1 / p_2)$. Количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя, равно $Q_1 = Q_{12} + Q_{23}$, где $Q_{12} = \nu C_p(T_1 - T_2)$ и $Q_{23} = A_{23} = \nu RT_1 \ln(p_1 / p_2)$. КПД тепловой машины $\eta = A / Q_1$, что дает $\eta = \nu R(T_1 - T_2) \ln(p_1 / p_2) / [\nu C_p(T_1 - T_2) + \nu RT_1 \ln(p_1 / p_2)]$, или

$$\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} \frac{1}{1 + C_p(T_1 - T_2) / RT_1 \ln(p_1 / p_2)}.$$

Поскольку знаменатель второй дроби больше единицы, величина η меньше КПД машины, работающей по циклу Карно $\eta_K = (T_1 - T_2) / T_1$.

Ответ: $\eta < \eta_K$.

Пример 15.3. Холодильная машина работает по обратному циклу Карно в интервале температур от $T_2 = 250$ К до $T_1 = 310$ К. Рабочее тело – азот, масса которого $m = 0.2$ кг, отношение максимального объема к минимальному объему равно 5. Найти количество теплоты Q_2 , отбираемой от охлаждаемого тела, работу внешних сил A^* за цикл и КПД машины.

Решение

Обратный цикл Карно состоит из четырех процессов: 12 – изотермического расширения при температуре T_2 в тепловом контакте с охлаждаемым телом, над рабочим телом производится работа A_{12} и от

холодильника отбирается теплота Q_2 ; 23 – адиабатического сжатия, при котором температура рабочего тела возрастает до T_1 , над рабочим телом совершается работа A_{23} ; 34 – изотермического сжатия при температуре T_1 , при этом в теплообменнике выделяется теплота Q_1 и передается окружающей среде, а над рабочим телом совершается работа A_{34} ; 41 – адиабатического расширения, когда температура понижается до T_2 , рабочее тело совершает работу A_{41} . Выпишем формулы, выражающие теплоту, работу и изменение внутренней энергии, а также уравнения для всех изопроцессов:

$$12: Q_2 = A_{12} = \nu R T_2 \ln(V_2 / V_1), \Delta U_{12} = 0, p_1 V_1 = p_2 V_2;$$

$$23: Q_{23} = 0, A_{23} = -\Delta U_{23} = -\nu C_V (T_1 - T_2), p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma;$$

$$34: Q_1 = A_{34} = \nu R T_1 \ln(V_4 / V_3), \Delta U_{34} = 0, p_3 V_3 = p_4 V_4;$$

$$41: Q_{41} = 0, A_{41} = -\Delta U_{41} = -\nu C_V (T_2 - T_1), p_4 V_4^\gamma = p_1 V_1^\gamma.$$

Полная работа, совершаемая рабочим телом за цикл:

$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = A_{12} + A_{34}$, так как $A_{23} + A_{41} = 0$, т. е. $A = \nu R T_2 \ln(V_2 / V_1) + \nu R T_1 \ln(V_4 / V_3)$. Покажем, что для обратного цикла Карно справедливо равенство $V_2 / V_1 = V_3 / V_4$. Действительно, из уравнений изотерм имеем $V_2 / V_1 = p_1 / p_2$ и $p_4 / p_3 = V_3 / V_4$, отношение уравнений адиабат дает $p_1 / p_2 = (p_4 / p_3) V_4^\gamma V_2^\gamma / V_1^\gamma V_3^\gamma$. Используя два предыдущих равенства, получаем $V_2 / V_1 = V_4^{\gamma-1} V_2^\gamma / V_1^\gamma V_3^{\gamma-1}$, откуда и следует, что $(V_2 / V_1)^{1-\gamma} = (V_3 / V_4)^{1-\gamma}$.

Работа внешних сил над рабочим телом равна $A = \nu R (T_2 - T_1) \ln(V_2 / V_1)$. По условию задачи отношение объемов $V_2 / V_4 = n = 5$, но объем V_4 связан с объемом V_1 уравнением Пуассона $T_1 V_4^{\gamma-1} = T_2 V_1^{\gamma-1}$, откуда $V_1 = V_4 (T_1 / T_2)^{1/(\gamma-1)}$, а значит, $V_2 / V_1 = (V_2 / V_4) (T_2 / T_1)^{1/(\gamma-1)} = n (T_2 / T_1)^{1/(\gamma-1)}$. Тогда полная работа за цикл $A = \nu R (T_2 - T_1) \times \ln \left(n (T_2 / T_1)^{1/(\gamma-1)} \right) = -3.8$ кДж, работа внешних сил (компрессора) равна $A^* = -A = 3.8$ кДж; количество теплоты, отнятой у охлаждаемого-

го тела, есть $Q_2 = \nu R T_2 \ln(n(T_2 / T_1)^{1/(\gamma-1)}) = 15.9 \text{ кДж}$, а холодильный коэффициент равен $\varepsilon = |Q_2 / A^*| \approx T_2 / (T_1 - T_2) = 4.17$.

Ответ: $A^* = 3.8 \text{ кДж}$, $Q_2 = 15.9 \text{ кДж}$, $\varepsilon_K = 4.17$.

Пример 15.4. С помощью электрической плитки мощностью $P_0 = 1 \text{ кВт}$ в комнате поддерживается температура $T_1 = 290 \text{ К}$ при температуре наружного воздуха $T_2 = 250 \text{ К}$. Какая мощность потребовалась бы для поддержания в комнате той же температуры с помощью идеального теплового насоса, т. е. работающей по обратному циклу Карно холодильной машины, которая отбирает теплоту у внешней среды и передает ее комнатному воздуху?

Решение

При работе электроплитки за время t в комнату поступает тепловая энергия $Q_1 = P_0 t$. Такое же количество тепла должно поставляться тепловым насосом за счет работы A^* , совершаемой компрессором. Из (15.3) найдем $|A^*| = Q_1 / \chi$, причем КПЭ согласно (15.4) равен $\chi = \chi_K = T_1 / (T_1 - T_2) = 290 / 40 = 7.25$. При этом требуемая мощность компрессора, совершающего механическую работу по перекачке тепла в комнату, должна быть равна $P = |A^*| / t = Q_1 / t \chi = P_0 / \chi = 1000 / 7.25 = 138 \text{ Вт}$.

Ответ: $P = 138 \text{ Вт}$.

Пример 15.5. Смешали две порции воды: первую, имеющую массу $m_1 = 5 \text{ кг}$ и температуру $T_1 = 280 \text{ К}$, и вторую, имеющую массу $m_2 = 8 \text{ кг}$ и температуру $T_2 = 350 \text{ К}$. Найти: 1) температуру смеси T ; 2) изменение энтропии ΔS системы при смешивании. Удельная теплоемкость воды $c = 4190 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$.

Решение

1. Вторая порция воды отдает абсолютное количество теплоты $\Delta Q_2 = c m_2 (T_2 - T)$, а первая порция получает абсолютное количество теплоты $\Delta Q_1 = c m_1 (T - T_1)$. Они равны между собой $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$, т. е. $c m_1 (T - T_1) = c m_2 (T_2 - T)$, откуда $T = (m_1 T_1 + m_2 T_2) / (m_1 + m_2) = 4200 / 13 = 323 \text{ К}$.

2. Изменение энтропии системы при смешивании равно сумме изменения энтропий смешиваемых частей $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$, тогда

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_1}{T} = cm_1 \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} = cm_1 \ln \frac{T}{T_1} > 0,$$

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q_2}{T} = cm_2 \int_{T_2}^T \frac{dT}{T} = cm_2 \ln \frac{T}{T_2} < 0,$$

$$\Delta S = cm_1 \ln \frac{T}{T_1} + cm_2 \ln \frac{T}{T_2} = 302 \text{ Дж/К.}$$

Ответ: 1) $T = 323 \text{ К}$; 2) $\Delta S = 302 \text{ Дж/К}$.

Пример 15.6. Найти приращение энтропии двух молей идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.3$, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в $\alpha = 2$ раза, а давление уменьшилось в $\beta = 3$ раза.

Решение

Энтропия является функцией состояния, следовательно, неважно, при помощи каких процессов система перешла из начального состояния 1 в конечное состояние 2. Поэтому рассмотрим показанный на рис. 15.2 квазиравновесный термодинамический процесс между состояниями 1 и 2, состоящий из последовательных изохорического процесса 13 и изобарического процесса 32.

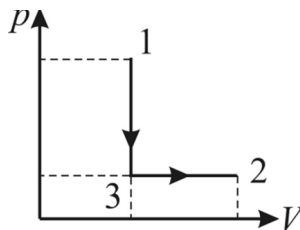


Рис. 15.2. К примеру 15.6

При помощи (15.8) найдем изменение энтропии:

$$\Delta S_{12} = \Delta S_{13} + \Delta S_{32} = \int_1^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^2 \frac{\delta Q}{T} = \nu C_V \int_1^3 \frac{dT}{T} + \nu C_P \int_3^2 \frac{dT}{T},$$

$$\text{или } \Delta S_{12} = \nu C_V \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \right) + \nu C_P \ln \left(\frac{T_2}{T_3} \right)$$

На участке 13: $p_1 / T_1 = p_2 / T_3$ и $T_3 / T_1 = p_2 / p_1 = 1 / \beta$, на участке 32: $V_1 / T_3 = V_2 / T_2$ и $T_2 / T_3 = V_2 / V_1 = \alpha$, т. е. $\Delta S_{12} = \nu C_p \ln \alpha - \nu C_V \ln \beta$. Из соотношений $\gamma = C_p / C_V$ и $C_p - C_V = R$ выразим $C_V = R / (\gamma - 1)$ и $C_p = R\gamma / (\gamma - 1)$, получим $\Delta S_{12} = \nu R(\gamma \ln \alpha - \ln \beta) / (\gamma - 1) = -10.9$ Дж/К.

Ответ: $\Delta S_{12} \approx -11$ Дж/К.

Задачи для аудиторной работы

A15.1. Паровая машина мощностью 14.7 кВт потребляет за один час работы 8.1 кг угля с удельной теплотой сгорания $3.3 \cdot 10^7$ Дж/кг. Температуры котла 473 К и холодильника 331 К. Найти КПД этой машины и сравнить его с КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно.

A15.2. Домашний холодильник потребляет из электрической сети мощность 200 Вт. Температура окружающей среды (воздух в комнате) равна 293 К. Определите температуру в камере холодильника, если количество отведенного тепла в пять раз превышает количество затраченной энергии. Холодильник работает по циклу Карно.

A15.3. Водород массой 6.6 г изобарически расширяется от V до $2V$. Найти изменение энтропии при этом расширении.

A15.4. Идеальный газ, расширяясь изотермически при температуре 400 К, совершает работу 800 Дж. Что происходит при этом с энтропией?

A15.5. Некоторое количество идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изохор при объемах V_1 и V_2 и из двух изотерм при температурах T_1 и T_2 . Докажите, что КПД этого цикла меньше, чем у цикла Карно с теми же изотермами.

Задание на дом

B15.1. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества 1 моль и находящийся под давлением 0.1 МПа при температуре 300 К, нагревают при постоянном объеме до давления 0.2 МПа. После этого газ изотермически расширился до начального давления и затем изобарно был сжат до начального объема. Определить температуру для характерных точек цикла и термический КПД цикла.

В15.2. Идеальный многоатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объем в четыре раза больше наименьшего. Определить термический КПД цикла.

В15.3. Наименьший объем газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем газа, если объем газа в конце изотермического расширения равен 600 л, а объем газа в конце изотермического сжатия равен 189 л.

В15.4. В результате изохорного нагревания водорода массой 1 г давление газа увеличилось в два раза. Определить изменение энтропии газа.

В15.5. Кислород массой 2 кг увеличил свой объем в пять раз: а) изотермически, б) адиабатически. Найти изменение энтропии в каждом из указанных процессов.

Практикум 16

ЗАКОН КУЛОНА

НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ

ДИПОЛЬ. ПОЛЕ ДИПОЛЯ

Закон Кулона (рис. 16.1)

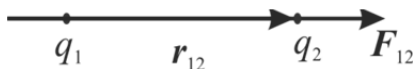


Рис. 16.1. К закону Кулона

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}, \quad (16.1)$$

где $\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon}$, $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ Ф/м = $8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды.

Напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (16.2)$$

Напряженность поля точечного заряда q

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^2} \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (16.3)$$

Принцип суперпозиции

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}). \quad (16.4)$$

Напряженность поля системы точечных зарядов

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \sum_n \frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}. \quad (16.5)$$

Напряженность поля зарядов линейной плотности $\lambda(\mathbf{r}') = dq / dl'$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (16.6)$$

Напряженность поля зарядов поверхностной плотности $\sigma(\mathbf{r}') = dq / dS'$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (16.7)$$

Напряженность поля зарядов объемной плотности $\rho(\mathbf{r}') = dq / dV'$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (16.8)$$

Напряженность поля однородно заряженной плоскости

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} \mathbf{n}, \quad (16.9)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости.

Электрический дипольный момент системы точечных зарядов

$$\mathbf{p} = \sum_n q_n \mathbf{r}_n. \quad (16.10)$$

Электрический дипольный момент диполя с плечом $\mathbf{d}$

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}. \quad (16.11)$$

Момент сил, действующих на диполь

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (16.12)$$

Потенциальная энергия диполя в однородном электрическом поле

$$U = -\mathbf{p}\mathbf{E}. \quad (16.13)$$

Напряженность электрического поля точечного диполя

$$\mathbf{E} = k \left(\frac{3\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right). \quad (16.14)$$

Пример 16.1. Два маленьких шарика, обладающих одинаковыми радиусами и массами, подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q_0 = 0.4$ мкКл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол $2\alpha = \pi/3$ (рис. 16.2). Найти массу каждого шарика, если расстояния от центров шариков до точки подвеса $l = 0.2$ м.

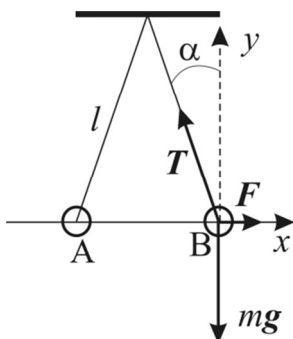


Рис. 16.2. К примеру 16.1

$T = mg / \cos \alpha$ и $F = mg \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно, масса шарика равна $m = F / g \operatorname{tg} \alpha$, где $F = kq^2 / r_{AB}^2$. Расстояние между центрами шариков $r_{AB} = 2l \sin \alpha$, поэтому $m = kq^2 / (4gl^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha) = 1.6 \cdot 10^{-3}$ кг.

Ответ: $m = 1.6 \cdot 10^{-3}$ кг.

Пример 16.2. Вдоль тонкого кольца радиусом $R = 0.1$ м равномерно распределен заряд $q = 1$ мкКл. Определить напряженность поля: 1) на расстоянии $z = 0.1$ м от центра кольца на оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр кольца; 2) в центре кольца. На каких расстояниях от центра кольца на его оси модуль вектора напряженности поля будет максимальным и минимальным?

Решение

Введем цилиндрическую систему координат с началом в центре кольца и осью z вдоль оси симметрии системы. Очевидно, что в точках на оси вектор напряженности поля $\mathbf{E}$ будет направлен вдоль оси z от центра (см. рис. 16.3).

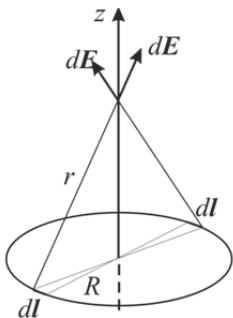


Рис. 16.3. К примеру 16.2

Линейная плотность заряда на кольце равна $\lambda = q / 2\pi R$. Вклад dE_z в величину E_z от элемента заряда $dq = \lambda dl$ согласно (16.6) равен

$$dE_z = k\lambda dl z / r^3, \quad (16.15)$$

где z – расстояние от центра кольца до точки наблюдения поля, а $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ – расстояние от элемента длины dl до точки наблюдения поля. При интегрировании по кольцу z и r не изменяются, поэтому

$$E_z = \int_{\Gamma} k \frac{\lambda z}{r^3} dl = k \frac{\lambda z}{r^3} \int_{\Gamma} dl = k \frac{\lambda z}{r^3} 2\pi R = k \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (16.16)$$

Откуда

$$1) |E_z(z = \pm 0.1 \text{ м})| = 3.18 \cdot 10^5 \text{ В/м};$$

$$2) E_z(z = 0) = 0 \text{ В/м}.$$

Из (16.16) очевидно, что $E_z > 0$ при $z > 0$ и $E_z < 0$ при $z < 0$. Чтобы найти максимальное значение напряженности поля на оси кольца, приравняем нулю производную dE_z / dz :

$$\frac{dE_z}{dz} = \frac{kq}{(R^2 + z^2)^3} \left((R^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(R^2 + z^2)^{1/2} \right) = 0,$$

что дает $2z_{\max}^2 - R^2 = 0$ и $z_{\max} = \pm R / \sqrt{2}$. В этих точках напряженность поля равна $E_{\max} = |E_{z,\max}| = 2kq / (3\sqrt{3}R^2) = 3.46 \cdot 10^5 \text{ В/м}$.

Минимальное значение $E = |E_z| = E_{\min} = 0$ достигается при $z = 0$ и при $z \rightarrow \pm\infty$.

Ответ: 1) $|E_z(z = \pm 0.1 \text{ м})| = 3.18 \cdot 10^5 \text{ В/м}$; 2) $E_z(z = 0) = 0 \text{ В/м}$; $E_{\max} = 3.46 \cdot 10^5 \text{ В/м}$ при $z_{\max} = \pm R / \sqrt{2} \text{ м}$; $E_{\min} = 0$ при $z = 0$ и при $z \rightarrow \pm\infty$.

Пример 16.3. Тонкий однородный диск радиусом $a = 0.1$ м, расположенный горизонтально, заряжен равномерно поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1$ мкКл/м². Определить напряженность электрического поля: 1) на расстоянии $z = 0.1$ м на оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через центр диска; 2) в центре диска. На каких расстояниях от центра диска на оси симметрии напряженность поля будет максимальной и минимальной?

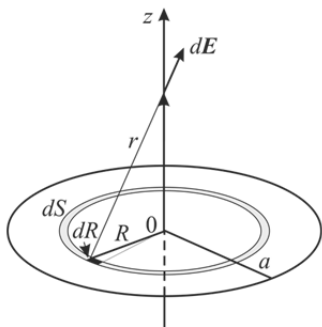


Рис. 16.4. К примеру 16.3

Как и в предыдущем примере, в точках на оси z симметрии вектор напряженности поля $\mathbf{E}$ будет направлен вдоль оси z от центра диска (рис. 16.4). При вычислении поверхностного интеграла (16.7) по диску в качестве элемента интегрирования удобно взять бесконечно тонкое кольцо радиусом R шириной dR с площадью $dS = 2\pi R dR$.

Решение

Вклад dE_z в величину E_z от такого кольца, аналогично (16.15), равен

$$dE_z = k\sigma dS z / r^3 = k\sigma 2\pi R dR z / (R^2 + z^2)^{3/2}, \quad (16.17)$$

где z – расстояние от центра диска до точки наблюдения поля, а $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ – расстояние от тонкого кольца до точки наблюдения поля. Тогда

$$E_z = k\sigma 2\pi z \int_0^a \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi k\sigma \frac{z}{|z|} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right). \quad (16.18)$$

Откуда

$$1) |E_z(z = \pm 0.1 \text{ м})| = 827 \text{ В/м};$$

$$2) E_z(z = 0) = \sigma / 2\varepsilon_0; |E_z(z = 0)| \approx 2830 \text{ В/м}.$$

Нетрудно проверить, что $dE_z / dz \neq 0$ при конечных значениях z , т. е. $E = |E_z|$ монотонно убывает до нуля при $z \rightarrow \pm\infty$ от максимального значения в середине диска $E_z(z = 0) = \sigma / 2\varepsilon_0$.

Ответ: 1) $|E_z(z = \pm 0.1 \text{ м})| = 827 \text{ В/м}$; 2) $|E_z(z = 0)| \approx 2830 \text{ В/м}$;

$E_{\max} \approx 2830 \text{ В/м}$ при $z = 0$; $E_{\min} = 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$.

Пример 16.4. В вершинах квадрата со стороной $a = 0.01 \text{ м}$ находятся точечные заряды q_1, q_2, q_3, q_4 (рис. 16.5). Определить напряженность поля в центре квадрата в случаях: а) $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$; б) $q_1 = q_2 = q, q_3 = q_4 = -q$; в) $q_1 = q_3 = q, q_2 = q_4 = -q$, где $q = 1.0 \text{ мкКл}$.

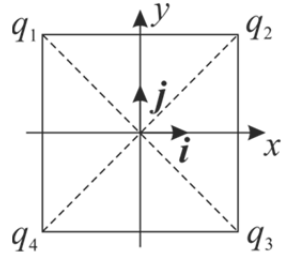


Рис. 16.5. К примеру 16.4

Решение

Поместим начало координат в центр квадрата. Согласно принципу суперпозиции (16.4) в точке $\mathbf{r}$ напряженность поля равна $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_4(\mathbf{r})$, где $\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = -kq_j\mathbf{r}_j / r_j^3$, $j = 1, 2, 3, 4$, вектор $\mathbf{r}_j$ соединяет центр квадрата и заряд q_j : $\mathbf{r}_1 = -b\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_2 = b\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_3 = b\mathbf{i} - b\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_4 = -b\mathbf{i} - b\mathbf{j}$, где $b = a/2$. Длины этих векторов равны половине диагонали $r_j = \sqrt{2} \cdot a/2 \equiv r$, тогда $\mathbf{E}(0) = -\sum_{j=1}^4 kq_j\mathbf{r}_j / r_j^3 = -k(q_1\mathbf{r}_1 + q_2\mathbf{r}_2 + q_3\mathbf{r}_3 + q_4\mathbf{r}_4) / r^3$. В предлагаемых к рассмотрению случаях:

$$\text{а) } \mathbf{E}(0) = \frac{kq(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)}{r^3} = \frac{kq(b\mathbf{i} - b\mathbf{j} - b\mathbf{i} - b\mathbf{j} - b\mathbf{i} + b\mathbf{j} + b\mathbf{i} + b\mathbf{j})}{r^3} = 0$$

,

$$\text{б) } \mathbf{E}(0) = \frac{kq(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)}{r^3} = \frac{kq(b\mathbf{i} - b\mathbf{j} - b\mathbf{i} - b\mathbf{j} + b\mathbf{i} - b\mathbf{j} - b\mathbf{i} - b\mathbf{j})}{r^3} = -4kqb\mathbf{j} / r^3,$$

$$\text{в) } \mathbf{E}(0) = \frac{kq(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)}{r^3} = \frac{kq(b\mathbf{i} - b\mathbf{j} + b\mathbf{i} + b\mathbf{j} - b\mathbf{i} + b\mathbf{j} - b\mathbf{i} - b\mathbf{j})}{r^3} = 0.$$

Ответ. Для а) и в) $\mathbf{E}(0) = 0 \text{ В/м}$; б) $\mathbf{E}(0) = -5.1 \cdot 10^8 \mathbf{j} \text{ В/м}$.

Пример 16.5. Заряды $q_1 = q_2 = q_6 = 1 \text{ мкКл}$, $q_3 = q_4 = q_5 = -1 \text{ мкКл}$ расположены в вершинах правильного шестиугольника со сторонами

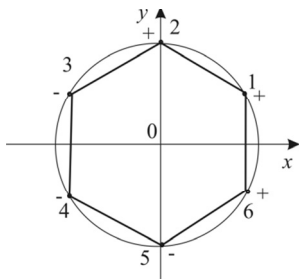


Рис. 16.6. К примеру 16.5

$a = 1$ см (рис. 16.6). Найти электрический дипольный момент $\mathbf{p}$ системы и показать, что он не зависит от выбора начала отсчета системы координат. Определить в дипольном приближении напряженность поля в точке с координатами (1,1) м (система координат изображена на рис. 16.6).

Решение

1. Электрический дипольный момент системы зарядов относительно начала координат согласно (16.10) равен сумме $\mathbf{p} = \sum_{n=1}^6 q_n \mathbf{r}_n = q(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_5)$, где $\mathbf{r}_1 = b\mathbf{i} + c\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_2 = a\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_3 = -b\mathbf{i} + c\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_4 = -b\mathbf{i} - c\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_5 = -a\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_6 = b\mathbf{i} - c\mathbf{j}$, $b = a\sqrt{3}/2$, $c = a/2$. Подставляя эти величины в сумму и приводя подобные члены, получаем $\mathbf{p} = 2qa(\sqrt{3} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j})$, $p = 4aq = 4 \cdot 10^{-8}$ м · Кл.

Перенесем начало координат в произвольную точку O' , радиус-вектор которой равен $\mathbf{R}$, тогда $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}'_j + \mathbf{R}$, а дипольный момент относительно точки O' равен $\mathbf{p}' = \sum_{n=1}^6 q_n \mathbf{r}'_n = \sum_{n=1}^6 q_n (\mathbf{r}_n - \mathbf{R}) = \sum_{n=1}^6 q_n \mathbf{r}_n -$

$$- \mathbf{R} \sum_{n=1}^6 q_n = \sum_{n=1}^6 q_n \mathbf{r}_n = \mathbf{p}, \text{ так как } \sum_{n=1}^6 q_n = 0.$$

2. Найдем значение напряженности поля $\mathbf{E}$ системы зарядов в дипольном приближении по формуле (16.14) в точке с координатами (1,1) м. Радиус-вектор этой точки равен $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $r = \sqrt{2}$. Вычислим скалярное произведение $\mathbf{pr} = 2qa(\sqrt{3} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j})(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2aq(\sqrt{3} + 1)$ и получим $\mathbf{E} = k \left(\frac{3aq(\sqrt{3} + 1)\mathbf{r} - \mathbf{p}}{r^3} \right) = kqa \left(\frac{(\sqrt{3} + 3)\mathbf{i} + (3\sqrt{3} + 1)\mathbf{j}}{2\sqrt{2}} \right).$

$$E = |\mathbf{E}| = kqa\sqrt{3\sqrt{3} + 10} / \sqrt{2} \approx 250 \text{ В/м.}$$

Ответ: 1) $p = 4.0 \cdot 10^{-8}$ м · Кл; 2) $E \approx 250$ В/м.

Задачи для аудиторной работы

A16.1. Во сколько раз сила гравитационного притяжения между двумя протонами меньше силы их кулоновского отталкивания?

A16.2. Два маленьких проводящих шарика одинаковыми радиусом и массой 20 мг подвешены на нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке подвеса. Один из шариков отвели в сторону и сообщили ему заряд q_0 , затем отпустили. После соединения шарики разошлись на угол $2\alpha = \pi/3$. Найти начальный заряд q_0 шарика. Расстояние от центра шарика до точки подвеса $l = 0.2$ м.

A16.3. Тонкое однородное кольцо с внешним радиусом $R_1 = 0.1$ м и с внутренним радиусом $R_2 = 0.05$ м расположено горизонтально и заряжено равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ мкКл/м². Определить напряженность электрического поля: 1) на расстоянии $z = 0.1$ м от центра кольца на оси, перпендикулярной к плоскости кольца и проходящей через его центр; 2) в центре кольца.

A16.4. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть диполь с дипольным моментом p из положения вдоль поля E в положение против поля?

A16.5. Два одинаковых заряда $+q$ помещаются в точках с координатами $(a, 0)$ и $(-a, 0)$. Найти электрический дипольный момент системы относительно точек с координатами: 1) $(-a, 0)$; 2) $(a, 0)$; 3) $(0, 0)$; 4) $(0, a)$. Повторить решение задачи, заменив в точке $(-a, 0)$ заряд $+q$ на $-q$.

A16.6. Находящийся в вакууме очень тонкий стержень длиной $2a = 0.45$ м заряжен с одинаковой всюду линейной плотностью $\lambda = 0.5$ мкКл/м. Найти модуль напряженности электрического поля в двух точках, расположенных на расстояниях $R_1 = a$ и $R_2 = 2a$ от стержня на прямой, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину.

Задание на дом

B16.1. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1 = 8$ нКл и $q_2 = 5.3$ нКл равно 40 см. Вычислить напряженность электрического поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему станет равна напряженность, если второй заряд будет отрицательным?

В16.2. Тонкое кольцо радиусом 8 см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью 10 нКл/м. Какова напряженность электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние 10 см?

В16.3. Очень длинная тонкая прямая проволока несет заряд, равномерно распределенный по всей ее длине. Вычислить линейную плотность заряда, если напряженность поля на расстоянии 0.5 м от проволоки против ее середины равна 200 В/м.

В16.4. Два диполя с электрическими моментами $p_1 = 1$ пКл·м и $p_2 = 4$ пКл·м находятся на расстоянии 2 см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если диполи параллельны и лежат на одной прямой.

В16.5. Диполь с электрическим моментом $p = 100$ пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью 10 кВ/м. Определить изменение потенциальной энергии диполя при повороте его на угол $\alpha = \pi / 3$.

Практикум 17

ТЕОРЕМА ГАУССА

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛЯ

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Интегральная форма теоремы Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q, \quad (17.1)$$

где q – заряд в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью S .

Вектор электрической индукции (электрического смещения) $\mathbf{D}$ в изотропных диэлектриках связан с напряженностью $\mathbf{E}$ электростатического поля

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}.$$

Напряженность поля у плоской поверхности проводника

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \mathbf{n}, \quad (17.2)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Потенциал электростатического поля

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q}, \quad (17.3)$$

где $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия заряда q в электростатическом поле.

Выражение потенциала через напряженность

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^r \mathbf{E} d\mathbf{l} + \varphi(r_0), \quad (17.4)$$

где $\varphi(r_0)$ – произвольно выбранное значение потенциала в некоторой точке отсчета r_0 .

Разность потенциалов между двумя точками поля

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} d\mathbf{l} . \quad (17.5)$$

Выражение напряженности электростатического поля через потенциал

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \equiv -\text{grad}\varphi = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) . \quad (17.6)$$

Принцип суперпозиции

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) . \quad (17.7)$$

Потенциал поля системы точечных зарядов

$$\varphi(\mathbf{r}) = k \sum_n \frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} , \quad \varphi(\infty) = 0 . \quad (17.8)$$

Потенциал поля зарядов с объемной плотностью $\rho(\mathbf{r}') = dq / dV'$

$$\varphi(\mathbf{r}) = k \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad \varphi(\infty) = 0 . \quad (17.9)$$

Дифференциальная форма теоремы Гаусса

$$\nabla \mathbf{D} \equiv \text{div} \mathbf{D} = \rho , \quad (17.10)$$

в однородной среде $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon = \text{const}$

$$\nabla \mathbf{E} \equiv \text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} . \quad (17.11)$$

Уравнение Пуассона в однородной среде $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon = \text{const}$

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} , \quad (17.12)$$

здесь $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Пример 17.1. Две концентрические сферы радиусами $R_1 = 0.01$ м и $R_2 = 0.02$ м несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 1$ нКл/м² и $\sigma_2 = -0.5$ нКл/м². Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 1.5$ см и $r_2 = 3$ см от центра сфер. Пространство между сферами заполнено стеклом с $\epsilon = 10$, вне сфер – вакуум.

Решение

Применяем теорему Гаусса (17.1). Очевидно, что рассматриваемое поле обладает сферической симметрией, т. е. силовые линии векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ направлены коллинеарно радиусам-векторам $\mathbf{r} = n\mathbf{r}$ с началом в центре поля, где $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{n} = \mathbf{r} / r$, т. е. $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} = n D_r$, где $D_r = \pm |\mathbf{D}|$ – проекция вектора $\mathbf{D}$ на $\mathbf{n}$. Произвольную замкнутую поверхность S выберем в виде сферы с тем же центром, векторный элемент площади которой $d\mathbf{S} = n dS$, тогда $\mathbf{D} d\mathbf{S} = n^2 D_r dS = D_r dS$, так как $n^2 = 1$. Поток вектора $\mathbf{D}$ через сферическую поверхность радиусом r , центр которой совпадает с центром концентрических заряженных сфер (левая часть выражения (17.1) теоремы Гаусса), равен

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_r dS = D_r \oint_S dS = 4\pi r^2 D_r.$$

Заряд q внутри такой сферы легко найти:

$$q = \begin{cases} 0, & r < R_1, \\ 4\pi R_1^2 \sigma_1, & R_1 < r < R_2, \\ 4\pi R_1^2 \sigma_1 + 4\pi R_2^2 \sigma_2, & R_2 < r. \end{cases}$$

Сравнивая правые части двух последних выражений, получаем

$$D_r = \begin{cases} 0, & r < R_1, \\ \sigma_1 R_1^2 / r^2, & R_1 < r < R_2, \\ (\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2) / r^2, & R_2 < r, \end{cases}$$

а значит,

$$E_r = \begin{cases} 0, & r < R_1, \\ \sigma_1 R_1^2 / \varepsilon \varepsilon_0 r^2, & R_1 < r < R_2, \\ (\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2) / \varepsilon_0 r^2, & R_2 < r. \end{cases}$$

Подставляя заданные числовые значения, получим $E_r(r_1) = 5.0$ В/м (вторая строка), $E_r(r_2) = -12.6$ В/м (третья строка).

График радиальной проекции напряженности $E_r(r)$ представлен на рис. 17.1.

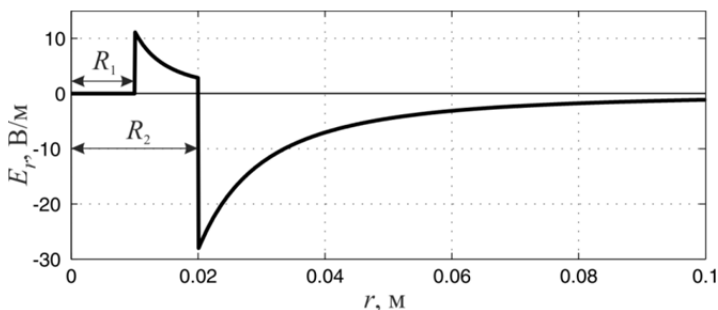


Рис. 17.1. К примеру 17.1

Ответ: $E_r(r_1) = 5.0$ В/м, $E_r(r_2) = -12.6$ В/м.

Пример 17.2. Две бесконечно длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусами $R_1 = 0.02$ см и $R_2 = 0.04$ см несут заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями $\lambda_1 = 1$ нКл/м и $\lambda_2 = 0.5$ нКл/м. Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 3$ см и $r_2 = 5$ см от оси трубок. Пространство между трубками заполнено фарфором с $\varepsilon = 6.5$, вне трубок – вакуум.

Решение

Рассматриваемое поле обладает цилиндрической симметрией, т. е. силовые линии векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ направлены коллинеарно радиально-

му орту $\mathbf{n}_r$ цилиндрической системы координат, ось которой совпадает с осью трубок, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{n}_r D_r$, где $D_r = \pm |\mathbf{D}|$ – проекция вектора $\mathbf{D}$ на $\mathbf{n}_r$. В качестве произвольной замкнутой поверхности S выберем поверхность соосного цилиндра конечной высотой h и радиусом r , основания которого перпендикулярны оси системы, а векторный элемент площади $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали. Поток вектора $\mathbf{D}$ через замкнутую поверхность S этого цилиндра (левая часть выражения (17.1) равен сумме потоков $\mathbf{D}$ через его боковую поверхность S' и через его основания. На боковой поверхности $\mathbf{n} = \mathbf{n}_r$, т. е. $\mathbf{D} d\mathbf{S} = \mathbf{n}^2 D_r dS = D_r dS$, а на основаниях $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_r$, т. е. $\mathbf{D} d\mathbf{S} = \mathbf{n}_r \mathbf{n} D_r dS = 0$. Таким образом, полный поток равен потоку через боковую поверхность площади $S' = 2\pi r h$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{S'} D_r dS = D_r \int_{S'} dS = 2\pi r h D_r.$$

Заряд q внутри такой поверхности

$$q = \begin{cases} 0, & r < R_1, \\ h\lambda_1, & R_1 < r < R_2, \\ h\lambda_1 + h\lambda_2, & R_2 < r. \end{cases}$$

Сравнивая правые части последних выражений, получаем

$$D_r = \begin{cases} 0, & r < R_1, \\ \lambda_1 / 2\pi r, & R_1 < r < R_2, \\ (\lambda_1 + \lambda_2) / 2\pi r, & R_2 < r, \end{cases}$$

а значит,

$$E_r = \begin{cases} 0, & r < R_1, \\ \lambda_1 / 2\pi \varepsilon_0 r, & R_1 < r < R_2, \\ (\lambda_1 + \lambda_2) / 2\pi \varepsilon_0 r, & R_2 < r. \end{cases}$$

Подставляя числовые значения величин из условия задачи, получим $E_r(r_1) = 92 \text{ В/м}$, $E_r(r_2) \approx 540 \text{ В/м}$.

График радиальной проекции напряженности $E_r(r)$ изображен на рис. 17.2.

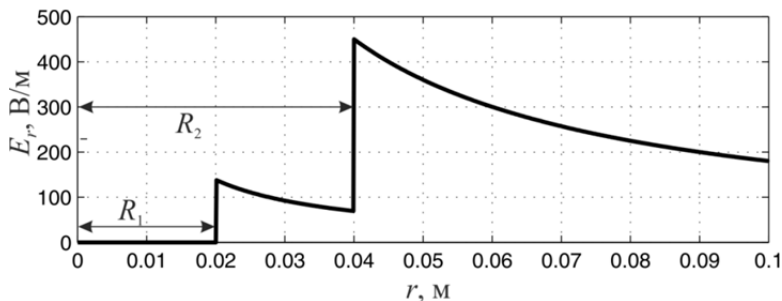


Рис. 17.2. К примеру 17.2

Ответ: $E_r(r_1) = 92 \text{ В/м}$, $E_r(r_2) \approx 540 \text{ В/м}$.

Пример 17.3. Найти потенциал φ точки поля, находящейся на расстоянии $r_1 = 0.1 \text{ м}$ от центра заряженной проводящей сферы радиусом $R_0 = 0.01 \text{ м}$. Задачу решить, если: 1) задана поверхностная плотность заряда на сфере $\sigma = 10 \text{ мКл/м}^2$; 2) задан потенциал сферы $\varphi_0 = 300 \text{ В}$. Потенциал отсчитывается от бесконечно удаленной точки.

Решение

Потенциал поля заряженной сферы в точке r вне сферы равен работе по перемещению единичного заряда из бесконечности в данную точку поля согласно (17.4):

$$\varphi(r) = \int_{\infty}^r E dl = \int_{\infty}^r E dr = \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = k \frac{q}{r}, \quad r \geq R_0,$$

так как напряженность электрического поля вне сферы, несущей заряд $q = 4\pi R_0^2 \sigma$, равна напряженности поля, создаваемого точечным зарядом q , расположенным в центре сферы $E = kq / r^2$. Внутри такой сферы потенциал равен потенциалу на ее поверхности $\varphi(r) = kq / R_0$, $r \leq R_0$.

1. Поскольку $r_1 \geq R_0$, то в первом случае при заданной величине σ получаем $\varphi(r_1) = k4\pi R_0^2 \sigma / r_1 = 11.3 \text{ В}$.

2. Потенциал на поверхности сферы есть $\varphi_0 = \varphi(R_0) = k4\pi R_0^2 \sigma / R_0 = k4\pi R_0 \sigma$, сравнивая с предыдущим выражением $\varphi(r_1)$, во втором случае имеем $\varphi(r_1) = \varphi(R_0) R_0 / r_1 = 30 \text{ В}$.

Ответ: 1) $\varphi(r_1) = 11.3 \text{ В}$, 2) $\varphi(r_1) = 30 \text{ В}$.

Пример 17.4. Если напряженность электрического поля в сухом воздухе больше $E_{\max} = 1 \text{ МВ/м}$, то происходит образование ионов и возникают искровые разряды. Какой максимальный электрический заряд можно сообщить металлической сфере радиусом $R_1 = 0.01 \text{ см}$ и $R_2 = 0.1 \text{ см}$?

Решение

Как и в примере 17.3, напряженность электрического поля на поверхности сферы радиусом R равна $E = q / R^2$, следовательно, $q_{\max} = E_{\max} R^2 / k$. Подставляя числовые значения, имеем:

$$1) q_{\max,1} = E_{\max} R_1^2 / k = 1.1 \cdot 10^{-8} \text{ Кл};$$

$$2) q_{\max,2} = E_{\max} R_2^2 / k = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Ответ: 1) $q_{\max,1} = 1.1 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$; 2) $q_{\max,2} = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$.

Пример 17.5. Напряженность однородного электрического поля в некоторой точке A равна $E = 600 \text{ В/м}$. Вычислить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между этой точкой и точкой B , лежащей на прямой, составляющей угол $\alpha = \pi / 3$ с направлением вектора напряженности. Расстояние между точками равно $\Delta l = 2 \text{ мм}$.

Решение

Направим ось y вдоль вектора $\mathbf{E}$ (рис. 17.3). В подынтегральном выражении (17.5) скалярное произведение $\mathbf{E} d\mathbf{l} = E dl \cos \alpha = E dy$. Тогда

$$\Delta\varphi = \varphi(\mathbf{r}_B) - \varphi(\mathbf{r}_A) = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{y_A}^{y_B} E dy = E (y_A - y_B) = -E \Delta l \cos \alpha = -0.6 \text{ В},$$

так как $\Delta y = y_B - y_A = \Delta l \cos \alpha$.

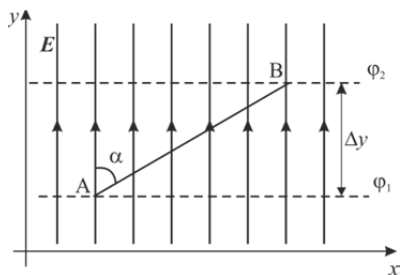


Рис. 17.3. К примеру 17.5

Ответ: $\Delta\varphi = -0.6$ В.

Задачи для аудиторной работы

A17.1. Две концентрические сферы радиусами $R_1 = 0.02$ м и $R_2 = 0.04$ м несут равномерно распределенные заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 1$ нКл/м² и $\sigma_2 = 0.5$ нКл/м². Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 3$ см и $r_2 = 6$ см от центра сфер. Пространство между сферами заполнено парафином с $\varepsilon = 2.2$.

A17.2. Имеется бесконечно длинный цилиндр радиусом $R_0 = 0.01$ м, заряженный равномерно по объему плотностью заряда $\rho = 10^{-5}$ Кл/м³. Найти напряженность поля в точке, лежащей внутри цилиндра на расстоянии $R = 0.005$ м от его оси.

A17.3. Две бесконечно длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусами $R_1 = 0.02$ м и $R_2 = 0.04$ м несут поверхностные заряды, равномерно распределенные по длине с линейными плотностями $\lambda_1 = 1$ нКл/м и $\lambda_2 = -0.5$ нКл/м. Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 3$ см и $r_2 = 5$ см от оси трубок. Пространство между трубками заполнено эбонитом с $\varepsilon = 3.3$.

A17.4. Определите размер сферы, способной удерживать в сухом воздухе максимальный потенциал в полмиллиона вольт, если максимальное напряжение на ней $E_{\max} = 1$ МВ/м. Чему равен максимальный электрический заряд этой сферы?

A17.5. Какая работа совершается при перенесении точечного заряда 20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 1 см от поверхности металлического шара радиусом 1 см с поверхностной плотностью заряда 10 мкКл/м^2 ?

A17.6. Заряд $q = 0.5 \text{ нКл}$ равномерно распределен по поверхности металлической сферы радиусом 2.5 см. Найти потенциал электрического поля в центре, на поверхности сферы и на расстоянии 5 см от ее центра.

Задание на дом

B17.1. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами $R_1 = 0.06 \text{ м}$ и $R_2 = 0.1 \text{ м}$ несут равномерно распределенные заряды $q_1 = 1 \text{ нКл}$ и $q_2 = -0.5 \text{ нКл}$. Определить напряженность электрического поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5 \text{ см}$ и $r_2 = 9 \text{ см}$.

B17.2. Металлический шар радиусом $R = 0.05 \text{ м}$ несет заряд $q = 1 \text{ нКл}$. Шар окружен слоем эбонита толщиной 2 см. Вычислить потенциал ϕ электрического поля на расстоянии: 1) $r_1 = 0.03 \text{ м}$; 2) $r_2 = 0.06 \text{ м}$; 3) $r_3 = 0.09 \text{ м}$ от центра шара. Диэлектрическая проницаемость эбонита равна 3.

B17.3. Сплошной парафиновый шар радиусом $R = 0.1 \text{ м}$ равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 1 \text{ мкКл/м}^3$. Определить потенциал электрического поля в центре шара и на его поверхности.

B17.4. Электрическое поле создано положительным точечным зарядом. Потенциал поля в точке, удаленный от заряда на расстояние $r = 12 \text{ см}$, равен 24 В. Определить значение и направление градиента потенциала в этой точке.

B17.5. Бесконечная прямая нить несет равномерно распределенный заряд, линейная плотность которого равна 0.1 мкКл/м . Определить работу сил поля по перемещению заряда 50 нКл из точки, находящейся на расстоянии $r_1 = 0.1 \text{ м}$ от нити, в точку, находящуюся на расстоянии $r_2 = 0.2 \text{ м}$.

Практикум 18

ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Вектор поляризации диэлектрика

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (18.1)$$

где $\mathbf{p}_i$ – дипольные моменты частиц; χ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

Поверхностная плотность σ' связанных зарядов

$$P_n = \sigma', \quad (18.2)$$

где $P_n = \mathbf{nP}$, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности диэлектрика.

Напряженность макроскопического поля в диэлектрике

$$E = E_0 / \varepsilon = E_0 - E' = E_0 - P / \varepsilon_0, \quad (18.3)$$

где E_0 – внешнее поле, $E' = P / \varepsilon_0$ – поляризационное поле.

Вектор $\mathbf{D}$ электрической индукции (электрического смещения)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (18.4)$$

Связь между диэлектрической проницаемостью ε и диэлектрической восприимчивостью χ

$$\varepsilon = 1 + \chi. \quad (18.5)$$

Граница раздела двух диэлектриков

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad (18.6)$$

$$D_{1\tau} / \varepsilon_1 = D_{2\tau} / \varepsilon_2, \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad (18.7)$$

$$\sigma' = P_n - P_{2n}, \quad \mathbf{nP}_k = P_{kn}. \quad (18.8)$$

Индукцированный дипольный момент молекулы с поляризуемостью α

$$p = \alpha \varepsilon_0 E_{loc} . \quad (18.9)$$

Напряженность E_{loc} локального поля для плотных газов, неполярных жидкостей и твердых диэлектриков:

$$E_{loc} = E + P / 3\varepsilon_0 , \quad E_{loc} = (\varepsilon + 2)E_0 / 3\varepsilon , \quad (18.10)$$

для разреженных газов $E_{loc} \approx E_0$.

Связь диэлектрической восприимчивости χ с поляризуемостью молекул α

$$\chi / (\chi + 3) = \alpha n / 3 , \quad (18.11)$$

где n – концентрация молекул.

Уравнение Клаузиуса–Моссотти

$$(\varepsilon - 1) / (\varepsilon + 2) = \alpha n / 3 . \quad (18.12)$$

Пример 18.1. Диэлектрик поместили в электрическое поле напряженностью $E_0 = 20$ кВ/м. Чему равна поляризация P диэлектрика, если напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике оказалась равной 4 кВ/м?

Решение

Поляризацию P диэлектрика можно определить из выражения (18.3): $E = E_0 - P / \varepsilon_0$, т. е. $P = \varepsilon_0 (E_0 - E) = 8.85 \cdot 10^{-9} 16 \approx 140$ нКл · м.

Ответ: $P \approx 140$ нКл · м.

Пример 18.2. Диэлектрическая восприимчивость газообразного аргона при нормальных условиях равна $\chi = 5.54 \cdot 10^{-4}$. Определить диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 жидкого ($\rho_1 = 1400$ кг/м³) и твердого ($\rho_2 = 1650$ кг/м³) аргона. Молярная масса аргона $\mu = 0.040$ кг/моль.

Решение

В модели Моссотти атом рассматривается как электрически нейтральный проводящий шарик, который во внешнем поле поляризу-

ется и приобретает дипольный момент. Поляризуемость атома аргона можно найти из формулы (18.11): $\alpha = 3\chi / n(\chi + 3)$.

Концентрацию газообразного аргона определяем из уравнения состояния $p = nkT$, т. е. при нормальных условиях, когда $p = 1.013 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К, имеем $n = p / kT = 2.69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ и поляризуемость атома аргона $\alpha = 3\chi / n(\chi + 3) = 6.18 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$.

В конденсированной среде $n = \rho N_A / \mu$, из уравнения Клаузиуса–Моссотти (18.12) определим диэлектрическую проницаемость $\epsilon = (1 + 2\eta) / (1 - \eta)$, где теперь $\eta = \alpha \rho N_A / 3\mu$. Подставляя численные значения величин, получаем для жидкого аргона $\eta_1 = \alpha \rho_1 N_A / 3\mu = 0.145$, $\epsilon_1 = (1 + 2\eta_1) / (1 - \eta_1) = 1.51$ и для твердого аргона $\eta_2 = \alpha \rho_2 N_A / 3\mu = 0.171$, $\epsilon_2 = (1 + 2\eta_2) / (1 - \eta_2) = 1.62$.

Ответ: $\epsilon_1 = 1.51$, $\epsilon_2 = 1.62$.

Пример 18.3. В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ электрическое смещение (индукция) имеет значение $\mathbf{D}$. Выразить вектор $\mathbf{P}$ поляризации в этой точке.

Решение

В изотропном диэлектрике векторы напряженности электрического поля, смещения и поляризации сонаправлены. Из (18.4) имеем: $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = \mathbf{D} / \epsilon \epsilon_0$, т. е. $\mathbf{P} = (\epsilon - 1) \mathbf{D} / \epsilon$.

Ответ: $\mathbf{P} = (\epsilon - 1) \mathbf{D} / \epsilon$.

Пример 18.4. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом. Диэлектрическая проницаемость стекла $\epsilon = 6$. Расстояние между пластинами $d = 4$ мм. Между пластинами содана разность потенциалов $U = 1200$ В.

Найти: а) напряженность электростатического поля в стекле; б) диэлектрическую восприимчивость стекла; в) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле σ' .

Решение

Напряженность поля в стекле согласно (17.5) равна $E = U / d = 3 \cdot 10^5$ В/м. Диэлектрическую восприимчивость стекла найдем из (18.4): $\chi = \epsilon - 1 = 5$. Поверхностную плотность связанных зарядов на

стекле найдем из (18.2) и (18.1): $\sigma' = P_n = P$, $P = \chi \epsilon_0 E$, что дает $\sigma' = P = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E = 1.33 \cdot 10^{-5} \approx 1.3 \cdot 10^{-5}$ Кл/м².

Ответ: а) $E = 3 \cdot 10^5$ В/м; б) $\chi = 5$; в) $\sigma' \approx 1.3 \cdot 10^{-5}$ Кл/м².

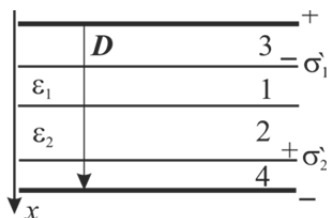


Рис. 18.1. К примеру 18.5

Пример 18.5. Между обкладками плоского конденсатора находятся две прилегающие друг к другу диэлектрические пластины из парафиновой бумаги $\epsilon_1 = 3.7$ и слюды $\epsilon_2 = 6$ (рис. 18.1). На пластинах конденсатора распределены заряды с поверхностными плотностями $\sigma = \pm 1 \cdot 10^{-8}$ Кл/м². Определить плотности связанных зарядов на свободных поверхностях диэлектрических пластин и на их

границе раздела. Диэлектрическая проницаемость незаполненного пространства вблизи обкладок конденсатора (области 3 и 4 на рисунке) равна $\epsilon_3 = \epsilon_4 = 1$.

Решение

Силовые линии перпендикулярны плоскостям пластин, т. е. $E_{jn} = E_j$, $D_{jn} = D_j$, $P_{jn} = P_j$, где $j = 1, 2, 3, 4$ и среды расположены так, как показано на рис. 18.1. В незаполненном диэлектриком пространстве вблизи обкладок поляризация равна нулю: $P_3 = P_4 = 0$, а напряженность электрического поля равна $E_3 = E_4 = E_0 = \sigma / \epsilon_0$.

Граничные условия (18.6) для трех границ диэлектриков: $\epsilon_3 E_3 = \epsilon_1 E_1$, $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$, $\epsilon_2 E_2 = \epsilon_4 E_4$ дают $E_1 = E_0 / \epsilon_1 = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_1$, $E_2 = E_0 / \epsilon_2 = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_2$.

Поверхностные плотности связанных зарядов: $\sigma'_1 = P_3 - P_1 = -P_1$ — на верхней поверхности первой пластины, $\sigma'_2 = P_2 - P_4 = P_2$ — на нижней поверхности второй пластины и $\sigma'_{12} = P_1 - P_2$ — на поверхности раздела этих пластин.

Согласно (18.1) и (18.5) поляризованности пластин даются равенствами $P_1 = \chi_1 \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_1 - 1)\epsilon_0 E_1 = (\epsilon_1 - 1)\sigma / \epsilon_1$, $P_2 = \chi_2 \epsilon_0 E_2 = (\epsilon_2 - 1)\sigma / \epsilon_2$, или $P_2 = (\epsilon_2 - 1)\sigma / \epsilon_2 = (\epsilon_2 - 1)\sigma / \epsilon_2$. Таким образом, $\sigma'_1 = -P_1 = -(\epsilon_1 - 1)\sigma / \epsilon_1$, $\sigma'_2 = P_2 = (\epsilon_2 - 1)\sigma / \epsilon_2$ и $\sigma'_{12} = P_1 - P_2 = (\epsilon_1 -$

$-1)\sigma/\varepsilon_1 - (\varepsilon_2 - 1)\sigma/\varepsilon_2 = \sigma(1/\varepsilon_2 - 1/\varepsilon_1)$. Подставляя численные значения заданных величин, получаем $\sigma'_1 = -7.3 \cdot 10^{-9}$ Кл/м², $\sigma'_2 = 8.3 \cdot 10^{-9}$ Кл/м², $\sigma'_{12} = -1.04 \cdot 10^{-9}$ Кл/м².

Ответ: $\sigma'_1 = -7.3 \cdot 10^{-9}$ Кл/м², $\sigma'_2 = 8.3 \cdot 10^{-9}$ Кл/м²,
 $\sigma'_{12} = -1.04 \cdot 10^{-9}$ Кл/м².

Пример 18.6. Заряженный металлический шар радиусом $R_1 = 5$ см окружен равномерно слоем диэлектрического фарфора толщиной $h = 2$ см, так что внешний радиус равен $R_2 = R_1 + h$ (рис. 18.2). Определить поверхностные плотности σ'_1 и σ'_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд шара равен $q = 10$ нКл, диэлектрическая проницаемость фарфора $\varepsilon = 5$.

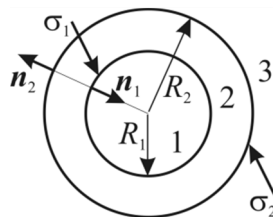


Рис. 18.2. К примеру 18.6

Решение

Согласно (18.2) поверхностная плотность связанных зарядов на внутренней поверхности диэлектрика равна $\sigma'_1 = P_{1n}$ (знак заряда противоположен знаку заряда на сфере). Векторы напряженности электрического поля и поляризованности коллинеарны радиусам шара $P_{2n} = P_2 = \chi \varepsilon_0 E_1$, где $E_1 = q/4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R_1^2$ — напряженность поля внутри диэлектрика вблизи его внутренней поверхности. Следовательно, $\sigma'_1 = -(\varepsilon - 1)q/4\pi \varepsilon R_1^2 = -2.55 \cdot 10^{-7} \approx -2.6 \cdot 10^{-7}$ Кл/м². На внешней поверхности диэлектрического слоя $\sigma'_2 = P_{2n} = P_2 = \chi \varepsilon_0 E_2$, где $E_2 = q/4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R_2^2$ — напряженность поля внутри диэлектрика вблизи его внешней поверхности, т. е. $\sigma'_2 = (\varepsilon - 1)q/4\pi \varepsilon R_2^2 = 1.3 \cdot 10^{-7}$ Кл/м².

Видно, что полные заряды на внутренней и внешней сторонах слоя диэлектрика имеют противоположный знак и равны по модулю: $Q'_1 = 4\pi R_1^2 \sigma'_1 = -(\varepsilon - 1)q = -8 \cdot 10^{-9}$ Кл, $Q'_2 = 4\pi R_2^2 \sigma'_2 = (\varepsilon - 1)q = 8 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Ответ: $\sigma'_1 \approx -2.6 \cdot 10^{-7}$ Кл/м², $\sigma'_2 = 1.3 \cdot 10^{-7}$ Кл/м².

Задачи для аудиторной работы

A18.1. Определить поляризованность P стекла ($\varepsilon = 7$), помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью $E_0 = 5$ МВ/м.

A18.2. Определить поляризуемость α молекул азота, если диэлектрическая проницаемость ε жидкого азота равна 1.445 и его плотность $\rho = 804$ кг/м³.

A18.3. Оценить поляризуемость α атома водорода и диэлектрическую проницаемость ε атомарного водорода при нормальных условиях. Радиус электронной орбиты принять равным 53 пм.

A18.4. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 мм, разность потенциалов 1800 В. Диэлектрик – стекло с $\varepsilon = 7$. Определить диэлектрическую восприимчивость стекла и поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности стекла.

A18.5. Пространство между пластинами конденсатора заполнено диэлектриком, молекулы которого можно рассматривать как жесткие диполи с электрическим моментом $p = 2 \cdot 10^{-30}$ Кл · м; концентрация диполей 10^{26} м⁻³. Определить напряженность среднего макроскопического электростатического поля в таком диэлектрике, если при отсутствии диэлектрика напряженность E_0 поля между пластинами конденсатора была равна 100 МВ/м. Дезориентирующим действием теплового движения пренебречь.

A18.6. В однородное электрическое поле с напряженностью $E_0 = 100$ В/м помещена бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного и изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 2$. Определить: 1) напряженность поля и электрическое смещение внутри пластины; 2) поляризацию диэлектрика; 3) поверхностную плотность заряда.

Задание на дом

B18.1. Эбонитовая плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E_0 = 2$ МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на гранях пластины.

В18.2. В однородное электрическое поле с напряженностью $E_0 = 1$ МВ/м помещена пластина диэлектрика ($\varepsilon = 3$). Определить напряженность E_{loc} локального поля, действующую на отдельную молекулу в диэлектрике.

В18.3. Эбонитовая плоскопараллельная пластина ($\varepsilon = 3$) помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E_0 = 2$ МВ/м. Нормаль к плоскости пластины образует с направлением внешнего поля угол $\alpha = \pi / 6$. Определить величину и направление векторов $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{P}$.

В18.4. Определить, при какой напряженности среднего макроскопического поля в диэлектрике ($\varepsilon = 3$) поляризованность достигает значения $P = 200$ мкКл/м².

В18.5. Поляризуемость молекулы водорода можно принять равной $\alpha = 1 \cdot 10^{-29}$ м³. Определить диэлектрическую восприимчивость водорода для двух случаев: 1) газообразного при нормальных условиях; 2) жидкого с плотностью, равной $\rho = 70.8$ кг/м³.

Практикум 19

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ ПРОВОДНИКОВ КОНДЕНСАТОРЫ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электрическая емкость уединенного проводника с зарядом q и потенциалом φ

$$C = q / \varphi . \quad (19.1)$$

Электрическая емкость конденсатора с абсолютными величинами зарядов на обкладках q и разностью потенциалов между ними $\Delta\varphi$

$$C = q / \Delta\varphi .$$

Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S / d . \quad (19.2)$$

Напряженность поля у поверхности проводника, а также между обкладками плоского конденсатора

$$E = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon . \quad (19.3)$$

Электрическая емкость уединенной сферы радиусом R

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R . \quad (19.4)$$

Энергия электрического поля заряженного конденсатора

$$W = C(\Delta\varphi)^2 / 2 = q^2 / 2C = q\Delta\varphi / 2 . \quad (19.5)$$

Плотность энергии электрического поля

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 / 2 . \quad (19.6)$$

Пример 19.1. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии $d = 0.5$ см друг от друга (см. рис. 19.1). На плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями

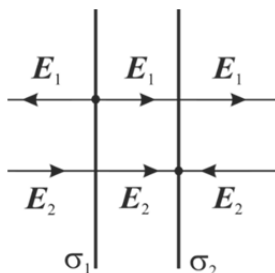


Рис. 19.1. К примеру 19.1

$\sigma_1 = 0.2 \text{ мКл/м}^2$ и $\sigma_2 = -0.3 \text{ мКл/м}^2$.
Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между плоскостями.

Решение

Напряженность электрического поля бесконечной плоскости с поверхностным зарядом плотности σ есть $E = \sigma n / 2\epsilon_0$, где n – единичный вектор нормали к поверхности. Суперпозиция напряженностей поля в пространстве между двумя параллельными плоскостями, заряженными разными по знаку зарядами $E = E_1 + E_2 = \sigma_1 / 2\epsilon_0 + |\sigma_2| / 2\epsilon_0$. Разность потенциалов между этими плоскостями $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = Ed$, т. е. $\Delta\varphi = (\sigma_1 + |\sigma_2|) \times d / 2\epsilon_0 \approx 140 \text{ В}$.

Ответ: $\Delta\varphi \approx 140 \text{ В}$.

Пример 19.2. Восемь заряженных сферических водяных капель, каждая из которых имеет радиус $r = 1 \text{ мм}$ и заряд $q = 0.1 \text{ нКл}$, сливаются в одну сферическую водяную каплю. Найти потенциал φ этой большой капли.

Решение

Каждая из $N = 8$ капель занимает объем $V_0 = 4\pi r^3 / 3$. В результате слияния образуется капля радиусом R объемом $V = 4\pi R^3 / 3 = NV_0$, откуда найдем $R = N^{1/3} r = 8^{1/3} r = 2r$. Заряд большой капли равен $Q = Nq$, а потенциал поля на ее поверхности равен $\varphi = Q / 4\pi\epsilon_0 R = N^{2/3} q / 4\pi\epsilon_0 r = q / \pi\epsilon_0 r \approx 3600 \text{ В}$.

Ответ: $\varphi \approx 3.6 \text{ кВ}$.

Пример 19.3. Оценить емкость земного шара. Принять радиус земного шара $R = 6380 \text{ км}$. Насколько изменится потенциал φ земного шара, если сообщить ему заряд 20 Кл (примерно такой заряд перетекает при грозовом электрическом разряде)?

Решение

Емкость земного шара приблизительно равна $C = 4\pi\epsilon_0 R = 7.11 \cdot 10^{-4}$ Ф. Изменение потенциала, связанное с изменением заряда системы $\Delta\phi = \Delta q / C = 28$ кВ.

Ответ: $\Delta\phi = 28$ кВ.

Пример 19.4. Одному шарiku сообщили заряд $q_1 = 13$ нКл, другому – заряд $q_2 = 18$ нКл, затем шарики соединили проводником. Найти окончательное распределение зарядов на шариках, находящихся далеко друг от друга. Радиус первого шарика $R_1 = 8$ см, второго $R_2 = 18$ см. Емкостью соединительного проводника можно пренебречь.

Решение

В соответствии с (19.4) емкости уединенных шариков равны $C_{1,2} = 4\pi\epsilon_0 R_{1,2}$. После соединения первый шарик приобретает заряд q'_1 и потенциал $\phi'_1 = q'_1 / C_1$, а второй – заряд q'_2 и потенциал $\phi'_2 = q'_2 / C_2$. Перетекание зарядов прекращается, когда потенциалы шариков сравниваются между собой $\phi'_1 = \phi'_2$, что дает уравнение $q'_1 / C_1 = q'_2 / C_2$. Второе уравнение следует из закона сохранения заряда $q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2$.

Из системы двух последних уравнений находим

$$q'_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(q_1 + q_2) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(q_1 + q_2) = 9.5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл},$$
$$q'_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}(q_1 + q_2) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(q_1 + q_2) \approx 21.5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}.$$

Ответ: $q'_1 = 9.5 \cdot 10^{-9}$ Кл, $q'_2 = 21.5 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Пример 19.5. Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U = 600$ В, находятся два слоя диэлектриков: стекла толщиной $d_1 = 7$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 3$ мм. Площадь каждой пластины $S = 200$ м². Найти: а) емкость конденсатора; б) напряженность электростатического поля, электрическое смещение и падение потенциала в каждом слое. Диэлектрическая проницаемость стекла $\epsilon_1 = 7$, эбонита $\epsilon_2 = 3$.

Решение

Конденсатор с таким слоистым диэлектрическим наполнением представляет собой батарею последовательно соединенных конденсаторов. Емкость такой батареи конденсаторов равна $C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$, где $C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 S / d_1$, $C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 S / d_2$, т. е. $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) \approx 8.9 \cdot 10^{-11}$ Ф. Заряд на обкладках $q = CU$. Напряженность поля в каждом слое найдем по (19.3): $E_1 = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon_1$ и $E_2 = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon_2$, где $\sigma = q / S$. Тогда $\sigma = CU / S \approx 2.7 \cdot 10^{-6}$ Кл/м², $E_1 = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon_1 \approx 4.3 \cdot 10^4$ В/м, $E_2 = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon_2 = 1.0 \cdot 10^5$ В/м. Электрическая индукция $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \sigma$, аналогично для второго слоя $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 = \sigma$. Падение потенциала в первом слое равно $U_1 = E_1 d_1 = 300$ В, а во втором слое $U_2 = E_2 d_2 = 300$ В.

Ответ: а) $C \approx 8.9 \cdot 10^{-11}$ Ф; б) $E_1 = 4.3 \cdot 10^4$ В/м, $E_2 = 1 \cdot 10^5$ В/м; $D_1 = D_2 = \sigma = 2.7 \cdot 10^{-6}$ Кл/м²; $U_1 = 300$ В, $U_2 = 300$ В.

Пример 19.6. Конденсатор электроемкостью $C_1 = 6800$ пФ зарядили до разности потенциалов $U_1 = 1500$ В и отключили от источника тока. Затем к конденсатору присоединили параллельно второй, незаряженный конденсатор электроемкостью $C_2 = 4700$ пФ. Определить энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей между обкладками конденсаторов при их соединении.

Решение

Согласно (19.5) после зарядки энергия электрического поля в первом конденсаторе равна $W_1 = C_1 U_1^2 / 2$. При присоединении второго конденсатора образовался конденсатор с емкостью $C = C_1 + C_2$, заряженный до разности потенциалов U , которую найдем из закона сохранения суммарного электрического заряда на обкладках: $q = C_1 U_1 = CU = (C_1 + C_2)U$, тогда разность потенциалов $U = C_1 U_1 / (C_1 + C_2) = 887$ В. Энергия электрического поля в этом конденсаторе равна $W_2 = CU^2 / 2 = C_1^2 U_1^2 / 2(C_1 + C_2) = W_1 C_1 / (C_1 + C_2)$. Энергия искрового разряда равна разности $\Delta W = W_1 - W_2 = W_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 3.1$ мДж.

Ответ: $\Delta W = 3.1$ мДж.

Пример 19.7. Электрическое поле создано заряженной ($q = 0.1$ мкКл) сферой радиусом $R_1 = 10$ см. Какова энергия W поля, заключенная в объеме, ограниченном этой сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в два раз больше радиуса сферы?

Решение

Энергию поля в элементе объема dV равна $dW = w dV$, где $w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 / 2$ – плотность энергии поля. Элемент объема возьмем в виде шарового слоя $dV = 4\pi r^2 dr$. Напряженность электрического поля в слое равна $E = q / 4\pi \varepsilon_0 r^2$. Энергия всего слоя дается интегралом $W = \int_{R_1}^{R_2} w 4\pi r^2 dr = 2\pi \varepsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} E^2 r^2 dr = (1 / 8\pi \varepsilon_0) q^2 \int_{R_1}^{R_2} r^{-2} dr$, откуда $W = (1 / 8\pi \varepsilon_0) q^2 (1 / R_1 - 1 / R_2) = 2.25 \cdot 10^{-4} \approx 2.3 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Ответ:. $W \approx 2.3 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задачи для аудиторной работы

A19.1. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии $d = 1$ см друг от друга. На плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 0.2$ мкКл/м² и $\sigma_1 = 0.5$ мкКл/м². Определить разность потенциалов U между плоскостями.

A19.2. Сто одинаковых капель ртути, заряженных до потенциала 20 В, сливаются в одну большую каплю. Каков электрический потенциал образовавшийся капли?

A19.3. Шар радиусом 6 см заряжен до потенциала 300 В, а шар радиусом 4 см – до потенциала 500 В. Определить потенциал шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

A19.4. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м². Расстояние между пластинами равно 1 мм. Насколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния между пластинами до 3 мм?

A19.5. Конденсатор электроемкостью 0.6 мкФ был заряжен до разности потенциалов 300 В и соединен со вторым конденсатором электроемкостью 0.4 мкФ , заряженным до разности потенциалов 150 В . Найти заряд, перетекший с пластин первого конденсатора на второй.

A19.6. Какое количество теплоты выделится при разряде плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами равна 15 кВ , расстояние 1 мм , диэлектрик – слюда и площадь каждой пластины равна 300 см^2 ? Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 7$.

A19.7. Уединенная металлическая сфера емкостью 10 пФ заряжена до потенциала 3 кВ . Определить энергию поля, заключенную в сферическом слое, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в три раза больше радиуса сферы.

Задание на дом

B19.1. Определить электроемкость металлической сферы радиусом $R = 1 \text{ см}$, погруженной в воду.

B19.2. Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно 1.33 мм , площадь пластин равна 20 см^2 . В пространстве между пластинами конденсатора находятся два слоя диэлектриков: слюды толщиной 0.7 мм и эбонита толщиной 0.3 мм . Определить электроемкость конденсатора.

B19.3. К воздушному конденсатору, заряженному до разности потенциалов 600 В и отключенному от источника напряжения, присоединили параллельно второй незаряженный конденсатор таких же размеров и формы, но заполненный диэлектриком (фарфор). Определить диэлектрическую проницаемость фарфора, если после присоединения второго конденсатора разность потенциалов уменьшилась до 100 В .

B19.4. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом 10 см каждая. Расстояние между пластинами равно $d_1 = 1 \text{ см}$. Конденсатор зарядили до разности потенциалов 1.2 кВ и отключили от источника. Какую работу надо совершить, чтобы, удаляя пластины друг от друга, увеличить расстояние между ними до $d_2 = 3.5 \text{ см}$?

B19.5. Вычислить энергию электростатического поля металлического шара, которому сообщен заряд 100 нКл , если диаметр шара равен 20 см .

Практикум 20

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

ЗАКОН ОМА

Сила тока

$$I = dq / dt . \quad (20.1)$$

Плотность электрического тока

$$\mathbf{j} = en\mathbf{v} , \quad j = I / S , \quad (20.2)$$

где n – концентрация носителей заряда e , $\mathbf{v}$ – дрейфовая скорость носителей заряда, S – площадь поперечного сечения проводника.

Сопротивление R проводника

$$R = 1 / G = \rho l / S , \quad (20.3)$$

где G – электропроводность, ρ – удельное сопротивление, l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения проводника.

Удельное сопротивление ρ и сопротивление R проводника в зависимости от температуры t (в градусах Цельсия)

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) , \quad R = R_0(1 + \alpha t) , \quad (20.4)$$

где α – температурный коэффициент сопротивления.

Закон Ома для однородного участка цепи

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2) / R = U / R , \quad (20.5)$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов участка цепи.

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} , \quad (20.6)$$

где $\gamma = 1 / \rho$ – удельная проводимость, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля.

Закон Ома для участка цепи с ЭДС

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}) / (R + r) , \quad (20.7)$$

где $\mathcal{E}_{12}$ – ЭДС, действующая на участке цепи 12; r – внутреннее сопротивление источника тока; R – сопротивление проводника на участке 12.

Закон Ома для полной (замкнутой) цепи

$$I = \mathcal{E} / (R + r), \quad (20.8)$$

где $\mathcal{E}$ – ЭДС, действующая в замкнутой цепи.

Пример 20.1. Напряжение U на шинах электростанции равно 6600 В. Потребитель находится на расстоянии $l = 10$ км. Определить площадь поперечного сечения S медного провода, который следует взять для устройства двухпроводной линии передачи, если сила тока в линии равна $I = 20$ А и относительные потери напряжения в проводах не должны превышать $\eta = 0.03$. Удельное сопротивление медного провода $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Решение

Внешнее сопротивление цепи состоит из последовательно соединенных сопротивления нагрузки R_0 и сопротивления подводящих проводов R_1 , полное внешнее сопротивление равно $R = R_0 + R_1$. Паде-ние напряжения на нагрузке равно $U_0 = IR_0$, а в проводах $U_1 = IR_1$, при этом $U = U_0 + U_1$. По условию $U_1 / U \leq \eta$, т. е. $R_1 \leq \eta U / I$, где $R_1 = \rho 2l / S$ в соответствии с (20.3), откуда $S \geq \rho I 2l / \eta U = 3.43 \cdot 10^{-5}$ м².

Ответ: $S \geq 34.3$ мм².

Пример 20.2. Найти силу тока через замкнутую поверхность S , если за промежуток времени Δt поток электрического смещения Φ_D через эту поверхность возрастает линейно по времени от значения Φ_{D1} до Φ_{D2} .

Решение

По теореме Гаусса для вектора электрического смещения $\Phi_D = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q$, сила тока через поверхность S равна $I = \frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{\Phi_{D2} - \Phi_{D1}}{\Delta t}$.

Ответ: $I = (\Phi_{D2} - \Phi_{D1}) / \Delta t$.

Пример 20.3. Вольфрамовая нить электрической лампочки при температуре $t_1 = 20^\circ\text{C}$ имеет сопротивление $R_1 = 35.8$ Ом. Какова будет абсолютная температура T_2 нити лампочки, если при включении в сеть напряжением $U = 220$ В по нити идет ток $I = 0.5$ А? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама при $t_1 = 20^\circ\text{C}$ равен $\alpha = 0.0051\text{ K}^{-1}$.

Решение

Согласно (20.4) при температуре t_2 сопротивление нити равно $R_2 = R_1(1 + \alpha(t_2 - t_1))$. По закону Ома $R_2 = U / I = 220 / 0.5 = 440$ Ом. Поэтому разность температур равна $t_2 - t_1 = (R_2 / R_1 - 1) / \alpha = 2214^\circ\text{C}$, т. е. $t_2 = 2234^\circ\text{C}$ и $T_2 = 2507\text{ K}$.

Ответ: $T_2 \approx 2.5\text{ кК}$.

Пример 20.4. Имеются два одинаковых источника тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1.5$ В и внутренними сопротивлениями $r = 0.3$ Ом. При каком из двух соединений этих источников тока: 1) последовательном или 2) параллельном сила тока во внешней цепи будет наибольшей? Рассмотреть случаи, когда внешнее сопротивление равно: а) $R = 0.2$ Ом и б) $R = 16$ Ом? Найти силу тока во внешней цепи в каждом случае.

Решение

1) при последовательном соединении источников тока в замкнутой цепи полная ЭДС равна $2\mathcal{E}$, а полное внутреннее сопротивление равно $2r$, поэтому сила тока во внешней цепи $I_1 = 2\mathcal{E} / (R + 2r)$, что дает в случаях: а) $I_{1a} = 3 / 0.8 = 3.75$ А; б) $I_{1б} = 3 / 16.6 = 0.18$ А;

2) при параллельном соединении источников тока в замкнутой цепи полная ЭДС равна $\mathcal{E}$, а полное внутреннее сопротивление равно $r / 2$, поэтому сила тока во внешней цепи $I_2 = \mathcal{E} / (R + 0.5r)$, что дает в случаях: а) $I_{2a} = 1.5 / 0.35 = 4.3$ А; б) $I_{2б} = 1.5 / 16.15 = 0.093$ А.

Сравнивая полученные формулы, видим, что $I_1 > I_2$ при $2 / (R + 2r) > 1 / (R + 0.5r)$, т. е. при $R > r$. Напротив, $I_1 < I_2$ при $R < r$.

Ответ: $I_1 > I_2$ при $R > r$, $I_1 < I_2$ при $R < r$: $I_{1a} \approx 3.6$ А, $I_{1б} = 0.18$ А, $I_{2a} = 4.3$ А, $I_{2б} = 0.093$ А.

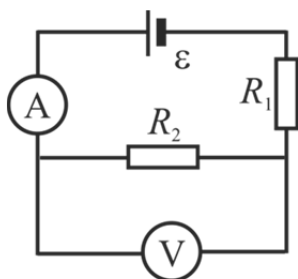


Рис. 20.1. К примеру 20.5

Пример 20.5. Найти показания амперметра и вольтметра в схеме, показанной на рис. 20.1. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 110$ В, сопротивления $R_1 = 400$ Ом, $R_2 = 600$ Ом, сопротивление вольтметра $R_V = 1000$ Ом. Сопротивлением амперметра и внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

Решение

Параллельно соединенные сопротивления R_2 и R_V дают эквивалентное сопротивление $\tilde{R}_2 = R_2 R_V / (R_2 + R_V) = 375$ Ом, которое подключено последовательно к сопротивлению R_1 . Полное сопротивление нагрузки равно $\tilde{R} = R_1 + \tilde{R}_2 = R_1 + R_2 R_V / (R_2 + R_V) = 775$ Ом.

Ток через амперметр $I_A = \mathcal{E} / \tilde{R} = 110 / 775 = 0.142$ А. Падение напряжения на сопротивлении R_1 равно $U_1 = I_A R_1$, а напряжение на вольтметре равно $U_V = \mathcal{E} - U_1 = \mathcal{E} - I_A R_1 = 53.2$ В.

Ответ: $I_A = 0.142$ А, $U_V = 53.2$ В.

Пример 20.6. Четыре электролампы, рассчитанные на напряжение $U_l = 3$ В и силу тока $I_l = 0.3$ А каждая, надо включить параллельно и питать от источника постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 5.4$ В. Какое дополнительное сопротивление R_d надо подключить последовательно к источнику тока? Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

Решение

Для нормальной работы электроламп необходимо, чтобы через каждую из них протекал ток I_l , следовательно, через дополнительное сопротивление R_d будет протекать суммарный ток, равный $I = 4I_l = 1.2$ А. Сопротивление электролампы в рабочем режиме равно $R_l = U_l / I_l = 3 / 0.3 = 10$ Ом. Согласно закону Ома (20.8), для полной цепи $\mathcal{E} = I(R_d + R_S)$, где $R_S = R_l / 4 = 2.5$ Ом – эквивалентное сопротивление параллельно соединенных электроламп. Таким образом, $R_d = \mathcal{E} / I - R_S = 5.4 / 1.2 - 2.5 = 2$ Ом.

Ответ: $R_d = 2$ Ом.

Пример 20.7. При внешнем сопротивлении $R_1 = 8$ Ом сила тока в цепи равна $I_1 = 0.8$ А, а при внешнем сопротивлении $R_2 = 15$ Ом сила тока равна $I_2 = 0.5$ А. Определить силу тока короткого замыкания.

Решение

Сила тока короткого замыкания равна $I_* = \mathcal{E} / r$, где r – внутреннее сопротивление источника тока. Для двух указанных случаев (20.8) дает систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\mathcal{E}$ и r :

$$\begin{cases} \mathcal{E} = I_1 R_1 + I_1 r, \\ \mathcal{E} = I_2 R_2 + I_2 r, \end{cases}$$

решая которую, получаем

$$r = (I_2 R_2 - I_1 R_1) / (I_1 - I_2) = 3.67 \text{ Ом},$$

$$\mathcal{E} = I_1 I_2 (R_2 - R_1) / (I_1 - I_2) = 9.33 \text{ В}.$$

Тогда $I_* = \mathcal{E} / r = 9.33 / 3.67 = 2.54 \approx 2.5$ А.

Ответ: $I_* \approx 2.5$ А.

Задачи для аудиторной работы

A20.1. Ток в проводнике меняется со временем по закону $I = 4 + 2t$ А. Какой заряд проходит через произвольное поперечное сечение проводника за время от 2 до 6 с? При каком постоянном токе через поперечное сечение проводника за то же время пройдет такой же заряд?

A20.2. Из медной проволоки длиной 120 м и площадью поперечного сечения 24 мм^2 намотана катушка. Найти приращение сопротивления катушки при нагревании от 20 до 70 °С. Температурный коэффициент сопротивления меди при $t_1 = 20$ °С равен $\alpha = 0.0043 \text{ К}^{-1}$.

A20.3. Источник тока с ЭДС 2 В имеет внутреннее сопротивление 0.5 Ом. Найти падение напряжения внутри источника тока при токе 0.25 А. Каково внешнее сопротивление цепи при этих условиях?

A20.4. Какую долю ЭДС источника тока составляет разность потенциалов на его зажимах, если сопротивление источника тока в n раз больше внешнего сопротивления?

Задачу решить для: а) $n = 0.1$; б) $n = 1$; в) $n = 10$.

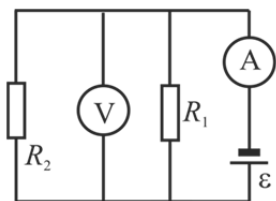


Рис. 20.2. К задаче A20.5

A20.5. Найти показания амперметра и вольтметра в схеме, показанной на рис. 20.2. ЭДС батареи элементов $\mathcal{E} = 110$ В, сопротивления $R_1 = 400$ Ом, $R_2 = 600$ Ом, сопротивление вольтметра $R_V = 1000$ Ом.

A20.6. Амперметр и вольтметр подключили последовательно к батарее с ЭДС 6 В. Если параллельно вольтметру подключить некоторое сопротивление, то показание вольтметра уменьшается в два раза, а показание амперметра во столько же раз увеличивается. Найти показание вольтметра после подключения сопротивления.

Задание на дом

B20.1. Определить плотность тока в железном проводнике длиной 10 м, если провод находится под напряжением 6 В.

B20.2. Вычислить сопротивление вдоль оси графитового проводника, изготовленного в виде прямого кругового усеченного конуса высотой 20 см и радиусами основания 12 и 8 мм. Температура проводника равна 300 К. Температурный коэффициент сопротивления графита $\alpha = -0.8 \cdot 10^3$ °C⁻¹.

B20.3. Катушка и амперметр соединены последовательно и присоединены к источнику тока. К зажимам катушки присоединен вольтметр сопротивлением 1 кОм. Показания амперметра 0.5 А, вольтметра 100 В. Определить сопротивление катушки.

B20.4. К источнику тока с ЭДС 1.5 В присоединили катушку с сопротивлением 0.1 Ом. Амперметр показал силу тока, равную 0.5 А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока в той же катушке оказалась равной 0.4 А. Определить внутреннее сопротивление первого и второго источников тока.

B20.5. Две группы из трех последовательно соединенных источников тока соединены параллельно. ЭДС каждого источника тока равна 1.2 В, внутреннее сопротивление равно 0.2 Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление 1.5 Ом. Найти силу тока во внешней цепи.

Практикум 21

ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА. ПРАВИЛА КИРХГОФА

Закон Джоуля–Ленца. Мощность электрического тока

$$P = RI^2 = U^2 / R = IU, \quad (21.1)$$

где I – сила тока, U – напряжение, R – сопротивление на участке цепи.

Количество тепла Q , выделяемое в проводнике за время t ,

$$Q = RI^2 t = \frac{U^2}{R} t = UI t. \quad (21.2)$$

Закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме

$$w = j^2 / \gamma = \gamma E^2 = jE, \quad (21.3)$$

где w – объемная плотность мощности тока, j – плотность тока, γ – удельная электропроводность проводника, E – напряженность электрического поля.

Правила Кирхгофа. На схеме разветвленной цепи расставляются предполагаемые направления токов для каждой ветви. Обход всех контуров цепи осуществляется в одном направлении (по часовой стрелке либо против часовой стрелки). Далее составляется система необходимого числа линейных алгебраических уравнений.

Первое правило Кирхгофа. В каждом узле (точке ветвления проводов) алгебраическая сумма токов равна нулю

$$\sum_n I_n = 0, \quad (21.4)$$

со знаком плюс берутся токи, входящие в узел, со знаком минус – токи, выходящие из узла.

Второе правило Кирхгофа. В каждом замкнутом контуре цепи алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления участков контура равна алгебраической сумме ЭДС источников тока

$$\sum_n I_n R_n = \sum_k \mathcal{E}_k, \quad (21.5)$$

со знаком плюс берутся токи, предполагаемое направление которых совпадает с направлением обхода контура, со знаком минус – токи,

предполагаемое направление которых противоположно направлению обхода контура. ЭДС источника тока в контуре берется со знаком плюс, если при выбранном направлении обхода источник тока пересекается от минусового полюса (катод) к плюсовому полюсу (анод), в противном случае ЭДС берется со знаком минус.

Пример 21.1. Имеются три 110-вольтовые электрические лампочки, мощности которых $P_A = P_B = 40$ Вт, $P_C = 80$ Вт. Как надо включить эти лампочки, чтобы они давали нормальный накал при напряжении в сети $U_0 = 220$ В? Начертите схему. Найдите токи I_A , I_B , I_C , текущие через лампочки при нормальном накале, т. е. при одинаковых напряжениях на лампочках $U_A = U_B = U_C = 110$ В.

Решение

Лампочки A , B , C обладают электрическими сопротивлениями, равными $R_B = R_A = U_A^2 / P_A = 302.5$ Ом, $R_C = U_C^2 / P_C = 151.25$ Ом, а нормальный накал на них обеспечивают токи, равные $I_B = I_A = P_A / U_1 = 40 / 110 = 0.364$ А, $I_C = P_C / U_1 = 0.727$ А. Поскольку напряжения на лампочках A и B должны быть одинаковы, то мы должны сравнить две симметричные по A и B схемы включения:

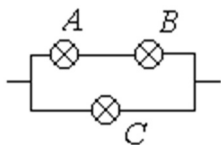


Рис. 21.1. Схема 1

1) лампочка C подключена параллельно к последовательно соединенным лампочкам A и B (рис. 21.1).

При этом через лампочку C потечет ток $I_1 = U_0 / R_C = 1.45$ А, что в два раза выше допустимого тока, и эта лампочка скорее всего перегорит;

2) лампочка C подключена последовательно к параллельно соединенным лампочкам A и B (рис. 21.2).

При этом полное сопротивление цепи равно $R_2 = R_C + R_A R_B / (R_A + R_B) = 303$ Ом, а ток, проходящий через лампочку C , равен $I_2 = U_0 / R_2 = 0.73$ А, т. е. $I_2 = I_C = 0.73$ А. Одинаковые токи через лампочки A и B равны $I_A = I_B = I_3 / 2 = 0.36$ А. Таким образом, через все три лампочки будут течь токи, обеспечивающие их нормальный накал.

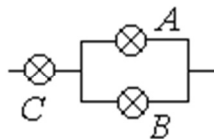


Рис. 21.2. Схема 2

Ответ: $I_A = I_B \approx 0.36 \text{ А}$, $I_C = I_3 = 0.73 \text{ А}$.

Пример 21.2. Источник постоянного тока замыкают сначала на внешнее сопротивление $R_1 = 2 \text{ Ом}$, а затем на внешнее сопротивление $R_2 = 0.5 \text{ Ом}$. Найти ЭДС $\mathcal{E}$ источника и его внутреннее сопротивление r , если известно, что в каждом из этих случаев мощность, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова и равна $P = 2.54 \text{ Вт}$.

Решение

В первом случае $P = R_1 I_1^2$, что дает значение тока $I_1 = \sqrt{P / R_1} = 1.127 \text{ А}$, во втором случае $P = R_2 I_2^2$, что дает значение тока $I_2 = \sqrt{P / R_2} = 2.254 \text{ А}$.

Закон Ома для полной цепи в этих случаях дает систему уравнений

$$\mathcal{E} = I_1(R_1 + r),$$

$$\mathcal{E} = I_2(R_2 + r),$$

решая которую, получаем

$$r = \frac{R_1 I_1 - R_2 I_2}{I_2 - I_1} = \sqrt{R_1 R_2} = 1 \text{ Ом},$$

$$\mathcal{E} = I_1(R_1 + r) = \sqrt{P}(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}) = 3.38 \approx 3.4 \text{ В}.$$

Ответ: $r = 1.0 \text{ Ом}$, $\mathcal{E} = 3.4 \text{ В}$.

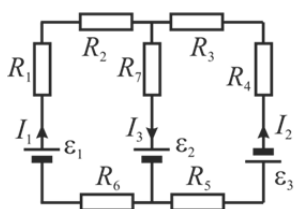
Пример 21.3. ЭДС батареи аккумуляторов $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$, сила тока короткого замыкания равна $I^* = 5 \text{ А}$. Какую наибольшую мощность P_m можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

Решение

Ток короткого замыкания равен $I^* = \mathcal{E} / r$, откуда внутреннее сопротивление батареи есть $r = \mathcal{E} / I^* = 2.4 \text{ Ом}$. При силе тока I напряжение во внешней цепи равно $U = \mathcal{E} - Ir$, а выделяемая во внешней цепи (полезная) мощность равна $P = UI = \mathcal{E}I - I^2 r$.

Максимальная полезная мощность равна максимуму функции $P = P(I)$. Чтобы его найти, возьмем производную мощности по току и приравняем ее нулю, т. е. $dP/dI = \mathcal{E} - 2I_{\max}r = 0$, что дает $I_{\max} = \mathcal{E}/2r = 2.5$ А, и максимальную полезную мощность $P_{\max} = \mathcal{E}I_{\max} - I_{\max}^2 r = 15$ Вт.

Ответ: $P_{\max} = 15$ Вт.



Пример 21.4. Для схемы, изображенной на рис. 21.3, заданы следующие значения параметров: $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $\mathcal{E}_2 = 20$ В, $\mathcal{E}_3 = 30$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом, $R_7 = 1$ Ом. Найти силы токов, текущих в ветвях I_1 , I_2 и I_3 .

Рис. 21.3. К примеру 21.3

Решение

По правилам Кирхгофа (21.4) и (21.5) составим три уравнения:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

$$I_1(R_1 + R_2 + R_6) + I_3 R_7 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2,$$

$$-I_2(R_3 + R_4 + R_5) - I_3 R_7 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

Запишем эту систему уравнений в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 + R_2 + R_6 & 0 & R_7 \\ 0 & R_3 + R_4 + R_5 & R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ -\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \end{bmatrix}.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -50 \end{bmatrix}.$$

Решая систему уравнений, имеем: $I_1 = -0.62$ А, $I_2 = -3.80$ А, $I_3 = -4.42$ А. Знак минус означает, что реальный ток в ветви течет в направлении, противоположном тому, которое предполагалось при составлении уравнений Кирхгофа.

Ответ: $I_1 = -0.62$ А, $I_2 = -3.80$ А, $I_3 = -4.42$ А.

Пример 21.5. Генератор постоянного тока, обладающий ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0.5$ Ом вместе с параллельно соединенным аккумулятором, обладающим ЭДС $\mathcal{E}_2 = 1.5$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0.25$ Ом, подключен к внешнему сопротивлению R , как показано на рис. 21.4. При каком наибольшем значении R аккумулятор будет еще находиться в режиме зарядки?

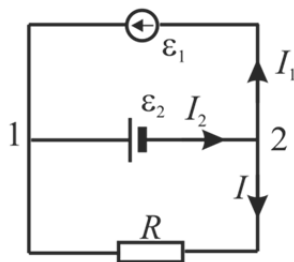


Рис. 21.4. К примеру 21.5

Решение

На схеме кружок со стрелкой обозначает генератор, стрелка указывает направление генерируемого им тока. Аккумулятор находится в режиме зарядки, когда реальный ток течет через аккумулятор от его плюсового полюса (анод) к минусовому полюсу (катод). В нашем случае это условие может быть записано как $I_2 > 0$. В нашей схеме три неизвестных тока I_1 , I_2 и I . По правилам Кирхгофа (21.4) и (21.5) составим систему из трех линейных независимых уравнений

$$I_2 - I - I_1 = 0,$$

$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2,$$

$$I_2 r_2 + IR = -\mathcal{E}_2.$$

В матричном виде эта система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ r_1 & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ -\mathcal{E}_2 \end{bmatrix}.$$

Нас интересует только ток I_2 , текущий через аккумулятор, поэтому достаточно из первого уравнения выразить $I = I_2 - I_1$ и, подставляя эту величину во второе и третье уравнения, свести исходную систему к системе двух линейных алгебраических уравнений, решение которой дает для I_2 следующее выражение:

$$I_2 = \frac{R(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) - r_1 \mathcal{E}_2}{Rr_1 + Rr_2 + r_1 r_2}.$$

Условие $I_2 > 0$ зарядки аккумулятора сводится к неравенству

$$R > \frac{r_1 \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} = \frac{0.5 \cdot 1.5}{12 - 1.5} = 0.071 \text{ Ом.}$$

Ответ: $R > 0.071 \text{ Ом.}$

Задачи для аудиторной работы

A21.1. Требуется изготовить нагревательную спираль для электрической плитки мощностью 500 Вт, предназначенной для включения в сеть с напряжением 220 В. Сколько нужно взять для этого нихромовой проволоки диаметром 0.4 мм? Удельное сопротивление нихрома в нагретом состоянии $1.05 \text{ мОм} \cdot \text{м}$.

A21.2. Объем 4.5 л воды можно вскипятить, затратив электрическую энергию $500 \text{ Вт} \cdot \text{ч}$. Начальная температура воды 9°C . Найти КПД кипятильника.

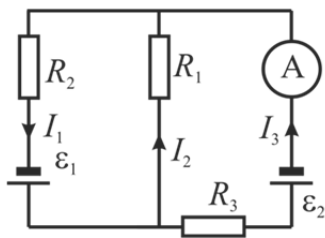


Рис. 21.5. К заданию A21.5

A21.3. Батарея источников тока с ЭДС $\mathcal{E} = 240 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением 1 Ом замкнута на внешнее сопротивление 23 Ом . Найти полную мощность, полезную мощность и КПД батареи (под КПД источника тока понимают отношение полезной мощности к полной мощности).

A21.4. ЭДС батареи источников тока равна 20 В . Сопротивление внешней цепи равно 2 Ом , сила тока 4 А . Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления КПД будет равно 0.99 ?

A21.5. Изображенные на схеме (рис. 21.5) источники тока имеют ЭДС $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 1 \text{ В}$, нагрузочные сопротивления $R_1 = 1000 \text{ Ом}$, $R_2 = 500 \text{ Ом}$, $R_3 = 200 \text{ Ом}$, сопротивление амперметра $R_A = 200 \text{ Ом}$. Найти показание амперметра.

Задание на дом

B21.1. Две батареи аккумуляторов ($\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$, $r_1 = 1 \text{ Ом}$; $\mathcal{E}_2 = 8 \text{ В}$, $r_2 = 2 \text{ Ом}$) и резистор сопротивлением $R = 6 \text{ Ом}$ соединены, как показано на рис. 21.6.

Найти силу тока в батареях и резисторе.

B21.2. Три батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 5 \text{ В}$ и $\mathcal{E}_3 = 10 \text{ В}$ и с одинаковыми внутренними сопротивлениями $r = 1 \text{ Ом}$

соединены между собой одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводников ничтожно мало. Определить силы токов, идущих через каждую батарею.

B21.3. Лампочка и резистор, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение на зажимах лампочки равно 40 В , сопротивление резистора равно 10 Ом . Внешняя цепь потребляет мощность 120 Вт . Найти силу тока в цепи.

B21.4. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$, внутреннее сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность 80 Вт . Вычислить силу тока в цепи и КПД нагревателя.

B21.5. Сила тока в проводнике сопротивлением 12 Ом равномерно убывает от 5 А до нуля в течение времени 10 с . Какое количество теплоты выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?

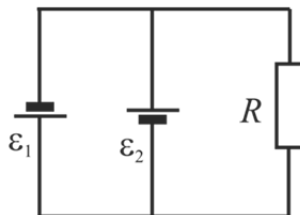


Рис. 21.6. К задаче B21.1

ОТВЕТЫ

A1.1. $\Delta v = -2v i$, $|\Delta v| = 2v$, $\Delta |v| = 0$. **A1.2.** $v = \sqrt{u^2 + V^2 - \sqrt{2}uV}$,
 $\gamma = \arcsin(\sqrt{2}u / 2v)$. **A1.3.** $t_1 = 3.4$ с, $x_1 = 15$ м. **A1.4.** $a_\tau = 5.4$ м/с²,
 $a_n = 8.2$ м/с². **A1.5.** $N = 11$. **A1.6.** $v_0 = 13.6$ м/с, $a = 3.2$ м/с².
A1.7. $h_{\max} = 41.3$ м.

B1.1. $t_1 = 40$ с, $x_1 = 80$ м, $a_1 = -0.1$ м/с². **B1.2.** $\Delta h = 148$ м.
B1.3. $v(t) = 3At^2 i + 2Bt j$, $a(t) = 6At i + 2B j$. **B1.4.** $v_1 = 7$ м/с,
 $a_{\tau 1} = 8.5$ м/с². **B1.5.** $y = 2\sqrt[3]{x}$, $v_1 = 2.4$ м/с, $a_1 = 4.8$ м/с².

A2.1. $F_{\max 1} = 36$ Н, $F_{\max 2} = 72$ Н. **A2.2.** $a = 1.5$ м/с², $T_1 = 8$ Н, $T_2 = 5$ Н.
A2.3. $F \approx 18$ кН. **A2.4.** $t = 0.41$ с. **A2.5.** $v_2 = 7.6$ м/с.

B2.1. $a = 2$ м/с². **B2.2.** $a = 2$ м/с²; 1) $T = 8$ Н; 2) $T = 2$ Н.
B2.3. $\mu = 0.35$. **B2.4.** При $t_1 = 2$ с $F_1 = -0.8$ Н; при $t_2 = 5$ с $F_2 = -8$ Н;
при $t_3 = 1.67$ с $F_3 = 0$ Н.

A3.1. $N \approx 240$ Н. **A3.2.** $\alpha \approx 0.39$ рад. **A3.3.** $v = 12$ м/с.
A3.4. $v_{\min} = 5.4$ м/с, $v_{\max} \approx 27$ м/с. **A3.5.** $\mu = 0.1$. **A3.6.** $\alpha = 1.05$ рад.

B3.1. $\omega = 3.13$ рад/с. **B3.2.** $v = 6.3$ м/с. **B3.3.** $T = 1.4$ с. **B3.4.** $N = 39$ кН.
B3.5. $v = 14$ м/с.

A4.1. $N = 26$ кВт. **A4.2.** $\eta = 0.99$. **A4.3.** 1) $v'_1 = -3.76$ м/с, $v'_2 = 2.50$ м/с,
 $\eta = 0$; 2) $v' = 1.25$ м/с, $\eta = 0.8$. **A4.4.** $p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} + 2p_1 p_2 \cos \alpha$ м/с.
A4.5. $v' = 11.4$ м/с. **A4.6.** $v'_1 = 6.7$ м/с, $v'_2 = 3.0$ м/с.

B4.1. $A \approx 1$ кДж. **B4.2.** 1) $\langle N \rangle = 5.4$ кВт; 2) $N = 4.8t$ кВт.
B4.3. $E_K = 30$ кДж. **B4.4.** 1) $E_K = 9.6$ Дж; 2) $E_K = 86.4$ Дж.
B4.5. 1) $p'_1 = -6$ кг · м/с, $p'_2 = 16$ кг · м/с; 2) $\Delta p_1 = -16$ кг · м/с,
 $\Delta p_2 = 16$ кг · м/с; 3) $E'_{K1} = 9$ Дж, $E'_{K2} = 16$ Дж; 4) $\Delta E_{K1} = -16$ Дж,
 $\Delta E_{K2} = 16$ Дж; 5) $E_{K2} / E_{K1} = 0.64$.

A5.1. $a = 0.7$ м/с². **A5.2.** $\varepsilon = 8.33$ рад/с². **A5.3.** $\Delta L = -40i$ кг · м/с.
A5.4. $I = 0.01$ кг · м². **A5.5.** $I = 9.5$ кг · м². **A5.6.** 1) $I = 4 \cdot 10^{-4}$ кг · м²,
2) $I = 2 \cdot 10^{-4}$ кг · м².

B5.1. 1) $I_1 = 0.003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, 2) $I_2 = 0.001 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. **B5.2.** $I = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.
B5.3. $M = 0.025 \text{ Н} \cdot \text{м}$. **B5.4.** $\mu = 0.21$. **B5.5.** $a = 0.24 \text{ м/с}^2$.

A6.1. $\omega = 0.62 \text{ рад/с}$. **A6.2.** $E_K = 0.92 \text{ Дж}$. **A6.3.** $\bar{v} = 29.8 \text{ км/с}$,
 $v_{\min} = 29.3 \text{ км/с}$, $v_{\max} = 30.3 \text{ км/с}$, $v_{\min} < \bar{v} < v_{\max}$. **A6.4.** $\omega = 0.4 \text{ рад/с}$.
A6.5. $v_1 = 2.65 \text{ м/с}$, $v_2 = 2.56 \text{ м/с}$, $v_3 = 2.21 \text{ м/с}$.

B6.1. $\omega_2 = 1.3 \text{ рад/с}$. **B6.2.** $\omega_2 = 1.07 \text{ рад/с}$. **B6.3.** $\varphi = \pi \text{ рад}$.
B6.4. $\omega \approx 1.8 \text{ рад/с}$. **B6.5.** $v_1 = 25.7 \text{ кДж}$.

A7.1. $A = 8.63 \text{ м/с}^2$. **A7.2.** $\mu = 0.2$. **A7.3.** $F_c \approx 380 \text{ Н}$. **A7.4.** $v_1 = 2.2 \text{ м/с}$,
 $a_1 = 0.25 \text{ м/с}^2$. **A7.5.** $t = 20.5 \text{ с}$.

B7.1. $A = 5.67 \text{ м/с}^2$. **B7.2.** $h = 1.75 \text{ м}$, $N = 158 \text{ Н}$. **B7.3.** $A = 0 \text{ Дж}$.
B7.4. $t = 40.7 \text{ с}$, $y = -5.0 \text{ м}$. **B7.5.** $\mu = 108 \cdot \exp(-0.011t) \text{ кг/с}$.

A8.1. $a = 12 \text{ см/с}^2$. **A8.2.** $F_m = 2 \text{ Н}$, $E_K = 0.05 \text{ Дж}$. **A8.3.** $T \approx 1.3 \text{ с}$.
A8.4. $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. **A8.5.** $A = 2.24 \text{ см}$, $\alpha = 0.46 \text{ рад}$.
A8.6. $x^2/4 + y^2/1 = 1$, движение точки происходит против часовой стрелки.

B8.1. $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$, $a_m = 0.4 \text{ м/с}^2$. **B8.2.** $F = -0.063 \text{ Н}$. **B8.3.** $l' = 0.36 \text{ м}$,
 $T = 1.2 \text{ с}$. **B8.4.** $l \approx 6 \text{ м}$. **B8.5.** $x^2 + y^2 = 1 \text{ см}^2$, $(0, 1) \text{ см}$. **B8.6.** $y =$
 $= 0.5x^2 - 1 \text{ см}$.

A9.1. $v_0 = -1.25 \text{ см/с}$, $v_1 = -0.46 \text{ см/с}$, $v_2 = -0.169 \text{ см/с}$, $v_3 =$
 $= -0.062 \text{ см/с}$, $v_4 = -0.023 \text{ см/с}$. **A9.2.** $t_2 = 21 \text{ с}$. **A9.3.** $N = 34$.
A9.4. $A_r = 0.05 \text{ м}$. **A9.5.** $F_m = 314 \text{ мкН}$. **A9.6.** $A = \pi F_m A(\omega) \sin \alpha$.

B9.1. $\beta = 2.3 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. **B9.2.** $N = 231$. **B9.3.** $r = 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с}$.
B9.4. $v_r \approx 9.95 \text{ м/с}$. **B9.5.** $v_0 = 1002 \text{ Гц}$. **B9.6.** $\lambda = 0.199$. **B9.7.** $\beta = 0.1 \text{ с}^{-1}$,
 $A_r = 0.05 \text{ м}$.

A10.1. $N = 265$. **A10.2.** $m = 2.04 \text{ кг}$, $v = 64 \text{ моль}$. **A10.3.** $t = 45 \text{ с}$.
A10.4. $\Delta T = 140 \text{ К}$. **A10.5.** $p = 1.15 \cdot 10^5 \text{ Па}$. **A10.6.** $V = 0.88 \text{ м}^3$.

B10.1. $\rho = 3.2 \text{ кг/м}^3$. **B10.2.** $N = 1.3 \cdot 10^{22}$. **B10.3.** $T = 546 \text{ К}$.
B10.4. $T = 275 \text{ К}$. **B10.5.** $p_1 = 1.8 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $p_2 = 8.2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

A11.1. $v_T = 183 \text{ м/с}$. **A11.2.** $\bar{\varepsilon}_2 = 2.42 \text{ кДж}$. **A11.3.** $n = 5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.
A11.4. $U = 3.8 \text{ кДж}$, $U_3 = 2.28 \text{ кДж}$, $U_2 = 1.52 \text{ кДж}$. **A11.5.** $U = 750 \text{ Дж}$.
A11.6. а) $\Delta v = 0$, б) $\Delta v = 191 \text{ м/с}$. **A11.7.** $p = 1.2 \cdot 10^{-8} \text{ Па}$.
B11.1. $p_1 = 414 \text{ Па}$, $p_2 = 138 \text{ кПа}$. **B11.2.** $\Delta p = 414 \text{ кПа}$. **B11.3.** $T = 7.25 \text{ К}$, $\bar{\varepsilon}_3 = 1.5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. **B11.4.** $\bar{\varepsilon}_3 = 1.24 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$, $\bar{\varepsilon}_6 = 2.48 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$, $\bar{\varepsilon} = 7.48 \text{ МДж}$. **B11.5.** $\bar{\varepsilon}_1 = 0.69 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$, $\bar{\varepsilon}_3 = 2.07 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$, $\bar{\varepsilon}_2 = 1.38 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$, $\bar{\varepsilon} = 3.45 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$.
A12.1. $W = 0.91$. **A12.2.** $W \approx 0.57$. **A12.3.** $T = 16 \text{ К}$.
A12.4. $N_A = 6.1 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$. **A12.5.** $m_1 \approx 1.3 \text{ кг}$, $m_2 \approx 1200 \text{ кг}$, $m_3 \approx 7300 \text{ кг}$. **A12.6.** $n_1 / n_0 = 0.53$, $n_2 / n_0 = 0.0019$.
B12.1. $T = 586 \text{ К}$. **B12.2.** $W = 7.5 \cdot 10^{-4}$. **B12.3.** $N = 5.8 \cdot 10^9$.
B12.4. $n / n_0 = 5 \cdot 10^{-11}$. **B12.5.** $h \approx 5870 \text{ м}$.
A13.1. $\eta = 0.39$. **A13.2.** $p \approx 0.35 \text{ Па}$. **A13.3.** $\lambda \approx 5600 \text{ м}$. **A13.4.** $n = 1.8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, $\rho = 0.06 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 0.16 \text{ мкм}$, $v \approx 2670 \text{ м/с}$. **A13.5.** $m = 0.061 \text{ кг}$. **A13.6.** $\eta = 17 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$. **A13.7.** $Q = 35 \text{ кДж}$.
B13.1. $\lambda = 9.5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$. **B13.2.** $N = 6.6 \cdot 10^9$. **B13.3.** $\lambda = 1.34 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.
B13.4. $\lambda = 9.0 \cdot 10^{-8} \text{ м}$. **B13.5.** $\lambda_T = 12 \text{ мВт/К} \cdot \text{м}$.
A14.1 $Q_1 = 12.5 \text{ кДж}$, $A_2 = -5.0 \text{ кДж}$. **A14.2.** а) $Q = 10 \text{ Дж}$, б) $Q = 35 \text{ Дж}$.
A14.3. $v \sim \sqrt{T}$, $v_2 = 345 \text{ м/с}$. **A14.4.** $p \approx 2.6 \text{ МПа}$. **A14.5.** $m = 0.38 \text{ кг}$.
A14.6. а) $T_2 / T_1 = 1.6$, $V_2 / V_1 = 0.31$, б) $T_2 / T_1 = 1$, $V_2 / V_1 = 0.2$.
A14.7. $c_V = 423 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$, $c_p = 654 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$.
B14.1. $c_V \approx 710 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$, $c_p \approx 1.0 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К}$. **B14.2.** $A = 400 \text{ Дж}$.
B14.3. $T = 454 \text{ К}$. **B14.4.** $\Delta U = 5.0 \text{ МДж}$, $A_{12} = 0 \text{ кДж}$, $Q_{12} = 5.0 \text{ МДж}$.
B14.5. $A = 1 \text{ кДж}$.
A15.1. $\eta = 0.2$, $\eta^* = 0.3$. **A15.2.** $T_2 = 244 \text{ К}$. **A15.3.** $\Delta S = 66.5 \text{ Дж/К}$.
A15.4. $\Delta S = 2.0 \text{ Дж/К}$.
B15.1. $T_2 = T_3 = 600 \text{ К}$, $\eta = 0.099$. **B15.2.** $\eta = 0.067$. **B15.3.** $V_3 = 741 \text{ л}$.
B15.4. $\Delta S = 7.2 \text{ Дж/К}$. **A15.5.** а) $\Delta S = 836 \text{ Дж/К}$, б) $\Delta S = 0$.

A16.1. $F_g / F_q = 8 \cdot 10^{-37}$. **A16.2.** $q_0 = 44.9$ нКл. **A16.3.** $E_1 = 10.6$ кВ/м, $E_2 = 0$ кВ/м. **A16.4.** $A = 2pE$. **A16.5.** 1) $p = 2qai$, 2) $p = -2qai$, 3) $p = 0$, 4) $p = -2qaj$, 5–8) $p = 2qai$. **A16.6.** $E_1 = 28.3$ кВ/м, $E_2 = 8.94$ кВ/м.

B16.1. $E_1 = 3$ кВ/м, $E_2 = 0.61$ кВ/м. **B16.2.** $E = 5.4$ кВ/м. **B16.3.** $\lambda = 5.6$ нКл/м. **B16.4.** $F = -1.35$ мкН. **B16.5.** $A = 0.5$ мкДж.

A17.1. $E_1 = 22.8$ В/м, $E_2 = 37.7$ В/м. **A17.2.** $E = 2.8$ кВ/м. **A17.3.** $E_1 = 182$ В/м, $E_2 = 180$ В/м. **A17.4.** $R = 0.5$ м, $q = 27$ мкКл. **A17.5.** $A = 0.11$ мДж. **A17.6.** $\varphi_0 = \varphi_1 = 180$ В, $\varphi_2 = 90$ В.

B17.1. $E_1 = 0$ В/м, $E_2 = 1.1$ кВ/м. **B17.2.** $\varphi_1 = 146$ В, $\varphi_2 = 136$ В, $\varphi_3 = 100$ В. **B17.3.** $\varphi_1 = 471$ В, $\varphi_2 = 377$ В. **B17.4.** $|\nabla\varphi| = 200$ В/м, градиент потенциала направлен к точечному заряду (источнику поля). **B17.5.** $A = 62.4$ мкДж.

A18.1. $P = 38$ мкКл/м². **A18.2.** $\alpha = 2.2 \cdot 10^{-29}$ м³. **A18.3.** $\alpha = 1.9 \cdot 10^{-30}$ м³ $\varepsilon = 1.00005$ В. **A18.4.** $\chi = 6$, $\sigma' = 47.7$ мкКл/м². **A18.5.** $E = 77.4$ МВ/м. **A18.6.** 1) $E = 50$ В/м, $D = 0.885$ нКл/м²; 2) $P = 0.44$ нКл/м²; 3) $\sigma = 0.44$ нКл/м².

B18.1. $\sigma' = 11.8$ мкКл/м². **B18.2.** $E_{loc} \approx 556$ кВ/м. **B18.3.** $E_1 = 2$ МВ/м, $E_2 = 1.16$ МВ/м, $D_1 = 17.7$ мкКл/м², $D_2 = 30.7$ мкКл/м², $P_1 = 0$, $P_2 = 20.4$ мкКл/м², $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/3$. **B18.4.** $E = 11.3$ МВ/м. **B18.5.** 1) $\chi = 2.7 \cdot 10^{-4}$, 2) $\chi = 0.23$.

A19.1. $\Delta\varphi = 169$ В. **A19.2.** $\varphi = 430$ В. **A19.3.** $\varphi = 380$ В. **A19.4.** $\Delta\varphi = 45$ В. **A19.5.** $q = 36$ мкКл. **A19.6.** $Q = 0.209$ Дж. **A19.7.** $Q = 30$ мкДж.

B19.1. $C = 90$ пФ. **B19.2.** $C = 33.4$ пФ. **B19.3.** $\varepsilon = 5$. **B19.4.** $A = 50$ мкДж. **B19.5.** $W_E = 0.45$ мДж.

A20.1. $q = 48$ Кл, $I = 12$ А. **A20.2.** $\Delta R = 0.018$ Ом. **A20.3.** $Ir = 0.125$ В; $R = 7.5$ Ом. **A20.4.** $U/\mathcal{E} = n/(n+1)$; а) $\delta U = 0.09$, б) $\delta U = 0.5$, в) $\delta U = 0.91$. **A20.5.** $I = 0.568$ А, $U = 110$ В. **A20.6.** $U_V = 2$ В.

B20.1. $j = 6.1 \cdot 10^6$ А/м. **B20.2.** $R = 4 \cdot 10^{-4}$ Ом. **B20.3.** $R = 250$ Ом; **B20.4.** $r_1 = 2.9$ Ом, $r_2 = 4.5$ Ом. **B20.5.** $I = 2$ А.

A21.1. $l = 11.6$ м. **A21.2.** $\eta = 0.96$. **A21.3.** $P = 2400$ Вт; $P_1 = 2300$ Вт; $\eta = 0.96$. **A21.4.** $\eta = 0.40$, $R = 297$ Ом. **A21.5.** $I = 0.45$ мА.

B21.1. $I_1 = 6.4$ А; $I_2 = 5.8$ А; $I_3 = 0.6$ А. **B21.2.** $I_1 = 3$ А; $I_2 = 4$ А; $I_3 = 1$ А. **B21.3.** $I = 2$ А. **B21.4.** а) $I_1 = 20$ А; $\eta_1 = 1/6 = 0.17$; б) $I_2 = 4$ А; $\eta_2 = 5/6 = 0.83$. **B21.5.** $Q = 1000$ Дж.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. – Изд. 5-е. – М.: Высшая школа, 1988.
2. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 432 с.
3. *Савельев И.В.* Сборник вопросов и задач по общей физике. – СПб.: Лань, 2005. – 288 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Практикум 1. Кинематика материальной точки.....	5
Практикум 2. Законы Ньютона при прямолинейном движении	12
Практикум 3. Законы Ньютона при криволинейном движении	19
Практикум 4. Работа и мощность. Законы сохранения импульса и энергии. Упругий и неупругий удар	23
Практикум 5. Кинематика и динамика вращательного движения	31
Практикум 6. Закон сохранения момента импульса. Энергия вращательного движения.....	39
Практикум 7. Силы инерции. Движение тел переменной массы. Реактивная сила	46
Практикум 8. Механические колебания. Характеристики колебаний. Сложение колебаний	53
Практикум 9. Затухающие колебания. Добротность. Вынужденные колебания. Резонанс	60
Практикум 10. Уравнение состояния идеального газа. Газовые законы	67
Практикум 11. Распределение энергии по степеням свободы. Внутренняя энергия газа.....	73
Практикум 12. Распределения Максвелла и Больцмана	79
Практикум 13. Явления переноса.....	86
Практикум 14. Термодинамическая работа и теплота. Первое начало термодинамики. Теплоемкость. Работа при изопроцессах	93
Практикум 15. Циклы. Цикл Карно. Энтропия	101
Практикум 16. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Расчет напряженности поля на основе принципа суперпозиции. Диполь. Поле диполя.....	109
Практикум 17. Теорема Гаусса. Применение теоремы Гаусса для расчета поля. Потенциал электростатического поля	118
Практикум 18. Диэлектрики в электрическом поле	127
Практикум 19. Проводники в электрическом поле. Емкость проводников. Конденсаторы. Энергия электрического поля	134
Практикум 20. Постоянный электрический ток. Закон Ома.....	140
Практикум 21. Закон Джоуля–Ленца. Правила Кирхгофа	146
Ответы.....	153
Список литературы	158

**Штыгашев Александр Анатольевич
Пейсахович Юрий Григорьевич**

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ
МЕХАНИКА
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 30.03.2017. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 9,3. Печ. л. 10,0. Изд. № 293/16. Заказ № 532. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20