

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.В. ДАВЫДКОВ

ФИЗИКА
МЕХАНИКА
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО
И МАГНЕТИЗМ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2017

УДК 531+537](075.8)
Д 138

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доцент *В.Н. Холявко*

канд. физ.-мат. наук, доцент *А.В. Баранов*

Работа подготовлена на кафедре общей физики
для студентов I–II курсов всех форм обучения

Давыдков В.В.

Д 138 Физика: механика, электричество и магнетизм: учебное
пособие / В.В. Давыдков. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. –
168 с.

ISBN 978-5-7782-3212-9

В пособии изложен теоретический материал по классической и релятивистской механике, электричеству и магнетизму. Учебное пособие соответствует программе изучения курса общей физики.

Предназначено для студентов направления «Автоматизация технологических процессов и производств».

УДК 531+537](075.8)

ISBN 978-5-7782-3212-9

© Давыдков В.В., 2017

© Новосибирский государственный
технический университет, 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе опыта, накопленного автором за несколько десятилетий преподавания курса физики на кафедре общей физики НГТУ(НЭТИ) и предназначено студентам всех форм обучения, изучающих курс физики.

В пособии содержится описание следующих разделов курса физики: механика, электричество и магнетизм.

Несколько слов о символике, используемой в пособии. Как известно, физические характеристики могут быть как векторными, так и скалярными величинами.

Векторные величины выделены жирным прямым шрифтом, например, **$\mathbf{B}$** . Модули векторов и скалярные характеристики отмечены нежирным курсивным шрифтом: *B* , *m* . Некоторые характеристики обозначены греческими символами. Например: **$\boldsymbol{\tau}$** – вектор, τ – модуль этого вектора.

Часть I

МЕХАНИКА

Механика – раздел физики, изучающий механическое движение материальных тел и взаимодействие между ними.

Движение тел со скоростями, намного меньшими скорости света, послужило предметом изучения классической механики. Её принято называть Ньютоновской механикой, поскольку именно Исаак Ньютон внёс колоссальный вклад в развитие классической механики.

Движение тел со скоростями, сопоставимыми со скоростью света, изучает релятивистская механика. В основе релятивистской механики лежит специальная теория относительности, разработанная в начале XX века Альбертом Эйнштейном.

Релятивистская механика не опровергает выводы классической механики. При малых скоростях движения материальных тел выводы, полученные на основе классической и релятивистской механики, совпадают. Это означает, что релятивистская механика просто имеет более широкую область применения, чем механика классическая.

Механика делится на три основных раздела: кинематика, динамика и статика.

Кинематика – это раздел механики, изучающий механическое движение тел без учёта факторов, обуславливающих его характер. Другими словами, задача кинематики – описание движения, а анализ причин, определяющих его характер, является задачей другого раздела механики – динамика.

Динамика – раздел механики, изучающий движение тел с учётом обуславливающих его факторов (т. е. масс тел и действующих на них сил).

Статика – раздел механики, изучающий условия равновесия материальных тел.

Прежде чем перейти к изучению механики, необходимо ввести несколько понятий, используемых в этом разделе физики.

Механическое движение – это процесс изменения положения тела относительно других тел.

Обратите внимание, одно и то же тело относительно разных тел может двигаться по-разному. Например, человек сидит в движущемся автомобиле. Относительно автомобиля он неподвижен, а относительно земли движется. Это означает, что перед тем как приступить к описанию движения, необходимо выбрать тело отсчёта.

Тело отсчёта – это тело, относительно которого будет определяться положение других тел.

Какое именно тело следует выбрать в качестве тела отсчёта в конкретной ситуации, решают в зависимости от её особенностей. Например, если необходимо рассчитать движение тела, перемещающегося по Земле, то можно в качестве тела отсчёта выбрать Землю. Если же необходимо рассчитать движение космического аппарата, совершающего межпланетный полёт, то в качестве тела отсчёта удобнее выбрать Солнце.

Для того чтобы описать движение тела, нужно уметь описать его положение относительно тела отсчёта. Но любое тело состоит из множества частиц, а это означает, что нужно описать положение каждой из них. Поэтому задача описания положения тела не так проста, как кажется.

Однако в ряде случаев тело можно заменить материальной точкой, а положение одной частицы описывается предельно просто.

Материальная точка – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Масса материальной точки равна массе тела.

Возможность пренебрежения размерами тела зависит не от их величины, а от условий задачи. Размерами одного и того же тела в одной задаче пренебречь можно, а в другой – нельзя. Например, если необходимо определить координаты космического корабля относительно Земли, его размерами можно пренебречь. Но если необходимо определить координаты космического корабля относительно станции при их стыковке, то при расчёте траектории причаливания пренебречь размерами этих тел нельзя.

В тех случаях, когда пренебречь размерами тела нельзя, используется понятие абсолютно твёрдого тела.

Абсолютно твёрдое тело – это тело, которое ни при каких условиях не деформируется. Другими словами, это тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется ни в процессе движения тела, ни при воздействии на него других тел.

Абсолютно твёрдых тел не существует, все реальные тела способны деформироваться. Поэтому понятие абсолютно твёрдого тела – абстракция, которой тем не менее удобно пользоваться в механике.

Итак, если тело можно рассматривать как материальную точку, для описания её положения необходимо уметь указать её точный «адрес». Для этого используется система отсчёта.

Системой отсчёта называется совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчёта.

Система координат позволяет точно задать три независимых величины (координаты), которые определяют положение материальной точки относительно начала координат. В данном курсе будет использоваться декартова система координат, а в качестве координат – величины x , y и z , отсчитываемые вдоль осей координат.

Кроме перечисленных, необходимо ввести ещё одно понятие – траектория.

Траектория – это линия, вдоль которой движется материальная точка.

1.1. КИНЕМАТИКА

1.1.1. Кинематика материальной точки Описание движения материальной точки

Движение можно условно представить как последовательность положений, зафиксированных через малые интервалы времени. Следовательно, описание движения есть описание всех этих последовательных положений, т. е. получение математического выражения, позволяющего вычислить конкретное положение материальной точки в любой момент времени.

Как положение, так и движение материальной точки в данной системе отсчёта может быть описано различными способами.

1.1.1.1. Векторный способ



С помощью этого способа положение материальной точки определяется вектором, который начинается в начале отсчёта и заканчивается там, где находится материальная точка.

Такие векторы принято называть радиусами-векторами.

Начало отсчёта – это точка, связанная с телом отсчёта. Её выбирают так, чтобы было удобнее производить расчеты. Например, если необходимо узнать, какое расстояние пролетит камень, разумно в качестве начала отсчёта выбрать точку, в которой камень находился в момент броска.

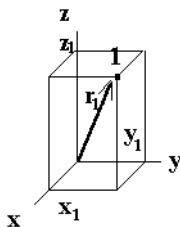
Векторный способ описания движения предполагает получение уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, показывающий положение материальной точки в момент t ; $\mathbf{r}(t)$ – математическое выражение (формула), позволяющее рассчитать мгновенное значение $\mathbf{r}$.

1.1.1.2. Координатный способ

Как уже было отмечено, положение любой точки¹ в пространстве определяется совокупностью трёх независимых величин – координат. В декартовой системе координат это величины x , y , z .

Координаты и радиус-вектор могут описывать положение одной и той же материальной точки. Следовательно, они связаны между собой. Например, если начало отсчёта и начало координат совпадают, то координаты материальной точки в то же время есть проекции радиуса-вектора, определяющего её положение, на оси координат (см. рисунок). В аналитической форме эта связь имеет следующий вид: $\mathbf{r} = ix + jy + kz$; в данном выражении $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ – единичные векторы, направленные параллельно осям x , y и z соответственно.

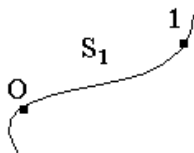
Координатный метод описания движения предполагает получение уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$, где x , y , z – мгновенные значения координат точки в момент t ; $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – математические выражения (формулы), позволяющие рассчитать мгновенные значения координат x , y , z .



1.1.1.3. Естественный способ

Если заранее известна траектория и направление движения материальной точки, её положение удобно определять естественным спосо-

¹ Три независимые величины нужны в том случае, когда рассматривается движение в трёхмерном пространстве; для описания движения вдоль прямой достаточно одной координаты.



бом. Для этого используется скалярная величина – **естественная координата** s . Естественная координата – это длина отрезка траектории от начала отсчёта O до материальной точки.

Естественный способ позволяет описать движение уравнением $s = s(t)$, где s – мгновенное значение естественной координаты в момент t ; $s(t)$ – математическое выражение (формула), позволяющее рассчитать значение s в момент t .

1.1.2. Характеристики движения

Движение – процесс изменения положения материальной частицы. Поэтому кроме меры положения необходима количественная мера **изменения положения**. Такой мерой является перемещение.

Перемещение – это вектор, соединяющий начальное и конечное положение материальной точки в пространстве и равный $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$.

В декартовых координатах перемещение можно выразить как $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y + \mathbf{k}\Delta z$.

Перемещение за бесконечно малый интервал времени dt обозначают $d\mathbf{r}$. Направление этого вектора совпадает с касательной к траектории.

Одно и то же перемещение может произойти за разное время, т. е. с разной быстротой. Поэтому необходима количественная мера **быстроты изменения положения**. Такой мерой является **скорость**.

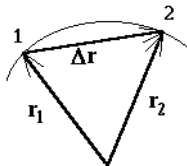
Принято различать среднюю и мгновенную скорости.

Средняя скорость равна отношению перемещения $\Delta \mathbf{r}$, совершённого телом за время Δt , к времени Δt : $\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$.

Направление вектора средней скорости совпадает по направлению с направлением вектора перемещения $\Delta \mathbf{r}$.

Мгновенная скорость равна пределу отношения перемещения $\Delta \mathbf{r}$ к времени Δt , за которое произошло перемещение при Δt , стремящемся к нулю:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$



Другими словами, мгновенная скорость – это векторная величина, равная производной от радиуса-вектора по времени. Вектор скорости направлен по вектору $d\mathbf{r}$, т. е. вдоль касательной к траектории.

В декартовых координатах скорость выражается как

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt},$$

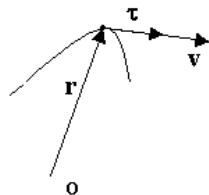
или

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} v_x + \mathbf{j} v_y + \mathbf{k} v_z,$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора скорости на оси x, y, z .

Мгновенную скорость можно выразить и так:

$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \tau v$, где v – модуль вектора мгновенной скорости; τ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории.



Таким образом, вектор скорости равен произведению единичного вектора τ на модуль скорости.

Скорость может изменяться с течением времени, причём одно и то же изменение может произойти за разное время, т. е. с разной быстротой. Поэтому необходима количественная мера **быстроты изменения скорости**. Такой мерой является **ускорение**.

Ускорение – это векторная величина, равная производной от скорости по времени:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

или

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dv_z}{dt},$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k} \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Вектор ускорения направлен, как это видно из определения, по вектору $d\mathbf{v}$, т. е. по вектору приращения скорости.

В СИ ускорение измеряется в метрах на секунду в квадрате (м/с^2).

Используя естественный способ описания движения, можно записать:

$$\mathbf{a} = \frac{d(\tau v)}{dt} = \frac{d\tau}{dt}v + \frac{dv}{dt}\tau.$$

Из полученного выражения следует, что ускорение можно представить в виде суммы двух компонент.

Компонента $\frac{dv}{dt}\tau$ представляет собой производную модуля скорости по времени, умноженную на единичный вектор τ . Производная модуля скорости по времени показывает, как быстро он изменяется с течением времени. Следовательно, эта компонента ускорения показывает, как быстро изменяется модуль скорости. Направлена эта компонента по вектору τ , т. е. по касательной к траектории, и называется **тангенциальным ускорением** a_τ .

Физический смысл компоненты $\frac{d\tau}{dt}v$ заключается в следующем.

По условию вектор τ является единичным. Следовательно, его модуль не изменяется. Изменяться может лишь его направление.

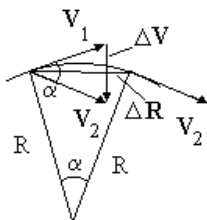
Это означает, что вектор приращения $d\tau$, равный $d\tau$, направлен так, что единичный вектор τ изменяет своё направление, но не изменяет модуль. Такое изменение τ возможно лишь в том случае, если угол между τ и $d\tau$ прямой.

Поэтому компонента ускорения $\frac{d\tau}{dt}v$ перпендикулярна касательной к траектории и отлична от 0, если направление скорости в процессе движения изменяется, т. е. в случае криволинейного движения.

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки по дуге окружности (см. рисунок²).

Пусть радиус траектории равен R и пусть модуль скорости в процессе движения не изменяется.

За время Δt материальная точка совершила перемещение ΔR . При этом скорость изменила своё направление.



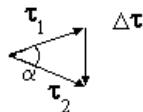
² На рисунке бесконечно малое перемещение заменено на конечное.

Переместим вектор конечной скорости $\mathbf{v}_2$ параллельно самому себе так, чтобы совместить начала векторов начальной и конечной скорости.

Треугольники, образованные векторами скорости $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\Delta\mathbf{v}$, радиусами дуги $\mathbf{R}$ и вектором перемещения $\Delta\mathbf{R}$, равнобедренные и имеют одинаковые углы при вершине.

Треугольник, образованный единичными векторами, имеет такой же угол при вершине, поскольку направления единичных векторов совпадают с направлениями векторов скоростей.

Считая угол α малым, можем записать: $\alpha = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\tau}{\tau}$.



Из этого выражения получаем $\Delta\tau = \tau \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R}{R}$ (здесь

учтено, что модуль единичного вектора τ равен 1). Разделим последнее выражение на Δt и перейдём к его пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{R \Delta t} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{v}{R}.$$

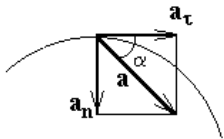
Таким образом, производная $\frac{d\tau}{dt}$ равна отношению модуля скорости к радиусу кривизны траектории.

Направление производной $\frac{d\tau}{dt}$, как уже отмечено, перпендикулярно касательной к траектории.

Следовательно, компонента ускорения $\frac{d\tau}{dt}v = \mathbf{n} \frac{v}{R} v = \mathbf{n} \frac{v^2}{R}$ (здесь

$\mathbf{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный касательной к траектории). Эта компонента показывает, как быстро изменяется направление скорости, и она называется **нормальным ускорением** $\mathbf{a}_n$ (его также называют центростремительным ускорением).

Окончательно выражение для ускорения тела, движущегося по криволинейной траектории, можно записать в виде

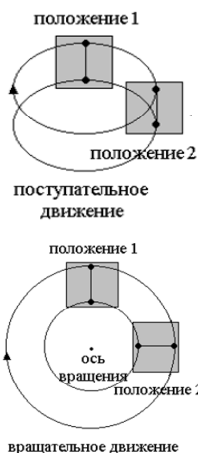


$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau = \mathbf{n} \frac{v^2}{R} + \tau \frac{dv}{dt}.$$

Модуль полного ускорения связан с модулями нормального и тангенциального ускорений следующим образом:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

1.1.3. Кинематика твёрдого тела



Движение тел³, размерами которых пренебречь нельзя, в общем случае может быть достаточно сложным. Задача описания такого движения становится проще, если представить сложное движение как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

Поступательным движением называется такое движение, при котором прямая, проходящая через любые две точки тела, в процессе движения остаётся параллельной самой себе.

Вращательным движением относительно неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой – на оси вращения.

1.1.4. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Пусть твёрдое тело за время dt совершило бесконечно малый поворот на угол $d\varphi$ относительно неподвижной в данной системе отсчёта оси. Этот угол поворота $d\varphi$ является мерой изменения положения тела, вращающегося относительно неподвижной оси. По аналогии с dr , будем называть $d\varphi$ угловым перемещением. Единица измерения углового перемещения – радиан.

Понятно, что тело может совершить поворот либо по часовой, либо против часовой стрелки. Это значит, что угловое перемещение $d\varphi$

³ Термин «тело» будет использоваться вместо термина «абсолютно твёрдое тело».

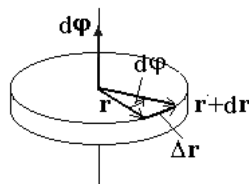
должно характеризоваться не только величиной, но и направлением. Следовательно, $d\phi$ – вектор. Модуль вектора $d\phi$ равен углу поворота тела $d\phi$. Направление вектора $d\phi$ определяют с помощью правила правого винта.

Правило правого винта для углового перемещения: а) поставить винт параллельно оси вращения; б) вращать правый винт в направлении вращения тела; в) направление поступательного движения винта покажет направление вектора $d\phi$.

Векторы, направление которых вводится подобным образом, не являются истинными векторами. Это псевдовекторы. Строгое наименование подобных векторов – аксиальные векторы. Отличие аксиального вектора от истинного вектора заключается в том, что направление истинных векторов вводить не нужно – оно естественным образом вытекает из их природы (вектор перемещения, скорости и т. д.), а для аксиальных векторов вводится искусственно с помощью правила правого винта.

Обратите внимание на очень важную особенность вращательного движения. Поскольку расстояние между различными точками абсолютно твёрдого тела не изменяется, постольку все точки за время dt поворачиваются на один и тот же угол $d\phi$.

В то же время линейное перемещение $d\mathbf{r}$ точек, находящихся на разных расстояниях от оси вращения, различно. Однако, поскольку $d\mathbf{r}$ и $d\phi$ описывают изменение положения одной и той же точки вращающегося тела, поэтому они связаны между собой. В векторной форме связь $d\mathbf{r}$ и $d\phi$ имеет вид $d\mathbf{r} = [d\phi, \mathbf{r}]$.



В правильности выбора операции, связывающей величины $d\mathbf{r}$, $d\phi$ и $\mathbf{r}$, легко убедиться следующим образом.

Из векторной алгебры известно, что вектор $\mathbf{c}$, равный векторному произведению векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ($\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$) направлен в соответствии с **правилом правого винта для векторного произведения**:

- а) совместить начала векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
- б) поставить правый винт перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
- в) вращать винт от вектора, записанного в произведении первым к вектору, записанному вторым в сторону наименьшего угла;
- г) направление поступательного движения винта покажет направление вектора $\mathbf{c}$.

В рассматриваемой ситуации (см. рисунок) винт следует вращать от вектора $d\phi$ к вектору $\mathbf{r}$ по часовой стрелке. Направление поступательного движения винта совпадёт с направлением вектора $d\mathbf{r}$. Это и подтверждает правомерность выбора операции, связывающей векторы $d\mathbf{r}$, $d\phi$ и $\mathbf{r}$.

Во вращательном движении, как и в поступательном, используется характеристика быстроты изменения положения – **угловая скорость** ω . По определению угловая скорость равна

$$\omega = d\phi/dt.$$

Из определения следует, что направление вектора угловой скорости совпадает с направлением вектора $d\phi$.

Обратите внимание на то, что так как все точки вращающегося твёрдого тела за время dt поворачиваются на один и тот же угол $d\phi$, угловая скорость всех точек вращающегося тела одинакова.

Во вращательном движении используется и характеристика быстроты изменения скорости – **угловое ускорение** ε . По определению угловое ускорение равно

$$\varepsilon = d\omega/dt.$$

Направление вектора углового ускорения совпадает с направлением вектора $d\omega$, т. е. вектора приращения угловой скорости (обратите внимание, угловое ускорение совпадает по направлению не с угловой скоростью, а с её приращением).

1.1.5. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения вращающегося тела

Угловые ($d\phi$, ω , ε) и линейные ($d\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$) характеристики движения вращающегося тела связаны между собой.

Связь между линейным и угловым перемещениями уже найдена $d\mathbf{r} = [d\phi, \mathbf{r}]$.

Разделим это выражение на dt :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[\frac{d\phi}{dt}, \mathbf{r} \right].$$

Поскольку по определению $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, а $d\phi/dt = \omega$, то полученное выражение связывает между собой линейную скорость точки $\mathbf{v}$ с её угловой скоростью ω :

$$\mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}].$$

Таким образом, линейная скорость точки тела, вращающегося с угловой скоростью ω относительно неподвижной оси, равна векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор $\mathbf{r}$, определяющий положение точки относительно оси вращения. Обратите внимание, линейная скорость разных точек твёрдого тела различна. Чем дальше от оси вращения расположена точка, тем выше её линейная скорость.

Возьмём производную от последнего выражения по времени:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\frac{d\omega}{dt}, \mathbf{r} \right] + \left[\omega, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right].$$

Величина $d\mathbf{v}/dt$ по определению есть полное ускорение точки $\mathbf{a}$, $d\omega/dt$ – угловое ускорение ε , а $d\mathbf{r}/dt$ – линейная скорость. Поэтому полученное выражение мы можем переписать в виде

$$\mathbf{a} = [\varepsilon, \mathbf{r}] + [\omega, \mathbf{v}].$$

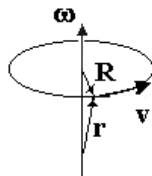
Можно показать, что в случае вращения относительно неподвижной оси $[\varepsilon, \mathbf{r}]$ есть тангенциальное ускорение $\mathbf{a}_\tau$, а $[\omega, \mathbf{v}]$ – нормальное ускорение $\mathbf{a}_n$. Модули компонентов полного ускорения равны:

$$a_\tau = \varepsilon R,$$

$$a_n = \omega v = \omega \omega R = \omega^2 R = v^2 / R.$$

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$



1.1.6. Преобразования Галилея

Движение одного и того же тела можно наблюдать, находясь в разных системах отсчёта. Например, один наблюдатель может стоять на земле, а второй равномерно и прямолинейно будет двигаться на автомобиле. Если каждый из наблюдателей измерит кинематические характеристики движения одного и того же тела, то результаты измерения будут разными.

Очевидно, что если измерять скорость предмета, движущегося вместе с автомобилем, то у стоящего на земле наблюдателя измеренная скорость будет равна скорости автомобиля, а для сидящего в машине скорость предмета будет равна нулю. Но это скорости одного и того же тела, поэтому результаты измерений связаны между собой. Как именно они связаны, показывают преобразования Галилея.

Рассмотрим преобразования Галилея применительно к одной простейшей ситуации – прямолинейного движения одной системы отсчёта относительно другой.

Итак, пусть имеются две системы отсчёта K и K' , движущиеся относительно друг друга, причём пусть K' движется вдоль оси x (см. рисунок). Пусть эти системы отсчёта отвечают следующим условиям:

1) в момент $t = t' = 0$ начала координат системы отсчёта совпадали ($t = t'$, так как Галилей полагал, что время во всех системах отсчёта течёт одинаково);

2) скорость и ускорение начала координат системы отсчёта K' относительно системы отсчёта K равны $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{a}_0$ соответственно;

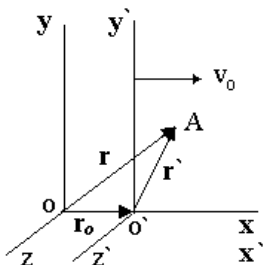
3) кинематические характеристики некоторой материальной точки A в системе отсчёта K известны.

Необходимо связать между собой кинематические характеристики материальной точки A в системах отсчёта K и K' .

Положение начала отсчёта системы K' относительно системы отсчёта K определяется вектором $\mathbf{r}_0$.

Положение точки A в системе K по условию определяется вектором $\mathbf{r}$, а положение точки A в системе K' – вектором $\mathbf{r}'$, которые, как видно из рисунка, связаны соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'.$$



Пусть за время dt точка А совершит в системе отсчёта K перемещение $d\mathbf{r}$. Очевидно, что $d\mathbf{r}$ равно сумме перемещения $d\mathbf{r}_0$ системы K' относительно системы K и перемещения $d\mathbf{r}'$ точки А относительно системы K' :

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'.^4$$

Если разделить выражение для перемещений на dt , то получим связь скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}',$$

где $\mathbf{v}$ – скорость точки А относительно системы отсчёта K ; $\mathbf{v}'$ – скорость точки А относительно системы отсчёта K' , $\mathbf{v}_0$ – скорость системы отсчёта K' относительно K .

Взяв производную по времени от выражения для скоростей получим связь ускорений:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'.$$

Из последнего выражения видно, что если система отсчёта K' движется равномерно относительно системы K , т. е. если $\mathbf{a}_0 = 0$, то ускорения точки в этих системах отсчёта одинаковы: $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

Спроецировав векторные уравнения на оси координат и учитывая, что $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t = \mathbf{v}_0 t'$ получаем:

$$x = x' + vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'.$$

Эти выражения и представляют собой преобразования Галилея. Если известны координаты, скорость и ускорение тела в какой-либо системе отсчёта и скорость другой системы отсчёта относительно данной системы, то преобразования Галилея позволяют вычислить значения всех кинематических характеристик рассматриваемого тела в другой системе отсчёта.

⁴ В этом можно убедиться, продифференцировав выражение $r = r_0 + r'$.

1.2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

С помощью кинематических уравнений можно вычислить положение движущегося тела в любой момент времени, если известны его начальное положение, скорость и ускорение. Но кинематика не даёт ответа на вопрос: по какой причине тело движется именно так, почему оно имеет именно такое ускорение?

Ответ на этот вопрос мы можем найти в динамике.

Прежде чем рассматривать законы динамики, необходимо определить основные динамические характеристики, используемые в этих законах.

1.2.1. Масса. Сила. Импульс

Из повседневного опыта известно, что для того чтобы сдвинуть неподвижное тело, следует приложить определённое усилие.

Усилие необходимо приложить и для того, чтобы остановить движущееся тело (или заставить его двигаться быстрее или медленнее).

Это обусловлено тем, что любое тело имеет неотъемлемое свойство – инертность.

Инертность – это свойство тел сохранять состояние покоя или двигаться с неизменной скоростью при отсутствии внешнего воздействия.

Поскольку инертность разных тел различна, то возникает вопрос о количественной мере этого свойства. Поэтому и вводится **масса** – мера инертности тел. Чем больше инертность тела, тем больше его масса.

Масса – скалярная величина. В СИ масса измеряется в килограммах (кг).

Массу 1 кг имеет эталонная гиря из платино-иридиевого сплава, которая хранится в Международном бюро мер и весов.

Важным свойством массы служит её аддитивность, т. е. масса тела, состоящего из нескольких частей, равна сумме масс составных частей тела.

Очевидно, что воздействовать на тело можно сильнее или слабее.

Поэтому возникает необходимость в количественной мере воздействия. Такую меру представляет собой сила.

Сила – количественная мера воздействия одного тела на другое.

Поскольку в результате воздействия всякое реальное тело деформируется, сила может быть причиной деформации тел.

Деформация тел под действием сил позволяет разработать метод измерения сил. Например, если к висящей вертикально пружине подвесить тело, то пружина растянется на определённую величину. Если затем подвесить второе точно такое же тело, то пружина растянется в два раза сильнее. Если подвесить третье – в три раза и т. д. Таким образом, если имеется набор одинаковых эталонных тел, можно ввести единицу измерения силы.

В СИ единица измерения силы – ньютон (обозначается Н).

Сила, возникающая в результате притяжения к Земле, всегда направлена вниз. Но силы могут возникать и за счёт воздействия других тел. В этом случае сила может иметь другое направление. Это означает, что **сила – векторная величина**.

Любая сила характеризуется величиной, направлением и точкой приложения (одна и та же сила, приложенная к разным точкам одного и того же тела, действует по-разному).

Если на тело одновременно действует несколько сил, то в ряде случаев (но не всегда!) их действие будет эквивалентно действию одной силы, равной векторной сумме всех сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \dots$$

Сила $\mathbf{F}$ называется равнодействующей силой.

Понятия силы и массы были определены Ньютоном в XVII веке. Тогда же им была введена ещё одна характеристика движения – количество движения.

Количеством движения называют физическую величину, равную произведению массы тела на его скорость. В настоящее время эту характеристику называют **импульсом**:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Импульс – векторная величина. Направление вектора импульса совпадает по направлению с вектором скорости.

В СИ импульс измеряется в килограмм на метр в секунду ($\text{кг} \cdot \text{м/с}$).

1.2.2. Первый закон Ньютона Инерциальные системы отсчёта

Первый закон Ньютона гласит: в инерциальных системах отсчёта (ИСО) всякое тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют силы или их сумма равна нулю.

Эта формулировка не только выражает суть закона, но и содержит определение понятия «инерциальная система отсчёта».

Прежде всего выясним, что такое инерциальная система отсчёта.

Ответ на этот вопрос содержится в формулировке первого закона Ньютона: **в инерциальных системах отсчёта** всякое **тело покоится** или движется равномерно и прямолинейно, **если** на него не действуют силы или их **сумма** (сумма сил) **равна нулю**.

Другими словами, система отсчёта инерциальна, если сумма сил, действующих на неподвижное тело (или на тело, движущееся равномерно и прямолинейно), равна нулю.

Для того чтобы определить, инерциальна ли какая-либо система отсчёта, необходимо измерить все силы, действующие на неподвижное в этой системе отсчёта тело. Если векторная сумма измеренных сил окажется равной нулю, то система отсчёта инерциальна. Если же сумма сил, действующих на неподвижное тело, не равна нулю, то система отсчёта неинерциальна.

Допустим, что некоторая система отсчёта инерциальна.

Пусть некоторое тело покоится в этой системе отсчёта.

Пусть другая система отсчёта движется относительно первой равномерно и прямолинейно (т. е. с ускорением, равным нулю).

Как следует из преобразований Галилея (см. раздел 1.1.6), в такой системе отсчёта ускорение рассматриваемого тела будет равно нулю. Следовательно, в этой системе отсчёта рассматриваемое тело будет двигаться равномерно и прямолинейно.

Но это значит, что и эта система отсчёта инерциальна (см. определение понятия «инерциальная система отсчёта»).

Следовательно, любая система отсчёта, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчёта, также инерциальна.

Суть первого закона Ньютона заключается в следующем: **в инерциальных системах отсчёта** всякое **тело** покоится или движется равномерно и прямолинейно, **если на него не действуют силы** или их

сумма равна нулю. Другими словами, для того чтобы тело двигалось, силы не нужны!

Опыт, накопленный людьми, противоречит этому выводу. Действительно, для того чтобы в нашем мире тело двигалось, к нему необходимо прикладывать силу. Но она нужна не для того, чтобы тело двигалось. Сила нужна для того, чтобы преодолеть трение, препятствующее движению тела. Если бы удалось уничтожить трение, то для того, чтобы тело двигалось, силы были бы не нужны. Тела, не испытывающие воздействия сил и которые на момент начала наблюдения покоились, будут и дальше покоиться, а тела, которые двигались, продолжат двигаться равномерно и прямолинейно.

Конечно, для того чтобы какое-либо тело **начало** двигаться, необходимо воздействие силы. Но **начало движения** (т. е. изменение скорости) и **движение** не одно и то же.

1.2.3. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона гласит: в инерциальных системах отсчёта произведение массы тела на его ускорение равно геометрической сумме сил, действующих на тело. В аналитической форме закон записывается следующим образом:

$$m\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}.$$

Этот закон связывает меру внешнего воздействия $\mathbf{F}$ с его результатом – ускорением $\mathbf{a}$. Коэффициентом пропорциональности между ними является мера инертности (m). Второй закон Ньютона показывает, для чего нужны силы: силы нужны для того, чтобы изменять движение тел.

С другой стороны, используя эталонную массу, на основе второго закона Ньютона можно ввести единицу измерения силы (именно так и введена единица измерения силы 1 Н – это сила, под действием которой тело массой 1 кг получит ускорение 1 м/с²).

Второй закон Ньютона можно сформулировать и иначе: скорость изменения импульса тела равна сумме действующих на тело сил:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Sigma \mathbf{F}.$$

Эта формулировка не отвергает рассмотренную ранее. Обе формулировки отображают одну и ту же закономерность, они взаимосвязаны, что видно из следующего:

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d m\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}.$$

Второй закон Ньютона часто называют **основным законом динамики поступательного движения**. Именно на основе второго закона решается основная задача динамики – описание движения тел под действием сил, приложенных к телу.

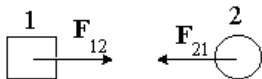
1.2.4. Третий закон Ньютона

Первый и второй законы Ньютона рассматривают движение тел. Третий закон рассматривает взаимодействие двух тел. Он гласит: силы, с которыми действуют друг на друга два взаимодействующих тела, всегда равны друг другу по величине и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей точки приложения сил:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Третий закон Ньютона указывает на источник возникновения сил – сила есть результат взаимодействия двух тел.

Обратите внимание, силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ приложены к разным телам. Это означает, что эти силы не компенсируют друг друга, хотя их сумма равна нулю.



Третий закон справедлив для сил любой природы. Все виды фундаментальных взаимодействий порождают равные по величине и противоположные по направлению силы одной природы.

1.2.5. Принцип относительности Галилея

В разделе 1.2.2. показано, что любая система отсчёта, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчёта, является инерциальной.

В разделе 1.1.6 отмечено, что если системы отсчёта движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, то ускорение тела, измеренное в каждой из систем отсчёта, будет одинаковым.

Это означает, что ускорение какого-либо тела, измеренное в разных инерциальных системах отсчёта, будет одинаковым.

Из второго закона Ньютона следует, что ускорение тела массой m зависит от величины силы, приложенной к телу: $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$. Тогда во всех инерциальных системах отсчёта на рассматриваемое тело действует одна и та же сила.

Следовательно, динамические уравнения $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, составленные в разных системах отсчёта для одного и того же тела, во всех инерциальных системах отсчёта имеют абсолютно одинаковый вид. По виду такого уравнения совершенно невозможно определить, в какой именно инерциальной системе отсчёта производились измерения. Можно показать, что одинаковый вид имеют и все остальные уравнения, описывающие другие особенности поведения рассматриваемого тела.

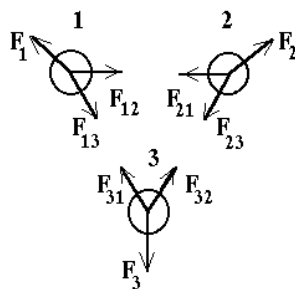
Из изложенного следует вывод: в инерциальных системах отсчёта все механические процессы протекают одинаково; все инерциальные системы по своим свойствам эквивалентны, абсолютной инерциальной системы отсчёта не существует. Эту формулировку и принято называть принципом относительности Галилея.

1.2.6. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему из нескольких взаимодействующих между собой тел.

В результате взаимодействия этих тел между собой возникают силы $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{13}$, $\mathbf{F}_{21}$, $\mathbf{F}_{23}$, $\mathbf{F}_{31}$, $\mathbf{F}_{32}$. На тело 1 со стороны тела 2 действует сила $\mathbf{F}_{12}$, со стороны тела 3 – сила $\mathbf{F}_{13}$, на тело 2 со стороны тела 1 действует сила $\mathbf{F}_{21}$, со стороны тела 3 – сила $\mathbf{F}_{23}$ и т. д. Эти силы принято называть **внутренними силами**, т. е. внутренние силы – это силы, возникающие в результате взаимодействия двух тел, принадлежащих системе.

Пусть также каждое из тел взаимодействует с телами, не принадлежащими системе. В результате взаимодействия тела 1 с внешним телом на тело 1 действует сила $\mathbf{F}_1$, на тело 2 – сила $\mathbf{F}_2$ и т. д. Эти силы



принято называть **внешними силами**, т. е. внешние силы – это силы, действующие на тела, входящие в систему, в результате взаимодействия с телами, не принадлежащими системе.

Таким образом, на каждое из тел рассматриваемой системы действуют внутренние и внешние силы.

Опишем движение каждого из тел системы с помощью уравнений динамики. Для этого воспользуемся вторым законом Ньютона в форме

$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Здесь $\Sigma \mathbf{F}$ есть сумма всех сил, действующих на данное тело.

Составим уравнения движения для каждого из тел, включённых в систему:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_1,$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_2,$$

$$\frac{d\mathbf{p}_3}{dt} = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_3.$$

Каждое из этих уравнений описывает движение первого, второго и третьего тел соответственно. В левой части каждого из уравнений стоит величина, равная скорости изменения импульса тела, в правой – сумма сил, действующих на это тело.

Найдём сумму левых и правых частей этих уравнений:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_3}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_3.$$

В левой части полученного уравнения имеется сумма производных импульсов тел системы по времени. Учитывая свойства производных, мы можем заменить сумму производных производной суммы:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_3}{dt} = \frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)}{dt}.$$

Величина $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$ представляет собой суммарный импульс всех тел, принадлежащих системе. Его принято называть **полным импульсом системы** $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$, где $\mathbf{p}$ – полный импульс системы.

Из третьего закона Ньютона следует, что силы, возникающие при взаимодействии двух тел, равны по величине и противоположны по направлению: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Это означает, что их сумма равна нулю: $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$.

Точно так же $\mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32} = 0$ и $\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{13} = 0$.

Отсюда

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 ,$$

т. е. производная полного импульса системы тел по времени равна сумме внешних сил.

Если векторная сумма внешних сил равна нулю, то и $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$. Но это означает, что полный импульс системы $\mathbf{p}$ не зависит от времени, т.е. полный импульс системы постоянен: $\mathbf{p} = \text{const}$.

Вывод будет таким же, если внешних сил не будет.

Полученные результаты позволяют сформулировать закон сохранения импульса: полный импульс системы тел постоянен, если на систему не действуют внешние силы или сумма внешних сил равна нулю.

Важно отметить, что импульс каждого из тел, принадлежащих системе, может изменяться. Однако изменение импульса одного тела обязательно будет скомпенсировано изменением импульса других тел.

1.3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

В предыдущем разделе рассмотрены законы динамики, которые позволяют рассчитать, как будет двигаться тело массой m под действием силы $\mathbf{F}$. Но задачи механики не сводятся лишь к расчёту траекторий тел. В ряде случаев важно не только то, как будет двигаться тело, но и какую для этого необходимо совершить работу, какой энергией будет обладать тело в процессе движения и в какой форме будет существовать энергия. Именно эти проблемы и будут рассмотрены в настоящем разделе.

1.3.1. Работа. Кинетическая энергия

Пусть вдоль оси x движется частица массой m . Пусть на частицу действует постоянная сила $\mathbf{F}$, параллельная оси x . Динамическое уравнение, спроецированное на ось x , будет иметь вид

$$ma = m \frac{dv}{dt} = F_x.$$

Умножим обе части этого уравнения на скорость частицы v и перенесём dt в правую часть:

$$mv dv = F_x v dt.$$

Учитывая, что $v dv = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$ и $v dt = dx$, где dx — элементарное перемещение частицы за время dt , получаем

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F_x dx.$$

Величина $\frac{mv^2}{2}$ называется **кинетической энергией**, а величина $F_x dx$ — **элементарной работой**. С использованием этих терминов полученное соотношение можно прочесть следующим образом: элементарная работа, совершённая на бесконечно малом перемещении dx силой $\mathbf{F}$, идёт на приращение кинетической энергии частицы.

Если частица под действием силы $\mathbf{F}$ совершила конечное перемещение из точки 1 в точку 2, то связь работы и кинетической энергии имеет следующий вид:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 F_x dx.$$

Взяв интегралы, получим

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 F_x dx = A_{12},$$

или

$$W_2 - W_1 = A_{12},$$

где v_1, v_2 – скорости частицы в точках 1 и 2; W_1, W_2 – значения кинетической энергии в тех же точках.

Полученное соотношение показывает, что и в этом случае работа, совершённая силой $\mathbf{F}$ на перемещении из точки 1 в точку 2, идёт на приращение кинетической энергии частицы.

Обратите внимание на то, что в ходе анализа не учитывалось, какая именно сила действовала на частицу. Поэтому **работа любой силы идёт на приращение кинетической энергии**.

Выражение для расчета кинетической энергии можно записать и в другом виде:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{m} \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m},$$

где p – импульс рассматриваемой частицы.

Как уже было отмечено, элементарная работа равна $F_x dx$. В выражение для элементарной работы входит проекция силы $\mathbf{F}$ на ось x (в данном случае это направление движения). Эта проекция равна $F \cos \alpha$, где α – угол между силой и направлением движения. С учётом сказанного выражение для элементарной работы, совершённой силой $\mathbf{F}$ на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$, равно $F dr \cos \alpha$ (здесь учтено, что поскольку элементарное перемещение $d\mathbf{r}$ совпадает с осью x , то модуль перемещения dr равен приращению координаты dx).

Из векторной алгебры известно, что результат скалярного произведения двух векторов равен произведению модулей векторов на косинус угла между ними. Следовательно, элементарную работу можно выразить в векторной форме – элементарная работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения: $\mathbf{F} d\mathbf{r} = F dr \cos \alpha$.

Работа, совершённая силой $\mathbf{F}$ на конечном перемещении тела из точки 1 в точку 2, равна

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^2 F dr \cos \alpha .$$

Это выражение является определением механической работы.

Работа есть скалярная величина, так как результат скалярного произведения является скаляром. Работа может быть положительной (если угол $\alpha < 90^\circ$), отрицательной (если угол $\alpha > 90^\circ$) и равной нулю (если угол $\alpha = 90^\circ$).

Физический смысл работы таков: работа является мерой энергии, переданной телу в ходе воздействия на него.

Если на движущуюся материальную точку или тело действуют одновременно несколько сил, то работа этих сил будет равна

$$A = \int_1^2 \mathbf{F}_1 d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F}_2 d\mathbf{r} + \dots + \int_1^2 \mathbf{F}_k d\mathbf{r} = A_1 + A_2 + \dots + A_k ,$$

т. е. полная работа, совершаемая несколькими силами, равна алгебраической сумме работ всех сил, действующих на тело.

Полную работу нескольких сил в ряде случаев можно рассчитать и иначе: заменить действующие силы одной, равной векторной сумме всех сил, приложенных к телу (она называется равнодействующей силой) и подсчитать работу этой силы:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_k ,$$

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} .$$

В СИ единицей измерения работы и энергии является джоуль (Дж = кг·м/с²).

В качестве примера найдём работу, совершаемую некоторыми силами.

1.3.1.1. Работа упругой силы

Упругой силой называют силу $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, где $\mathbf{F}$ – упругая сила; k – коэффициент упругости; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, определяющий смещение от положения равновесия.

Элементарная работа упругой силы равна $\mathbf{F}d\mathbf{r} = -k\mathbf{r}d\mathbf{r} = -kd(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = -k\frac{dr^2}{2}$. Работа на конечном перемещении из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = -\int_1^2 d\left(\frac{kr^2}{2}\right) = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}.$$

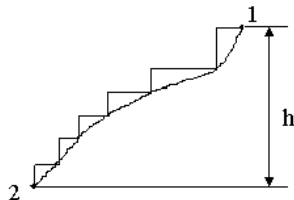
Обратите внимание на то, что в ходе анализа не учитывалась форма траектории, по которой перемещалась частица под действием упругой силы, также следует учесть, что если начальное и конечное положения совпадают, то работа упругой силы равна нулю.

1.3.1.2. Работа силы тяжести

Вблизи от поверхности Земли сила тяжести практически одинакова во всех точках и равна $m\mathbf{g}$, где m – масса тела; $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения.

Элементарная работа силы тяжести равна $\mathbf{F}d\mathbf{r} = m\mathbf{g}d\mathbf{r}$. Работу на конечном перемещении из точки 1 в точку 2 можно найти, просто суммируя работы на элементарных перемещениях.

Разобьем траекторию на бесконечно малые прямолинейные участки, часть которых параллельна силе тяжести и ускорению свободного падения, а часть им перпендикулярна.



На участках, перпендикулярных силе тяжести, скалярное произведение $\mathbf{g}d\mathbf{r}$ будет равно нулю. На параллельных же участках скалярное произведение $\mathbf{g}d\mathbf{r}$ будет равно произведению модулей этих векторов: gdh (вместо r использован символ h , так как координату в вертикальном направлении обычно называют высотой; произведение положительно, поскольку будем полагать, что тело двигалось вниз, и направление элементарных перемещений совпадало с направлением ускорения свободного падения). Сумма всех $mgdh$ между точками 1 и 2 будет равна работе силы тяжести:

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2).$$

Обратите внимание, что на результат анализа вновь не влияет форма траектории, по которой перемещалось тело. Учтите также, что если начальное и конечное положение совпадает, то работа силы тяжести, как и в предыдущем примере, равна нулю.

1.3.1.3. Работа силы трения

Пусть некоторое тело перемещается вдоль прямой из точки 1 в точку 2, а затем обратно в точку 1.

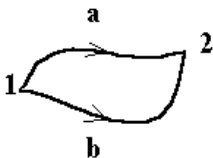
Пусть сила трения скольжения, действующая на тело, во всех точках одинакова. В этом случае работа на конечном перемещении $A = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$.

Сила трения всегда направлена против направления движения, следовательно, угол между силой трения и вектором перемещения равен 180° . Поэтому работа как при перемещении из точки 1 в точку 2, так и при перемещении из точки 2 в точку 1, будет отрицательна: $A_{12} = -F\Delta r$, $A_{21} = -F\Delta r$. Величина Δr на участках 12 и 21 одинакова. Следовательно, полная работа $A_{121} = A_{12} + A_{21} = -2F\Delta r$.

Отсюда следует, что характер силы трения существенно отличается от характера двух предыдущих сил. Если работа силы упругой деформации и работа силы тяжести на замкнутой траектории равна нулю, то работа силы трения не равна нулю. Это означает, что на части траектории работа сил упругости и тяжести положительна, а на другой части – отрицательна, в то время как работа силы трения на всех участках траектории отрицательна.

1.3.2. Консервативные силы

Работа силы по перемещению частицы из точки 1 в точку 2 зависит в общем случае от формы траектории между точками 1 и 2. Но существуют и такие силы, работа которых не зависит



от формы траектории, а определяется только положением начальной и конечной точки. В разделе 1.3.1 было показано, что такое свойство присуще силе тяжести и упругой силе. Такие силы называются **консервативными**.

Определение консервативной силы можно сформулировать и иначе: сила является консервативной, если её работа на замкнутой траектории равна нулю:

$$A = \oint_L \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0.$$

Консервативны не только сила тяжести и упругая сила. Установлено, что консервативными являются все силы, которые обратно пропорциональны квадрату расстояния между взаимодействующими телами.

Если работа силы на замкнутой траектории не равна нулю, то сила является неконсервативной. В разделе 1.3.1.3 сказано, что работа силы трения на замкнутой траектории не равна нулю, следовательно, сила трения неконсервативна.

Консервативные силы возникают при взаимодействии как соприкасающихся тел, так и тел, находящихся на расстоянии друг от друга. Например, брошенный камень не соприкасается с поверхностью Земли, но сила тяжести на него действует.

Взаимодействие несоприкасающихся тел объясняют тем, что каждое тело создаёт вокруг себя поле, с которым взаимодействуют все остальные тела.

Если силы, действующие на тела, находящиеся в поле, консервативны, то поле называют консервативным.

Если поле не изменяется с течением времени, его называют стационарным консервативным полем.

1.3.3. Потенциальная энергия частицы

Рассмотрим тело, находящееся на высоте h над землёй. Если тело закреплено, то сила тяжести не совершает работу. Но сила тяжести потенциально способна совершить работу: если тело освободить, оно начнёт перемещаться, и сила тяжести будет совершать работу.

Но для того чтобы совершить работу, необходимо затратить энергию. Если работа совершается консервативными силами, то в физике принято говорить, что работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии: $A_{12} = -\Delta U = U_1 - U_2$. В последнем выражении $-\Delta U$ – убыль потенциальной энергии; U_1 и U_2 – потенциальные энергии тела в начальной и конечной точках траектории.

Поскольку работа на конечном перемещении $A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}$, можно записать:

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Ещё раз обратите внимание на то, что сила $\mathbf{F}$ обязательно должна быть консервативной. Для неконсервативных сил данное выражение недействительно.

Как уже было отмечено, в консервативном поле работа зависит лишь от начального и конечного положения тела, поэтому и убыль потенциальной энергии зависит только от этих положений. Это также означает, что и потенциальная энергия тела определяется его положением.

Но положение одного и того же тела относительно разных тел различно, т.е. положение относительно. Поэтому и значение потенциальной энергии относительно. Оно зависит от выбора точки отсчёта.

В то же время разность потенциальных энергий обладает абсолютным значением. Это утверждение будет прокомментировано далее в одном из примеров.

Необходимо отметить ещё одно важное обстоятельство.

Потенциальная энергия есть **энергия взаимодействия** тела с полем (или с телами, создавшими это поле).

Рассмотрим несколько примеров.

1.3.3.1. Потенциальная энергия в поле силы тяжести

Как уже отмечалось, $U_1 - U_2 = A_{12}$. В разделе 1.3.1.2 показано, что работа силы тяжести $A_{12} = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2$. Следовательно, убыль потенциальной энергии в поле силы тяжести $U_1 - U_2 = mgh_1 - mgh_2$. Поэтому потенциальная энергия тела массой m , находящегося на высоте h над поверхностью земли, $U = mgh$.

Из последнего выражения следует, что значение потенциальной энергии зависит от выбора начала отсчёта высоты h .

Например, пусть один наблюдатель отсчитывает высоту от поверхности земли, а другой – от уровня пола лаборатории, в которой он

находится. Для первого наблюдателя некоторое тело находится на одной высоте, а для второго – на другой. Поэтому значения потенциальной энергии одного и того же тела будут разными.

Но если поднять это тело на 1 м, то приращение высоты для всех наблюдателей будет одинаковым. Поэтому разность потенциальных энергий будет одинаковой для всех наблюдателей. Именно поэтому потенциальная энергия не обладает абсолютным значением, а разность потенциальных энергий – обладает.

1.3.3.2. Потенциальная энергия деформированной пружины

По определению $U_1 - U_2 = A_{12}$. Как было показано в разделе 1.3.1.1, работа упругой силы $A_{12} = -\int_1^2 d\left(\frac{kr^2}{2}\right) = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}$. Следовательно,

убыль потенциальной энергии $U_1 - U_2 = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}$. Таким образом,

потенциальная энергия деформированной пружины $U = \frac{kr^2}{2}$, где r – деформация пружины (разность длины недеформированной и длины деформированной пружины). Обратите внимание, r отсчитывается от конца недеформированной пружины, т. е. потенциальная энергия недеформированной пружины равна нулю.

1.3.4. Силы и потенциальная энергия

Сила, действующая на тело в консервативном поле, и потенциальная энергия этого тела связаны между собой. Найдём эту связь.

Элементарная работа по перемещению тела в консервативных полях, с одной стороны равна $\mathbf{F}d\mathbf{r}$, а с другой стороны $-dU$. Следовательно, они равны друг другу: $\mathbf{F}d\mathbf{r} = -dU$.

Если тело перемещается вдоль оси x , то $F_x dx = -dU$ и $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$.

Если тело одновременно перемещается вдоль осей x , y и z , то по аналогии $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$ и $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$. В этих выражениях F_x , F_y , F_z есть проекции вектора силы $\mathbf{F}$, действующей на тело, на оси координат. Используя эти проекции, можно выразить вектор силы как

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z,$$

или

$$\mathbf{F} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Это выражение принято записывать в сокращённом виде

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U$$

и читать так: сила, действующая на тело в стационарном консервативном поле, равна градиенту потенциальной энергии частицы, взятому с обратным знаком.

Знак «минус» в последнем выражении указывает на то, что сила, действующая на тело в консервативном поле, всегда направлена в сторону максимально быстрого уменьшения потенциальной энергии.

Используя эти соотношения, можно найти силу, которая будет действовать на тело в любой точке стационарного консервативного поля.

1.3.5. Полная механическая энергия частицы

Пусть некоторая частица находится в стационарном поле консервативных сил. Со стороны этого поля на частицу действует консервативная сила $\mathbf{F}_{\text{конс}}$.

Работа, совершаемая этой силой, с одной стороны, идёт на приращение кинетической энергии частицы, движущейся под действием силы $\mathbf{F}_{\text{конс}}$, а с другой – равна убыли потенциальной энергии этой частицы.

Это означает, что приращение кинетической энергии частицы равно убыли её потенциальной энергии:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U_1 - U_2.$$

Перегруппировав члены этого уравнения, получаем, что

$$\frac{mv_1^2}{2} + U_1 = \frac{mv_2^2}{2} + U_2.$$

Из полученного выражения следует, что сумма кинетической и потенциальной энергии частицы, движущейся в стационарном консервативном поле, остаётся постоянной.

Величину $E = \frac{mv^2}{2} + U$ называют полной механической энергией частицы.

Далее допустим, что кроме консервативной силы на частицу действует ещё некоторая неконсервативная сила $\mathbf{F}_{\text{неконс}}$.

В этом случае приращение кинетической энергии обусловлено работой как консервативной, так и неконсервативной сил: $\Delta W = A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}}$.

В то же время убыль потенциальной энергии обусловлена только консервативной силой: $-\Delta U = A_{\text{конс}}$.

Поэтому можно записать:

$$\Delta W = -\Delta U + A_{\text{неконс}},$$

$$\Delta W + \Delta U = A_{\text{неконс}},$$

$$\Delta(W + U) = A_{\text{неконс}},$$

и, наконец,

$$\Delta E = A_{\text{неконс}}.$$

Полученное выражение означает, что неконсервативные силы изменяют полную механическую энергию частицы. При этом приращение полной механической энергии частицы равно работе неконсервативных сил над этой частицей.

Отсюда следует, что полная механическая энергия частицы остаётся постоянной, если на неё не действуют неконсервативные силы. Данную формулировку называют **законом сохранения механической энергии частицы**.

1.3.6. Потенциальная энергия системы тел

Пусть имеется система из двух взаимодействующих тел.

Предположим, что силы, возникающие при взаимодействии этих тел, консервативны.

Если под действием внутренних сил одно из тел изменит своё положение относительно другого, то работа внутренней силы будет равна убыли его потенциальной энергии.

Потенциальная энергия этого тела обусловлена его взаимодействием с другим телом, принадлежащим этой системе. Поэтому её называют потенциальной энергией взаимодействия тел системы, или **потенциальной энергией системы тел**.

Если система состоит из N тел, силы взаимодействия между которыми консервативны, то потенциальная энергия системы может быть выражена как сумма потенциальных энергий взаимодействия пар тел. Например, для трёх тел $U = U_{12} + U_{23} + U_{31}$, где U_{12} – потенциальная энергия взаимодействия 1-го и 2-го тел, U_{23} – 2-го и 3-го и т. д. Это выражение можно представить в виде $U = \frac{1}{2} \sum U_{ik}$.

В этом выражении предполагается, что суммирование ведётся при i и k , принимающих значения от 1 до N (исключая значения $i = k$). Множитель $1/2$ появляется здесь потому, что потенциальная энергия каждой пары тел встречается в этой сумме дважды (например, U_{12} и U_{21}).

Поскольку величина каждого из членов этой суммы зависит от взаимного расположения пары тел, понятно, что потенциальная энергия системы тел зависит от их взаимного расположения и изменяется при его изменении.

1.3.7. Закон сохранения механической энергии системы тел

Рассмотрим систему из N тел, отвечающую следующим условиям:

- 1) в результате взаимодействия тел системы возникают как консервативные, так и неконсервативные силы;
- 2) кроме внутренних, на систему действуют и внешние силы.

В результате действия внутренних сил будет меняться взаимное расположение тел, включённых в систему, а в результате действия внешних сил – положение системы в целом.

Определим совершаемую при этом работу.

Работа внутренних консервативных сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии системы:

$$A_{\text{конс}} = U_1 - U_2,$$

где U_1 – потенциальная энергия системы в исходном состоянии; U_2 – потенциальная энергия системы в конечном состоянии.

Работа внутренних неконсервативных сил не может быть представлена как изменение потенциальной энергии. Обозначим её просто как $A_{\text{неконс}}$. Работу внешних сил обозначим как $A_{\text{внешн}}$.

Как было показано ранее, суммарная работа всех сил затрачивается на приращение кинетической энергии системы, которая равна сумме кинетических энергий частиц:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Следовательно, $U_1 - U_2 + A_{\text{неконс}} + A_{\text{внешн}} = W_2 - W_1$.

Перегруппировав члены, можем получить:

$$(U_2 + W_2) - (U_1 + W_1) = A_{\text{неконс}} + A_{\text{внешн}}.$$

Но $U + W = E$, т. е. члены в скобках есть полная механическая энергия системы в конечном и начальном состояниях системы. Поэтому

$$E_2 - E_1 = A_{\text{неконс}} + A_{\text{внешн}}.$$

Таким образом, полная механическая энергия системы тел изменяется за счёт работы внутренних неконсервативных и внешних сил.

Если работа внешних сил равна нулю или на систему тел не действуют внешние силы, то система называется **замкнутой**.

В замкнутой системе работа внешних сил равна нулю ($A_{\text{внешн}} = 0$) и $E_2 - E_1 = A_{\text{неконс}}$, т. е. полная механическая энергия системы тел изменяется только за счёт работы неконсервативных сил (например, силы трения).

Если в замкнутой системе тел действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия системы тел постоянна:

$$E_2 - E_1 = 0,$$

или

$$E_2 = E_1.$$

Система тел, в которой отсутствуют неконсервативные силы, называется **консервативной**.

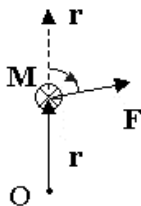
Теперь можно сформулировать закон сохранения полной механической энергии: полная механическая энергия замкнутой консервативной системы тел остаётся постоянной.

Если же в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы будет изменяться, так как неконсервативные силы вызывают переход механической энергии в другие виды энергии.

1.4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Для описания динамики вращательного движения потребуются дополнительные динамические характеристики. Поэтому начнём с определений этих динамических характеристик.

1.4.1. Момент силы



Из повседневного опыта известно, что в ряде случаев, прикладывая одну и ту же силу к разным точкам тела, можно получить разные результаты (например, попытайтесь открыть дверь, прикладывая одинаковую силу к ручке двери и где-нибудь вблизи дверных петель).

Количественной мерой воздействия, зависящего от точки приложения силы, является **момент силы**.

Момент силы относительно точки O – это векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора $\mathbf{r}$, соединяющего точку O и точку приложения силы, и силы $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}].$$

Модуль вектора момента силы $M = rF\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$.

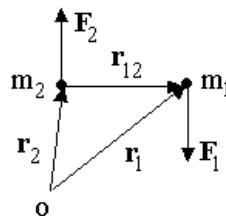
Направление вектора $\mathbf{M}$ определяется по правилу правого винта для векторного произведения (в приведённом на рисунке примере результирующий вектор направлен за рисунок).

В СИ единица измерения момента силы ньютон-метр (Н·м).

Если на тело действуют несколько сил и их можно заменить равнодействующей, то результирующий момент силы относительно некоторой точки O равен векторной сумме моментов всех сил относительно той же точки O :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_N.$$

Если к разным точкам тела приложены две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, равные по величине и противоположные по направлению, то их суммарное действие характеризуют моментом пары сил. Момент пары сил равен сумме моментов сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ относительно одной точки O :



$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2] = [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1] - [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_1] = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \mathbf{F}_1] = [\mathbf{r}_{12}, \mathbf{F}_1]$$

(здесь учтено, что $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$; вектор $\mathbf{r}_{12}$ – вектор, соединяющий точки приложения сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$).

Если силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ не только равны по модулю, но и направлены вдоль прямой, соединяющей точки приложения сил, то угол между силой $\mathbf{F}_1$ и радиусом-вектором $\mathbf{r}_{12}$ равен нулю. Поэтому момент такой пары сил равен нулю.

Проекция вектора момента силы на ось z , проходящую через точку O , называется **моментом силы относительно оси**:

$$M_z = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]_z.$$

Момент силы относительно оси является скалярной величиной.

Если на тело действуют несколько сил, которые имеют равнодействующую, то результирующий момент силы относительно оси z , проходящей через точку O , равен проекции результирующего момента всех сил относительно точки O на эту ось.

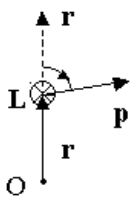
При решении задач удобно использовать другой вариант определения момента силы относительно оси:

$$M_z = F_\tau R,$$

где F_τ – проекция вектора силы на касательную к траектории вращения; R – плечо силы (это кратчайшее расстояние между осью вращения и линией действия силы, равное $r \sin \alpha$).

1.4.2. Момент импульса

Пусть материальная точка имеет импульс $\mathbf{p}$, и её положение относительно точки O определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$, который начинается в выбранной нами точке O и заканчивается на материальной точке, имеющей импульс $\mathbf{p}$. Движение такой точки характеризуют моментом импульса $\mathbf{L}$.



Моментом импульса материальной точки относительно точки O называется векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора $\mathbf{r}$, и вектора импульса $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}].$$

Модуль момента импульса $L = rp \sin \alpha$, где α – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$.

Направление вектора момента импульса определяется по правилу правого винта для векторного произведения.

Момент импульса в СИ измеряется в килограмм на метр в квадрате на секунду ($\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$).

Момент импульса тела относительно точки равен векторной сумме моментов импульсов частиц тела относительно той же точки:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{L}_N.$$

Проекция вектора момента импульса относительно точки O на ось z , проходящую через эту точку, называется **моментом импульса относительно оси**:

$$L_z = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]_z.$$

Момент импульса относительно оси является скалярной величиной.

1.4.3. Связь момента силы и момента импульса

Момент импульса и момент силы связаны между собой. Найдём выражение, связывающее их.

Возьмём производную по времени от выражения, определяющего момент импульса материальной точки относительно точки О:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d[\mathbf{r}, \mathbf{p}]}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p} \right] + \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right].$$

Слагаемое $\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p} \right]$ равно нулю, так как угол между вектором скорости $d\mathbf{r}/dt$ и вектором импульса $\mathbf{p}$ равен нулю.

Сомножитель $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ во втором слагаемом равен силе, действующей на материальную точку (второй закон Ньютона). Поэтому

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}].$$

Но $[\mathbf{r}, \mathbf{F}]$ по определению есть момент силы $\mathbf{F}$ относительно той же точки О. Поэтому

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},$$

т. е. скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту силы, действующему на эту частицу.

Проекция последнего уравнения на ось z выражает связь момента импульса относительно оси z и момента силы относительно той же оси

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

1.4.4. Основной закон динамики вращательного движения

Пусть твёрдое тело вращается относительно неподвижной оси z .

Выразим момент импульса твёрдого тела относительно оси вращения. Для этого представим твёрдое тело как совокупность элементар-

ных масс Δm_i . Момент импульса одной элементарной массы относительно оси z

$$L_{i_z} = r_i p_i = \Delta m_i r_i v_i .$$

Момент импульса тела равен сумме моментов импульсов всех элементарных масс этого тела:

$$L_z = \sum_i L_{i_z} = \sum_i \Delta m_i r_i v_i .$$

Скорость v_i у разных элементарных масс различна, а угловая скорость ω одинакова, $v_i = \omega r_i$, поэтому

$$L_z = \sum_i \Delta m_i r_i v_i = \sum_i \Delta m_i r_i r_i \omega = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega .$$

Поскольку угловая скорость ω всех элементарных масс тела одинакова, её можно вынести за знак суммы:

$$L_z = \omega \sum_i \Delta m_i r_i^2 .$$

Введём обозначение $J_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2$. С учётом этого

$$L_z = J_z \omega .$$

Ранее мы получили, что момент импульса и момент силы связаны следующим образом:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z .$$

Заменив L_z на $J_z \omega$, с учётом того, что J_z с течением времени не изменяется, получаем

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{dJ_z \omega}{dt} = M_z ,$$

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z .$$

Учитывая, что производная угловой скорости по времени равна угловому ускорению ε , получаем $J_z \varepsilon = M_z$.

Полученное выражение имеет название – **основной закон динамики вращательного движения**, поскольку связывает между собой меру внешнего воздействия – момент силы M_z с результатом внешнего воздействия – угловым ускорением ε .

Коэффициент J_z , стоящий в этом уравнении, зависит от массы тела и от того, как она распределена по объёму тела (это видно из определения величины J_z).

Чем меньше J_z , тем большее угловое ускорение получит тело при воздействии момента силы M_z . Это говорит о том, что коэффициент J_z характеризует инертность вращающегося тела. Поэтому J_z называют **моментом инерции тела относительно оси z**.

Знание величины момента инерции тела необходимо для описания вращательного движения. Поэтому обсудим более подробно, что такое момент инерции и как его вычислить.

1.4.5. Момент инерции тела относительно неподвижной оси вращения

Во вращательном движении в качестве меры инертности используется момент инерции (тело одной и той же массы при вращении относительно разных осей обладает разной инертностью, поэтому массой в качестве меры инертности вращающихся тел пользоваться нельзя).

Определение момента инерции

$$J_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

можно прочесть так: момент инерции тела относительно неподвижной оси z равен сумме произведений элементарных масс на квадрат расстояния от оси вращения до данной элементарной массы.

Момент инерции относительно неподвижной оси есть величина скалярная.

В СИ момент инерции измеряется в килограммах на метр в квадрате ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

Из определения следует, что момент инерции – величина аддитивная, т. е. момент инерции системы из нескольких частиц равен сумме моментов инерции каждой из частиц.

На практике вычисление момента инерции производится путём интегрирования:

$$J = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV ,$$

где dm – элементарная масса; dV – элементарный объём (объём, занимаемый элементарной массой); r – расстояние от элементарной массы до оси вращения; ρ – плотность тела в данной точке.

Вычисление этого интеграла в общем случае может быть довольно сложным, но если тело однородно, т.е. плотность тела во всех его точках одинакова, то плотность можно вынести за знак интеграла:

$$J = \rho \int r^2 dV .$$

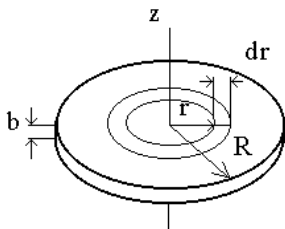
В качестве примера рассмотрим расчёт момента инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр.

Выделим в диске кольцо радиусом r и шириной dr .

Масса этого кольца $dm = \rho dV = \rho b 2\pi r dr$, где b – толщина диска. Тогда момент инерции диска

$$J = \rho \int r^2 dV = 2\pi \rho b \int_0^R r^2 r dr = 2\pi \rho b \frac{R^4}{4} = \frac{m R^2}{2}$$

(здесь учтено, что $\rho b \pi R^2 = m$ – масса диска).

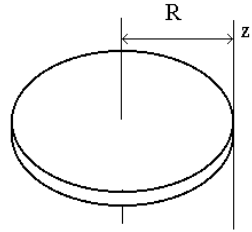


Ещё раз отметим, что момент инерции одного и того же тела относительно разных осей различен (простейший пример: чем больше расстояние от материальной точки до оси вращения, тем больше её момент инерции).

Если этот же диск будет вращаться относительно оси, проходящей не через центр, то вычисление интеграла станет сложнее. Но в ряде случаев от необходимости интегрирования избавляет **теорема Штейнера**: момент инерции тела относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через

центр масс тела параллельно оси вращения, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями: $J = J_0 + ma^2$.

Например, момент инерции диска относительно оси z , перпендикулярной плоскости диска и проходящей на расстоянии R от центра масс тела, равен, по теореме Штейнера, $J = mR^2 / 2 + mR^2 = 3mR^2 / 2$.



1.4.6. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему частиц (тел), на которые действуют как внутренние, так и внешние силы.

Момент импульса i -й частицы будет $\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]$.

Момент импульса системы частиц, равный сумме моментов импульсов всех частиц, принадлежащих системе, можно выразить как

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] .$$

Производная момента импульса системы частиц по времени равна сумме производных моментов импульсов всех частиц, принадлежащих системе, а каждая из этих производных, как было показано ранее, равна сумме моментов всех сил, действующих на i -ю частицу. Поэтому производную момента импульса системы по времени можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d[\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i_{\text{внутр}}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i_{\text{внешн}}} .$$

Суммарный момент внутренних сил равен нулю, поскольку, в соответствии с третьим законом Ньютона, внутренние силы попарно равны по модулю, противоположны по направлению и направлены вдоль одной прямой. Как было отмечено в разделе 1.4.1, момент такой пары сил равен нулю. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i_{\text{внешн}}} ,$$

т. е. момент импульса системы частиц изменяется под действием момента внешних сил.

Если суммарный момент внешних сил равен нулю, то $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$.

Нулю равна производная от константы, следовательно, при $\sum_{i=1}^N M_{i_{\text{внешн}}} = 0$ момент импульса системы частиц постоянен во времени, т. е. $\mathbf{L} = \text{const}$.

Таким образом, момент импульса системы материальных частиц будет постоянным во времени (т. е. сохраняться), если суммарный момент внешних сил равен нулю. Это и есть закон сохранения момента импульса.

Обратите внимание, что момент импульса системы будет сохраняться и в том случае, когда сумма внешних сил отлична от нуля, но суммарный момент внешних сил равен нулю.

1.4.7. Кинетическая энергия вращающегося тела

Представим тело, вращающееся относительно оси z , как совокупность элементарных масс.

Скорость i -й элементарной массы, находящейся на расстоянии r_i от оси вращения $v_i = \omega r_i$.

Её кинетическая энергия

$$W_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий элементарных масс:

$$W = \sum_i W_i = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \frac{J \omega^2}{2},$$

где J – момент инерции тела; ω – угловая скорость вращения тела.

1.4.8. Работа внешних сил при вращении тела вокруг неподвижной оси

Поскольку взаимное расположение частиц твёрдого тела при вращении не изменяется, элементарная работа внешних сил над телом будет равна приращению кинетической энергии этого тела:

$$\delta A = dW$$

или

$$\delta A = d \left(\frac{J_z \omega^2}{2} \right) = J_z \omega d\omega .$$

Но $d\omega = \varepsilon dt$, следовательно,

$$\delta A = J_z \omega \varepsilon dt = M_z \omega dt = M_z d\varphi .$$

Таким образом, элементарная работа, совершаемая при вращении тела относительно неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на элементарное угловое перемещение.

Работа на конечном угловом перемещении равна интегралу от элементарной работы, т. е. $A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi$.

1.4.9. Аналогия между характеристиками поступательного и вращательного движения

Характеристики вращательного и поступательного движения существенно отличаются друг от друга. Так, векторные характеристики поступательного движения являются истинными векторами, а вращательного — псевдовекторами (аксиальными векторами). Векторные характеристики одного и того же свойства материальной частицы направлены по-разному (например, $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$), они измеряются в разных единицах и т. д.

Тем не менее между характеристиками вращательного и поступательного движения существует прямая аналогия (сходство). Это сходство заключается в том, что характеристики поступательного и враща-

тельного движения одного уровня иерархии имеют один и тот же физический смысл⁵.

Ниже перечислены характеристики и законы поступательного и вращательного движения, размещённые на соответствующих уровнях иерархии, построенной на основе физического смысла характеристик поступательного и вращательного движения.

Поступательное движение	Вращательное движение
Мера положения тела	
координаты x, y, z	угловая координата φ
Мера изменения положения тела	
перемещение $d\mathbf{r}$	угловое перемещение $d\varphi$
Мера быстроты изменения положения тела	
скорость поступательного движения $\mathbf{v}$	угловая скорость ω
Мера быстроты изменения скорости	
ускорение $\mathbf{a}$	угловое ускорение ε
Мера внешнего воздействия	
сила $\mathbf{F}$	момент силы $\mathbf{M}$
Мера количества движения	
импульс $\mathbf{p}$	момент импульса $\mathbf{L}$
Мера инертности	
масса m	момент инерции J
Основной закон динамики	
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\mathbf{M} = J\varepsilon$
Кинетическая энергия	
$m\mathbf{v}^2/2$	$J\omega^2/2$
Работа	
$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}$	$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{M} d\varphi$

⁵ Физический смысл характеристики указывает, мерой чего является данная характеристика.

1.5. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В разделе 1.2.5 было показано, что все инерциальные системы отсчёта равноправны, абсолютной, «самой правильной» системы отсчёта не существует. Это означает, что во всех инерциальных системах отсчёта вид уравнений, описывающих поведение рассматриваемого тела или системы тел, абсолютно одинаков.

Такая точка зрения была общепринятой примерно до середины XIX века, поскольку ни одно из известных физике явлений ей не противоречило. Но в 1864 году была издана работа Дж. К. Максвелла «Динамическая теория электромагнитного поля», в которой он раскрыл природу электромагнитных волн. Из работы следовало, что вид уравнений Максвелла, описывающих электромагнитную волну, зависит от выбора системы отсчёта. Это означало, что по виду уравнений, полученных в разных системах отсчёта, можно отличить одну систему отсчёта от другой!

В те годы многие физики полагали, что входящая в уравнения Максвелла скорость распространения электромагнитных волн, равная скорости света в вакууме, есть скорость распространения электромагнитных волн относительно неподвижного «эфира», заполняющего всю Вселенную («эфиром» называли среду, в которой распространяются электромагнитные волны; тогда физики не могли допустить, что волны могут распространяться в пустоте).

Последнее из названных предположений казалось чрезвычайно интересным. Это видно из следующего. Пусть на гладкую поверхность воды опущена лодка. По поверхности воды во все стороны пойдут волны. Они будут удаляться от лодки со скоростью, равной скорости распространения волн в воде. Если лодка начнёт двигаться вперёд, то волна, идущая от носа лодки, будет удаляться от него медленнее, так как лодка будет двигаться в ту же сторону. Следовательно, скорость волны относительно лодки станет меньше⁶. Это означает, что если измерять скорость волны, идущей от лодки, то можно определить, движется ли лодка по воде.

То же самое можно ожидать от световых волн. Измерение скорости света относительно источника световых волн должно показать, движется ли источник относительно эфира.

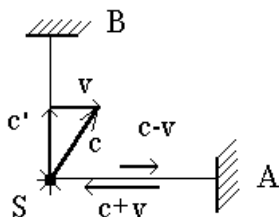
⁶ Скорость волны, идущей от кормы, станет больше, так как лодка от неё удаляется.

Но если это так, то систему отсчёта, покоящуюся относительно эфира, можно отличить от всех остальных инерциальных систем отсчёта. Тогда система отсчёта, связанная с эфиром, становится абсолютной!

Возможность выделить абсолютную систему отсчёта опровергала фундаментальный принцип классической физики – принцип относительности Галилея. Это означает, что возникла возможность совершить революционный переворот в физике. Поэтому ряд учёных занялись экспериментальной проверкой рассмотренного выше предположения.

1.5.1. Опыт Майкельсона–Морли

В конце XIX века было известно, что Земля движется вокруг Солнца со скоростью около 30 км/с.



Экспериментаторы использовали установку, состоящую из источника света и двух зеркал A и B , находящихся на одинаковых расстояниях от источника. Свет от источника шёл к зеркалам, отражался от них и возвращался в точку S .

Пусть к зеркалу A свет идёт параллельно скорости Земли, а к зеркалу B – перпендикулярно ей.

На пути к A свет должен идти со скоростью $c - v$, а от A к S – со скоростью $c + v$, так как вначале источник догоняет световую волну, а затем идёт волне навстречу. Следовательно, время на пути SAS

$$t_{\parallel} = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Луч, идущий от источника света вертикально вверх от зеркала B , не отразится, так как пока луч дойдёт до зеркала, оно переместится вправо. Поэтому отразится тот луч, который идёт под углом к вертикали (см. схему установки), но это означает, что на пути SBS скорость света относительно установки равна $c' = \sqrt{c^2 - v^2}$ и

$$t_{\perp} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

т. е. время, затрачиваемое на пути *SAS*, отличается от времени, затрачиваемого на пути *SBS*.

Точность эксперимента позволяла уверенно измерить разность времён на этих путях. Однако оказалось, что эти времена одинаковы, т. е. $t_{\parallel} - t_{\perp} = 0$.

Этот результат противоречил ожиданиям. Выявить абсолютную систему отсчёта не удалось. Правда, результат внешне противоречил преобразованиям Галилея и тем самым показывал, что они (преобразования) не верны.

Вместо революции в физике эксперимент породил проблему, которую удалось решить А. Эйнштейну.

1.5.2. Постулаты Эйнштейна

Для решения упомянутой выше проблемы Эйнштейну пришлось пересмотреть исходные положения классической физики. В результате он сформулировал два постулата, ставшие основой специальной теории относительности.

Первый постулат распространяет действие принципа относительности Галилея на любые (не только на механические) физические процессы: все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчёта; все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны по отношению к инерциальным системам отсчёта.

Другими словами, все инерциальные системы отсчёта эквивалентны по своим физическим свойствам, абсолютной системы отсчёта не существует.

Второй постулат гласит, что скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях. Это означает, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчёта.

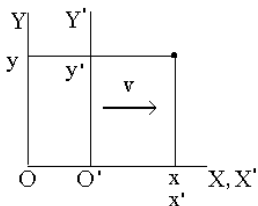
В соответствии с преобразованиями Галилея перемещение одного и того же светового импульса, измеренное наблюдателями из разных систем отсчёта, различно (см. раздел. 1.1.6). По классическим представлениям время во всех системах отсчёта течёт одинаково, т. е. $dt = dt'$, потому скорости этого светового импульса в разных системах отсчёта различны: $c = \frac{dr}{dt}$, $c' = \frac{dr'}{dt'}$.

Эйнштейн допустил, что для наблюдателей, находящихся в разных системах отсчёта, один и тот же световой импульс не только совершит разные перемещения dr и dr' , но совершит их за разные интервалы времени dt и dt' , причём отношение этих величин для всех наблюдателей одинаково:

$$c = \frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt'}.$$

1.5.3. Преобразования Лоренца

Как отмечено в предыдущем разделе, при переходе к другой инерциальной системе отсчёта координаты x , y , z и время t становятся другими: x' , y' , z' , t' . Преобразования Лоренца показывают, как именно связаны координаты и время в разных системах отсчёта между собой.



Пусть имеются две инерциальные системы отсчёта K и K' , которые отвечают следующим требованиям:

1) система отсчёта $K'(X'Y')$ движется равномерно и прямолинейно относительно системы $K(XY)$, причём оси координат X и X' совпадают, скорость системы отсчёта K' относительно системы K равна V и направлена параллельно оси X ;

2) в момент времени $t = t' = 0$ начала координат совпадали.

Нас интересует ответ на вопрос: если в системе отсчёта $K'Y$ в момент t в точке с координатами x , y произошло событие, то каковы координаты этого события в движущейся относительно неё системе отсчёта?

Ответить на этот вопрос можно следующим образом.

Координаты y и y' должны быть равны между собой, так как в противном случае можно было бы отличить одну инерциальную систему отсчёта от другой.

Поэтому $y = y'$.

Предположим, что координаты x и x' связаны следующим образом:

$$x = \gamma(x' + vt'),$$

$$x' = \gamma(x - vt).$$

Предположим также, что в момент $t = t' = 0$ в точке О вспыхнула лампочка.

Поскольку скорость света в обеих системах отсчёта одинакова, поэтому расстояния, пройденные светом за время t , в каждой из систем отсчёта будут равны соответственно:

$$x = ct,$$

$$x' = ct'.$$

Заменяя x и x' на ct и ct' , получаем

$$ct = \gamma(ct' + vt')$$

$$ct' = \gamma(ct - vt).$$

Перемножив уравнения, получим

$$c^2 tt' = \gamma^2 (c^2 tt' - v^2 tt').$$

После сокращения на tt' получим

$$c^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2)$$

и

$$\gamma = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Теперь преобразования координат x и x' принимают следующий вид:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

В выражении $x = \gamma(x' + vt')$ заменим x' на $\gamma(x - vt)$:

$$x = \gamma(\gamma(x - vt) + vt').$$

Из последнего уравнения выразим t' :

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Действуя аналогично, можно получить

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, преобразования координат приняли окончательный вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & y &= y' & z &= z', & t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & y' &= y & z' &= z, & t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Эти преобразования были впервые получены в 1895 году нидерландским физиком Хендриком Антоном Лоренцем, который пытался определить, при каких условиях уравнения Максвелла будут одинаково выглядеть во всех инерциальных системах отсчёта.

Эйнштейн же понял, что значение полученных преобразований гораздо шире. Они показывают, как связаны между собой координаты и время, измеренные в разных инерциальных системах отсчёта.

Важной особенностью преобразований Лоренца является то, что в преобразованиях «перемешаны» координаты и время. Это говорит о том, что пространство и время едины.

Обратите внимание на то, что при скоростях V , намного меньших скорости света в вакууме c , преобразования Лоренца принимают вид преобразований Галилея. Поэтому преобразования Лоренца не опровергают правильность представлений Галилея о свойствах пространства и времени. Просто при низких по сравнению со скоростью света скоростях эффекты, открытые Эйнштейном, обнаружить невозможно.

Обратите также внимание и на то, что при $V > c$ преобразования Лоренца теряют физический смысл (выражение под стоящим в знаменателе корнем при $V > c$ становится отрицательным). Это соответствует утверждению о предельности скорости света в вакууме. Ни одно тело не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме.

1.5.4. Следствия из преобразований Лоренца

1.5.4.1. Сокращение длины движущегося тела

Пусть стержень длиной l_0 , параллельный оси X' штрихованной системы отсчёта K' , неподвижен относительно её. Следовательно, стержень движется со скоростью V относительно нештрихованной системы отсчёта K .

Длина стержня в системе K' равна разности координат концов стержня в этой системе отсчёта: $l_0 = x'_2 - x'_1$. Отметим, что длину стержня, неподвижного относительно системы отсчёта, называют «собственная длина».

Для того чтобы узнать длину стержня в нештрихованной системе отсчёта K , необходимо одновременно зафиксировать координаты концов стержня в этой системе отсчёта. Очевидно, что длина стержня l в нештрихованной системе отсчёта будет равна разности этих координат.

Используя преобразования Лоренца, запишем:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Из этого выражения следует, что длина движущегося стержня всегда меньше, чем длина этого же стержня в неподвижном состоянии, т. е. собственной длины стержня:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Обратите внимание на то, что сокращается длина стержня, параллельного направлению движения.

Длина стержня, перпендикулярного направлению движения, не изменяется, так как в преобразованиях Лоренца показано, что $y = y'$ и $z = z'$.

Таким образом, сокращаются только продольные, т. е. параллельные скорости движения, размеры. Поперечные размеры не изменяются.

1.5.4.2. Замедление хода движущихся часов

Пусть в одной и той же точке x' штрихованной системы отсчёта в моменты t'_1 и t'_2 последовательно происходят два события. Моменты t'_1 и t'_2 фиксируются часами, неподвижными в этой системе отсчёта.

Длительность временного интервала между событиями в нештрихованной системе, измеренная неподвижными в этой системе часами, будет равна

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, длительность временного интервала между одними и теми же событиями, измеренная часами, находящимися в разных инерциальных системах отсчёта, будет различной.

Временной интервал между событиями Δt , измеренный неподвижными относительно наблюдателя часами, всегда больше, чем временной интервал Δt_0 , измеренный движущимися относительно его часами. Следовательно, движущиеся относительно наблюдателя часы идут медленнее, чем неподвижные.

Эффект замедления времени, как и эффект сокращения длины, симметричен: для любого наблюдателя движущиеся относительно его часы будут идти медленнее, чем неподвижные.

Время Δt_0 , измеренное часами, неподвижными в некоторой системе отсчёта, называется «собственное время».

1.5.4.3. Понятие одновременности

Пусть в нештрихованной системе отсчёта происходят события $A(x_1, y_1, t_1)$ и $B(x_2, y_2, t_2)$. Найдём интервал времени между ними в системе отсчёта, движущейся относительно нештрихованной.

В соответствии с преобразованиями Лоренца

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1) \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Если $t_2 - t_1 = 0$, т. е. события в нештрихованной системе отсчёта происходят одновременно, то вполне возможно, что $t'_2 - t'_1 \neq 0$, т. е. эти же события в системе отсчёта, движущейся относительно нештрихованной, могут быть не одновременны.

Обратите внимание, при $t_2 - t_1 > 0$ временной интервал $t'_2 - t'_1$ может быть как больше, так и меньше нуля. Это означает, что может меняться не только интервал времени между событиями, но даже порядок следования событий! Правда, это не может произойти в том случае, если события связаны причинно-следственной связью, так как причина не может произойти позже следствия, вызванного этой причиной.

1.5.5. Интервал

Открытие теории относительности перевернуло представления об окружающем нас мире. Оказывается наблюдатели, находящиеся в разных инерциальных системах отсчёта, измеряя длину одного и того же тела, получают разные результаты. Два события, происходящие на определённом расстоянии друг от друга и через определённый интервал времени, для наблюдателя из другой инерциальной системы отсчёта будут происходить на другом расстоянии и через другой интервал времени. Более того, событие, которое произошло первым, для другого наблюдателя может произойти вторым!

Но в специальной теории относительности есть и инвариантные⁷ величины. Одна из них – скорость света в вакууме. Другой инвариантной величиной является **интервал**.

Интервал S_{12} между событиями 1 и 2 есть величина, определяемая выражением

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2,$$

где t_{12} – промежуток времени между событиями; l_{12} – расстояние между точками, где происходят события.

Попробуем вычислить интервал между двумя событиями, пространственные и временные координаты которых определены наблюдателями из разных систем отсчёта:

$$c^2 t_{12}^2 - x_{12}^2 = c^2 \frac{\left(t_{12} - x_{12} \frac{v}{c^2} \right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{(x_{12} - vt_{12})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 t_{12}^2 - x_{12}^2.$$

Таким образом, интервал между двумя событиями действительно одинаков, т. е. инвариантен в различных инерциальных системах отсчёта. Поэтому утверждение «события разделены интервалом S_{12} » абсолютно, оно справедливо во всех инерциальных системах отсчёта.

⁷ Так называют те величины, которые имеют одинаковое значение во всех инерциальных системах отсчёта.

По своей сути интервал есть расстояние между событиями. Только это расстояние не в привычном трёхмерном пространстве, а в четырёхмерном, координатами которого являются три пространственные координаты и время.

1.5.6. Релятивистская масса Релятивистский импульс

В процессе работы над специальной теорией относительности Альберт Эйнштейн обнаружил, что один из фундаментальных законов классической физики – закон сохранения импульса – не выполняется. Точнее, если в одной системе отсчёта суммарный импульс тел системы сохраняется, то в другой системе отсчёта импульс той же системы тел может не сохраняться.

Позже Эйнштейн показал, что если изменить определение классического импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, то закон сохранения импульса будет выполняться и в рамках теории относительности.

Поскольку Эйнштейн исходил из того, что специальная теория относительности не должна опровергать фундаментальные законы классической механики, он предложил заменить классическое определение импульса на новое:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Релятивистский импульс зависит от скорости движения тела относительно наблюдателя и нелинейно увеличивается с её ростом.

Это можно трактовать как зависимость массы тела от его скорости. В таком случае масса движущегося тела равна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 – масса покоя (масса тела при нулевой скорости).

Масса покоя является релятивистски инвариантной – она одинакова во всех инерциальных системах отсчёта, в которых скорость тела равна нулю.

Обратите внимание, что если скорость тела увеличить до скорости света, то его масса возрастает до бесконечности. Поэтому ни одна материальная частица с массой покоя $m_0 > 0$ не может двигаться со скоростью света.

В настоящее время зависимость массы тела от скорости его движения доказана во множестве экспериментов и не подвергается сомнению.

1.5.7. Основное уравнение релятивистской динамики

Основное уравнение релятивистской динамики (в классической физике это второй закон Ньютона) внешне выглядит так же, как и в классической: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Но вместо классического импульса в нём использован релятивистский. Поэтому его можно переписать в такой форме:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \right).$$

Это выражение и называют основным уравнением релятивистской динамики.

Важно отметить, что из последнего выражения следует (анализ выражения здесь не рассматривается): одно и то же внешнее воздействие в разных инерциальных системах отсчёта будет характеризоваться различными по модулю и направлению силами. Другими словами, сила в теории относительности – величина неинвариантная.

Кроме этого в общем случае сила и ускорение не совпадают по направлению. Чтобы убедиться в этом, возьмём производную по времени, имеющуюся в правой части основного уравнения релятивистской динамики:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \right) = \frac{d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)}{dt} \mathbf{v} + \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Обратите внимание, первое слагаемое полученной суммы направлено параллельно скорости частицы, а второе, в которое собственно и входит ускорение $d\mathbf{v}/dt$, – параллельно ускорению. В то же время сумма этих двух векторов равна силе, приложенной к частице.

Таким образом, ускорение параллельно силе лишь в тех случаях, когда складываемые векторы параллельны между собой⁸. В остальных случаях их направления не совпадают.

1.5.8. Кинетическая энергия релятивистской частицы

Кинетическая энергия в теории относительности вводится точно так же, как и в классической динамике – это величина, приращение которой равно работе силы (сил), действующей на частицу:

$$dW = \mathbf{F}d\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{v}dt.$$

В соответствии с основным уравнением релятивистской динамики

$$\mathbf{F}dt = d(m\mathbf{v}) = dm\mathbf{v} + m d\mathbf{v}.$$

Переписав с учётом последнего выражения определение кинетической энергии, получим

$$dW = \mathbf{v}(dm\mathbf{v} + m d\mathbf{v}) = v^2 dm + m v dv.$$

Возведём формулу зависимости релятивистской массы от скорости в квадрат и выполним простейшие преобразования:

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2.$$

Дифференциал от этого выражения равен

$$2mc^2 dm = 2mv^2 dm + 2m^2 v dv.^9$$

Разделим полученное выражение на $2m$:

$$c^2 dm = v^2 dm + m v dv.$$

⁸ Это соответствует двум случаям: когда сила перпендикулярна и когда сила параллельна скорости частицы.

⁹ Здесь учтено, что m_0 и c – константы.

Обратите внимание, правая часть полученного выражения и правая часть определения кинетической энергии совпадают. Следовательно,

$$c^2 dm = dW.$$

Таким образом, приращение кинетической энергии частицы прямо пропорционально приращению релятивистской массы частицы.

Кинетическую энергию частицы, скорость которой возросла от нуля до скорости V , можно получить, взяв интеграл от dW в пределах от m_0 (массы покоя) до m :

$$W = (m - m_0)c^2.$$

Окончательно, используя выражение релятивистской массы, получим

$$W = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

Это выражение не похоже на классическое. Но можно показать, что при малых скоростях это выражение переходит в привычное, где

$$W = \frac{mv^2}{2}.$$

1.5.9. Взаимосвязь массы и энергии

В предыдущем разделе было получено, что приращение кинетической энергии тела связано с возрастанием его массы. Но кинетическая энергия не единственный и не исключительный вид энергии. Поэтому можно предположить, что сообщение телу **любой** энергии должно вызывать изменение его массы.

В предыдущем разделе показано, что кинетическая энергия тела W , имеющего скорость V , равна $(m - m_0)c^2$.

Раскрывая скобки и выполнив элементарные преобразования, получаем

$$W = mc^2 - m_0c^2.$$

Кинетическая энергия тела в последнем выражении представлена как разность двух величин. Что они собой представляют?

Очевидно, что это какие-то энергии, так как размерности кинетической энергии и этих величин совпадают.

Второй член этой разности содержит массу покоя тела. Поэтому можно предположить, что это энергия покоящегося тела. Её называют **энергией покоя**:

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Логично предположить, что сумма энергии движущегося тела (кинетической энергии) и энергии покоящегося тела есть полная энергия тела. Поэтому первый член в выражении $mc^2 = W + m_0 c^2$ есть **полная энергия** движущегося тела E :

$$E = mc^2.$$

Полученный результат очень важен – масса тела и его полная энергия связаны между собой. Более того, масса есть не только мера инертности тела, но и мера энергосодержания тела. Всякое увеличение энергии тела увеличивает массу тела и, наоборот, всякое уменьшение энергии тела вызывает уменьшение его массы. Например, Солнце, испускающее излучение за счёт внутренней энергии, за каждую секунду теряет примерно $4 \cdot 10^9$ кг. В повседневной жизни мы не замечаем увеличения массы нагретого тела, потому что сообщённая нагретому телу дополнительная энергия составляет очень незначительную долю полной энергии тела.

1.5.10. Связь энергии и импульса частицы

Поскольку полная энергия тела и его импульс зависят от скорости, поэтому они должны быть связаны. Найдём эту связь.

Выразим разность квадрата полной энергии и квадрата произведения импульса тела на скорость света через массу движущегося тела, массу покоя, скорость тела и скорость света:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2 c^4.$$

Полученное выражение довольно интересно. Обратите внимание, в правой части выражения отсутствует скорость тела, а имеющиеся

величины – масса покоя и скорость света в вакууме являются релятивистскими инвариантами. Значит, это соотношение выполняется во всех инерциальных системах отсчёта, т. е. оно инвариантно по отношению к системе отсчёта.

Несмотря на то что скорость одного и того же тела в разных системах отсчёта различна и соответственно различны импульс и кинетическая энергия тела, разность квадрата полной энергии тела и произведения квадрата импульса тела на квадрат скорости света в вакууме во всех инерциальных системах отсчёта одинакова!

Кроме этого полученное выражение показывает, как связаны между собой полная энергия тела E и его импульс p :

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

1.5.11. Инварианты теории относительности

Привычные представления об окружающем мире основаны на механике Ньютона. Эйнштейн показал, что классический подход верен при скоростях, значительно меньших скорости света в вакууме. При высоких скоростях они становятся непригодными. Более адекватны представления, основанные на постулатах Эйнштейна, т. е. на специальной теории относительности.

Как отмечено в разделе 1.5.5, многие инвариантные по классическим представлениям характеристики оказываются зависящими от того, в какой инерциальной системе отсчёта они измеряются. Создаётся впечатление, что мир становится неопределённым – одно и то же тело для разных наблюдателей имеет разную длину, массу; одни и те же часы для разных наблюдателей идут по-разному.

Но тем не менее мир остаётся вполне определённым. В нём всё-таки существуют инвариантные характеристики. Может быть, они не так привычны, но они есть: это скорость света в вакууме, собственная длина, масса покоя, собственное время, интервал между событиями.

Часть II

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатика – раздел физики, изучающий взаимодействие неподвижных зарядов.

2.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ. СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ

Явления, связанные с электрическими зарядами, известны людям с древних времён. Достоверно известно, что ещё в VI веке до нашей эры греческий учёный Фалес Милетский открыл эффект электризации янтаря¹⁰: если потереть тканью янтарь, то он притягивает к себе лёгкие предметы.

Однако изучение свойств зарядов началось лишь в XVII веке. В 1672 году немецкий учёный Герике описал устройство созданной им «электрической машины», позволяющей получать довольно большие заряды. В этой же работе он сообщил об открытом им явлении – лёгкие тела могут не только притягиваться наэлектризованным телом, но и отталкиваться.

В 1734 году французский учёный Дюфе открыл существование двух видов электрических зарядов – положительных и отрицательных. Он же установил, что одноимённые заряды отталкиваются, а разноимённые – притягиваются.

Петербургский академик Франц Эпинус в середине XVIII века открыл закон сохранения электрического заряда: алгебраическая сумма зарядов замкнутой¹¹ системы тел ни при каких условиях не изменяется.

¹⁰ Янтарь, по-гречески, – «электрон», отсюда и произошло слово **электричество**.

¹¹ Под замкнутой системой здесь понимается система, не обменивающаяся зарядами с внешними телами.

Более поздние эксперименты позволили обнаружить и другие свойства зарядов:

- электрический заряд релятивистски инвариантен, т. е. его величина не зависит от скорости движения заряда;
- наименьшим электрическим зарядом (элементарным зарядом) обладают электроны и протоны; заряд электрона считают отрицательным, протона – положительным; модули заряда электрона и протона точно равны между собой.

Количество электронов и протонов в неионизированном атоме одинаково, поэтому суммарный заряд такого атома всегда равен нулю. Следовательно, и суммарный заряд всех атомов вещества равен нулю.

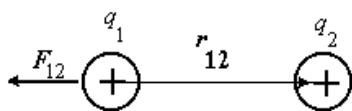
Для того чтобы наэлектризовать вещество, необходимо сообщить ему (или удалить) некоторое количество элементарных зарядов одного знака (например, электронов). Этим обусловлено ещё одно свойство зарядов: электрический заряд дискретен, т. е. заряд тел изменяется неделимыми порциями, равными элементарному заряду: $q = nq_e$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ – целое число; q_e – элементарный заряд.

Заряд электрона равен $-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд протона $+1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Заряд элементарных частиц является их неотъемлемым свойством (так же, как, например, инертность).

2.2. ЗАКОН КУЛОНА

Шарль Кулон в XVIII веке занимался изучением взаимодействия электрических зарядов.



В качестве зарядов он использовал наэлектризованные шарики, размеры которых были малы по сравнению с расстоянием между ними. Такие заряды называются точечными.

В результате серии экспериментов он обнаружил, что сила электростатического взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорциональна произведению величин зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами и направлена вдоль прямой, соединяющей точечные заряды:

$$F_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12},$$

где $\mathbf{F}_{12}$ – сила, действующая на первый заряд со стороны второго; q_1 , q_2 – величины первого и второго зарядов; r_{12} – расстояние между зарядами; $\mathbf{r}_{12}$ – вектор, соединяющий первый заряд со вторым; модуль этого вектора равен расстоянию между точечными зарядами r_{12} ; ϵ_0 – электрическая постоянная; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)^{12}$; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся заряды.

Закон Кулона записан в форме, соответствующей международной системе единиц (СИ). Это значит, что величина зарядов измеряется в кулонах (обозначается Кл), расстояние – в метрах, а сила – в ньютонах.

2.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НАПРЯЖЁННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В соответствии с законом Кулона электрические заряды действуют друг на друга при любом расстоянии между ними.

Это объясняется тем, что каждый заряд создаёт вокруг себя электрическое поле. Любой другой заряд, помещённый в электрическое поле, взаимодействует с ним, вследствие чего на заряд действует кулоновская сила.

Величина кулоновской силы, действующей на заряд, зависит от электрического поля. Чем сильнее поле, тем больше сила.

Но как количественно охарактеризовать электрическое поле?

Ввести такую характеристику можно следующим образом.

Пусть в некоторую точку электрического поля мы поочерёдно помещаем разные заряды и измеряем силу, действующую на них:

$\mathbf{F}_1$	$\mathbf{F}_2$	$\mathbf{F}_3 \dots$	$\mathbf{F}_n$
q_1	q_2	$q_3 \dots$	q_n

Здесь $\mathbf{F}_1$ – сила, действовавшая на заряд q_1 , помещённый в интересующую нас точку поля; $\mathbf{F}_2$ – сила, действовавшая на заряд q_2 , помещённый в ту же точку, и т. д.

¹² Единицу измерения электрической постоянной часто записывают в ином виде: $\text{Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2) = \text{Ф/м}$, здесь Ф – единица измерения электрической ёмкости (читается – «фарад»).

Поскольку заряды разные, то и силы будут различны по величине. Но оказывается, что отношение силы, действующей на данный заряд, к его величине не зависит от величины этого заряда:

$$\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} = \dots = \frac{F_n}{q_n} = E.$$

Величина E , равная отношению силы, действующей на заряд, помещённый в заданную точку электрического поля (пробный заряд), к величине этого заряда, называется **напряжённостью**: $E = \frac{F}{q}$.

Можно также сказать, что напряжённость численно равна силе, действующей на единичный положительный пробный заряд.

Напряжённость является векторной величиной. Направление вектора напряжённости совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд.

Если в качестве пробного используется отрицательный заряд, то вектор напряжённости будет противоположен направлению силы, действующей на отрицательный пробный заряд.

В СИ напряжённость измеряется, как это видно из определения, в ньютонах на кулон (Н/Кл = В/м)¹³.

Напряжённость является силовой характеристикой электрического поля¹⁴, поскольку определяет силу, действующую на заряд, помещённый в данную точку электрического поля.

Следует обратить внимание на одну важную деталь.

Пробный заряд должен быть малым по величине. Но можно ли считать малым заряд, например в 0,1 Кл? или 0,01 Кл?

Критерием малости пробного заряда является влияние этого заряда на заряды, создающие исследуемое электрическое поле.

Пробный заряд мал, если его появление в электрическом поле не вызывает изменения положения зарядов, создающих электрическое поле.

Найдём напряжённость поля, созданного точечным зарядом q . Для этого на расстоянии r от заряда q поместим пробный заряд q_0 . Тогда сила, действующая на пробный заряд, в соответствии с законом Кулона равна

¹³ Размерность вольт на метр [В/м] будет получена позже.

¹⁴ В этом заключается физический смысл напряженности.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{qq_0}{r^3} \mathbf{r}.$$

Отсюда напряжённость поля точечного заряда q равна

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}.$$

Таким образом, напряжённость поля, созданного точечным зарядом q в интересующей нас точке, прямо пропорциональна величине заряда, создающего поле, и обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда до интересующей нас точки.

Вектор напряжённости поля точечного заряда, как это видно из последнего выражения, совпадает с направлением вектора $\mathbf{r}$, если заряд q положителен, и противоположен ему, если заряд q отрицателен.

Другими словами, если точечный заряд, создающий поле, положителен, то векторы $\mathbf{E}$ направлены по радиальным прямым от заряда в бесконечность. Если же заряд отрицателен, векторы $\mathbf{E}$ направлены в противоположную сторону.

Зная напряжённость электрического поля в нужной точке, легко рассчитать силу, которая будет действовать на заряд, помещённый в эту точку: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – напряжённость электрического поля в точке расположения заряда q (обратите внимание, в последнем выражении q есть заряд, помещённый в интересующую нас точку поля, созданного другим зарядом).

2.4. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Закон Кулона описывает взаимодействие двух точечных зарядов. Однако взаимодействовать одновременно могут и три, и более зарядов. Как описать их взаимодействие в этом случае?

Экспериментально доказано, что взаимодействие двух точечных зарядов не зависит от наличия третьего заряда. Отсюда следует, что если необходимо найти силу $\mathbf{F}$, действующую на заряд q со стороны зарядов $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$, достаточно рассчитать силу $\mathbf{F}_1$, действующую на заряд q со стороны заряда q_1 , $\mathbf{F}_2$ – со стороны заряда q_2 и т. д. Затем найти их векторную сумму:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_i^n \mathbf{F}_i.$$

Другими словами, результат взаимодействия заряда с несколькими другими зарядами является результатом наложения (суперпозиции) взаимодействий заряда q с каждым из зарядов $q_1, \dots, q_n$ в отдельности.

Поэтому сила, действующая на заряд со стороны нескольких других зарядов, равна векторной сумме всех сил, действующих на интересующий нас заряд со стороны каждого из окружающих его зарядов в отдельности.

Это выражение представляет собой одну из возможных формулировок принципа суперпозиции.

Выражение для расчёта силы $\mathbf{F}$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} q\mathbf{E} &= q\mathbf{E}_1 + q\mathbf{E}_2 + q\mathbf{E}_3 + \dots + q\mathbf{E}_n = \\ &= q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n) = q \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i, \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}_1$ – напряжённость поля, созданного зарядом q_1 в точке расположения заряда q ; $\mathbf{E}_2$ – напряжённость поля, созданного там же вторым зарядом; $\mathbf{E}_i$ – напряжённость поля, созданного i -м зарядом в точке расположения заряда q .

Сокращая q , получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_i \mathbf{E}_i.$$

Таким образом, напряжённость поля, созданного несколькими зарядами в интересующей нас точке, равна векторной сумме напряжённостей, созданных каждым из зарядов в этой точке.

Данное выражение представляет собой принцип суперпозиции для вектора напряжённости электрического поля.

В ряде случаев поле создаётся не точечными, а так называемыми распределёнными зарядами, например, заряженной нитью.

В таких ситуациях распределённый заряд делят на малые порции dq_i , после чего рассчитывают напряжённость поля, используя принцип суперпозиции: $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i$, где $\mathbf{r}_i$ – вектор, соединяющий заряд dq_i с интересующей нас точкой поля; r_i – модуль вектора $\mathbf{r}_i$.

Учитывая, что dq_i является малой величиной, суммирование целесообразно заменить интегрированием:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \mathbf{r}.$$

Величина dq может быть выражена следующим образом:

– если заряд распределён по линии, то $dq = \tau dl$, где τ – линейная плотность заряда (это заряд единицы длины заряженной нити:

$$\tau = \frac{dq}{dl});$$

– если заряд распределён по поверхности, то $dq = \sigma ds$, где σ – поверхностная плотность заряда (это заряд единицы площади заряженной поверхности:

$$\sigma = \frac{dq}{ds});$$

– если заряд распределён по объёму, то $dq = \rho dV$, где ρ – объёмная плотность заряда (это заряд единицы объёма заряженного тела:

$$\rho = \frac{dq}{dV}).$$

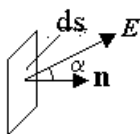
Важно отметить, что принцип суперпозиции полей справедлив для сред, свойства которых не зависят от величины напряжённости электрического поля. Например, в вакууме поле, созданное несколькими зарядами, равно сумме полей, созданных каждым из зарядов в отдельности. Для сегнетоэлектриков это утверждение неверно, так как их электрические свойства очень сильно зависят от напряжённости поля в сегнетоэлектрике.

2.5. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЁННОСТИ

В ряде разделов курса общей физики рассматриваются векторные поля (например, электростатическое поле, магнитное поле).

В описании таких полей часто используют понятие потока вектора через некоторую поверхность. Рассмотрим это понятие на примере потока вектора напряжённости электростатического поля.

Пусть в некоторой области пространства существует электрическое поле. Выберем в этом поле элементарную площадку ds . Пусть нормаль



к этой площадке $\mathbf{n}$ образует угол α с вектором напряжённости электрического поля (модуль вектора $n = 1$).

Потоком вектора напряжённости электрического поля через эту площадку называется величина, равная

$$d\Phi = \mathbf{E} \mathbf{n} ds = E ds \cos \alpha,$$

где $d\Phi$ – элементарный поток вектора напряжённости; $\mathbf{E}$ – вектор напряжённости поля в пределах бесконечно малой площадки площадью ds .

Произведение $\mathbf{E} \mathbf{n}$ является скалярным, поэтому поток вектора напряжённости является скалярной величиной.

Произведение $\mathbf{n} ds$ можно заменить на вектор $d\mathbf{s}$, который направлен перпендикулярно плоскости площадки; модуль вектора $d\mathbf{s}$ равен площади элементарной площадки.

Поток напряжённости через конечную площадь s равен $\Phi = \int_s \mathbf{E} \mathbf{n} ds$.

В зависимости от величины угла между нормалью к площадке и вектором $\mathbf{E}$ поток может быть положительным и отрицательным. Если угол между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$ острый, то поток положителен, если тупой – отрицателен.

Обратите внимание на то, что направление вектора $\mathbf{n}$ выбирается перед началом решения задачи (перпендикуляр к поверхности можно направить в две взаимно противоположные стороны). Поэтому знак потока вектора напряжённости определяется выбором направления вектора $\mathbf{n}$.

Если необходимо рассчитать поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность, то вектор $\mathbf{n}$ принято направлять наружу от поверхности. Поток в этом случае равен $\Phi = \oint_s \mathbf{E} \mathbf{n} ds$, т. е. интеграл берётся по замкнутой поверхности s .

При этом поток через замкнутую поверхность положителен, если направления $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{s}$ совпадают, и отрицателен, если они противоположны.

В СИ поток вектора напряжённости измеряется в ньютонах, умноженных на квадратный метр и деленных на кулон ($\text{В} \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}$).

2.6. ТЕОРЕМА ГАУССА

Теорема Гаусса – основная теорема электростатики. Она устанавливает связь между потоком вектора напряжённости через замкнутую поверхность и суммарным зарядом, охваченным этой поверхностью.

Рассмотрим эту теорему.

Пусть электрическое поле создано положительным точечным зарядом q .

Найдём поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность, охватывающую этот заряд.

В качестве поверхности выберем сферу радиусом r , центр которой совпадает с зарядом q .

Будем считать, что векторы $\mathbf{n}$ во всех точках замкнутой поверхности направлены от центра сферы.

Поскольку заряд, создающий поле, положителен и расположен в центре сферы, то угол между вектором $\mathbf{E}$ и вектором $\mathbf{n}$ во всех точках поверхности равен нулю.

Поэтому поток вектора напряжённости через элементарную поверхность ds будет равен $\mathbf{E} \mathbf{n} ds = E \cos \alpha ds = E \cos 0 ds = E ds$.

Другими словами, в рассматриваемой ситуации скалярное произведение вектора напряжённости электростатического поля на вектор элементарной поверхности равен произведению модулей этих векторов.

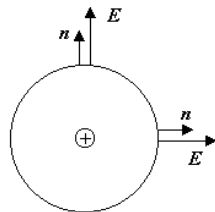
Напряжённость поля, созданного точечным за-

рядом, равна $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$.

Поскольку заряд расположен в центре сферической поверхности, расстояние от заряда до поверхности во всех её точках одинаково и равно r . Следовательно, модуль вектора напряжённости во всех точках сферической поверхности одинаков: $E = \text{const}$.

Константу можно вынести за знак интеграла, поэтому поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность в данном случае равен $\oint E ds = E \oint ds$.

Интеграл от элементарных площадей поверхности s , взятый по всей поверхности, равен площади этой поверхности s . В данном случае поверхность является сферой и, значит, площадь $s = 4\pi r^2$.



Таким образом, поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность в данном случае равен $\oint_s \mathbf{E} d\mathbf{s} = E 4\pi r^2$.

Подставив выражение для расчёта напряжённости, получаем

$$\oint_s \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Следовательно, поток вектора через замкнутую сферическую поверхность, в центре которой расположен точечный заряд q , равен отношению величины заряда к электрической постоянной.

Можно показать, что поток вектора напряжённости поля точечного заряда через замкнутую поверхность будет равен $\frac{q}{\epsilon_0}$ и в том случае, когда заряд находится не в центре сферической поверхности.

Более того, поток будет таким же, даже если поверхность будет иметь любую другую форму.

Если поверхность охватывает несколько зарядов q_i , поток каждого из зарядов через замкнутую поверхность будет равен $\oint_s \mathbf{E}_i d\mathbf{s} = \frac{q_i}{\epsilon_0}$.

Суммарный поток, созданный всеми зарядами, будет равен

$$\sum_i \oint_s \mathbf{E}_i d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

Меняя последовательность суммирования и интегрирования и учитывая, что в соответствии с принципом суперпозиции $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$, полу-

чаем $\oint_s \sum_i \mathbf{E}_i d\mathbf{s} = \oint_s \mathbf{E} d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$, где $\mathbf{E}$ – вектор напряжённости поля, созданного всеми зарядами, охваченными замкнутой поверхностью.

Итак, проведённый анализ позволил получить следующее соотношение:

$$\oint_s \mathbf{E} d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

Это соотношение имеет универсальный характер и называется теоремой Гаусса: поток вектора напряжённости электрического поля через

замкнутую поверхность равен отношению алгебраической суммы зарядов, охваченных этой поверхностью, к электрической постоянной.

Обратите внимание, в выражении теоремы Гаусса отсутствуют характеристики положения зарядов q_i .

Это означает, что поток вектора напряжённости не зависит от того, как расположены заряды, охваченные замкнутой поверхностью.

Более того, поток вектора напряжённости не изменится, если изменится взаимное расположение зарядов, охваченных поверхностью.

Практическое значение теоремы Гаусса состоит в том, что с её помощью значительно упрощается расчёт полей, созданных симметричными распределениями зарядов.

Суть теоретического значения теоремы Гаусса заключается в том, что она указывает на источник электростатического поля.

2.7. ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННОСТИ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ГАУССА

Рассмотрим несколько примеров расчёта электростатических полей с помощью теоремы Гаусса.

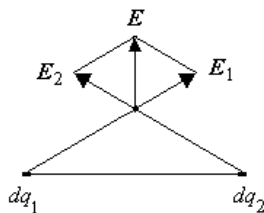
2.7.1. Поле бесконечной равномерно заряженной прямолинейной нити

Рассмотрим равномерно заряженную бесконечно длинную нить. Линейная плотность заряда равна τ .

Заряд, равномерно распределённый по нити, обладает симметрией – он симметричен относительно оси.

Нить имеет бесконечную длину, поэтому любому элементарному заряду dq_1 можно сопоставить другой элементарный заряд dq_2 , расположенный симметрично относительно некоторой точки в электростатическом поле.

Поскольку расстояние от элементарных зарядов до этой точки одинаково, модули напряжённостей E_1 и E_2 одинаковы. Поэтому результирующая напряжённость $E = E_1 + E_2$ направлена перпендикулярно нити (см. рисунок).



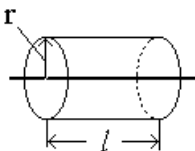
Очевидно, что и в других точках, расположенных на таком же расстоянии от нити, напряжённость будет иметь такую же величину и направление.

Элементарные заряды и точка в поле были выбраны случайно, поэтому вывод справедлив как для всех остальных элементарных зарядов, так и для всех точек поля.

Это означает, что электрическое поле, созданное заряженной нитью, симметрично относительно оси нити. Но это, в свою очередь, означает, что симметрия поля тождественна симметрии заряда, создающего поле!

Полученный вывод очень важен. Благодаря ему стало возможно предсказать некоторые особенности рассчитываемого поля до начала расчёта.

Итак, векторы напряжённости во всех точках окружающего пространства перпендикулярны нити и модули напряжённости на одинаковых расстояниях от нити одинаковы.



Расчёт напряжённости поля с помощью теоремы Гаусса следует начинать с получения выражения для потока вектора $\mathbf{E}$.

В свою очередь, расчёт потока следует начинать с выбора формы замкнутой поверхности и её положения относительно источника поля.

Расчёт потока будет максимально прост, если выбрать такую поверхность, симметрия которой идентична симметрии создающего поле заряда.

В данном случае удобно пользоваться замкнутой поверхностью с осевой симметрией.

Такой поверхностью является цилиндр, ось которого совпадает с нитью.

Пусть высота цилиндра равна l , а радиус основания r .

Поток вектора напряжённости поля, созданного нитью, складывается из потока через торцевые поверхности цилиндра и потока через боковую поверхность.

Поток через торцевые поверхности равен нулю, так как векторы напряжённости перпендикулярны нити и соответственно угол между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$ равен 90° :

$$\int_{S_{\text{торц}}} E \cos 90^\circ ds = 0.$$

Поток через боковую поверхность

$$\Phi = \int_{S_{\text{бок}}} E \cos 0^\circ ds = \int_{S_{\text{бок}}} E ds .$$

Поскольку все точки боковой поверхности расположены на одинаковых расстояниях от нити, модули напряжённости во всех точках боковой поверхности цилиндра одинаковы, т. е.

$$\Phi = E \int_{S_{\text{бок}}} ds = E 2\pi r l .$$

Таков вид выражения для потока вектора рассчитываемой напряжённости.

Следующий этап вычисления напряжённости электростатического поля – расчёт суммарного заряда, охваченного замкнутой поверхностью.

Заряд, охваченный поверхностью s , можно найти так:

$$q = \int_l \tau dl = \tau \int_l dl = \tau l .$$

Тогда по теореме Гаусса $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$, или

$$E 2\pi r l = \frac{\tau l}{\varepsilon_0} .$$

Отсюда

$$E = \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_0} .$$

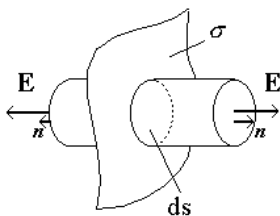
Таким образом, напряжённость электрического поля, созданного равномерно заряженной нитью, прямо пропорциональна линейной плотности заряда нити и обратно пропорциональна расстоянию от нити до интересующей нас точки.

Обратите внимание, напряжённость обратно пропорциональна первой степени расстояния от нити (напряжённость поля точечного заряда обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда).

2.7.2. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Пусть имеется бесконечная равномерно заряженная плоскость. Поверхностная плотность заряда равна σ .

Из симметрии системы следует, что поле должно быть симметричным относительно плоскости (это можно доказать примерно так же, как в предыдущем примере). Следовательно, вектор $\mathbf{E}$ везде перпендикулярен плоскости и в одинаково удалённых от плоскости точках модули вектора $\mathbf{E}$ одинаковы.



В этом случае в качестве поверхности интегрирования целесообразно выбрать цилиндр, ориентированный так, как показано на рисунке.

Поток вектора $\mathbf{E}$ и здесь складывается из потока через боковую поверхность цилиндра и потока через торцы цилиндра: $\Phi = \Phi_{\text{бок}} + 2\Phi_{\text{торц}}$.

Поток вектора напряжённости через боковую поверхность равен нулю, так как в силу симметрии поля вектор напряжённости должен быть параллелен боковой поверхности и $\Phi_{\text{бок}} = E \cos 90^\circ s_{\text{бок}} = 0$.

Поток вектора напряжённости через торцевые поверхности $\Phi_{\text{торц}} = E\pi r^2$, где r – радиус основания цилиндра.

Полный поток через оба торца цилиндра $\Phi = 2E\pi r^2$.

Суммарный заряд, охваченный поверхностью цилиндра, равен $q = \int_s \sigma ds = \sigma \int_s ds = \sigma s = \sigma \pi r^2$.

Отсюда $2E\pi r^2 = \sigma \pi r^2 \frac{1}{\epsilon_0}$ и $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

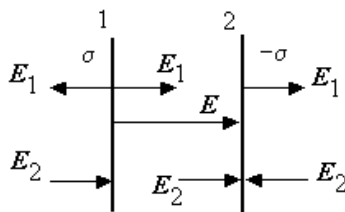
Полученное выражение показывает, что напряжённость поля, созданного бесконечной равномерно заряженной плоскостью, прямо пропорциональна поверхностной плотности заряда и не зависит от расстояния.

Обратите внимание: в этом случае напряжённость электрического поля на любых расстояниях от плоскости одинакова!

2.7.3. Поле двух параллельных равномерно заряженных плоскостей с одинаковым по величине и противоположным по знаку зарядом

Пусть имеются две параллельные плоскости, заряды которых одинаковы по величине и противоположны по знаку. Поверхностные плоскости зарядов соответственно равны σ и $-\sigma$.

Напряжённость поля, созданного двумя плоскостями, в соответствии с принципом суперпозиции может быть найдена как векторная сумма напряжённостей, созданных каждой плоскостью в отдельности, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.



Напряжённости поля, созданного 1-й плоскостью, направлены от неё в бесконечность, в то время как напряжённости поля 2-й плоскости направлены из бесконечности к ней.

Модули напряжённостей во всех точках пространства по величине одинаковы.

Это означает, что напряжённости $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ между пластинами направлены в одну сторону, а снаружи от пластин они противоположны.

Отсюда напряжённость поля между пластинами равна удвоенной напряжённости поля, созданного одной пластиной: $E = 2E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Напряжённость поля вне пластин равна нулю.

2.7.4. Поле равномерно заряженной сферы

Пусть имеется сфера радиусом r_0 , по которой равномерно распределён заряд q .

Из симметрии системы следует, что поле должно быть симметрично относительно центра заряженной сферы. Следовательно, вектор $\mathbf{E}$ во всех точках пространства направлен параллельно радиальным прямым и на равных расстояниях от центра сферы модули E одинаковы.

В этом случае в качестве поверхности интегрирования целесообразно выбрать сферическую поверхность, центр которой совпадает с центром заряженной сферы.

Пусть радиус сферической поверхности меньше, чем радиус заряженной сферы. В этом случае суммарный заряд, охваченный поверхностью, равен нулю (так как внутри сферы зарядов нет, все заряды расположены на её поверхности).

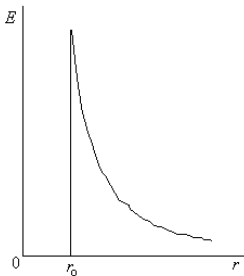
Это означает, что внутри заряженной сферы поток вектора напряжённости через поверхность, радиус которой $r_0 > r > 0$, равен нулю.

Площадь поверхности отлична от нуля, поэтому поток может быть равен нулю лишь в том случае, если напряжённость поля внутри сферы равна нулю.

Следовательно, напряжённость электрического поля внутри заряженной сферы равна нулю $E(r_0 \geq r > 0) = 0$.

Пусть радиус поверхности интегрирования больше радиуса заряженной сферы. В этом случае суммарный заряд, охваченный поверхностью, равен заряду сферы q .

Если единичный вектор $\mathbf{n}$ направлен наружу от поверхности, то угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{E}$ во всех точках равен нулю (или 180° , если заряд сферы отрицательный).



Отсюда следует, что $\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{s} = \oint_S E ds$.

Поскольку модуль вектора E во всех точках выбранной поверхности одинаков и площадь сферы равна $4\pi r^2$, то поток вектора напряжённости электрического поля $\oint_S E ds = E \oint_S ds = E 4\pi r^2$.

В соответствии с теоремой Гаусса, поток вектора $\mathbf{E}$ пропорционален сумме зарядов, охваченных поверхностью,

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Следовательно, напряжённость электрического поля, созданного заряженной сферой снаружи от неё, равна $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$.

Обратите внимание на то, что поле вне заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда q (см. разд. 2.3).

2.8. РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ

Если заряд движется в электростатическом поле, то кулоновская сила совершает работу.

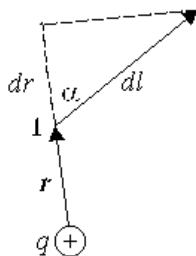
Найдём величину работы, совершаемой при перемещении заряда в электростатическом поле.

Допустим, что заряд q_0 перемещается на $d\mathbf{l}$ из точки 1 в электрическом поле точечного заряда q .

При этом совершается элементарная работа, равная $\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{l}$.

Учитывая, что кулоновская сила $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \times \frac{qq_0}{r^3} \mathbf{r}$, получаем

$$\delta A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^3} \mathbf{r} d\mathbf{l}.$$



Скалярное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на элементарное перемещение $d\mathbf{l}$ равно $r dl \cos \alpha$.

Из рисунка видно, что $dl \cos \alpha = dr$. Поэтому

$$\delta A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^3} r dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr.$$

На конечном перемещении из точки 1 в точку 2 работа электростатических сил

$$A_{12} = \int \delta A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{qq_0}{r^2} dr = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Таким образом, работа по перемещению заряда в электростатическом поле зависит от величины заряда (зарядов), создающего поле, величины перемещаемого заряда и его начального и конечного положения.

Обратите внимание на то, что в выражении для расчёта работы отсутствует информация о промежуточных положениях заряда q_0 . Сле-

довательно, работа в электростатическом поле не зависит от формы траектории.

В соответствии с данным в механике определением такое поле является консервативным, т. е. **электростатическое поле консервативно**.

Как известно, в консервативном поле работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии и не зависит от формы траектории

$$A = U_1 - U_2 = -\Delta U,$$

где U_1 и U_2 – потенциальная энергия заряда в начальной и конечной точках траектории соответственно; ΔU – приращение потенциальной энергии. Следовательно, **работа кулоновских сил при перемещении заряда в электростатическом поле равна убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда, не зависит от формы траектории, по которой перемещался заряд, а зависит лишь от начального и конечного положения заряда**.

Поскольку работа, производимая силами поля, совершается за счёт убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда, то

$$A_{12} = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = U_1 - U_2.$$

Последнее выражение позволяет получить выражение для расчёта потенциальной энергии заряда в электростатическом поле.

2.9. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Из сравнения выражений $A_{12} = -(U_2 - U_1)$ и $A_{12} = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$,

полученных в разд. 2.8, видно, что потенциальная энергия заряда q_0 , находящегося в поле, созданном точечным зарядом q , равна

$U = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$, где r – расстояние между зарядами.

Важно напомнить, что значение потенциальной энергии зависит от выбора точки отсчёта. В электростатике в качестве точки отсчёта обычно выбирают бесконечно удалённую точку. Потенциальная энергия заряда в такой точке считается равной нулю. В то же время раз-

ность потенциальных энергий не зависит от выбора точки отсчёта и имеет абсолютное значение.

Из последнего выражения видно, что потенциальная энергия заряда в электростатическом поле зависит от величины зарядов и расстояния между ними. Но если мы разделим потенциальную энергию пробного заряда q_0 на его величину, то результат будет зависеть лишь от величины заряда, создающего поле, и расстояния r от заряда до интересующей нас точки

$$\frac{U}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Следовательно, величина отношения потенциальной энергии заряда q_0 к его величине U / q_0 является характеристикой электростатического поля. Эту характеристику называют потенциалом электростатического поля и обозначают φ : $\varphi = \frac{U}{q_0}$, где U – потенциальная энергия

заряда q_0 , находящегося в электростатическом поле, созданном другим зарядом (или зарядами).

Потенциал является скалярной величиной.

В СИ потенциал измеряется в джоуль на кулон ($V = \text{Дж/Кл}$ (вольт)).

Потенциал является энергетической характеристикой электростатического поля, поскольку определяет энергию заряда q , обусловленную его взаимодействием с электрическим полем: $U = q\varphi$ (обратите внимание: здесь q – величина заряда, помещённого в электрическое поле, созданное другим зарядом или зарядами).

Используя потенциал, можно найти работу по перемещению заряда q из одной точки в другую как $A_{12} = -q(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Возвращаясь к полученному ранее выражению для расчёта потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов, можем записать выражение для расчёта потенциала точки в поле, созданном

точечным зарядом q на расстоянии r от него: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$.

Ещё раз отметим, что значение потенциала в данной точке зависит от выбора точки отсчёта.

В то же время разность потенциалов между двумя точками от выбора точки отсчёта не зависит.

2.10. СВЯЗЬ НАПРЯЖЁННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА

В механике показано, что в консервативных полях выполняется соотношение $\mathbf{F} = -\text{grad}U$.

В электростатическом поле $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, а $U = q\varphi$, поэтому $q\mathbf{E} = -\text{grad} q\varphi = -q \text{grad} \varphi$, или $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi$.

В декартовых координатах это выражение имеет вид

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Кстати, именно из этого выражения получена единица измерения напряжённости вольт на метр (В/м).

Знак «минус» в рассматриваемом выражении говорит о том, что вектор напряжённости всегда направлен в сторону максимально быстрого уменьшения потенциала.

Полученная связь между напряжённостью и потенциалом позволяет выявить ещё одну важную особенность электростатического поля.

Если поле создано несколькими неподвижными зарядами, то напряжённость поля в любой точке равна векторной сумме напряжённостей, созданных каждым из зарядов в данной точке.

Следовательно, можно записать следующее соотношение:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = -(\text{grad} \varphi_1 + \text{grad} \varphi_2 + \dots + \text{grad} \varphi_n),$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) = -\text{grad} \varphi,$$

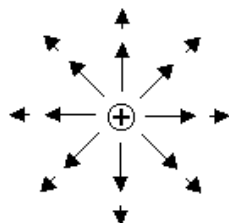
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

Таким образом, потенциал любой точки поля, созданного несколькими зарядами в интересующей нас точке, равен алгебраической сумме потенциалов, созданных каждым зарядом в данной точке.

Это означает, что потенциал, как и напряжённость, подчиняется принципу суперпозиции.

2.11. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

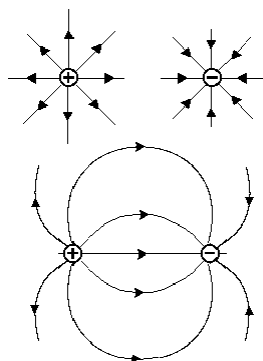
Электрическое поле можно представить в графической форме. Для этого можно измерить или рассчитать напряжённости электрического поля в различных точках и изобразить векторы напряжённости в этих точках. Полученное изображение будет содержать информацию о величине и направлении напряжённости электрического поля в различных точках.



На рисунке показан пример изображения электрического поля точечного положительного заряда (рисунок выполнен без соблюдения масштаба).

Однако такой способ представления полей в графической форме не совсем удобен. Гораздо удобнее изображать электрическое поле с помощью силовых линий.

Силовая линия – это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором напряжённости поля в этой точке.



Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или в бесконечности). Соответственно силовые линии направлены от положительных зарядов к отрицательным.

Силовые линии принято изображать так, чтобы их густота была больше там, где больше напряжённость электростатического поля.

Таким образом, если известна картина силовых линий электрического поля, то можно судить о величине и направлении напряжённости поля в различных точках.

Важно отметить, что силовые линии не могут пересекаться. Это видно из следующего.

Направление напряжённости совпадает с направлением касательной к силовой линии.

Если силовая линия пересекается в какой-либо точке с другой силовой линией, то касательные к этим линиям имеют разные направления.

Но напряжённость в любой точке имеет одно определённое направление, иметь два разных направления она не может. Поэтому и невозможно пересечение двух силовых линий.

Наряду с силовыми линиями для графического представления электростатических полей используют эквипотенциальные поверхности, т. е. поверхности, все точки которых имеют одинаковый потенциал.

Пересечение эквипотенциальной поверхности с плоскостью листа даёт эквипотенциальную линию.

При построении картины поля с помощью эквипотенциальных линий важно, чтобы разность потенциалов между соседними эквипотенциалами была одинакова для всей картины. Лишь в этом случае картина поля будет корректной.

Силовые линии и эквипотенциали всегда пересекаются под прямым углом.

Если какой-либо заряд перемещается по эквипотенциальной поверхности, то работа электростатических сил равна нулю: $A = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$, так как на эквипотенциальной поверхности $\varphi_1 = \varphi_2$.

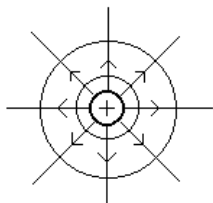
С другой стороны, работа кулоновских сил равна

$$A = q \int \mathbf{E} d\mathbf{r} = q \int E dr \cdot \cos \alpha ,$$

и если заряд перемещается вдоль эквипотенциали, то она равна нулю:

$$A = q \int E dr \cdot \cos \alpha = 0 ,$$

но это означает, что нулю равен косинус угла между векторами напряжённости и элементарного перемещения. Следовательно, угол между ними равен 90° .



Поскольку перемещение по условию совершается вдоль эквипотенциальной поверхности, то и угол между силовой линией, пересекающей эквипотенциальную поверхность, и поверхностью будет прямой.

Поэтому, построив линию, перпендикулярную всем пересекаемым эквипотенциалам, мы получим силовую линию.

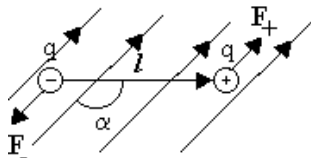
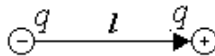
Густота полученных таким образом силовых линий будет выше там, где гуще эквипотенциали. Следовательно, по густоте эквипотенциалей можно судить о напряжённости поля: чем гуще эквипотенциали, тем выше напряжённость поля.

2.12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ. ДИПОЛЬ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Электрический диполь – это система из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов, находящихся на расстоянии l друг от друга.

Основной характеристикой диполя является дипольный момент, который по определению равен $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, где $\mathbf{p}$ – дипольный момент; q – величина положительного заряда диполя; $\mathbf{l}$ – плечо диполя (вектор, соединяющий заряды и направленный от отрицательного заряда к положительному). В СИ дипольный момент измеряется в кулон-метрах (Кл·м).

Как следует из определения, дипольный момент есть векторная величина, прямо пропорциональная величине зарядов диполя и расстоянию между ними. Дипольный момент направлен так же, как и плечо диполя – от отрицательного заряда к положительному.



Если поместить диполь в однородное электрическое поле напряжённостью $\mathbf{E}$, то на заряды диполя действуют одинаковые по величине и противоположные по направлению силы $|\mathbf{F}_+| = |\mathbf{F}_-| = qE$.

Векторная сумма этих сил равна нулю, поэтому диполь не будет двигаться поступательно. Эти силы создают момент пары сил, который стремится повернуть диполь так, чтобы дипольный момент был параллелен силовым линиям.

Величина момента пары сил, действующего на диполь, равна

$$\mathbf{M} = [\mathbf{l}, \mathbf{F}] = [\mathbf{l}, q\mathbf{E}] = [q\mathbf{l}, \mathbf{E}] = [\mathbf{p}, \mathbf{E}],$$

где $\mathbf{p}$ – дипольный момент.

2.13. ДИЭЛЕКТРИКИ. ТИПЫ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Диэлектриками принято называть вещества, не проводящие электрический ток.

В молекулах диэлектрика, как и в молекулах других веществ, суммарный положительный заряд ядер всех атомов, образующих молекулу, равен суммарному отрицательному заряду всех электронов.

В общем случае заряд всех ядер молекулы можно заменить одним точечным положительным зарядом. Величина этого заряда равна сумме зарядов ядер всех атомов молекулы, а положение совпадает с положением центра «тяжести» положительных зарядов молекулы.

В свою очередь, суммарный отрицательный заряд электронов молекулы можно заменить одним точечным отрицательным зарядом, расположенным в центре «тяжести» зарядов электронов.

Если центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов находятся на расстоянии l друг от друга, то молекулу можно считать диполем с плечом l .

В некоторых диэлектриках молекулы симметричны (например, H_2 , O_2 , N_2). У таких молекул центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают.

В диэлектриках второго типа молекулы состоят из противоположных по знаку ионов (например, $NaCl$, KCl , KBr). В отсутствие внешнего электрического поля центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов ионных молекул в кристалле диэлектрика совпадают.

Если нет внешнего электрического поля, молекулы диэлектриков первого и второго типа не обладают собственным дипольным моментом, они неполярны. Поэтому диэлектрики, состоящие из таких молекул, называют **неполярными**.

В диэлектриках, состоящих из несимметричных молекул (например, NH_3 , CO , H_2O), центры «тяжести» отрицательных и положительных зарядов не совпадают. Следовательно, такие молекулы обладают собственным дипольным моментом. Поэтому их называют **полярными**.

Несмотря на наличие дипольных моментов у всех молекул такого диэлектрика, диэлектрик в целом в отсутствие внешнего электрического поля дипольным моментом не обладает, так как вследствие теплового движения полярные молекулы ориентированы хаотично и их суммарный дипольный момент равен нулю.

2.14. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

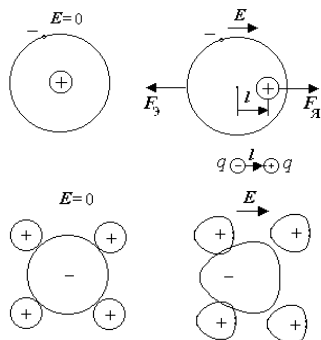
При внесении диэлектрика любого типа в электрическое поле происходит его **поляризация**, т. е. в нём возникает отличный от нуля дипольный электрический момент. Механизм поляризации в каждой группе диэлектриков имеет некоторые особенности.

Прежде всего рассмотрим неполярные диэлектрики.

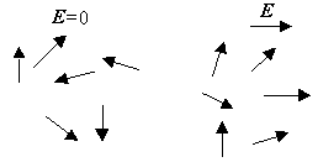
При внесении такого вещества во внешнее электрическое поле под действием кулоновских сил центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов молекулы смещаются в противоположных направлениях.

В результате центры «тяжести» положительного и отрицательного заряда оказываются на некотором расстоянии l друг от друга (см. рисунок). Молекула неполярного диэлектрика становится диполем с плечом l , направленным параллельно вектору напряжённости электрического поля.

Подобным образом ведут себя и диэлектрики второго типа: под действием кулоновских сил положительные и отрицательные ионы смещаются, что приводит к возникновению дипольных моментов.



В полярных диэлектриках внешнее поле вызывает ориентацию молекул – молекулы ориентируются по полю. Сумма дипольных моментов молекул станет отличной от нуля. Естественно, что хаотическое (тепловое) движение молекул противодействует упорядочению ориентации молекул. Поэтому при данной температуре степень ориентации будет тем выше, чем сильнее электрическое поле.



Из сказанного следует, что степень поляризации любого диэлектрика может быть различной. Следовательно, необходима количественная мера степени поляризации диэлектрика.

В качестве такой меры используется **поляризованность** диэлектрика – дипольный момент единицы объёма диэлектрика. Это величина, равная векторной сумме дипольных моментов

молекул в единице объёма вещества:
$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}.$$

Вектор поляризованности измеряется в кулон на квадратный метр ($\text{Кл} \cdot \text{м} / \text{м}^3 = \text{Кл} / \text{м}^2$).

Поляризованность в диэлектриках всех типов зависит от напряжённости электрического поля. Чем больше напряжённость электрического поля, тем выше поляризованность диэлектрика. В аналитической

форме эта связь имеет вид $P = \kappa \epsilon_0 E$, где κ (каппа) – диэлектрическая восприимчивость. Диэлектрическая восприимчивость является безразмерной величиной.

Учитывая, что дипольный момент поляризованной неполярной молекулы всегда направлен по полю, мы вправе утверждать, что изменение температуры не влияет на степень поляризации молекулы. Следовательно, и поляризованность, и диэлектрическая восприимчивость неполярного диэлектрика не зависят от температуры.

Полярные диэлектрики ведут себя иначе. В них упорядоченному действию внешнего электрического поля противодействует хаотическое тепловое движение молекул, стремящееся разориентировать дипольные моменты молекул. Поэтому при каждой температуре будет устанавливаться некоторая равновесная упорядоченность дипольных моментов. Следовательно, поляризованность и диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков зависят от температуры. Чем выше температура, тем ниже поляризованность P и диэлектрическая восприимчивость κ .

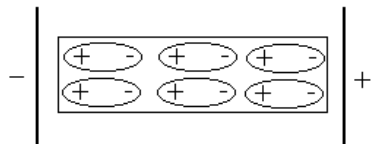
Следует отметить ещё одну важную особенность диэлектрической восприимчивости κ .

В изотропных средах, свойства которых не зависят от направления, κ является скаляром. Поэтому в изотропных диэлектриках направление вектора P всегда параллельно направлению E .

В анизотропных диэлектриках диэлектрическая восприимчивость, измеренная для направления, параллельного оси x , не равна значению κ , измеренному для параллельного оси y направления. Поэтому в анизотропных диэлектриках направление вектора P в общем случае не параллельно направлению E .

2.15. ПОЛЕ В ОДНОРОДНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Необходимо отметить ещё одну важную особенность процесса поляризации.



Под действием внешнего поля положительные и отрицательные заряды в диэлектрике смещаются. В результате молекулы диэлектрика ориентированы примерно так, как показано на рисунке.

Внутри диэлектрика рядом с положительным зарядом диполя располагается отрицательный заряд соседней молекулы.

Поскольку молекулы одинаковые, то сумма этих зарядов равна нулю. Другими словами, заряды диполей внутри диэлектрика взаимно компенсируются.

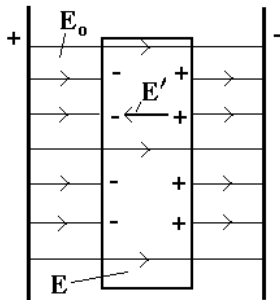
Из рисунка видно, что на поверхности диэлектрика такая компенсация отсутствует – снаружи нет диполей, способных вызвать компенсацию. Поэтому на противоположных поверхностях диэлектрика во внешнем электрическом поле возникают нескомпенсированные заряды.

Молекулы твёрдого вещества не могут свободно изменять своё положение. Следовательно, нескомпенсированные заряды диполей не могут перемещаться внутри объёма или по поверхности диэлектрика. Поэтому их называют связанными.

Связанные заряды, так же как и любые заряды, создают электрическое поле.

Это дополнительное электрическое поле всегда направлено против внешнего поля (это видно из рисунка). Поэтому электрическое поле внутри диэлектрика всегда слабее, чем вне его:

$$E = E_0 - E',$$



где E – напряжённость электрического поля внутри диэлектрика; E' – напряжённость поля связанных зарядов; E_0 – напряжённость поля, созданного внешними зарядами.

В данном случае связанные заряды расположены на параллельных плоскостях, поэтому напряжённость поля связанных зарядов внутри диэлектрика $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$, где σ' – поверхностная плотность связанных зарядов.

Поверхностную плотность связанных зарядов σ' можно найти из следующих соображений.

В соответствии с определением поляризованности диэлектрика $\mathbf{P}$ полный дипольный электрический момент пластины $\Sigma p = PV$.

Объём прямоугольной пластины $V = Sd$ (d – толщина пластины), поэтому $\Sigma p = PSd$.

С другой стороны, полный дипольный электрический момент пластины $\Sigma p = qd$, где q – полный связанный заряд боковой грани пластины, величина которого $q = S\sigma'$. Поэтому $\Sigma p = S\sigma'd$, и это означает, что $P = \sigma'$, т. е. поляризованность диэлектрика оказывается равной поверхностной плотности связанных зарядов.

Ранее было получено, что поляризованность $P = \kappa \varepsilon_0 E$, следовательно, теперь можно записать: $\sigma' = \kappa \varepsilon_0 E$.

Учитывая, что $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$, для величины напряженности электрического поля внутри диэлектрика получаем

$$E = E_0 - \kappa E, \quad E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = 1 + \kappa$ – диэлектрическая проницаемость вещества.

Диэлектрическая проницаемость является безразмерной величиной и показывает, во сколько раз электрическое поле внутри диэлектрика слабее внешнего.

В изотропных средах диэлектрическая проницаемость является скалярной величиной.

2.16. ВЕКТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

Уменьшение напряжённости электрического поля на поверхности диэлектрика происходит скачком (поскольку именно на поверхности расположены связанные заряды), что вызывает некоторые сложности при расчётах электрических полей в веществе.

Например, если пространство заполнено несколькими слоями разных диэлектриков, то даже в самой простой ситуации расчёт будет довольно сложным, так как из-за связанных зарядов в каждом слое будет своя напряжённость электрического поля.

Поэтому необходима такая характеристика электрического поля, которая не зависит от связанных зарядов. Чтобы получить такую характеристику, поступим следующим образом.

Как уже отмечалось, напряжённость поля внутри диэлектрика $E = E_0 - E'$, где E' – напряжённость поля связанных зарядов, равная σ' / ε_0 .

Напряжённость внешнего электрического поля, созданного свободными зарядами двух параллельных бесконечных проводящих плоскостей, можно выразить как $E_0 = \sigma_{\text{своб}} / \epsilon_0$.

Тогда напряжённость электрического поля внутри диэлектрика $E = \frac{\sigma_{\text{своб}}}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$. Поскольку $\sigma' = P$, $E = \frac{\sigma_{\text{своб}}}{\epsilon_0} - \frac{P}{\epsilon_0}$. Тогда

$$E + \frac{P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{своб}}}{\epsilon_0}, \text{ или } \epsilon_0 E + P = \sigma_{\text{своб}}.$$

Таким образом, величина $\epsilon_0 E + P$ не зависит от связанных зарядов. Эту величину называют **электрическим смещением**.

Определение электрического смещения можно записать в векторной форме $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, или, поскольку $P = \kappa \epsilon_0 E$, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}(1 + \kappa) = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$.

Вектор электрического смещения в изотропных диэлектриках совпадает по направлению с вектором напряжённости электрического поля внутри диэлектрика, так как в изотропных диэлектриках диэлектрическая проницаемость ϵ является скалярной величиной¹⁵.

В СИ вектор электрического смещения измеряется в кулон на квадратный метр (Кл/м²).

Электрическое смещение является вспомогательной характеристикой электрического поля, зависящей только от свободных зарядов.

Таким образом, получена характеристика электрического поля, не зависящая от связанных зарядов. Использование такой характеристики даёт очевидные преимущества. Действительно, используя электрическое смещение, можно рассчитать электрическое поле (значение вектора $\mathbf{D}$) как внутри диэлектрика, так и вне его, учитывая только свободные заряды. После этого легко найти напряжённость электрического поля в любой точке, просто поделив значение $\mathbf{D}$ в этой точке на значение диэлектрической проницаемости ϵ в этой точке и на электрическую постоянную ϵ_0 .

Рассчитывать электрическое поле в пространстве с диэлектриком можно с помощью теоремы Гаусса. Применительно к электрическому

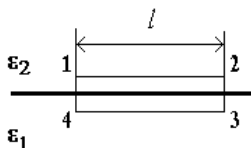
¹⁵ В анизотропных диэлектриках диэлектрическая проницаемость является тензорной величиной и в общем случае $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ по направлению не совпадают.

смещению она в любой среде имеет вид $\oint_S \mathbf{D} ds = \sum q_{\text{своб}}$ и может быть

прочитана следующим образом: поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охваченных этой поверхностью. Знать, каковы по величине связанные заряды и как они распределены в пространстве, в этом случае не нужно.

2.17. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Рассмотрим границу раздела двух изотропных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 ($\epsilon_1 < \epsilon_2$).



Пусть на границе раздела свободные заряды отсутствуют.

Оба диэлектрика находятся в однородном электрическом поле напряжённостью $\mathbf{E}$. Напряжённость электрического поля в одном из диэлектриков будет равна $\mathbf{E}_1$, во втором $\mathbf{E}_2$.

Выберем некоторый контур, охватывающий границу раздела двух сред.

Поскольку электрическое поле консервативно, работа кулоновских сил на замкнутом контуре A_l равна нулю:

$$A_l = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = 0.$$

На участках 12 и 34 рассматриваемого контура работа

$$A_{12} = q\mathbf{E}_1 \mathbf{l}_{12} = qE_{1\tau} l_{12},$$

$$A_{34} = q\mathbf{E}_2 \mathbf{l}_{34} = -qE_{2\tau} l_{34}.$$

В этих выражениях $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ — проекции векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ на ось, параллельную границе раздела двух диэлектриков.

Пусть $l_{23} = l_{41} \rightarrow 0$. Тогда работа кулоновских сил на этих участках будет равна нулю.

Следовательно, работа кулоновских сил на всей длине контура равна $A_l = A_{12} + A_{34} = 0$ и $A_{12} = -A_{34}$.

Последнее соотношение можно переписать в виде $qE_{1\tau}l_{12} = qE_{2\tau}l_{34}$.

Сократив одинаковые множители, получаем

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

Таким образом, компонента вектора напряжённости, параллельная границе раздела двух сред (тангенциальная компонента), с обеих сторон от границы одинакова.

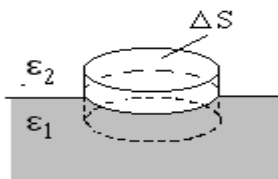
Вектор электрического смещения $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$. Следовательно,

$$D_{1\tau} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_{1\tau},$$

$$D_{2\tau} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{2\tau}.$$

А это, в свою очередь, означает, что

$$\frac{D_{1\tau}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_2}, \text{ или } \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$



Другими словами, тангенциальная компонента вектора ($\mathbf{D}_\tau$) на границе раздела скачкообразно изменяется в соответствии с последним соотношением.

Теперь рассмотрим поведение компонент векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, перпендикулярных границе раздела двух диэлектриков. Для этого воспользуемся теоремой Гаусса. В качестве поверхности интегрирования выберем цилиндр бесконечно малой высоты, основания которого параллельны границе раздела двух диэлектриков.

В соответствии с теоремой Гаусса, считая электрическое поле однородным, мы вправе записать¹⁶:

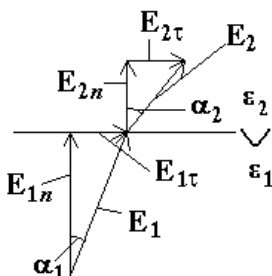
$$D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = 0 \text{ и } D_{2n} = D_{1n}.$$

Отсюда следует, что
$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$

Таким образом, на границе раздела скачком изменяется нормальная составляющая вектора напряжённости и не изменяется нормальная составляющая вектора электрического смещения.

¹⁶ Мы не будем здесь подробно описывать математические преобразования: они просты и практически одинаковы с рассмотренными перед этим.

Вследствие этого силовые линии на границе раздела двух диэлектриков изменяют направление¹⁷. Действительно, $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$.



Из рисунка видно, что $\frac{E_{\tau}}{E_n} = \tan \alpha$. Выражая тангенс угла наклона силовых линий в каждом из диэлектриков, получим:

$$\frac{E_{1\tau}}{E_{1n}} = \tan \alpha_1, \quad \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = \tan \alpha_2,$$

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} \frac{E_{1n}}{E_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Таким образом, в среде с большей диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$) силовые линии увеличивают наклон (см. рисунок).

2.18. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Проводники – это вещества, способные проводить электрический ток.

Существование проводимости в проводниках обусловлено наличием в них так называемых свободных зарядов, т. е. зарядов, способных перемещаться внутри проводника.

Свободными зарядами могут быть электроны (в металлах, полупроводниках), ионы (в растворах солей, кислот и т. п.), электроны и ионы (в ионизированных газах). Все проводники во внешнем электрическом поле ведут себя практически одинаково.

Рассмотрим наиболее важные особенности поведения проводников во внешнем электрическом поле.

Допустим, что в рассматриваемом проводнике имеются свободные носители заряда одного знака (например, электроны).

Свободные заряды в проводнике могут перемещаться, следовательно, при помещении проводника в электрическое поле они начнут двигаться в направлении действия кулоновской силы.

¹⁷ Если силовые линии перпендикулярны границе раздела, то их направление не изменяется.

Дошедшие до поверхности проводника заряды не могут выйти наружу. Поэтому заряды начнут скапливаться у поверхности проводника.

На противоположной поверхности возникнет недостаток свободных носителей, что вызовет появление заряда противоположного знака.

Вследствие этого внутри проводника возникнет собственное электрическое поле, направленное противоположно внешнему.

Пока собственное поле слабее внешнего, свободные носители будут двигаться в прежнем направлении и скапливаться на поверхности. Собственное поле при этом будет расти.

Так будет до тех пор, пока собственное поле не станет равно внешнему полю. Суммарное поле внутри проводника при этом станет равно нулю.

Полученный вывод имеет общий характер. Электрическое поле внутри любого проводника, находящегося во внешнем электрическом поле, всегда равно нулю: $\mathbf{E} = 0$.

Так как $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = 0$, то потенциал проводника во всех точках одинаков: $\varphi = \text{const}$.

В частности, это означает, что поверхность проводника в электростатическом поле является эквипотенциальной.

Поскольку поверхность проводника эквипотенциальна, силовые линии поля вне проводника перпендикулярны поверхности проводника (так как силовые линии и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны).

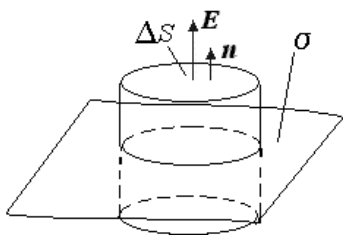
Если проводник зарядить, то **избыточный заряд распределится по поверхности проводника**. Если бы это было не так, то поле внутри проводника не могло бы быть равно нулю.

Этот вывод можно получить и аналитически с помощью теоремы Гаусса: $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = \sum q_i / \epsilon_0$.

Поскольку напряжённость поля внутри проводника равна нулю, то и $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$. Отсюда $\sum q_i = 0$, т. е. избыточных (не скомпенсированных) зарядов внутри проводника нет.

Избыточный заряд на проводнике находится в равновесии: заряд перераспределяется до тех пор, пока поле внутри проводника не станет равным нулю. Как только поле внутри проводника станет равно нулю, перераспределение, т. е. направленное движение свободных зарядов, прекратится.

Рассчитаем напряжённость электрического поля вблизи от поверхности заряженного проводника.



Пусть поверхностная плотность заряда проводника равна σ .

В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность пропорционален заряду, охваченному этой поверхностью.

В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр, основания которого параллельны поверхности проводника.

Поток через боковую стенку цилиндра будет равен нулю, так как поле вне проводника перпендикулярно его поверхности.

Поток через нижнее основание цилиндра также равен нулю, так как внутри проводника поля нет.

Поэтому поток через поверхность цилиндра будет равен потоку через верхнее основание площадью ΔS : $E\Delta S$.

Заряд, охваченный такой поверхностью, равен $\sigma\Delta S$.

Тогда в соответствии с теоремой Гаусса $E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$ и $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Таким образом, напряжённость поля вблизи поверхности проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности заряда в данной точке поверхности проводника. Конечно, это не означает, что поле вне проводника не зависит от зарядов, расположенных на отдалённых точках поверхности проводника, – просто плотность зарядов в данной точке зависит от того, как распределён заряд по всей поверхности.

2.19. ЗАМКНУТЫЕ ПРОВОДЯЩИЕ ОБОЛОЧКИ

Как уже установлено, внутри заряженного проводника избыточные заряды и электрическое поле отсутствуют. Но это означает, что для равновесного распределения зарядов на поверхности проводника не имеет никакого значения наличие вещества внутри этого проводника, т. е. полость внутри проводника, во-первых, не повлияет на распределение зарядов на поверхности проводника и, во-вторых, поля внутри этой полости не будет.

Отсюда следует, что в объёме, окружённом заряженной замкнутой проводящей оболочкой, поле всегда равно нулю.

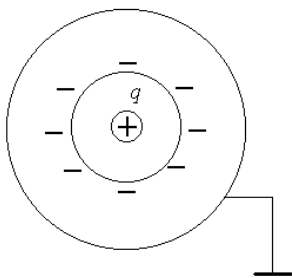
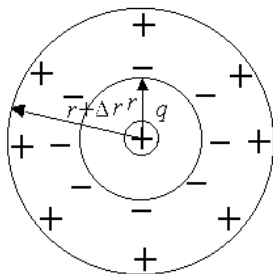
Поле внутри полости равно нулю и тогда, когда оно создано не избыточным зарядом на поверхности полости, а внешним источником. В этом случае полость называют **экраном**, так как она может избавить от влияния электрических полей на тела (приборы), находящиеся внутри полости. Такие экраны широко применяются и в науке, и в технике.

Если внутрь незаряженной сферической полости радиусом r , поместить заряд q , картина изменится. Проведём анализ этой ситуации с помощью теоремы Гаусса.

В качестве поверхности интегрирования выберем сферу радиусом $R < r$, центр которой совпадает с центром полости.

Поток вектора напряжённости через эту поверхность не равен нулю, так как отличен от нуля заряд q , находящийся внутри полости. Другим словами, в этом случае поле внутри оболочки не равно нулю.

Внутри стенок проводящей оболочки электрическое поле должно быть равно нулю. Следовательно, поток вектора напряжённости через поверхность, проходящую внутри стенок проводящей оболочки ($r + dr > R > r$), тоже должен быть равен нулю. Но это означает, что на внутренней поверхности оболочки должен быть распределён заряд, величина которого равна q , а знак противоположен знаку заряда, находящегося внутри полости.



В то же время, поскольку заряд оболочки по условию равен нулю, на внешней поверхности оболочки должен быть распределён заряд, величина и знак которого совпадают с зарядом q , находящимся внутри полости.

Вне оболочки ($R > r + dr$) поток вектора напряжённости не равен нулю, так как не равен нулю заряд внутри оболочки.

Таким образом, поле в этой ситуации существует внутри полости и вне оболочки.

Если заряд, находящийся внутри оболочки точечный, то это поле точечного заряда.

Обратите внимание, если оболочку с находящимся внутри зарядом заземлить, то избыточный заряд с внешней поверхности оболочки стечёт, и поле вне оболочки станет равно нулю.

2.20. ЭЛЕКТРОЁМКОСТЬ УЕДИНЁННОГО ПРОВОДНИКА

Как было показано в разд. 2.19, заряженный проводник эквипотенциален, а избыточный заряд определённым образом распределён по его поверхности.

Характер распределения заряда по поверхности уединённого проводника зависит от формы проводника.

Если сообщить проводнику дополнительный заряд, то он распределится по его поверхности подобно первой порции заряда, поскольку форма проводника, по условию, не изменяется.

Но это означает, что при увеличении заряда уединённого проводника в n раз во столько же раз увеличится и напряжённость поля, созданного проводником.

Это, в свою очередь, означает, что в n раз возрастёт и работа, необходимая для перемещения пробного заряда из бесконечности к проводнику, т. е. его (проводника) потенциал.

Следовательно, заряд проводника и его потенциал прямо пропорциональны друг другу.

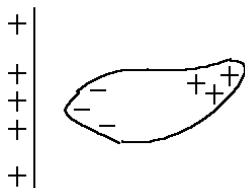
Отношение заряда проводника к его потенциалу называется **электроёмкостью** (или просто **ёмкостью**) уединённого проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Единицей измерения электроёмкости в Си является кулон на вольт (Кл/В = Ф (фарад)).

Следует заметить, что на практике используются меньшие величины единицы ёмкости. Это микрофарад ($1\text{ мкФ} = 1 \cdot 10^{-6}\text{ Ф}$) и пикофарад ($1\text{ пФ} = 1 \cdot 10^{-12}\text{ Ф}$), и др.

Важно отметить, что ёмкость проводника зависит от окружающих его тел.



Это объясняется тем, что окружающие тела значительно влияют на поле, созданное проводником, за счёт индуцированных в окружающих телах зарядов. Например, при приближении к положительно заряженной плоскости другого проводника, на нём происходит перераспределение зарядов: на ближайшей к заря-

женной плоскости поверхности скапливаются отрицательные заряды, на удалённой – положительные. Эти заряды создают электрическое поле, которое, в свою очередь, влияет на распределение зарядов на плоскости.

Поскольку отрицательные заряды в данном случае расположены к плоскости ближе, их влияние сильнее и потенциал плоскости понизится. Это означает, что ёмкость плоскости растёт.

Полученный вывод является общим: электрическая ёмкость проводника, окружённого другими проводниками, всегда больше ёмкости такого же уединённого проводника.

2.21. КОНДЕНСАТОРЫ

Если взять систему из двух проводников¹⁸, имеющих одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды, то получим **конденсатор** – устройство, ёмкость которого намного больше ёмкости уединённого проводника и не зависит от ёмкости окружающих тел¹⁹.

Основной характеристикой конденсатора является его ёмкость C , определяемая выражением $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$, где q – заряд обкладки конденсатора; $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

В данном случае разность потенциалов между обкладками конденсатора равна напряжению на конденсаторе: $\varphi_1 - \varphi_2 = U$. Поэтому определение ёмкости конденсатора можно записать в таком виде: $C = \frac{q}{U}$.

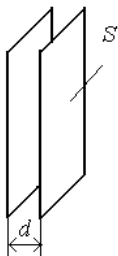
Ёмкость конденсатора зависит от площади обкладок конденсатора, формы обкладок, расстояния между ними, диэлектрической проницаемости вещества, заполняющего пространство между обкладками конденсатора.

Рассмотрим в качестве примера плоский конденсатор. Это устройство из двух проводящих плоскостей, параллельных друг другу и разделённых слоем диэлектрика.

¹⁸ Такие проводники принято называть **обкладками**.

¹⁹ Ёмкость конденсатора не зависит от окружающих тел, поскольку практически все поле сосредоточено между его обкладками.

Если размеры пластин достаточно велики по сравнению с расстоянием d между ними, то заряд распределён по поверхности пластин равномерно с плотностью $\sigma = q / S$.



Как показано ранее, напряжённость поля между пластинами $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$, вне пластин $E = 0$.

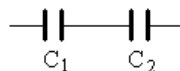
Поскольку $\frac{d\varphi}{dx} = -E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$, то $\varphi_1 - \varphi_2 = \int \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} dx =$
 $= \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S}.$

Отсюда ёмкость плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

В практической деятельности часто используются соединения нескольких конденсаторов. Два основных способа соединения конденсаторов – параллельное и последовательное.

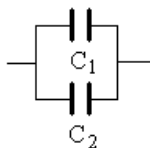
Последовательное соединение. Последовательным называют соединение конденсаторов, показанное на рисунке.



Легко показать, что суммарная ёмкость последовательно соединённых конденсаторов может быть рассчитана следующим образом:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

т. е. величина, обратная суммарной ёмкости конденсаторов, равна сумме обратных каждой из ёмкостей величин. Очевидно, что если соединены не два, а несколько конденсаторов, в сумме будет столько членов, сколько соединено конденсаторов.



Параллельное соединение. Параллельным называют показанное на рисунке соединение конденсаторов.

При таком соединении суммарная ёмкость конденсаторов равна сумме ёмкостей всех соединённых конденсаторов:

$$C = C_1 + C_2.$$

2.22. ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Для того чтобы сообщить любому заряженному проводнику дополнительный заряд, необходимо совершить работу $\delta A' = \varphi dq = C\varphi d\varphi$ (здесь предполагается, что потенциал бесконечно удалённой точки равен нулю).

Работа, необходимая для того чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до потенциала φ , $A = C \int_0^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}$.

Поскольку эта работа идёт на увеличение энергии заряженного проводника, его энергия равна

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}.$$

Для конденсатора элементарная работа

$$\delta A = (\varphi_1 - \varphi_2) dq = \frac{q dq}{C},$$

работа, необходимая для заряда конденсатора от нулевого потенциала до потенциала φ ,

$$A = \int_0^q \frac{q dq}{C} = \frac{q^2}{2C};$$

а энергия конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2 C}{2}.$$

Конденсатор является системой из взаимодействующих тел. Поэтому его потенциальная энергия равна полусумме потенциальных энергий тел системы:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i.$$

2.23. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Вернёмся к выражению для расчёта электрической энергии, запасённой в конденсаторе:

$$W = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}.$$

Для плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$. Поэтому его энергия

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \right)^2 Sd$$

и

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E^2 V = \frac{1}{2} EDV.$$

В последние два выражения для расчёта энергии не входят характеристики проводников (S и d); в них энергия выражается через характеристики электрического поля. Это позволяет трактовать W как энергию электрического поля. И эта энергия распределена в пространстве с объёмной плотностью

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E^2 = \frac{ED}{2}.$$

Используя последнее выражение, можно найти энергию, запасённую в однородном электрическом поле, занимающем объём V :

$$W = \omega V.$$

Если электрическое поле неоднородно, то

$$W = \int_V \omega dV,$$

т. е. энергия поля в объёме V равна интегралу от объёмной плотности электрического поля, взятому по объёму V .

Часть III

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов.

Для того чтобы свободные заряды двигались в среде упорядоченно, необходимо либо наличие электрического поля, либо какое-либо поле неэлектростатических сил.

Если свободные заряды движутся упорядоченно в электрическом поле, то причиной, вызывающей электрический ток, являются кулоновские силы.

Если же свободные заряды движутся упорядоченно без электрического поля, то причиной, вызывающей электрический ток, являются силы, называемые **сторонними** (например, магнитные силы в генераторе электрического тока). Причём, если электрическое поле характеризуют напряжённостью $\mathbf{E}$, то поле сторонних сил – так называемой **напряжённостью поля сторонних сил $\mathbf{E}^*$** .

Количественной характеристикой электрического тока является сила тока I – это величина, равная отношению заряда dq , переносимого через поверхность за время dt , ко времени dt :

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Сила тока, как это видно из определения, скалярная величина.

В СИ единицей измерения силы тока является ампер (Кл/с = А).

Электрический ток может быть обусловлен направленным движением как положительных, так и отрицательных зарядов. Причём, если ток создаётся одновременным движением положительных зарядов dq^+ (они движутся по полю) и отрицательных зарядов dq^- (они движутся

против электрического поля), то $I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt}$.

Электрический ток имеет направление – это условная характеристика.

Направлением тока принято считать направление движения положительных зарядов (если ток создают отрицательные заряды, то направление тока противоположно направлению их движения).

В общем случае величина отношения dq/dt может меняться со временем; если же $dq/dt = \text{const}$, то ток называют постоянным и тогда можно считать $I = q/t$.

Величина отношения dq/dt может зависеть не только от времени, но и от координаты: в разных точках сечения проводника оно может быть разным. Поэтому для характеристики электрического тока используют дифференциальную характеристику, именуемую **плотность тока** $\mathbf{j}$:

$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, параллельный скорости направленного движения положительных зарядов; $dS_{\perp}$ – площадь элементарной поверхности, перпендикулярной скорости направленного движения зарядов.

Плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр (A/m^2).

Сила тока и плотность тока связаны между собой:
$$I = \int_S \mathbf{j} \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{j} dS.$$

Последнее выражение можно прочесть и так: сила тока через поверхность S равна потоку вектора плотности тока $\mathbf{j}$ через эту поверхность.

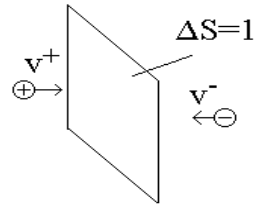
Протекание электрического тока не вызывает накопления заряда в проводнике. Это означает, что если в некоторый объём проводника вошёл заряд dq , то такой же заряд должен выйти из этого объёма.

В математической форме последнее утверждение имеет следующий вид:
$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Найдём связь плотности тока со средней скоростью упорядоченного движения зарядов в проводнике. Для этого выберем единичную поверхность, перпендикулярную скорости упорядоченного движения зарядов. За единицу времени через неё пройдёт $n^+ \mathbf{v}$ положительных

зарядов и n^- отрицательных зарядов (здесь n^+ , n^- – концентрации положительных и отрицательных зарядов соответственно, $\mathbf{v}^+$, $\mathbf{v}^-$ – скорости упорядоченного движения зарядов). Тогда плотность тока

$$\mathbf{j} = e^+ n^+ \mathbf{v}^+ + e^- n^- \mathbf{v}^-.$$



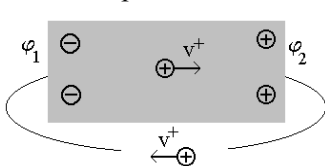
В отсутствие электрического поля свободные носители заряда движутся хаотически. Это движение не даёт вклада в $\mathbf{j}$, так как средняя скорость хаотического движения равна нулю.

3.1. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

Если в проводнике создать электрическое поле, свободные заряды начнут двигаться упорядоченно, т. е. возникнет электрический ток.

Однако этот ток очень быстро прекратится, так как свободные заряды перераспределятся так, что поле внутри проводника станет равно нулю и причина, вызвавшая направленное движение зарядов, исчезнет.

Для того чтобы ток не прекращался, необходимо переносить избыточные заряды с одного конца проводника на противоположный. Тогда



электрическое поле внутри проводника будет существовать непрерывно и направленное движение зарядов не будет прекращаться.

Другими словами, для того чтобы в цепи непрерывно существовал электрический ток, в части электрической цепи свободные носители должны двигаться по электрическому полю, а в другой части – против него.

Естественно, электрическое поле не может заставить положительные заряды двигаться против кулоновских сил. Следовательно, в части цепи должны действовать силы, заставляющие положительные заряды двигаться от «минуса» к «плюсу». Такие силы неэлектростатического происхождения принято называть **сторонними**.

Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называют источником ЭДС (электродвижущей силы).

На практике используются различные виды источников ЭДС – это электрические генераторы, гальванические элементы (батарейки), аккумуляторы и т. д.

Источник электродвижущей силы характеризуется величиной ЭДС: $\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q}$, где $A_{\text{ст}}$ – работа сторонних сил по перемещению заря-

да q ; q – заряд, перемещённый сторонними силами.

В СИ ЭДС измеряется в джоуль на кулон (Дж/Кл = В (вольт)).

Работу сторонних сил по перемещению заряда q внутри источника ЭДС можно вычислить следующим образом:

$$A_{\text{ст}} = A_{21} = \int_2^1 \mathbf{F}_{\text{стор}} d\mathbf{l} = \int_2^1 q \mathbf{E}^* d\mathbf{l} = q \int_2^1 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

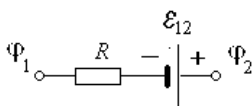
Отсюда величина ЭДС

$$\varepsilon = \int_2^1 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

Если электрическая цепь замкнута, то ЭДС равна

$$\varepsilon = \oint_L \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

Работа по перемещению заряда на участке цепи, содержащем источник ЭДС, может быть найдена как



$$A_{12} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} + q \int_1^2 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

Учитывая связь напряжённости и потенциала, а также определение ЭДС, получаем

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}.$$

Величина, равная работе электростатических и сторонних сил по перемещению единичного заряда в электрической цепи, называется напряжением:

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}.$$

Обратите внимание, напряжение на участке цепи и разность потенциалов на его концах различны по величине.

Напряжение и разность потенциалов не одно и то же!

Следует отметить, что участок цепи, содержащий источник ЭДС, называют **неоднородным**. Участок, не содержащий источника ЭДС, называют **однородным**.

Поскольку однородный участок не содержит источника ЭДС, то $U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)$, т. е. напряжение на однородном участке цепи равно разности потенциалов на его концах.

3.2. ЗАКОН ОМА

Георг Ом, экспериментируя с цепями постоянного тока, обнаружил, что сила тока в участке электрической цепи определяется следующим соотношением: $I = \frac{U}{R}$, где I – сила тока в цепи; U – напряжение на концах цепи; R – сопротивление цепи.

Это выражение принято называть **законом Ома для участка цепи**.

Сопротивление цепи связывает напряжение в цепи и силу тока, возникающего в цепи за счёт напряжения U .

В СИ сопротивление измеряется в вольт на ампер ($\text{В/А} = \text{Ом}$).

Величина сопротивления цепи при постоянной температуре зависит от размеров и формы проводников цепи, от материала, из которого проводники изготовлены.

Для однородного по составу проводника постоянной длины и сечения сопротивление $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление проводника (удельное сопротивление зависит от материала проводника); l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения проводника.

Закон Ома для участка цепи может быть записан в дифференциальной форме:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E},$$

где $\mathbf{j}$ – плотность тока в проводнике; ρ – удельное сопротивление проводника; σ – удельная электрическая проводимость проводника; $\mathbf{E}$ – напряжённость электрического поля в проводнике.

Если участок цепи неоднороден, то кроме электростатических сил на свободные заряды действуют и сторонние, тогда $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}^*$.

Это выражение представляет собой закон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи.

В интегральной форме этот закон имеет вид

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \left(\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_1^2 \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{S} \right) = \frac{1}{R} (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12})$$

и

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}),$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов на концах участка цепи.

Если неоднородная цепь замкнута, то $\varphi_1 = \varphi_2$ (так как концы участка цепи соединены между собой) и закон Ома принимает следующий вид: $I = \frac{\varepsilon}{R}$, где R – суммарное сопротивление однородного участка цепи и внутреннего сопротивления источника ЭДС.

Это выражение представляет собой закон Ома для замкнутой цепи.

3.3. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА

Рассмотрим участок цепи, напряжение на концах которой равно U .

В рассматриваемой цепи будет протекать электрический ток, сила которого, в соответствии с законом Ома, равна U/R .

По определению (см. разд. 3.1), напряжение равно работе электростатических и сторонних сил по перемещению единичного заряда в электрической цепи. Следовательно, при протекании тока кулоновские и сторонние силы, действующие на заряды в рассматриваемом участке, совершат работу $A = qU$.

Эту работу называют работой электрического тока.

Если ток постоянный, то $q = It$, где I – сила тока; t – время, в течение которого в проводнике течёт ток. В этом случае работа тока может быть рассчитана по формуле $A = UIt$.

Так как $U = IR$, работа тока

$$A = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t.$$

Таким образом, работа тока может быть рассчитана с помощью нескольких формул. Какое именно выражение следует использовать в конкретной задаче, определяется её условием. Например, если в условии дана сила тока и разность потенциалов на концах однородного участка цепи, то $A = I(\varphi_1 - \varphi_2)t$, если же известны сила тока и сопротивление цепи, то $A = I^2 R t$.

Мощность есть работа, совершённая за единицу времени: $P = \frac{A}{t}$.

Поэтому мощность тока можно рассчитать по следующим формулам:

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Если проводник с током неподвижен и ток не вызывает химических реакций, то вся работа идёт на увеличение внутренней энергии проводника, т. е. на его нагрев.

Другими словами, при протекании тока в проводнике выделяется тепло

$$Q = UIt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t.$$

В 1841 г. англичанин Джеймс П. Джоуль и независимо от него в 1842 г. русский физик Эмилий Христианович Ленц, обобщая результаты своих экспериментов, получили именно такое выражение для расчёта количества тепла, выделяемого проводником при протекании в нём тока. Поэтому последнее выражение принято называть **законом Джоуля–Ленца**.

Если сила тока изменяется с течением времени, то количество тепла, выделяющееся в цепи, можно рассчитать с помощью следующих выражений:

$$Q = \int_0^t U I dt = \int_0^t I^2 R dt = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt .$$

Закон Джоуля–Ленца может быть записан и в дифференциальной форме:

$$\varpi = \rho j^2 = jE = \sigma E^2 ,$$

где ϖ – удельная тепловая мощность тока (это количество тепла, выделяющееся за единицу времени в единице объёма проводника).

Часть IV

МАГНЕТИЗМ

4.1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

4.1.1. Магнитное поле. Источник магнитного поля

Характеристики магнитного поля

В начале XIX века физики полагали, что магнитное поле создаётся постоянными магнитами природного происхождения. Но было также известно, что иногда после удара молнии металлические предметы намагничивались. Это наводило на мысль о том, что магнетизм и электрический ток (молния) каким-то образом связаны между собой.

Зимой 1819 года Ганс Христиан Эрстед заметил, что магнитная стрелка, висящая параллельно проводнику, отклоняется при включении тока.

При изменении направления тока на противоположное стрелка отклонялась в противоположном направлении.

Так было обнаружено, что магнитное поле создаётся электрическим током.

Другими словами, магнитное поле создаётся зарядами, которые упорядоченно движутся относительно наблюдателя.

Обратите внимание на важную деталь: для наблюдателя, относительно которого заряженные частицы движутся упорядоченно, существует магнитное поле, созданное этими зарядами.

Но для наблюдателя, который движется вместе с этими же заряженными частицами, магнитного поля нет! Для этого наблюдателя существует только электростатическое поле, созданное неподвижными относительно него зарядами.

Это означает, что возникновение магнитного поля является проявлением релятивистских эффектов.

Изменение направления тока в опыте Эрстеда вызвало изменение направления отклонения магнитной стрелки. Следовательно, магнитное поле имеет направленный характер. Отсюда вывод: магнитное поле должно характеризоваться векторной величиной.

Основной силовой характеристикой магнитного поля является индукция магнитного поля. Эту характеристику принято обозначать символом **B**. Единица измерения индукции $[B] = \text{Тл}$ (тесла).

Кроме индукции **B** используется вспомогательная характеристика магнитного поля **H**, которую принято называть напряжённостью магнитного поля. Единица измерения напряжённости – ампер на метр ($[H] = \text{А/м}$).

4.1.2. Индукция магнитного поля, созданного движущимся точечным зарядом

Рассмотрим заряд q , движущийся с постоянной скоростью **v**.

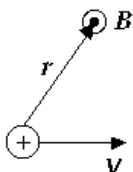
Заряд движется, следовательно, он создаёт магнитное поле.

Экспериментально установлено, что индукция **B** магнитного поля, созданного этим зарядом в интересующей нас точке, равна

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

где **r** – радиус-вектор, начинающийся на заряженной частице и заканчивающийся в интересующей нас точке; r – модуль вектора **r**; μ_0 – магнитная постоянная; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

Как следует из последнего выражения, вектор **B** перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы **v** и **r**. На приведённом рисунке вектор **B** в соответствии с правилом правого винта направлен на нас (векторы **v** и **r** лежат в плоскости рисунка).



Выражение для расчёта **B** позволяет выявить ряд существенных факторов, влияющих на величину индукции магнитного поля.

Во-первых, магнитное поле создаётся движущимися **зарядами**. Следовательно, магнитная индукция должна зависеть от величины заряда q . Эксперимент подтвердил, что индукция **B** прямо пропорциональна q .

Во-вторых, магнитное поле, создаётся **движущимися** зарядами. Причём вследствие релятивистского характера оно должно быть тем

сильнее, чем больше скорость заряда. И действительно, $\mathbf{B}$ прямо пропорциональна скорости заряда v .

В-третьих, магнитное поле должно ослабевать по мере удаления от движущегося заряда. Из выражения для расчёта $\mathbf{B}$ следует, что индукция магнитного поля, созданного движущимся зарядом, действительно обратно пропорциональна квадрату модуля радиуса-вектора $\mathbf{r}$, определяющего положение точки в пространстве относительно заряда.

Если необходимо рассчитать магнитное поле, созданное несколькими движущимися зарядами, следует использовать принцип суперпозиции: $\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i$.

4.1.3. Закон Био–Савара–Лапласа

Найдём выражение для расчёта индукции магнитного поля, созданного током I .

В элементарном участке проводника dl содержится $n \cdot dl \cdot S$ свободных носителей заряда, где n – концентрация свободных носителей заряда; dl – длина элементарного участка проводника; S – площадь поперечного сечения проводника.

Каждый из зарядов создаёт в интересующей нас точке магнитное поле, индукция которого

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

где $\mathbf{v}$ – скорость упорядоченного движения свободных носителей заряда. Умножив $\mathbf{B}$ на количество свободных носителей заряда в элементе проводника dl , получим индукцию магнитного поля, созданную этим элементом проводника с током:

$$d\mathbf{B} = \mathbf{B} n dl S = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3} n dl S = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl[en\mathbf{v}, \mathbf{r}]S}{r^3},$$

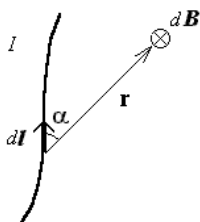
поскольку $en\mathbf{v} = \mathbf{j}$ (здесь $\mathbf{j}$ – вектор плотности тока), постольку

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl[\mathbf{j}; \mathbf{r}]}{r^3} S;$$

учитывая, что $dl \cdot \mathbf{j} = dl \cdot j$ (dl и $\mathbf{j}$ совпадают по направлению), получаем

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{jS[d\mathbf{l}; \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}; \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля, созданного элементом dl проводника с током I на расстоянии r от элемента проводника, определяется выражением



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\mathbf{l}; \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Это выражение и представляет собой закон Био–Савара–Лапласа.

Из закона видно, что вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$ всегда перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$. Его направление определяется по правилу правого винта.

Модуль вектора $d\mathbf{B}$ определяется из выражения

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

где α – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

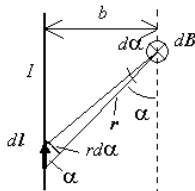
Необходимо учесть, что полученное выражение позволяет рассчитать индукцию магнитного поля, созданную одним бесконечно малым элементом проводника dl с током I .

Для того чтобы найти магнитную индукцию, созданную всем проводником, необходимо использовать принцип суперпозиции, т. е. просуммировать векторы $d\mathbf{B}$, созданные каждым элементом проводника в интересующей нас точке.

4.1.4. Расчёт магнитных полей с помощью закона Био–Савара–Лапласа

4.1.4.1. Индукция магнитного поля отрезка прямолинейного проводника с током

Для всех бесконечно малых элементов dl отрезка векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ лежат в плоскости листа. Поэтому векторы $d\mathbf{B}$, созданные в выбранной нами точке различными элементами проводника, направлены одинаково – перпендикулярно плоскости листа. Следовательно, сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей dB .



Из рисунка видно, что $r = b/\sin\alpha$ (b – расстояние от проводника до интересующей нас точки), и

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Тогда индукция, созданная элементом проводника dl , равна

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\alpha dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \sin\alpha \frac{\sin^2\alpha}{b^2} \frac{bd\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\alpha d\alpha}{b}.$$

Индукция магнитного поля, созданного всем проводником, может быть найдена как интеграл от dB в пределах от α_1 до α_2 :

$$B = \int_1^2 dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{I \sin\alpha d\alpha}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

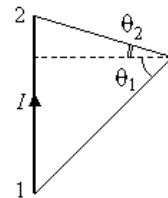
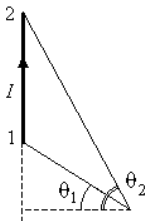
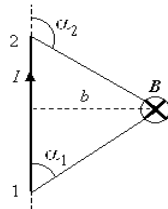
Иногда удобнее воспользоваться другим выражением:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

(обратите внимание на рисунок, показывающий углы θ_1 и θ_2).

Кроме того, обратим также внимание на то, что если точка расположена так, как показано на рисунке, то θ_2 меняет знак, и формула для расчёта магнитного поля прямолинейного отрезка записывается следующим образом:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\sin\theta_2 + \sin\theta_1).$$



4.1.4.2. Индукция магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током

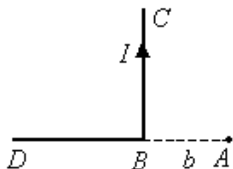
Если длина прямого проводника бесконечно велика, то $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$.

В этом случае индукция магнитного поля, созданного проводником, будет равна

$$B = \int_1^2 dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{I \sin \alpha d\alpha}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля, созданного бесконечно длинным проводником, прямо пропорциональна току в проводнике и обратно пропорциональна расстоянию от проводника до интересующей нас точки.

Дополнительно рассмотрим магнитное поле, созданное бесконечным проводником, который изогнут под прямым углом.



Ограничимся получением расчётной формулы для точки A , расположенной на продолжении одной из половин проводника.

Участок DB в точке A не создаёт магнитного поля, так как для него α_1 и α_2 равны 0.

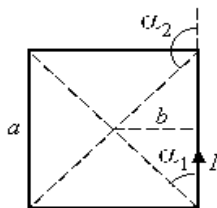
Для участка BC $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = -180^\circ$. Поэтому индукция, созданная этим участком, равна $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b}$.

Таким образом, индукция магнитного поля в точке A равна половине индукции, созданной прямым бесконечно длинным проводником с таким же током.

4.1.4.3. Индукция магнитного поля в центре квадрата

Рассмотрим квадрат со стороной a , в котором течёт ток I .

Все стороны квадрата создают в его центре одинаковое магнитное поле. Поэтому, если индукция, созданная одной стороной, равна B , то магнитная индукция, созданная всеми сторонами, равна $4B$.



В рассматриваемом случае $\alpha_1 = 45^\circ$, а $\alpha_2 = 135^\circ$ (см. рисунок).

Индукция магнитного поля, созданного одной стороной, равна

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\cos 45^\circ - \cos 135^\circ) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sqrt{2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{a} \sqrt{2}.$$

Соответственно индукция магнитного поля, созданного всеми сторонами, равна $B = 4B = \frac{\mu_0}{\pi} \frac{2I}{a} \sqrt{2}$.

В показанном на рисунке случае индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости квадрата на нас.

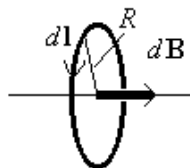
4.1.4.4. Расчёт магнитного поля замкнутого кругового тока (витка с током)

Пусть радиус витка равен R , а сила тока в нём I .

Вначале рассмотрим расчёт поля в центре витка.

Каждый элемент тока будет создавать индукцию, направленную вдоль оси витка. Поэтому, как и в предыдущем случае, сложение dB алгебраическое и $B = \int dB = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}$ и, взяв интеграл, получаем

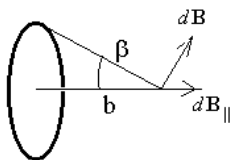
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot 2\pi R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot 2\pi}{R}.$$



Поле на оси витка на расстоянии b от его центра рассчитывается несколько сложнее. В этом случае векторы $d\mathbf{B}$ не параллельны друг другу.

При суммировании составляющие векторов $d\mathbf{B}$, перпендикулярные оси, уничтожаются, а параллельные оси – складываются.

Из рисунка видно, что



$$dB_{\parallel} = dB \sin \beta = dB \frac{R}{\sqrt{R^2 + b^2}};$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(R^2 + b^2)};$$

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(R^2 + b^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + b^2}}.$$

Проинтегрировав это выражение по всему контуру, получаем

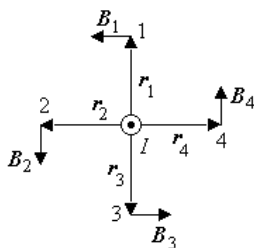
$$B = \oint dB_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + b^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I\pi R^2}{(R^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля на оси кругового витка с током убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния от центра витка до точки на оси. Вектор магнитной индукции на оси витка параллелен оси. Его направление можно определить с помощью правого винта: если направить правый винт параллельно оси витка и вращать его по направлению тока в витке, то направление поступательного движения винта покажет направление вектора магнитной индукции.

4.1.5. Силовые линии магнитного поля

Магнитное поле, как и электростатическое, удобно представлять в графической форме – с помощью силовых линий магнитного поля.

Силовая линия магнитного поля – это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора магнитной индукции.



Силовые линии магнитного поля проводят так, что их густота пропорциональна величине магнитной индукции: чем больше магнитная индукция в некоторой точке, тем больше густота силовых линий.

Таким образом, силовые линии магнитного поля имеют сходство с силовыми линиями электростатического поля.

Однако им свойственны и некоторые особенности.

Рассмотрим магнитное поле, созданное прямым проводником с током I .

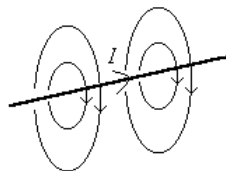
Пусть этот проводник перпендикулярен плоскости рисунка.

В различных точках, расположенных на одинаковых расстояниях от проводника, индукция одинакова по величине.

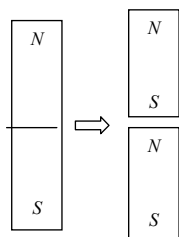
Направление вектора $\mathbf{B}$ в разных точках показано на рисунке.

Линией, касательная к которой во всех точках совпадает с направлением вектора магнитной индукции, в данном случае является окружность.

Следовательно, силовые линии магнитного поля прямолинейного проводника с током представляют собой окружности, охватывающие проводник. Центры всех силовых линий расположены на проводнике.



Таким образом, силовые линии магнитного поля существенно отличаются от силовых линий электростатического поля (силовые линии электростатического поля не могут быть замкнуты, они начинаются и заканчиваются на зарядах).



Отсутствие начала и конца у силовых линий магнитного поля означает важную особенность магнитного поля: в природе нет (по крайней мере, пока не обнаружено) отдельно существующего северного или южного магнитного полюса, которые являлись бы источником магнитного поля определённой полярности и на которых могли бы начинаться или заканчиваться силовые линии магнитного поля.

Поэтому любой источник магнитного поля имеет и северный, и южный полюсы.

4.1.6. Сила Лоренца

Экспериментально установлено, что на заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила. Эту силу принято называть силой Лоренца:

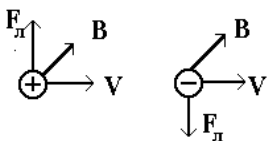
$$\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Модуль силы Лоренца $F_L = qvB \sin \alpha$, где α – угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$.

Направление силы Лоренца зависит от направления вектора $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Его можно определить с помощью правила правого винта для векторного произведения с учётом знака заряда q .

Если заряд q положительный, то $\mathbf{F}$ параллельна вектору $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Если же $q < 0$, то сила Лоренца противоположна направлению вектора $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ (см. рисунок).

Если заряженная частица движется параллельно силовым линиям магнитного поля, то угол α между векторами скорости и магнитной индукции равен нулю. Следовательно, сила Лоренца на такой заряд не действует ($\sin 0 = 0$, $F_{\text{Л}} = 0$).



Если же заряд будет двигаться перпендикулярно силовым линиям магнитного поля, то угол α между векторами скорости и магнитной индукции равен 90° . В этом случае сила Лоренца имеет максимально возможное значение: $F_{\text{Л}} = qvB$.

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряда. Это означает, что сила Лоренца не может изменить величину скорости движения, но изменяет её направление.

Поэтому в однородном магнитном поле заряд, влетевший в магнитное поле перпендикулярно его силовым линиям, будет двигаться по окружности.

Если на заряд действует только сила Лоренца, то движение заряда подчиняется следующему уравнению, составленному на основе второго закона Ньютона: $ma = F_{\text{Л}}$.

Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости, постольку ускорение заряженной частицы является центростремительным (нормальным): $a = \frac{v^2}{R}$ (здесь R – радиус кривизны траектории заряженной частицы).

Используя выражение для расчёта ускорения и заменив $F_{\text{Л}}$ на qvB , получаем $m \frac{v^2}{R} = qvB$.

Отсюда следует, что радиус окружности, по которой будет двигаться заряд в однородном магнитном поле, равен $R = \frac{mv}{qB}$.

Если заряженная частица влетит в однородное магнитное поле под углом α к силовым линиям, то её траектория будет более сложной.

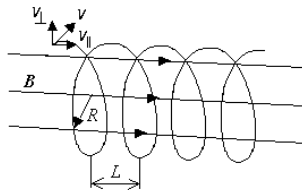
Для того чтобы установить форму траектории и её параметры, разложим скорость частицы на две компоненты – параллельную $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ и перпендикулярную $v_{\perp} = v \sin \alpha$ силовым линиям магнитного поля.

Компонента скорости $v_{\parallel}$ не изменяется, так как сила Лоренца не действует на заряженную частицу, движущуюся параллельно силовым линиям магнитного поля. За счёт этой компоненты заряд будет равномерно двигаться вдоль силовых линий.

Компонента скорости $v_{\perp}$ не будет меняться по величине, но будет непрерывно изменяться её направление. За счёт этой компоненты заряд будет двигаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна силовым линиям.

Заряженная частица одновременно будет участвовать в этих движениях, поэтому её траектория будет представлять собой винтовую линию. Радиус винтовой линии равен

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}.$$



Период обращения заряженной частицы равен времени, за которое она пройдёт один виток: $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}.$

Шаг винтовой линии равен расстоянию, которое заряд пройдёт за один период: $L = v_{\parallel}T.$

4.1.7. Сила Ампера

Если проводник с током поместить в магнитное поле, то на каждый электрон, направленное движущийся в проводнике, действует сила Лоренца.

Действие этой силы передаётся всему проводнику. В результате на проводник с током, находящийся в магнитном поле, будет действовать некоторая сила. Найдём её величину.

Для этого выделим элементарный участок проводника $d\mathbf{l}$. В нём имеется $n \cdot S \cdot dl$ свободных электронов (n – концентрация свободных носителей заряда в проводнике; S – площадь поперечного сечения проводника; dl – длина элементарного участка). На каждый из электронов действует сила $\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$

Результирующая сила $d\mathbf{F}$, действующая на элемент проводника, равна сумме сил, действующих на все электроны в участке $d\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}_L \cdot n \cdot dl \cdot S = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}] \cdot n \cdot dl \cdot S ;$$

поскольку $q \cdot n \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j}$ ($\mathbf{j}$ – вектор плотности тока), то сила $d\mathbf{F}$ равна $d\mathbf{F} = [\mathbf{j}, \mathbf{B}] dL = [\mathbf{dL}, \mathbf{B}] j = I[\mathbf{dL}, \mathbf{B}]$.

Это и есть выражение для расчёта силы Ампера, т. е. силы, действующей на элемент проводника с током, находящийся в магнитном поле.

Направление силы Ампера совпадает с направлением вектора $[\mathbf{dL}, \mathbf{B}]$ и может быть определено по правилу правого винта для векторного произведения.

Для вычисления силы, действующей на весь проводник, необходимо взять интеграл от $d\mathbf{F}$ по длине проводника: $\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}$.

Теперь рассмотрим два параллельных проводника с токами I_1 и I_2 , расположенных на расстоянии b друг от друга.

Первый проводник создаёт магнитное поле, индукция которого $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{b}$.

В этом поле на единицу длины второго проводника действует сила, равная

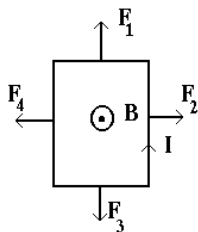
$$F_{21} = \frac{dF_{21}}{dl} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}.$$

Такая же по величине сила действует и на первый проводник. Легко увидеть, что если токи направлены в одну сторону, проводники притягиваются, если же токи противоположны, то проводники отталкиваются.

4.1.8. Контур с током в однородном магнитном поле

Рассмотрим контур с постоянным током I , находящийся в однородном магнитном поле. На каждый элементарный участок контура действует сила Ампера $d\mathbf{F} = I[\mathbf{dL}, \mathbf{B}]$.

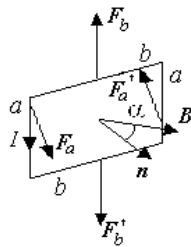
Сила, действующая на контур в целом, равна сумме сил, действующих на все элементарные участки контура, и может быть выражена как $\mathbf{F} = \oint I[\mathbf{dL}, \mathbf{B}]$.



Учитывая, что $I = \text{const}$ и в однородном магнитном поле $\mathbf{B} = \text{const}$, величины I и $\mathbf{B}$ можно вынести за знак интеграла: $\mathbf{F} = I \left[\oint d\mathbf{l}, \mathbf{B} \right]$.

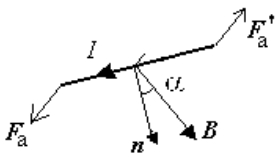
Векторный интеграл $\oint d\mathbf{l} = 0$. Поэтому результирующая сила, действующая на контур, равна нулю.

Но это не означает, что равны нулю силы, действующие на отдельные участки контура. Например, на прямоугольный контур, плоскость которого перпендикулярна силовым линиям однородного магнитного поля, действуют растягивающие или сжимающие его силы (см. рисунок).



Повернём контур так, чтобы положительная нормаль к его плоскости образовала некоторый угол α с силовыми линиями (направление положительной нормали определяют по правилу правого винта).

В этом случае на стороны b действуют силы, которые деформируют контур, но не вызывают его движения.



Силы, действующие на стороны a контура, стремятся повернуть контур так, чтобы вектор $\mathbf{n}$ был параллелен вектору $\mathbf{B}$ (вектор $\mathbf{n}$ – единичный вектор, направление которого совпадает с положительной нормалью к контуру).

Модули этих сил равны $F_a = IaB$. Силы

$\mathbf{F}_a$ и $\mathbf{F}'_a$ создают момент пары сил, модуль которого равен $M = F_a b \sin \alpha = IabB \sin \alpha = IB S \sin \alpha$, где S – площадь контура; α – угол между вектором $\mathbf{F}_a$ и продолжением стороны b контура; этот угол равен по величине углу между единичным вектором $\mathbf{n}$ и вектором $\mathbf{B}$.

В векторной форме данное выражение имеет вид $\mathbf{M} = [IS\mathbf{n}, \mathbf{B}]$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, направленный по положительной нормали к контуру.

Выражение для момента сил можно записать и в такой форме: $\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]$, где $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$ – магнитный момент контура с током; направление магнитного момента совпадает с положительной нормалью к контуру.

Из выражения для расчёта $\mathbf{M}$ следует, что величина момента сил зависит от ориентации контура в магнитном поле. Момент сил, действующий на контур, максимален, если контур параллелен силовым

линиям магнитного поля (при этом угол между магнитным моментом и вектором магнитной индукции равен 90°). Если же контур перпендикулярен им, то момент сил равен нулю.

Поэтому если магнитный момент $\mathbf{p}_m$ контура с током параллелен вектору $\mathbf{B}$, то в однородном магнитном поле контур будет находиться в состоянии устойчивого равновесия.

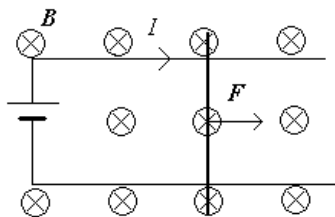
Контур будет в равновесии и в том случае, когда $\alpha = 180^\circ$, но равновесие будет неустойчивым.

Следует отметить, что все выводы, сформулированные в данном разделе, верны и для контура произвольной формы, находящегося в однородном магнитном поле.

4.1.9. Магнитный поток. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле

Рассмотрим контур из П-образного проводника и подвижной перемычки длиной l , находящийся в однородном магнитном поле.

Пусть в этом контуре источником ЭДС поддерживается постоянный ток I .



В результате взаимодействия с магнитным полем на перемычку будет действовать сила $\mathbf{F} = I[\mathbf{l}, \mathbf{B}]$. Под действием этой силы перемычка будет двигаться вправо.

При смещении перемычки на dh сила F совершит элементарную работу $\delta A = \mathbf{F}d\mathbf{h} = I[\mathbf{l}, \mathbf{B}]d\mathbf{h} = I\mathbf{B}[d\mathbf{h}, \mathbf{l}] = I\mathbf{B}d\mathbf{S} = Id\Phi$, где $d\Phi = \mathbf{B}d\mathbf{S}$ – магнитный поток через элементарную поверхность площадью $d\mathbf{S}$.

Магнитным потоком называется скалярная величина, равная скалярному произведению вектора магнитной индукции на площадь элементарной поверхности $d\mathbf{S}$, пронизываемой магнитным полем.

Из приведённых выше выкладок видно, что вектор элементарной поверхности $d\mathbf{S} = [d\mathbf{h}, \mathbf{l}]$ перпендикулярен поверхности dS и определяется по правилу правого винта для векторного произведения.

В СИ магнитный поток измеряется в $[\Phi] = [B][dS] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб}$ (вебер).

Магнитный поток через конечную площадку S равен $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$.

Таким образом работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле, определяется выражением $\delta A = Id\Phi$ и равна произведению силы тока в проводнике на приращение магнитного потока, вызванное перемещением проводника.

В данном случае $d\Phi$ есть поток вектора магнитной индукции через площадь, пройденную перемычкой в процессе её движения.

Теперь рассмотрим жёсткий замкнутый контур с током I , перемещающийся в магнитном поле.

Выделим бесконечно малый элемент контура dl . При его перемещении на расстояние dh магнитное поле совершает работу $\delta A' = Id\Phi'$, где $\delta A'$ – работа по перемещению элемента контура dl на расстояние dh , а $d\Phi'$ – поток вектора магнитной индукции через площадь, пройденную элементом контура dl .

Работа по перемещению всего контура на dh :

$$\delta A = \int \delta A' = \int Id\Phi' = I \int d\Phi' = Id\Phi,$$

где $d\Phi$ – магнитный поток через площадь, пройденную всеми элементами контура dl

Работа по перемещению контура на конечное расстояние

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 Id\Phi = I \int_1^2 d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где Φ_2 и Φ_1 – значения магнитного потока через контур в начальном и конечном положениях контура.

Необходимо отметить, что последний результат имеет общий характер, он не зависит от того, как именно изменялось положение контура.

4.1.10. Теорема Гаусса для магнитного поля

Теорема Гаусса для электростатического поля рассматривалась в разд. 2.6. Аналогичная теорема существует и для магнитного поля. Рассмотрим её.

В теореме Гаусса для магнитного поля рассматривается поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность.

Найти величину магнитного потока можно следующим образом.

Силовые линии магнитного поля, в отличие от силовых линий электростатического поля, не могут начинаться или заканчиваться внутри замкнутой поверхности.

Другими словами, количество силовых линий магнитного поля, входящих в замкнутый объём, всегда равно количеству линий, выходящих из него.

Но это означает, что суммарный поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Это и есть теорема Гаусса для магнитного поля.

Теорема Гаусса для электростатического поля показывает, что источником электрического поля являются заряды: $\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$.

Теорема Гаусса для магнитного поля показывает, что магнитных зарядов в природе не существует (это уже было отмечено в разд. 4.1.5).

4.1.11. Закон полного тока

Рассмотрим магнитное поле, созданное бесконечным прямым проводником с током I .

Как было установлено ранее, силовые линии такого тока – окружности с центром на проводнике, а индукция магнитного поля

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}.$$

Вычислим для этого поля циркуляцию вектора магнитной индукции $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$, т. е. интеграл от скалярного произведения вектора магнитной индукции на элемент контура $d\mathbf{l}$, взятый по некоторому замкнутому контуру.

Для расчёта циркуляции необходимо выбрать контур.

В данном случае удобнее всего в качестве контура выбрать окружность, совпадающую с силовой линией магнитного поля.

Для такого контура $\mathbf{B}d\mathbf{l} = Bdl$, так как в любой точке $\mathbf{B}$ параллелен $d\mathbf{l}$ и косинус угла между этими векторами равен единице. Поэтому

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \oint Bdl = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{2I}{b} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} \oint dl = \mu_0 I.$$

Таким образом, циркуляция вектора $\mathbf{B}$ оказалась равна произведению магнитной постоянной на ток, охваченный контуром интегрирования: $\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0 I$.

Можно показать, что полученный результат не связан с формой контура интегрирования.

Если магнитное поле создано несколькими токами, то индукция магнитного поля в любой точке может быть найдена на основе принципа суперпозиции $\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i$, где $\mathbf{B}_i$ — индукция магнитного поля, созданного i -м проводником с током.

Циркуляция каждого из векторов $\mathbf{B}_i$ будет равна произведению силы i -го тока на магнитную постоянную $\oint \mathbf{B}_i d\mathbf{l} = \mu_0 I_i$.

В свою очередь, циркуляция вектора $\mathbf{B}$ будет равна

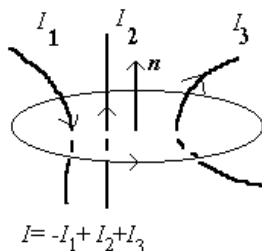
$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \oint \sum_i \mathbf{B}_i d\mathbf{l} = \sum_i \oint \mathbf{B}_i d\mathbf{l} = \sum_i \mu_0 I_i = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I,$$

т. е. циркуляция вектора магнитной индукции по контуру, охватывающему несколько токов, равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охваченных этим контуром.

Полученное выражение для циркуляции вектора магнитной индукции имеет общий характер и называется **законом полного тока** (этот закон также называют теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции).

Знак тока в алгебраической сумме определяется простым правилом: ток, охватываемый контуром, положителен, если его направление совпадает с направлением положительной нормали к контуру (см. рисунок).

Направление положительной нормали определяется правилом правого винта: если правый винт вращать по выбранному направ-

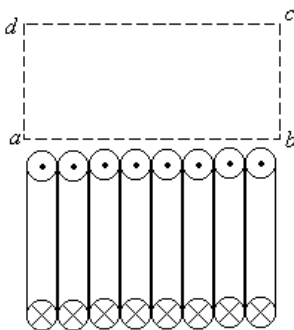


лению обхода контура, то направление поступательного движения винта покажет направление положительной нормали $\mathbf{n}$.

Закон полного тока удобно использовать для расчёта магнитных полей, созданных токами, которым свойственна симметрия (см. следующий раздел).

4.1.11.1. Магнитное поле бесконечного соленоида

Соленоидом называется проводник, намотанный на цилиндрическую поверхность.



Если витки соленоида намотаны вплотную друг к другу, то соленоид удобно представлять в виде совокупности витков одинакового радиуса, расположенных параллельно друг другу вдоль оси соленоида. Центры витков расположены на оси, плоскости витков перпендикулярны оси. Токи во всех витках одинаковы.

Как показано в разд. 4.1.4.4, вектор магнитной индукции на оси витка параллелен ей. Следовательно, и суммарное поле всех витков на оси соленоида параллельно этой оси.

Поскольку соленоид симметричен относительно оси, проходящей через центры витков, то и созданное им магнитное поле должно быть симметричным относительно этой оси.

Следовательно, магнитное поле параллельно оси соленоида и в остальных точках, расположенных внутри соленоида.

Магнитное поле вне бесконечного соленоида равно нулю. Это можно доказать следующим образом.

Вначале допустим, что магнитное поле вне соленоида всё же существует.

Тогда оно должно быть симметричным относительно оси соленоида. Это значит, что силовые линии магнитного поля вне соленоида должны быть параллельны его оси.

Для расчёта индукции магнитного поля вне соленоида воспользуемся законом полного тока.

Найдём циркуляцию вектора магнитной индукции по прямоугольному контуру, у которого сторона ab проходит вдоль витков соленоида вблизи от них, а сторона cd находится бесконечно далеко от витков.

Скалярное произведение $\mathbf{B}d\mathbf{l}$ во всех точках сторон bc и da равно нулю, так как угол между $\mathbf{B}$ и $d\mathbf{l}$ на этих сторонах прямой.

Магнитное поле бесконечно далеко от соленоида равно нулю, поэтому вклад участка cdb циркуляции также равен нулю.

Прежде чем определять вклад участка ab , найдём алгебраическую сумму токов, охваченных контуром $abcd$.

Поскольку контур не охватывает ни один виток соленоида, сумма токов равна нулю.

Следовательно, и циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по контуру $abcd$ должна быть равна нулю.

Но это означает, что и на участке ab скалярное произведение равно нулю. Это возможно лишь в том случае, если индукция магнитного поля и вблизи от поверхности соленоида равна нулю.

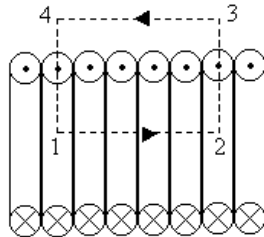
Таким образом, магнитное поле вне бесконечно длинного соленоида действительно равно нулю.

Теперь найдём индукцию магнитного поля внутри соленоида.

В качестве контура интегрирования выберем прямоугольник 1234, две стороны которого параллельны оси соленоида, охватывающий несколько витков соленоида.

Циркуляция $\mathbf{B}$ по этому контуру равна

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{B}_c d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{B}_c d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{B}_{\text{вн}} d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{B}_c d\mathbf{l}.$$



На участках 2–3 и 4–1 индукция поля в соленоиде $\mathbf{B}_c$ перпендикулярна элементу контура $d\mathbf{l}$, поэтому скалярное произведение $\mathbf{B}_c$ и $d\mathbf{l}$ равно нулю.

Интеграл на участке 3–4 также равен нулю, так как поле вне бесконечного соленоида равно нулю.

Следовательно, $\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{B}_c d\mathbf{l} = \int_1^2 B_c dl = B_c l_{12}$, где l_{12} – длина стороны 1–2 контура интегрирования.

При вычислении интеграла были учтены следующие соображения:

– внутри соленоида направление магнитной индукции и направление обхода контура совпадают, поэтому скалярное произведение $\mathbf{B}d\mathbf{l}$ равно произведению модулей этих векторов;

– модуль вектора магнитной индукции во всех точках участка контура 1-2 одинаков, поэтому $\mathbf{B}$ можно вынести за знак интеграла;

– интеграл $\int_1^2 dl = l_{12}$, поэтому циркуляция равняется произведению модуля магнитной индукции на длину участка 1–2.

Ток, охваченный этим контуром, равен $nl_{12}I$, где n – количество витков на единице длины соленоида; I – ток в одном витке.

Согласно закону полного тока циркуляция вектора магнитной индукции равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охваченных контуром:

$$Bl_{12} = \mu_0 nl_{12}I;$$

сокращая длину участка 1–2, получаем выражение для расчёта индукции магнитного поля внутри бесконечного соленоида: $B = \mu_0 nI$.

Обратите внимание на то, что величина B внутри соленоида во всех точках одинакова. Это значит, что магнитное поле внутри бесконечного соленоида однородно.

4.1.11.2. Магнитное поле тороида

Тороидом называется соленоид, свёрнутый в кольцо.

Поскольку тороид симметричен относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости, в которой лежит тороид, то и магнитное поле должно быть симметрично относительно этой оси. Следовательно, силовые линии магнитного поля в тороиде также должны быть симметричны относительно той же самой оси.

В качестве контура интегрирования удобно выбрать окружность, совпадающую с какой-либо силовой линией магнитного поля.

В этом случае циркуляция вектора магнитной индукции $\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \oint Bdl = B\oint dl = B \cdot 2\pi r$ (направления $\mathbf{B}$ и $d\mathbf{l}$ во всех точках контура совпадают, поэтому скалярное произведение $\mathbf{B}d\mathbf{l}$ равно произведению их модулей; магнитная индукция во всех точках контура одинакова, следовательно, её можно вынести за знак интеграла).

Ток, охваченный контуром, $I_{\Sigma} = NI$, где N – число витков тороида.

Тогда в соответствии с законом полного тока $B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$ и

$$B = \mu_0 NI \frac{1}{2\pi r}.$$

Обратите внимание: магнитная индукция поля внутри тороида зависит от расстояния между центром тороида и точкой внутри него. Величина B обратно пропорциональна расстоянию r .

Можно показать, что поле вне тороида равно нулю (примерно так же, как это было сделано в предыдущем разделе для поля вне соленоида).

4.1.12. Индуктивность соленоида

Рассмотрим произвольный замкнутый контур с током I . В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа индукция магнитного поля, созданного контуром, прямо пропорциональна силе тока в проводнике.

Магнитный поток, охваченный контуром, прямо пропорционален индукции магнитного поля внутри контура и его площади $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$.

Если охваченная контуром площадь неизменна, то величина магнитного потока прямо пропорциональна $\mathbf{B}$ и, следовательно, силе тока в контуре I : $\Phi = LI$.

Коэффициент пропорциональности L называют коэффициентом индуктивности, или индуктивностью контура.

Индуктивность является размерным коэффициентом пропорциональности. В СИ индуктивность измеряется в генри (Гн).

Найдём выражение для расчёта индуктивности соленоида.

Как показано в разд. 4.1.11.1, магнитная индукция поля внутри соленоида $B = \mu_0 nI$.

Магнитный поток через один виток соленоида $\Phi = \mu_0 nIS = \mu_0 \frac{N}{l} IS$, где l длина соленоида; N – количество витков соленоида на длине l ; S – площадь витка соленоида.

Магнитный поток через N витков соленоида равен $\mu_0 \frac{N^2}{l} IS$.

Это означает, что для соленоида $LI = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS$ и отсюда индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 V ,$$

где V – объём соленоида.

Таким образом, индуктивность соленоида без сердечника определяется плотностью витков и объёмом соленоида.

4.2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

Как известно, магнитное поле создаётся электрическим током.

Если один ток создаёт магнитное поле в вакууме, а второй такой же – в веществе, то созданные ими магнитные поля будут разными. Причём в некоторых веществах магнитное поле будет слабее поля в вакууме, в других – сильнее.

По соотношению поля в веществе и в вакууме вещества делят на три класса: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

В настоящем разделе будут рассмотрены причины, по которым разные вещества намагничиваются по-разному.

4.2.1. Намагничивание магнетика

Всякое вещество является магнетиком. Это значит, что всякое вещество способно намагничиваться, т. е. под действием внешнего магнитного поля в нём возникает дополнительное собственное магнитное поле. Другими словами, индукция магнитного поля внутри магнетика **B** складывается из индукции внешнего поля **B**₀ и индукции собственного поля **B**' :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'.$$

Механизм намагничивания вещества был раскрыт французским учёным Андре Мари Ампером, который предположил, что во всех молекулах вещества циркулируют круговые токи. Каждый такой ток создаёт магнитное поле. Но поскольку в отсутствие внешнего магнитного поля молекулярные токи ориентируются хаотически, суммарное магнитное поле всех этих токов равно нулю.

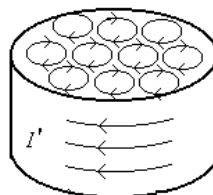
Появление внешнего магнитного поля вызывает упорядочение ориентации молекулярных круговых токов, в результате чего суммарное магнитное поле молекулярных токов становится отличным от нуля, а магнетик – намагничённым.

Намагничивание магнетика количественно характеризуют намаг-
 ниченностью $\mathbf{J}$, которая определяется выражением $\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_{m_i}}{\Delta V}$,

где $\sum \mathbf{p}_{m_i}$ – суммарный магнитный момент всех
 молекул, находящихся в элементарном объёме ΔV в
 окрестности интересующей нас точки.

Единица измерения вектора намагничённости –
 $[J] = [p_m] / [V] = \text{А} \cdot \text{м}^2 / \text{м}^3 = \text{А/м}$.

Итак, намагничивание вещества есть результат
 упорядочивания ориентации молекулярных токов
 внешним магнитным полем. Условно это можно представить так, как
 показано на рисунке.



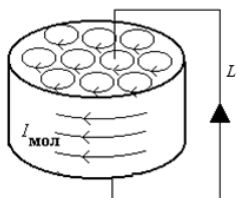
Как видно из рисунка, токи внутри объёма магнетика компенсиру-
 ют друг друга. Токи же, выходящие на боковую поверхность, компен-
 сироваться не будут.

Поэтому намагничение вещества можно трактовать как результат
 появления на боковой поверхности магнетика макроскопического тока
 намагничивания I' .

4.2.2. Напряжённость магнитного поля

Теорема о циркуляции вектора $\mathbf{H}$

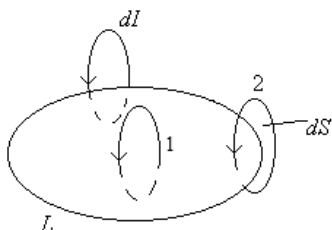
Пусть имеется магнетик, находящийся во внешнем магнитном поле.
 Вычислим циркуляцию вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ по некото-
 рому контуру L .



В предыдущем разделе отмечено, что при
 наличии магнетиков магнитное поле в веществе
 создаётся не только внешними токами проводи-
 мости, но и молекулярными токами I' . Поэтому
 циркуляция вектора магнитной индукции в маг-
 нетике будет равна $\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I')$.

Учёт молекулярных токов связан с рядом трудностей. Но это за-
 труднение можно устранить.

Найдём алгебраическую сумму молекулярных токов, охваченных
 замкнутым контуром L .



Некоторые токи будут дважды пронизывать поверхность, охваченную контуром (см. ток 1 на рисунке). Вклад таких токов в алгебраическую сумму равен нулю.

Поэтому в алгебраическую сумму войдут только те токи, которые «нанизаны» на контур (ток 2 на рисунке).

Выделим элемент контура длиной dl .

Молекулярные токи, «нанизанные» на этот элемент контура, создают элементарный макроскопический ток намагничивания dI' (он равен алгебраической сумме молекулярных токов на элементе контура dl).

Магнитный момент этого тока равен $dI' \cdot dS$ (dS – площадь, охваченная молекулярным током).

С другой стороны, магнитный момент можно выразить через намагниченность объёма, занятого этими молекулярными токами, $JdV = Jdl dS$.

Поэтому можно записать $dI' dS = Jdl dS$.

Отсюда следует, что $dI' = Jdl$, т. е. элементарный макроскопический ток намагничивания равен произведению намагниченности на элемент контура dl .

Интегрируя полученное выражение по контуру L , получаем

$$\oint_L Jdl = \oint_L dI' = I'.$$

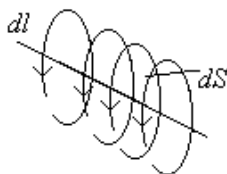
В векторной форме это выражение имеет следующий вид:
 $\oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l} = I'$, т. е. макроскопический ток намагничивания равен циркуляции вектора намагниченности.

Теперь можно записать:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l};$$

$$\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} d\mathbf{l} - \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l} = I;$$

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) d\mathbf{l} = I.$$



Циркуляция величины $\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}$ не зависит от молекулярных токов.

Поэтому её удобно использовать для характеристики магнитного поля в веществе. Эту величину обозначают $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}$ и называют **напряжённостью магнитного поля** $\mathbf{H}$.

Как и вектор электрического смещения $\mathbf{D}$ в электростатике, $\mathbf{H}$ является вспомогательной характеристикой поля (магнитного).

Напряжённость магнитного поля в СИ измеряется в ампер на метр: $[H] = [J] = \text{А/м}$. Обратите внимание: напряжённость магнитного поля и намагниченность измеряются в одних единицах.

Очевидно, что вещество намагничивается тем сильнее, чем сильнее внешнее магнитное поле. В линейных средах намагниченность $\mathbf{J}$ прямо пропорциональна напряжённости внешнего магнитного поля: $\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$, где χ (хи) – магнитная восприимчивость магнетика.

Тогда $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi \mathbf{H}$, $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1 + \chi)} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}$, где $\mu = (1 + \chi)$ – магнит-

ная проницаемость вещества. Из определения μ следует, что магнитная проницаемость является безразмерной величиной.

Последнее соотношение можно переписать в такой форме: $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$.

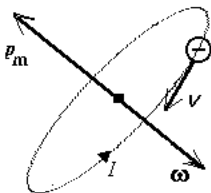
Возвращаясь к расчету циркуляции, можем отметить, что $\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) d\mathbf{l} = I$, или $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I$, т. е. циркуляция вектора напряжённости магнитного поля равна алгебраической сумме токов проводимости²⁰, охваченных контуром. Это и есть теорема о циркуляции вектора $\mathbf{H}$.

Эта теорема позволяет существенно упростить расчёт магнитного поля в веществе, так как достаточно учитывать только токи проводимости, создающие магнитное поле.

²⁰ Следует отметить, что циркуляция вектора $\mathbf{H}$ зависит не только от тока проводимости, но и от конвекционного тока (пример – движение заряженных капель дождя), и от тока смещения (будет рассмотрен далее).

4.2.3. Магнитомеханические явления

В атоме любого вещества электроны движутся вокруг ядра. Для объяснения магнитных явлений можно считать, что электрон вращается по круговой орбите. Угловая скорость электрона направлена так, как показано на рисунке (направление можно определить с помощью правила правого винта).



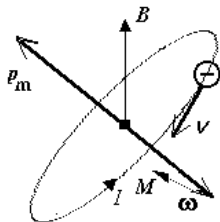
Движение электрона упорядочено. Поэтому орбитальное движение электрона можно трактовать как электрический ток.

Электрон движется по круговой орбите, поэтому созданный им ток является круговым. Поскольку электрон имеет отрицательный заряд, направление созданного им тока противоположно направлению вращения электрона.

Этот круговой ток обладает магнитным моментом $p_m = IS$, направление которого показано на рисунке.

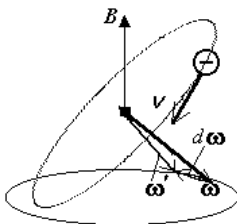
Если вещество находится в магнитном поле, на электрон действует момент силы $\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]$ (см. разд. 4.1.8).

Направление вектора $\mathbf{M}$ определяется по правилу правого винта для векторного произведения. В данном случае момент силы направлен так, как показано на рисунке справа.



В соответствии с основным законом динамики вращательного движения электрон получает угловое ускорение, равное $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{M}}{J}$ (здесь J – момент инерции электрона). Направление углового ускорения совпадает с направлением момента силы.

За время dt электрон получит приращение угловой скорости, равное $d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon} dt$. Направление вектора $d\boldsymbol{\omega}$ совпадает с направлением вектора углового ускорения.



Следовательно, через dt секунд угловая скорость изменится. Она станет равна $\boldsymbol{\omega}'$ (см. рисунок).

Причём, поскольку вектор $d\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, изменится только направление угловой скорости.

В последующие моменты времени рассмотренный эффект будет повторяться – вектор угловой скорости будет поворачиваться вокруг направления внешнего магнитного поля, не изменяясь при этом по модулю.

Конец вектора угловой скорости будет описывать окружность, которая изображена на рисунке.

Поскольку вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения, ось вращения электрона также будет вращаться вокруг направления внешнего магнитного поля.

Такое движение вращающегося тела называют **прецессией**.

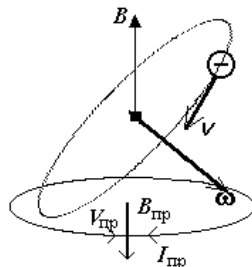
Итак, внешнее магнитное поле вызывает появление дополнительного упорядоченного движения электрона – прецессии.

Дополнительное вращение электрона означает появление дополнительного тока $I_{\text{пр}}$. Направление этого тока противоположно скорости дополнительного вращения $\mathbf{V}_{\text{пр}}$.

Дополнительный ток $I_{\text{пр}}$ создаёт дополнительное магнитное поле $B_{\text{пр}}$.

В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа это магнитное поле направлено против внешнего магнитного поля.

Таким образом, при внесении любого вещества в магнитное поле возникает прецессия орбит электронов вокруг направления внешнего магнитного поля. Прецессия, в свою очередь, порождает магнитное поле, всегда направленное против внешнего. Поэтому в любом веществе из-за прецессии электронных орбит магнитное поле становится слабее внешнего магнитного поля.



4.2.3.1. Диамагнетики

Магнитный момент атома в основном складывается из орбитальных и спиновых²¹ магнитных моментов электронов. Если их сумма равна нулю, то атом не обладает собственным магнитным моментом. Вещества, состоящие из таких атомов, называются диамагнетиками.

²¹ Электрон имеет собственный магнитный момент, который называется спиновым магнитным моментом.

При внесении такого вещества в магнитное поле в его атомах возникает прецессия электронных орбит, которая вызывает появление магнитного поля $\mathbf{B}'$, направленного против внешнего поля.

Таким образом, диамагнетики – это вещества, в которых внешнее магнитное поле ослабляется.

Следует отметить, что внешнее магнитное поле в диамагнетиках ослабляется очень незначительно. Магнитная проницаемость типичных диамагнетиков имеет величину $\mu \approx 0,99$ (медь, стекло, висмут).

Диамагнетикам свойственна важная особенность – они выталкиваются из магнитного поля.

4.2.3.2. Парамагнетики

К парамагнетикам относятся вещества, атомы которых обладают собственным магнитным моментом.

При внесении такого вещества в магнитное поле его атомы ведут себя подобно магнитным стрелкам – они стремятся повернуться так, чтобы направление их магнитных моментов совпало с внешним магнитным полем.

В результате внешнее магнитное поле и поле, созданное всеми атомами, складываются. Поэтому магнитное поле внутри парамагнетика становится сильнее.

Но кроме ориентации атомов по внешнему магнитному полю, возникает и прецессия электронных орбит, которая создаёт магнитное поле, противоположное внешнему. Этот эффект вызывает ослабление магнитного поля в парамагнетике.

Во всех парамагнетиках собственное магнитное поле атома немного сильнее поля, порождённого прецессией электронных орбит. Поэтому магнитное поле в парамагнетике сильнее внешнего, но весьма незначительно.

Таким образом, парамагнетиками являются вещества, в которых внешнее магнитное поле немного усиливается.

Магнитная проницаемость парамагнетиков превышает единицу на 10^{-4} и менее. К парамагнетикам относятся такие вещества, как воздух, платина, натрий, литий.

В отличие от диамагнетиков парамагнетики втягиваются в область с наиболее сильным магнитным полем.

4.2.4. Ферромагнетики

Природа ферромагнетизма

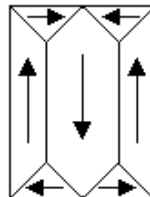
К ферромагнетикам относят вещества, которые способны самопроизвольно намагничиваться. Внешнее магнитное поле в таких веществах может усиливаться в тысячи, десятки тысяч раз.

Типичными ферромагнетиками являются железо, кобальт, никель. К ферромагнетикам также относятся некоторые сплавы.

Особенностью атомов всех ферромагнетиков является наличие у них внутренних незавершённых электронных оболочек. Например, у железа в $3d$ оболочке могут разместиться ещё несколько электронов, но у него имеется два электрона в следующей $4s$ оболочке.

Электроны внутренних незавершённых оболочек участвуют в так называемом обменном взаимодействии, вследствие чего они самопроизвольно выстраивают параллельно друг другу свои спиновые магнитные моменты. В таком состоянии суммарная энергия взаимодействующих атомов минимальна и поэтому оно является устойчивым.

Следует отметить, что такое самопроизвольное (спонтанное) намагничивание происходит в небольших по размеру ($10^{-4} \dots 10^{-5}$ м) областях, которые называют доменами. Магнитные моменты разных доменов ориентированы так, что суммарный магнитный момент образца ферромагнетика равен нулю (см. рисунок). В результате магнитное поле вне ферромагнетика отсутствует.



Металл	θ , К
Fe	1043
Co	1403
Ni	631
Gd	289
Fe_3Al	743
Ni_3Mn	773

ное поле вне ферромагнетика отсутствует.

Если ферромагнетик поместить во внешнее магнитное поле, то он намагнитится. Магнитные моменты доменов изменят свою ориентацию и их суммарное магнитное поле уже не будет равно нулю.

Важной особенностью ферромагнетика является то, что после выключения внешнего магнитного поля он сохранит намагниченность, т. е. станет постоянным магнитом.

Намагниченность ферромагнетика исчезнет, если его нагреть до температуры Кюри θ (см. таблицу). Это температура, при которой

ферромагнетик теряет свои магнитные свойства и превращается в парамагнетик.

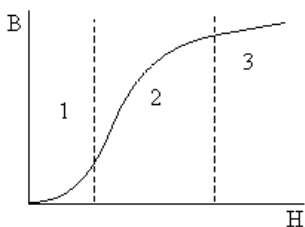
Если нагретый ферромагнетик охладить, то доменная структура восстановится, но имевшаяся до нагрева намагниченность исчезнет.

4.2.5. Намагничивание ферромагнетика

Этапы намагничивания

Намагничивание ферромагнетиков представляет собой процесс, состоящий из нескольких этапов.

На первом этапе при увеличении напряжённости внешнего магнитного поля увеличиваются размеры тех доменов, у которых собственный магнитный момент образует с внешним полем острый угол. При этом уменьшается объём тех доменов, у которых этот угол тупой.



К концу первого этапа домены, у которых упомянутый угол острый, полностью поглощают те, у которых угол между собственным и внешним магнитным полем тупой.

Этот этап намагничивания называют **этапом смещения границ**.

На втором этапе дальнейшее увеличение напряжённости внешнего магнитного поля вызывает поворот магнитных моментов доменов в сторону внешнего магнитного поля.

Второй этап намагничивания называют **этапом вращения**.

К концу второго этапа магнитные моменты всех доменов направлены по внешнему магнитному полю. По окончании этого этапа наступает третий этап намагничивания – **этап насыщения**.

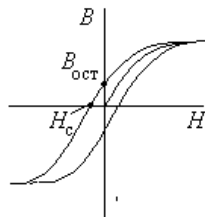
В ходе первого и второго этапов намагничивания поле внутри ферромагнетика растёт за счёт увеличения как внешнего магнитного поля, так и магнитного поля, созданного доменами.

На третьем этапе увеличение магнитного поля в ферромагнетике происходит только за счёт роста внешнего магнитного поля. Суммарное магнитное поле доменов не изменяется.

4.2.6. Явление гистерезиса

Если уменьшать магнитное поле, которое вызвало намагничивание ферромагнетика, то окажется, что зависимость индукции магнитного поля в ферромагнетике от напряжённости внешнего магнитного поля не совпадает с начальной кривой намагничивания.

При уменьшении напряжённости внешнего магнитного поля до нуля, магнитное поле в ферромагнетике до нуля не уменьшится. Индукция магнитного поля в ферромагнетике окажется равной $B_{\text{ост}}$ — остаточной индукции поля в ферромагнетике. Другими словами, образец ферромагнетика после выключения внешнего магнитного поля останется намагниченным.



Для того чтобы уменьшить индукцию магнитного поля в ферромагнетике до нуля, необходимо изменить направление внешнего магнитного поля на противоположное и начать постепенное увеличение его напряжённости.

При некоторой напряжённости H_c индукция поля в ферромагнетике уменьшится до нуля. Эту напряжённость принято называть **коэрцитивной силой**.

Дальнейшее увеличение напряжённости вызывает намагничивание ферромагнетика. Направление намагничивания противоположно первоначальному.

Если после намагничивания до насыщения вновь уменьшать напряжённость внешнего магнитного поля, то процесс пойдёт так, как показано на рисунке.

График зависимости $B(H)$ замкнётся, образовав так называемую **петлю гистерезиса**. Само рассматриваемое явление называется **явлением гистерезиса**.

Явление гистерезиса заключается в том, что значение индукции B при данном значении напряжённости H зависит от того, какое значение H имела ранее. Например, если ферромагнетик не был намагничён, то при $H = 0$, $B = 0$.

Если ферромагнетик ранее находился в магнитном поле с $H > 0$, то при уменьшении напряжённости внешнего магнитного поля до нуля, $B = B_{\text{ост}}$.

Если же ранее напряжённость была отрицательной, то при $H = 0$, $B = -B_{\text{ост}}$.

Все ферромагнетики можно разделить на две группы. Основанием для классификации является коэрцитивная сила.

Коэрцитивная сила показывает, насколько трудно размагнитить ферромагнетик. Если коэрцитивная сила велика, то ферромагнетик размагнитить трудно. Такие ферромагнетики называют магнитожёсткими. Из жёстких ферромагнетиков изготавливают постоянные магниты.

Если коэрцитивная сила мала, ферромагнетик можно размагнитить, почти не затрачивая на это энергию. Такие ферромагнетики называют магнитомягкими. Их используют для изготовления сердечников трансформаторов.

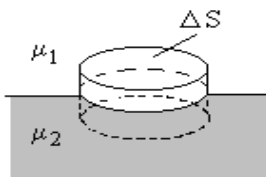
4.2.7. Граничные условия для векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$

Рассмотрим магнитное поле вблизи границы раздела двух сред с различной магнитной проницаемостью μ_1 и μ_2 .

Допустим, что магнитное поле не перпендикулярно границе раздела двух сред.

Разложим векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ на две компоненты, из которых одна параллельна границе раздела двух сред, а вторая – перпендикулярна. Перпендикулярную компоненту назовём нормальной, а параллельную – тангенциальной.

Начнём с рассмотрения нормальной компоненты вектора магнитной индукции B_n . Воспользуемся для этого теоремой Гаусса для магнитного поля (см. разд. 4.1.10).



Выделим вблизи границы раздела двух сред цилиндрический объём бесконечно малой высоты с площадью основания ΔS . Верхнее основание расположено в среде с магнитной проницаемостью μ_1 , а нижнее – в среде с μ_2 .

Согласно теореме Гаусса, магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю.

В данном случае полный магнитный поток через выбранную поверхность равен сумме потоков B_n через верхнее и нижнее основания и через боковую поверхность цилиндра.

Поскольку высота боковой поверхности бесконечно мала, магнитный поток через неё бесконечно мал. Следовательно, полный магнитный поток равен сумме потоков через верхнее и нижнее основания.

Полный магнитный поток нормальной компоненты вектора магнитной индукции равен нулю, следовательно, потоки через верхнее и нижнее основания равны между собой:

$$B_{n1}\Delta S = B_{n2}\Delta S.$$

Это означает, что нормальная компонента вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред не изменяется:

$$B_{n1} = B_{n2}.$$

По определению напряжённости $B = \mu_0\mu H$, поэтому

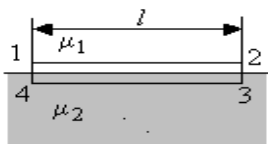
$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

и

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Таким образом, нормальная компонента вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела двух сред изменяется. Значение нормальной составляющей напряжённости магнитного поля в средах с разной магнитной проницаемостью различно.

Перейдём к рассмотрению тангенциальной компоненты векторов **B** и **H**. Воспользуемся для этого теоремой о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля (см. разд. 4.2.).



Выделим вблизи границы раздела двух сред замкнутый контур 1-2-3-4 прямоугольной формы (см. рисунок).

Длина горизонтальной стороны прямоугольника равна l , а высота прямоугольника бесконечно мала.

Если на границе раздела двух сред нет тока, то $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$, т. е. циркуляция вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела двух сред равна нулю.

Компоненты циркуляции по сторонам прямоугольника, перпендикулярным границе раздела, пренебрежимо малы, так как высота прямоугольника бесконечно мала.

Компоненты циркуляции по параллельным сторонам соответственно равны $\int_1^2 \mathbf{H}_1 d\mathbf{l}$ и $\int_3^4 \mathbf{H}_2 d\mathbf{l}$.

Если длина участков 1–2 и 3–4 настолько мала, что напряжённости можно считать постоянными, то $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ можно вынести за знак интеграла. Тогда в результате интегрирования получим векторы $\mathbf{I}_{12}$ и $\mathbf{I}_{34}$, направление которых определяется направлением обхода контура.

Таким образом, циркуляция вектора напряжённости на границе раздела двух сред оказывается равной $\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{I}_{12} + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{I}_{34} = 0$.

Учитывая, что скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними, получаем $H_{\tau 1}l - H_{\tau 2}l = 0$ (минус обусловлен тем, что векторы $\mathbf{I}_{12}$ и $\mathbf{I}_{34}$ противоположны по направлению).

Следовательно, тангенциальная составляющая вектора напряжённости магнитного поля в средах с разной магнитной проницаемостью одинакова: $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$.

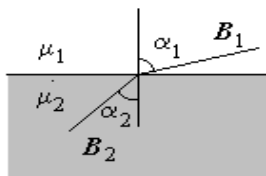
В то же время тангенциальная составляющая вектора магнитной индукции при переходе из одной среды в другую изменяется:

$$\frac{B_{\tau 1}}{\mu_1} = \frac{B_{\tau 2}}{\mu_2} \quad \text{и} \quad \frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Полученные результаты означают, что силовые линии магнитного поля на границе раздела двух магнетиков преломляются (т. е. изменяют свой наклон):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

На рисунке показано, что в среде с большей магнитной проницаемостью ($\mu_1 > \mu_2$) силовые линии отклоняются от нормали к



границе раздела двух сред (это значит, что их густота увеличивается).

Из полученных результатов также следует, что если в образце магнетика сделать узкую щель, параллельную силовым линиям магнитного поля в веществе, то напряжён-

ность магнитного поля в щели будет равна напряжённости магнитного поля внутри магнетика. Это вытекает из того, что тангенциальная составляющая вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела двух сред не изменяется.

Поскольку нормальная составляющая вектора магнитной индукции не изменяется на границе раздела, значение индукции магнитного поля внутри магнетика и в узкой щели, перпендикулярной направлению магнитного поля, одинакова.

Эти особенности в поведении тангенциальной составляющей напряжённости и нормальной составляющей индукции магнитного поля лежат в основе методов практических измерений напряжённости и индукции магнитного поля внутри магнетиков.

4.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

4.3.1. Явление электромагнитной индукции

В разд. 4.1.1 показано, что электрический ток порождает магнитное поле. Следовательно, магнитное поле и электрический ток взаимосвязаны.

Но взаимосвязь магнитного поля и электрического тока должна быть симметричной, поэтому магнитное поле, в свою очередь, должно порождать электрический ток в проводниках. Эту гипотезу сформулировал в 1823 г. в своём дневнике английский исследователь Майкл Фарадей.

После многолетних попыток (в 1831 г.) ему удалось получить электрический ток, порождённый магнитным полем.

Успешный эксперимент Фарадея заключался в следующем.

На деревянный цилиндрический каркас он намотал около 30 м медной проволоки.

Между витками первой катушки была намотана вторая такая же, причём витки катушек были разделены шнуром, не дававшим им соприкасаться.

К первой катушке была подключена мощная гальваническая батарея, а к второй – гальванометр (прибор для измерения электрического тока).

Фарадей обнаружил, что при включении и выключении тока в первой катушке во второй катушке возникал кратковременный ток.

Это показало, что электрический ток порождается изменяющимся магнитным полем.

Дальнейшие эксперименты показали, что ток в замкнутом проводящем контуре можно получать различными способами (например, приближая к соленоиду другой соленоид с током или постоянный магнит).

Количественный анализ результатов многочисленных экспериментов позволил сформулировать закон Фарадея, в соответствии с которым можно рассчитать величину ЭДС, возникающей в замкнутом контуре: $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$, где ε_i – ЭДС, возникающая в замкнутом контуре при изменении магнитного потока через замкнутый контур; $d\Phi$ – приращение магнитного потока.

Явление возникновения электродвижущей силы за счёт изменения магнитного потока называется электромагнитной индукцией. ЭДС ε_i , возникающая за счёт электромагнитной индукции, называется индукционной ЭДС. В свою очередь, ток, возбуждаемый индукционной ЭДС в замкнутом контуре, называется индукционным током.

Индукционный ток, как и любой другой ток, создаёт магнитное поле. Это поле называют индуцированным магнитным полем.

Знак « – » в законе Фарадея отображает правило Ленца: индукционный ток в контуре всегда направлен так, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему этот ток.

Другими словами, если магнитный поток, охваченный контуром, увеличивается, то индуцированное магнитное поле направлено против внешнего магнитного поля.

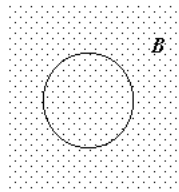
Если же магнитный поток уменьшается, то индуцированное магнитное поле будет совпадать по направлению с внешним полем.

Если известно направление индуцированного магнитного поля, то можно определить направление индукционного тока в контуре. Это можно сделать с помощью правила правого винта: если вращать правый винт так, чтобы направление его поступательного движения совпадало с направлением индуцированного магнитного поля, то направление вращения винта совпадает с направлением индукционного тока в контуре.

Рассмотрим пример.

Пусть в однородном магнитном поле находится проводящий контур.

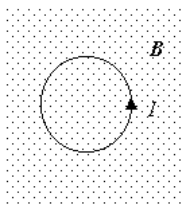
Пусть вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости контура и направлен перпендикулярно рисунку.



Пусть внешнее магнитное поле с течением времени уменьшается.

Уменьшение модуля вектора магнитной индукции вызывает уменьшение магнитного потока, охваченного контуром.

Следовательно, индуцированное магнитное поле должно совпадать по направлению с внешним магнитным полем.



Поставим правый винт параллельно силовым линиям внешнего магнитного поля.

Поскольку индуцированное магнитное поле должно совпадать по направлению с внешним, будем вращать правый винт так, чтобы он двигался по направлению силовых линий внешнего магнитного поля. В данном случае его необходимо вращать против часовой стрелки.

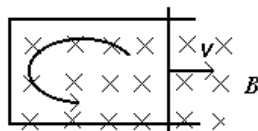
Таким образом, в рассмотренном случае индукционный ток направлен против часовой стрелки.

4.3.2. Природа электромагнитной индукции

Рассмотрим П-образный проводник со скользящей по нему с постоянной скоростью v перемычкой.

Пусть эта система находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном её плоскости.

Свободные электроны, имеющиеся в перемычке, движутся вместе с ней в магнитном поле. Следовательно, на них действует сила Лоренца $\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Поэтому электроны в движущейся перемычке под действием силы Лоренца начнут упорядоченное движение, т. е. в контуре, образованном П-образной перемычкой и скользящим проводником, возникнет электрический ток. Это и есть индукционный ток, возникший в результате движения проводника в магнитном поле, или, другими словами, в результате изменения магнитного потока, охваченного контуром.



Индукционный ток вызывается индукционной ЭДС.

Величину ЭДС индукции можно рассчитать с помощью следующего выражения: $\varepsilon_i = \int \mathbf{E}^* d\mathbf{l}$.

Этот интеграл нужно брать по той части контура, в которой действует сторонняя (т. е. не кулоновская) сила. В данном случае – это скользящая перемычка длиной l . Именно в ней существует поле сторонних сил, напряжённость которого мы ранее обозначили как $\mathbf{E}^*$.

В соответствии с правилом правого винта для векторного произведения сила Лоренца в перемычке направлена вниз. Поэтому и электроны в ней движутся вниз. Направление созданного электронами тока противоположно направлению их упорядоченного движения. Точно так же направлена и $\mathbf{E}^*$.

Напряжённость $\mathbf{E}^*$ можно вычислить. Определим её так же, как в своё время была определена напряжённость кулоновского поля (см. разд. 3.1), т. е. $\mathbf{E}^* = \mathbf{F} / q$. Но в данном случае нужна не кулоновская сила, а сила Лоренца:

$$\mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{F}_L}{q} = \frac{q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]}{q} = [\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Тогда электродвижущая сила

$$\varepsilon_i = \int_1^2 [\mathbf{v}, \mathbf{B}] d\mathbf{l},$$

где $d\mathbf{l}$ – элементарный вектор, направленный по напряжённости поля сторонних сил.

Учитывая, что в данном случае $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ постоянны, вынесем их за знак интеграла:

$$\varepsilon_i = [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \int_1^2 d\mathbf{l} = [\mathbf{v}, \mathbf{B}] l_{12}.$$

Осуществляя циклическую перестановку векторов, получим

$$\varepsilon_i = -\mathbf{B}[\mathbf{v}, l_{12}] = -\mathbf{B}\left[\frac{d\mathbf{x}}{dt}, l_{12}\right] = -\mathbf{B}[d\mathbf{x}, l_{12}]\frac{1}{dt} = -\mathbf{B}d\mathbf{S}\frac{1}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким образом, величина ЭДС индукции в этом случае соответствует закону Фарадея: $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Причиной возникновения ЭДС является сила Лоренца, действующая на свободные заряды в элементах контура, движущихся в магнитном поле.

ЭДС индукции возникает и в неподвижном контуре, находящемся в изменяющемся магнитном поле. Здесь уже сила Лоренца не действует – проводник не перемещается в магнитном поле. Поэтому и причина возникновения ЭДС здесь другая.

Анализируя эту ситуацию, Джеймс Клерк Максвелл предположил (а впоследствии правильность его гипотезы была подтверждена экспериментом), что любое изменяющееся магнитное поле вызывает появление электрического поля.

Таким образом, в контуре, находящемся в изменяющемся магнитном поле, индуцируется электрическое поле, которое и вызывает появление электрического тока. ЭДС индукции и в этом случае равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Индукционное электрическое поле обладает существенными особенностями.

Во-первых, сейчас нельзя выделить часть контура, в которой локализован источник ЭДС. Электрическое поле порождается во всех элементах контура. Поэтому интеграл от $\mathbf{E}d\mathbf{l}$ следует брать по замкнутому контуру: $\varepsilon_i = \oint \mathbf{E}d\mathbf{l}$.

Во-вторых, поскольку ЭДС отлична от нуля, $\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} \neq 0$

Это означает, что индукционное электрическое поле отлично от электростатического, в котором $\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0$.

В-третьих, так как $\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} \neq 0$, силовые линии этого электрического поля **замкнуты**. Такое электрическое поле называют вихревым.

Именно это поле вызывает появление электрического тока в неподвижном проводнике.

4.3.3. Явление самоиндукции

Любой контур с электрическим током порождает магнитное поле.

Если ток в контуре изменяется во времени, созданное им магнитное поле тоже будет изменяться.

В любом контуре, находящемся в изменяющемся магнитном поле, возникает ЭДС индукции $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Отсюда следует, что в контуре с изменяющимся электрическим током должна возникать ЭДС, индуцированная магнитным полем, которое создано этим же контуром.

Поскольку эту ЭДС порождает сам контур с током, её называют **ЭДС самоиндукции**. Явление возникновения ЭДС самоиндукции называют **явлением самоиндукции**.

Найдём величину ЭДС самоиндукции.

Магнитный поток Φ , охваченный контуром с током I , естественно, зависит от силы тока I , поскольку этот ток I и создал магнитный поток Φ .

Величина магнитного потока Φ прямо пропорциональна току I : $\Phi = LI$, где L – индуктивность контура.

Магнитный поток, порождённый контуром с током I , зависит от ряда факторов: во-первых, от силы тока I ; во-вторых, от формы контура (поскольку величины $\mathbf{B}$ и $\mathbf{S}$ связаны с формой контура); в-третьих, от среды, в которой находится контур, т. е. от магнитной проницаемости среды μ .

Это означает, что индуктивность контура L зависит от формы контура и от магнитной проницаемости среды, окружающей контур.

Если форма и магнитная проницаемость не изменяются, индуктивность контура постоянна.

На основе закона Фарадея мы можем записать:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right).$$

Знак « $-$ » в этом выражении показывает, что направление тока самоиндукции в контуре подчиняется правилу Ленца: если сила тока в контуре уменьшается, то ток самоиндукции направлен в ту же сторону (т. е. препятствует уменьшению тока), если же сила тока в контуре возрастает, ток самоиндукции направлен против него.

Второе слагаемое в этом выражении $\left(I \frac{dL}{dt}\right)$ отлично от нуля, если L зависит от времени. Такая зависимость имеет место, если с течением времени изменяется форма контура или свойства среды, в которой находится контур.

Если же индуктивность контура не зависит от времени, то

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}.$$

4.3.4. Ток смещения

Как уже отмечалось в разд. 4.3.2, изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

Максвелл предположил, что должно существовать и обратное явление – изменение электрического поля должно порождать магнитное поле.

Поэтому он поставил перед собой задачу: доказать, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле, и объяснить механизм этого явления.

Рассмотрим решение этой задачи (проведённый далее анализ существенно упрощен, но полученные выводы будут правильными).

Пусть имеется конденсатор, который заряжается от источника ЭДС.

Пока происходит заряд, в проводниках, соединяющих обкладки конденсатора с источником ЭДС, идёт ток проводимости. При этом изменяется заряд на обкладках конденсатора и растёт напряжённость электрического поля между обкладками.

Ранее было показано, что напряжённость E электрического поля внутри конденсатора равна $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ (здесь σ – поверхностная

плотность заряда на обкладках конденсатора; ε – диэлектрическая проницаемость вещества между обкладками конденсатора).

Из последнего выражения следует, что $\varepsilon_0 \varepsilon E = \sigma$.

В разд. 2.16 показано, что $\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$, т. е. произведение напряжённости электрического поля на электрическую постоянную и диэлектрическую проницаемость диэлектрика равно вектору электрического

смещения. Это выражение можно переписать в скалярной форме:
 $\epsilon_0 \epsilon E = D$.

Но это означает, что $\sigma = D$, т. е. поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора равна модулю вектора электрического смещения.

Продифференцируем последнее выражение по времени: $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t}$
 (использование частных производных обусловлено тем, что поверхностная плотность заряда может зависеть не только от времени, но и от координаты).

Производная от поверхностной плотности заряда по времени равна плотности тока проводимости $j_{\text{пр}}$: $\left(d\sigma = \frac{dq}{dS}; \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dq}{dt} \frac{1}{dS} = \right.$
 $\left. = \frac{dI}{dS} = j_{\text{пр}} \right)$.

Но тогда и правая часть равенства $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t}$ имеет размерность плотности тока.

Здесь следует обратить внимание на важную деталь. В левой части равенства присутствует поверхностная плотность заряда σ , изменение которой обусловлено упорядоченным движением свободных носителей заряда в проводниках, соединяющих обкладки конденсатора с источником ЭДС. Поэтому можно сказать, что левая часть равенства относится к той части цепи, в которой может протекать ток проводимости.

В правой части равенства присутствует модуль вектора электрического смещения, который является характеристикой электрического поля в диэлектрике. Следовательно, правая часть равенства относится к той части цепи, где отсутствуют свободные носители заряда и где токи проводимости протекать не могут.

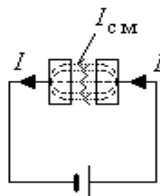
Тем не менее $\frac{\partial D}{\partial t}$ имеет размерность плотности тока.

Поэтому Максвелл предположил, что в диэлектрике может существовать особый ток, природа которого существенно отлична от природы тока проводимости. Он назвал этот ток **током смещения**.

По определению плотность тока смещения $\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Как отмечено выше, $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t}$, поэтому $j_{\text{пр}} = j_{\text{см}}$,

т. е. плотности тока проводимости и тока смещения в замкнутой цепи всегда равны. Таким образом, ток непрерывен не только в цепях, состоящих из проводников, но и в цепях, содержащих непроводящие элементы (например, конденсаторы).



Рассмотрим природу тока смещения.

Производная, расположенная в правой части предыдущего равенства, может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

(здесь использовано определение вектора электрического смещения, данное в разд. 2.16).

Следовательно, $j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}$, или в векторной форме

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Рассмотрим этот ток подробнее.

Слагаемое $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ (производная от поляризованности по времени) связано с процессами, протекающими в ходе поляризации диэлектрика.

Как отмечено в разд. 2.14, в полярных диэлектриках происходит поворот атомов так, чтобы их дипольный момент стал параллелен силовым линиям электрического поля.

В неполярных диэлектриках происходит смещение²² электронных оболочек атомов в одну сторону, а ядер – в противоположную.

Поэтому можно сказать, что $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ является плотностью тока, возникающего из-за упорядоченного смещения зарядов в диэлектрике в процессе его поляризации.

²² Отсюда и происходит название тока смещения.

Слагаемое $\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ не равно нулю, если с течением времени изменяется напряжённость электрического поля.

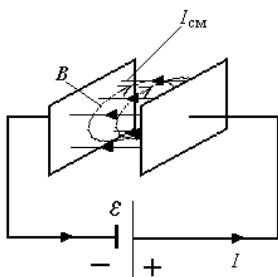
Но электрическое поле может изменяться и там, где нет свободных носителей заряда (например, между обкладками конденсатора), и даже там, где вообще нет заряженных частиц (например, в вакууме).

Следовательно, эта компонента тока смещения не связана с какими-либо зарядами. Она порождается изменяющимся электрическим полем.

Таким образом, ток смещения по своей природе действительно отличен от тока проводимости – он порождается не только упорядоченным движением заряженных частиц, но и изменяющимся электрическим полем.

Однако ток смещения всё же является током, поэтому он должен быть сходен в своих проявлениях с обычным током проводимости.

Как известно, ток проводимости создаёт магнитное поле. Но тогда и ток смещения должен создавать такое же магнитное поле (так как $j_{\text{пр}} = j_{\text{см}}$).



Экспериментальная проверка показала, что это предположение верно. Между обкладками конденсатора, где нет свободных носителей заряда, существует точно такое же магнитное поле, как и вокруг проводников, соединённых с обкладками, в которых течёт ток проводимости.

Так была подтверждена правильность гипотезы Максвелла о существовании тока смещения и доказано, что ток смещения, наряду с токами проводимости, является источником магнитного поля.

Ещё раз обратите внимание на очень важную деталь: ток смещения может существовать в среде, не содержащей заряженных частиц (в вакууме). Если в такой среде имеется изменяющееся во времени электрическое поле, то в ней существует и ток смещения.

Кроме тока смещения, Максвелл ввёл понятие полного тока. Полный ток – это ток, равный сумме тока проводимости и тока смещения.

Плотность полного тока $\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

В свою очередь, сила полного тока равна

$$I_{\text{полн}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{полн}} d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.$$

4.3.5. Уравнения Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электромагнитного поля.

Эта теория объяснила все известные в то время явления, связанные с электричеством и магнетизмом. Кроме этого единая теория электромагнитного поля позволила предсказать ряд явлений, которые позже были обнаружены экспериментально.

Суть единой теории электромагнитного поля выражена в четырёх уравнениях, которые принято называть **уравнения Максвелла**. Рассмотрим эти уравнения.

Первое уравнение представляет собой закон электромагнитной индукции:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Оно гласит, что циркуляция вектора напряжённости электрического поля по любому замкнутому контуру равна производной по времени от потока вектора магнитной индукции через поверхность, охваченную этим контуром, взятой с обратным знаком.

Это уравнение показывает, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение Максвелла имеет вид

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV.$$

Это уравнение утверждает, что поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, охваченных этой поверхностью (здесь ρ – объёмная плотность заряда; dV – объём, охваченный замкнутой поверхностью S).

Второе уравнение Максвелла указывает на то, что источником электрического поля являются электрические заряды.

Следует отметить, что ни первое, ни второе уравнения Максвелла друг другу не противоречат. Наоборот, они друг друга дополняют и указывают на то, что электрическое поле порождается двумя источниками – заряженными частицами и(или) изменяющимся магнитным полем.

Третье уравнение Максвелла имеет следующий вид:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.$$

Оно говорит о том, что циркуляция вектора $\mathbf{H}$ равна полному току через поверхность, охваченную замкнутым контуром.

Это уравнение указывает на то, что источником магнитного поля являются как токи проводимости, так и изменяющееся электрическое поле.

Четвёртое уравнение Максвелла можно записать в следующем виде:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Это уравнение показывает, что поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Оно обозначает, что в природе нет (по крайней мере, не обнаружено) отдельно существующего северного или южного магнитного полюса. Они существуют только в паре. Именно поэтому сколько силовых линий магнитного поля входит в любой объём, столько же и выходит (это и есть условие равенства нулю потока вектора через замкнутую поверхность).

Если бы магнитные «заряды» существовали, то силовые линии магнитного поля, начинающиеся и заканчивающиеся на полюсах магнита, могли бы возникать или заканчиваться внутри объёма, содержащего такой магнитный «заряд» (монополь). В этом случае поток вектора $\mathbf{B}$ стал бы отличен от нуля.

Характеристики электрического и магнитного полей, входящие в уравнения Максвелла, связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{j}_{\text{провод}} = \sigma \mathbf{E}.$$

Из уравнений Максвелла для циркуляции векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ следует, что электрическое и магнитное поля взаимосвязаны, их нельзя рассматривать как независимые.

Единственная ситуация, в которой эти поля можно наблюдать и изучать по отдельности – это стационарные, т. е. не изменяющиеся во времени электрическое и магнитное поля. В этом случае и уравнения Максвелла становятся группой из четырёх не связанных между собой уравнений:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q,$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

4.3.6. Энергия магнитного поля

Рассмотрим изображённую на рисунке схему.

Переключение ключа из положения 1 в положение 2 вызывает отключение источника ЭДС от цепи. Опыт показывает, что это не вызывает мгновенного прекращения электрического тока.

Ток в цепи в этом режиме идёт за счёт ЭДС самоиндукции, возникающей в соленоиде.

Но для поддержания тока в цепи необходимо затрачивать энергию. Откуда она берётся?

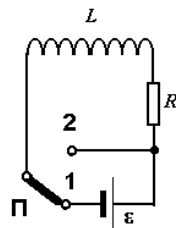
Можно предположить, что ток в такой цепи существует за счёт энергии магнитного поля, созданного током, протекавшим в цепи.

Следовательно, магнитное поле должно обладать некоторой энергией. Поэтому найдём её величину.

Магнитный поток в контуре с индуктивностью L и током I равен $\Phi = LI$.

Изменение тока на dI означает изменение магнитного потока на $d\Phi = LdI$.

Ранее было установлено (см. разд. 4.1.9), что при изменении магнитного потока на $d\Phi$ совершается работа $\delta A = Id\Phi$.



Следовательно, в данном случае должна быть совершена работа $\delta A = Id\Phi = LI dI$.

Конечная работа, совершённая в рассматриваемом контуре при изменении тока от I_0 до 0:

$$A = L \int_{I_0}^0 I \cdot dI = -\frac{LI_0^2}{2}.$$

Работа отрицательна, так как энергия контура уменьшается.

Энергия контура уменьшается до нуля, значит, совершённая работа равна начальному значению энергии магнитного поля.

Поэтому энергия, запасённая в магнитном поле,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Выражение для расчёта энергии магнитного поля можно записать и в иной форме:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Выражение для расчёта энергии, запасённой в магнитном поле, можно перевести и в другую форму. Сделать это можно следующим способом.

Как известно, для соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 V.$$

Тогда

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 V I^2.$$

Поскольку для бесконечного соленоида $B = \mu_0 \mu n I$, то $W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V$,

или в векторной форме

$$W = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} V,$$

где $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}$ – напряжённость магнитного поля.

Обратите внимание; в полученное выражение входят только характеристики магнитного поля. Величины, характеризующие источник поля (например, соленоид), отсутствуют.

Это означает, что носителем энергии является само магнитное поле. Энергия, запасённая в нём, рассредоточена по всему пространству, занимаемому магнитным полем.

Если магнитное поле неоднородно, то величина $\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2}$ в разных точках различна.

В этом случае удобно использовать **объёмную плотность энергии магнитного поля** (это энергия магнитного поля, запасённая в единице объёма):

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2}.$$

Энергия, запасённая в конечном объёме неоднородного магнитного поля, может быть найдена следующим образом:

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} dV.$$

Важно отметить, что последнее выражение справедливо только в линейных средах, т.е. средах, в которых магнитная проницаемость среды, в которой существует магнитное поле, не зависит от напряжённости магнитного поля (т. е. в пара- и диамагнетиках).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Иродов И.Е.* Механика. Основные законы. – М.: Бином, 2015.
2. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности: учеб. пособие. – М.: Лань, 2009.
3. *Савельев И.В.* Курсобщей физики: учеб. пособие. В 5 т. Т. 1. Механика. – М.: Лань, 2011.
4. *Савельев И.В.* Курсобщей физики: учеб. пособие. В 5 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. – М.: Лань, 2011.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Часть I. МЕХАНИКА	4
1.1. Кинематика.....	6
1.1.1. Кинематика материальной точки. Описание движения материальной точки.....	6
1.1.1.1. Векторный способ.....	6
1.1.1.2. Координатный способ	7
1.1.1.3. Естественный способ.....	7
1.1.2. Характеристики движения	8
1.1.3. Кинематика твёрдого тела.....	12
1.1.4. Вращение тела вокруг неподвижной оси.....	12
1.1.5. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения вращающегося тела.....	14
1.1.6. Преобразования Галилея	16
1.2. Динамика поступательного движения	18
1.2.1. Масса. Сила. Импульс	18
1.2.2. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчёта	20
1.2.3. Второй закон Ньютона	21
1.2.4. Третий закон Ньютона.....	22
1.2.5. Принцип относительности Галилея.....	22
1.2.6. Закон сохранения импульса	23
1.3. Работа и энергия.....	25
1.3.1. Работа. Кинетическая энергия	26
1.3.1.1. Работа упругой силы	28
1.3.1.2. Работа силы тяжести.....	29
1.3.1.3. Работа силы трения.....	30

1.3.2. Консервативные силы.....	30
1.3.3. Потенциальная энергия частицы	31
1.3.3.1. Потенциальная энергия в поле силы тяжести	32
1.3.3.2. Потенциальная энергия деформированной пружины	33
1.3.4. Силы и потенциальная энергия	33
1.3.5. Полная механическая энергия частицы	34
1.3.6. Потенциальная энергия системы тел.....	36
1.3.7. Закон сохранения механической энергии системы тел	36
1.4. Динамика вращательного движения твёрдого тела	38
1.4.1. Момент силы	38
1.4.2. Момент импульса.....	40
1.4.3. Связь момента силы и момента импульса	41
1.4.4. Основной закон динамики вращательного движения	41
1.4.5. Момент инерции тела относительно неподвижной оси вращения	43
1.4.6. Закон сохранения момента импульса.....	45
1.4.7. Кинетическая энергия вращающегося тела	46
1.4.8. Работа внешних сил при вращении тела вокруг неподвижной оси	47
1.4.9. Аналогия между характеристиками поступательного и вращательного движения.....	47
1.5. Специальная теория относительности	49
1.5.1. Опыт Майкельсона–Морли	50
1.5.2. Постулаты Эйнштейна.....	51
1.5.3. Преобразования Лоренца	52
1.5.4. Следствия из преобразований Лоренца	55
1.5.4.1. Сокращение длины движущегося тела	55
1.5.4.2. Замедление хода движущихся часов.....	56
1.5.4.3. Понятие одновременности	57
1.5.5. Интервал	58
1.5.6. Релятивистская масса. Релятивистский импульс	59
1.5.7. Основное уравнение релятивистской динамики	60
1.5.8. Кинетическая энергия релятивистской частицы.....	61
1.5.9. Взаимосвязь массы и энергии.....	62

1.5.10. Связь энергии и импульса частицы	63
1.5.11. Инварианты теории относительности	64
Часть II. ЭЛЕКТРОСТАТИКА	65
2.1. Электрические заряды. Свойства электрических зарядов	65
2.2. Закон Кулона	66
2.3. Электрическое поле. Напряжённость электрического поля	67
2.4. Принцип суперпозиции	69
2.5. Поток вектора напряжённости	71
2.6. Теорема Гаусса	73
2.7. Примеры расчёта напряжённости полей с помощью теоремы Гаусса	75
2.7.1. Поле бесконечной равномерно заряженной прямолинейной нити	75
2.7.2. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости	78
2.7.3. Поле двух параллельных равномерно заряженных плоско- стей с одинаковым по величине и противоположным по зна- ку зарядом	79
2.7.4. Поле равномерно заряженной сферы	79
2.8. Работа электростатических сил	81
2.9. Потенциал электростатического поля	82
2.10. Связь напряжённости и потенциала	84
2.11. Графическое изображение электрического поля. Силовые линии. Эквипотенциальные поверхности	85
2.12. Электрический диполь. Диполь в однородном электрическом поле	87
2.13. Диэлектрики. Типы диэлектриков	87
2.14. Поляризация диэлектриков	88
2.15. Поле в однородном диэлектрике	90
2.16. Вектор электрического смещения. Теорема Гаусса для поля в диэлектрике	92
2.17. Условия на границе раздела двух диэлектриков	94
2.18. Проводники в электрическом поле	96
2.19. Замкнутые проводящие оболочки	98
2.20. Электроёмкость уединённого проводника	100
2.21. Конденсаторы	101
2.22. Энергия заряженных проводников	103

2.23. Энергия электрического поля	104
Часть III. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	105
3.1. Электродвижущая сила	107
3.2. Закон Ома	109
3.3. Работа и мощность тока. Закон Джоуля–Ленца	110
Часть IV. МАГНЕТИЗМ	113
4.1. Магнитное поле в вакууме	113
4.1.1. Магнитное поле. Источник магнитного поля. Характеристики магнитного поля	113
4.1.2. Индукция магнитного поля, созданного движущимся точеч- ным зарядом	114
4.1.3. Закон Био–Савара–Лапласа	115
4.1.4. Расчёт магнитных полей с помощью закона Био–Савара– Лапласа	116
4.1.4.1. Индукция магнитного поля отрезка прямолинейного проводника с током	116
4.1.4.2. Индукция магнитного поля бесконечно длинного пря- молинейного проводника с током	117
4.1.4.3. Индукция магнитного поля в центре квадрата	118
4.1.4.4. Расчёт магнитного поля замкнутого кругового тока (витка с током)	119
4.1.5. Силовые линии магнитного поля	120
4.1.6. Сила Лоренца	121
4.1.7. Сила Ампера	123
4.1.8. Контур с током в однородном магнитном поле	124
4.1.9. Магнитный поток. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле	126
4.1.10. Теорема Гаусса для магнитного поля	127
4.1.11. Закон полного тока	128
4.1.11.1. Магнитное поле бесконечного соленоида	130
4.1.11.2. Магнитное поле тороида	132
4.1.12. Индуктивность соленоида	133
4.2. Магнитное поле в веществе	134
4.2.1. Намагничивание магнетика	134

4.2.2. Напряжённость магнитного поля. Теорема о циркуляции вектора H	135
4.2.3. Магнитомеханические явления	138
4.2.3.1. Диамагнетики	139
4.2.3.2. Парамагнетики	140
4.2.4. Ферромагнетики. Природа ферромагнетизма	141
4.2.5. Намагничивание ферромагнетика. Этапы намагничивания.....	142
4.2.6. Явление гистерезиса	143
4.2.7. Граничные условия для векторов B и H	144
4.3. Электромагнитная индукция	147
4.3.1. Явление электромагнитной индукции	147
4.3.2. Природа электромагнитной индукции	149
4.3.3. Явление самоиндукции.....	152
4.3.4. Ток смещения	153
4.3.5. Уравнения Максвелла.....	157
4.3.6. Энергия магнитного поля.....	159
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	162

Давыдков Владимир Викторович

ФИЗИКА

МЕХАНИКА, ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 03.05.2017. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 200 экз. Уч.-изд. л. 9,76. Печ. л. 10,5. Изд. 306/16. Заказ № 653
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20