

№ 4590

53

П 691

**ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ
ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРА**

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Методическое пособие

**НОВОСИБИРСК
2016**

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Методическое пособие к практическим занятиям
по курсу физики для студентов АВТФ,
обучающихся по направлениям:
«Информатика и вычислительная техника»,
«Информационные системы и технологии»,
«Программная инженерия»,
«Информационная безопасность»

УДК 539.19 + 536.7]:004(076.5)

П 691

Рассмотрены примеры решения задач по всем темам раздела «молекулярная физика и термодинамика» рабочей программы по физике для студентов АВТФ:

- уравнения состояния идеального газа;
- внутренняя энергия газа, распределение энергии по степеням свободы;
- распределения Максвелла, Больцмана;
- первое начало термодинамики, теплоемкость;
- циклы, циклы Карно, энтропия;
- явления переноса (диффузия, вязкость, теплопроводность).

Особенностью пособия является описание применения компьютера при решении задач по физике, в качестве языка программирования используется Python.

Составитель д-р физ.-мат. наук, профессор *А.А. Штыгашев*

Рецензент канд. техн. наук, доцент *В.В. Христофоров*

Работа подготовлена на кафедре общей физики

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительные устройства проникли во многие сферы человеческой жизни, их используют в производственном технологическом оборудовании, транспорте, измерительных устройствах, различных бытовых приборах, сотовых телефонах и т. д. Все эти устройства объединяет то, что они работают по строго определенным правилам – алгоритмам. Умение разрабатывать не только вычислительные, но и другие алгоритмы решения практических задач входит в компетенцию выпускника высшей технической школы. Это умение формируется исключительно посредством решения задач из разных сфер деятельности студента, например физики.

При решении задачи компьютер применяют как на стадии анализа постановки задачи, на стадии поиска решения, так и на стадии анализа полученного решения. Визуализация процесса решения и представления результатов расчета – одно из важнейших применений компьютера. Программирование даже одной расчетной формулы значительно эффективней расчетов на инженерном калькуляторе, поскольку: а) текст программы уже является протоколом, который можно сохранить; б) со временем накапливается набор текстов таких программ, образуя «базу знаний», к которой можно возвращаться, черпая идеи решения более сложных задач; в) вычисления можно повторить, меняя исходные параметры, тем самым более подробно изучая исследуемое физическое явление или процесс; г) умения и навыки решения физических задач с помощью компьютера в дальнейшем могут пригодиться в повседневной практике специалиста, в том числе даже при решении бытовых задач.

В работе рассмотрены различные аспекты применения компьютеров при решении физических задач. Задачи подбирались из апробированных задачник, составляющих «золотой» фонд для студентов и преподавателей естественно-научных дисциплин, список которых приведен в конце пособия [1–5].

Несмотря на то что существуют универсальные математические пакеты, такие как MathCad, MATLAB, Mathematica и Maple, позволяющие проводить достаточно сложные вычисления, затрачивая при этом на сам процесс программирования минимум усилий (не считая затрат на изучение интерфейса и входного языка пакета), при этом для пользователя математический пакет представлял кибернетический черный ящик. Именно поэтому для решения задач обучения выбран язык программирования высокого уровня, что дает возможность студенту контролировать все детали вычислительного процесса. В работе использованы простейшие численные алгоритмы, реализованные на языке программирования Python. Основной причиной такого выбора являются краткость и ясность кода по сравнению, например, с кодом на языке C++, кроме того, Python является интерпретатором, следовательно, удобен в отладке кода. Описание Python широко представлено в Internet, также выпущено огромное количество обучающей литературы: от кратких справочников до многотомных изданий, например [6–10], поэтому здесь приведены лишь готовые примеры программ с комментариями.

Ускоренное развитие производительных сил в нашей стране в первой половине XX века привело к «индустриализации» обработки огромных объемов численных данных. Были созданы машиносчетные станции (бюро), просуществовавшие вплоть до восьмидесятых годов XX века. В то время сами по себе вычисления имели конечную стоимость и именно поэтому были разработаны эффективные экономичные приемы приближенных вычислений с необходимой точностью, при проведении расчетов удерживалось согласованное с точностью исходных данных и точностью метода вычислений количество значащих разрядов в мантиссе числа. В настоящее время, после цифровой революции, произошла своего рода инфляция вычислений, стали ненужными многочисленные таблицы разнообразных функций, канули в Лету русские счеты, логарифмические линейки, арифмометры «Феликс», номограммы. За редким исключением современные бытовые, учебные, производственные и научные вычисления производятся с максимальным для вычислительной среды количеством разрядов. Поэтому в работе все вычисления выполняются над числами с удвоенной мантиссой и только на этапе выписывания ответа проводится согласование результатов вычислений расчета с точностью исходных данных.

1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Уравнение Менделеева–Клапейрона. Основное уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$pV = \nu RT, \quad (1)$$

где p , V , T – давление, объем и температура газа соответственно; $R = 8.31$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная; ν – число молей газа:

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}, \quad (2)$$

где μ – молярная масса газа; m – масса газа; $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро.

Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = nkT, \quad (3)$$

где $n = N/V$ м⁻³ – концентрация частиц, $k = R/N_A = 1.38 \times 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Закон Дальтона для вычисления давления смеси газов

$$p = p_1 + p_2 + \dots, \quad (4)$$

где p – давление смеси газов; p_1, p_2, \dots – парциальные давления компонент смеси газов.

Закон Бойля-Мариотта

$$T = \text{const} \quad pV = \text{const} \quad p_1V_1 = p_2V_2. \quad (5)$$

Закон Гей-Люссака

$$p = \text{const} \quad V / T = \text{const} \quad V_1 / T_1 = V_2 / T_2. \quad (6)$$

Закон Шарля

$$V = \text{const} \quad p / T = \text{const} \quad p_1 / T_1 = p_2 / T_2. \quad (7)$$

Пример 1.1. В медицинском термометре $m = 2.0$ грамма ртути. Случайно градусник разбился, и ртуть испарилась. Найти **концентрацию ртути в воздухе** комнаты размером $3.0 \times 4.0 \times 2.5$ м при температуре 20°C . Давление насыщенного пара ртути при этой температуре составляет $p_s = 0.133$ Па, молярная масса $\mu = 0.201$ кг/моль, температура $T = 293$ К.

Решение

Найдем концентрацию n паров ртути в предположении о том, что вся ртуть испарилась, и найдем концентрацию n_s насыщенного пара ртути. Если $n_s < n$, то в комнате будет концентрация насыщенных паров ртути, если же $n_s > n$, то в комнате концентрация ртути будет равна n . Из уравнения (3) концентрация $n_s = p_s / kT$, из (2) число атомов ртути равно $N = \nu N_A$, концентрация n равна $n = m N_A / (\mu V)$.

Составим программу вычисления концентрации атомов ртути.

Листинг программы MP_N1_mercury.py

```
01 # Пример 1.1. Ртуть
02 R=8.31; mu=0.201; NA=6.02e23;
03 m=0.002; V=30; ps=0.133; T=293;
04 ns=ps*NA/(R*T); n=m*NA/(mu*V);
05 print("ns=%5.2e"%ns, "\n n=%5.2e"%n);
06 print("\n n/ns=%5.2f"%(n/ns))
```

Комментарий к программе. Здесь и далее во всех листингах программ строки пронумерованы для удобства комментирования. Строки: 01 – комментарий; 02-03 – определение исходных данных; 04 – вычисление концентрации

насыщенных паров и концентрации атомов ртути в предположении, что вся ртуть испарилась; 05-06 – вывод расчетных данных.

Приведем результат расчета по программе:

```
>>>
ns= 3.29e+19
n= 2.00e+20
n/ns=6.07
>>>
```

Таким образом, концентрация паров ртути равна $n \approx 2.0 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$ и более чем в 6 раз превышает концентрацию насыщенного пара ртути; это означает, что в воздухе концентрация ртути равна концентрации насыщенного пара, а остальная масса ртути находится в жидком состоянии. Согласно санитарным нормам предельно допустимая плотность паров ртути в воздухе жилых помещений составляет $\rho_m = 3 \times 10^{-7} \text{ кг/м}^3$. Найдем соответствующую концентрацию n_m , для этого разделим (2) на объем V комнаты:

$$\frac{\rho_m}{\mu} = \frac{n_m}{N_A}, \quad (8)$$

тогда $n_m = \rho_m N_A / \mu$. Добавим две строчки в программу

```
07 rom=3.0e-7; nom=rom*NA/mu
08 print(" nom=%5.2e"%nom, "\n n/nom=%5.2e"%(n/nom))
```

и пересчитаем еще раз:

```
>>>
ns=3.29e+19
n=2.00e+20
n/ns= 6.07
nom=8.99e+17
n/nom=2.22e+02
>>>
```

Итак, концентрация ртути в воздухе больше ПДК в 220 раз, следовательно, необходима санитарная обработка жилого помещения.

Ответ: $n_s \approx 3.3 \times 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

Пример 1.2. В сосуде объемом $V = 3.0$ л находится $m_1 = 4.0$ мг гелия, $m_2 = 70.0$ мг азота, $N_3 = 5 \times 10^{21}$ молекул водорода. Каково давление смеси, если температура смеси $T = 300$ К? Молярные массы равны $\mu_1 = 4.0 \times 10^{-3}$ кг/моль, $\mu_2 = 0.028$ кг/моль, $\mu_3 = 2.0 \times 10^{-3}$ кг/моль.

Решение

Давление смеси газов определяется, согласно закону Дальтона (4), суммой парциальных давлений p_1, p_2, p_3 , где $p_1 = \nu_1 RT / V$, $p_2 = \nu_2 RT / V$, $p_3 = \nu_3 RT / V$, где $\nu_1 = m_1 / \mu_1$, $\nu_2 = m_2 / \mu_2$, $\nu_3 = N_3 / N_A$ – количество вещества компонентов смеси газов.

Составим программу вычисления давления смеси газов.

Листинг программы MP_N2_Dalton.py

```
01 # Пример 1.2. Смесь газов
02 R=8.31; NA=6.02e23; T=300; V=0.003; m1=4.0e-6;
03 m2=70.0e-6; N3=5.0e21; mu1=0.004; mu2=0.028;
04 v1=m1/mu1; v2 =m2/mu2; v3=N3/NA;
05 p1=v1*R*T/V; p2=v2*R*T/V; p3=v3*R*T/V; p=p1+p2+p3;
06 print (" p1=",p1,"\n p2=",p2,"\n p3=",p3,"\n p=",p)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02-03 – определение исходных данных; 04 – вычисление количества вещества исходных компонентов смеси; 05 – вычисление парциальных давлений и давления смеси газов; 06 – вывод расчетных данных.

Приведем результат расчета по программе:

```
>>>
p1= 831.0000000000001
p2= 2077.5
p3= 6901.993355481728
p = 9810.493355481729
>>>
```

Приводим в соответствие с точностью исходных данных, тогда искомое давление смеси газов будет равно $p = 9.8 \times 10^3$ Па.

Ответ: $p = 9.8 \times 10^3$ Па.

Пример 1.3. Приняв, что воздух по массе состоит из 75.5 % азота, 23.1 % кислорода, 1.40 % аргона, найти массу одного моля воздуха. Молярная масса азота $\mu_1 = 0.028$ кг/моль, кислорода $\mu_2 = 0.032$ кг/моль, аргона $\mu_3 = 0.040$ кг/моль.

Решение

Массовые доли смеси газов равны: $m_1 / m = 0.755$, $m_2 / m = 0.231$, $m_3 / m = 0.0140$, где $m = m_1 + m_2 + m_3$. Состояние смеси газов, а также компоненты смеси описываются (1), т. е. парциальные давления азота, кислорода и аргона: $p_1 = \nu_1 RT / V$, $p_2 = \nu_2 RT / V$, $p_3 = \nu_3 RT / V$ и давление воздуха $p = \nu RT / V$. Складываем парциальные давления: $p_1 + p_2 + p_3 = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) RT / V$ и применяем закон Дальтона (4), получаем $\nu RT = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) RT$, тогда $1 / \mu = m_1 / m\mu_1 + m_2 / m\mu_2 + m_3 / m\mu_3$, и окончательно расчетная формула имеет вид $\mu = (m_1 / m\mu_1 + m_2 / m\mu_2 + m_3 / m\mu_3)^{-1}$.

Составим программу расчета молярной массы воздуха.

Листинг программы MP_N4_MolMassa.py

```
01 # Пример 1.3. Молярная масса воздуха
02 mu1=0.028; mu2=0.032; mu3=0.040;
```

```
03 a1=0.755; a2=0.231; a3=0.014;
04 mu=1/(a1/mu1+a2/mu2+a3/mu3);
05 print(" mu=%6.3f"%mu)
```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02-03 – определение исходных данных; 04 – вычисление молярной массы воздуха; 05 – вывод расчетных данных.

Приведем результат расчета по программе:

```
>>>
```

```
mu= 0.029
```

```
>>>
```

Ответ: $\mu = 0.029$ кг/моль

Часто в задаче требуется построить график зависимости искомой величины от независимой переменной. Рассмотрим простейший алгоритм построения такой зависимости.

Алгоритм 1. Графическое представление процесса в координатах x, y

1. Определяем независимую переменную x процесса в области определения $[X_{\min}, X_{\max}]$.

2. Задаем сетку в области определения x : $x_i = X_{\min} + i\Delta x$, $i = 0, \dots, N$, $\Delta x = (X_{\max} - X_{\min}) / N$.

3. Выразим зависимую переменную y через x : $y = f(x)$.

4. Вычисляем одномерный массив $y_i = f(x_i)$ в узлах сетки.

5. Пользуясь процедурами пакета **Matplotlib**, строим график процесса.

Пример 1.4. При аэродинамическом торможении в атмосфере планеты температура внутри автоматического спускаемого аппарата повысилась с $T_2 = 786$ К до $T_2 = 353$ К. Какую часть воздуха необходимо выпустить, чтобы давление внутри аппарата не изменилось? Построить график процесса.

Решение

Выделим процессы: $1 \rightarrow 2$ – изохорное повышение давления, система замкнутая; $2 \rightarrow 3$ – удаление из системы части газа, при этом система не замкнутая. Определим сначала долю воздуха, которую надо выпустить через выпускной клапан: $\alpha = \Delta m / m_1$, где $\Delta m = m_2 - m_1$, m_1 – масса воздуха до аварийного срабатывания клапана; m_2 – масса воздуха после сброса давления, конечным состоянием является состояние 3, при котором давление газа $p_1 = p_3$. Поскольку при переходе $2 \rightarrow 3$ система не замкнута (обмен веществом с внешней средой), можно использовать **только** (1): $p_1 V = m_1 R T_1 / \mu$ и $p_3 V = m_2 R T_2 / \mu$, их левые части равны, равны и правые, тогда $m_1 T_1 = m_2 T_2$. Излишек воздуха равен $\Delta m = m_1 (1 - T_1 / T_2)$ и искомая расчетная формула имеет вид $\alpha = (T_2 / T_1 - 1)$. Для построения зависимости $m(T)$ воспользуемся **алгоритмом 1**, где $x \rightarrow T$, а $y \rightarrow m$: 1) $T \in [T_1, T_2]$; 2) $T_j = T_1 + j \Delta T$, $N = 100$, $j = 0, 1, \dots, N$, $\Delta T = (T_2 - T_1) / N$; 3) $m = p V \mu / R T$, где давление p и объем V в условиях задачи не заданы, но для расчета качественного графика необходимо доопределить эти величины. Воспользуемся приемом, который в метеорологии называют «BOGUS DATA» [11], т. е. определим давление и объем так: $p = 10^5$ Па и $V = 1 \text{ м}^3$; 4) вычислим $m_j = (p V \mu / R) / T_j$; 5) строим график (рис. 1.1).

Составим программу расчета массовой доли удаляемого из аппарата воздуха.

Листинг программы MP_N4_SatelliteMassa.py

```
01 # Пример 1.4. Излишек массы воздуха
02 import matplotlib.pyplot as plt
03 R=8.31;T1=293;T2=353;p=1.0e5;V=1; mu=0.029;
04 N=100; dT=(T2-T1)/N;
05 alpha=1-T1/T2;
06 print(" alpha=%6.3f"%alpha)
07 x=[]; m=[];
08 x.append(T1); m.append((p*V*mu/R)/T1);
09 for i in range(1,N):
```

```

10     t=T1+i*dT;
11     x.append(t); m.append((p*v*mu/R)/t);
12     plt.plot(x,m,'k-')
13     plt.xlabel('$T$', fontsize=16)
14     plt.ylabel('$m$', fontsize=16)
15     plt.grid(True)
16     plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий; 02 – подключение пакета `matplotlib.pyplot`; 03-04 – определение исходных данных; 05-06 – вычисление и вывод массовой доли стравливаемого воздуха; 07 – инициализация одномерных массивов (списков), 08 – запись начальных значений температуры и массы; 09-11 – циклический расчет массы воздуха в аппарате и формирование выходных массивов T , m , 12-16 – вывод графика.

Приведем результат расчета по программе:

```

>>>
alpha= 0.170
>>>

```

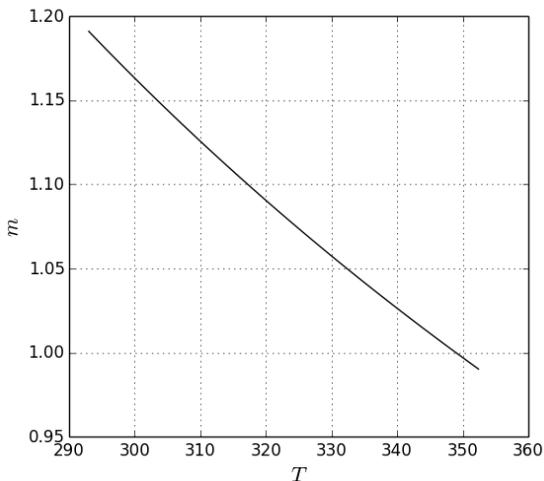


Рис. 1.1. Зависимость массы воздуха в аппарате от температуры

Проверка: оценка из графика дает значение $(m(0) - m(N)) / m(0) \approx 0.17$. Отметим, что только приведенное отношение масс имеет реальное значение, тогда как значение массы фиктивно, поскольку оно получено с использованием «BOGUS DATA». Таким образом, $\alpha = 0.170$ – такую массовую долю воздуха надо сравить, чтобы снизить давление воздуха до начального значения.

Ответ: $\alpha = 0.17$.

Пример 1.5. Поршневым воздушным насосом откачивают сосуд объемом $V = 100$ л. За один цикл (ход поршня) насос захватывает объем, равный $\Delta V = 0.5$ л. Через сколько циклов n давление в сосуде уменьшится в $p_0 / p_n = 100$ раз? Процесс считать изотермическим, а газ – идеальным.

Решение

Пусть $\eta_n = p_n / p_0$ и $q = V / (V + \Delta V)$, тогда изотермический процесс можно записать в виде $p_{n-1}V = p_n(V + \Delta V)$ или $p_{n-1}q = p_n$. Для получения итерационной формулы, описывающей изменение давления воздуха в сосуде, удобно представить процесс откачки в виде таблицы.

n	$T = \text{const}$	Прогрессия	Прогрессия
1	$p_0V = p_1(V + \Delta V)$	$p_1 = p_0q$	$\eta_1 = q$
2	$p_1V = p_2(V + \Delta V)$	$p_2 = p_1q$	$\eta_2 = q^2$
3	$p_2V = p_3(V + \Delta V)$	$p_3 = p_2q$	$\eta_3 = q^3$
...
n	$p_{n-1}V = p_n(V + \Delta V)$	$p_n = p_{n-1}q$	$\eta_n = q^n$

Из соотношения (правая колонка, последняя строка)

$$\eta_n = q^n \tag{9}$$

найдем количество циклов, необходимых для понижения давления в сосуде в η_n раз $\lg \eta_n = n \lg q$ и

$$n = \frac{\lg \eta_n}{\lg q}. \quad (10)$$

Составим программу расчета давления воздуха в сосуде в каждом цикле.

Листинг программы MP_N5_nasos.py

```
00 # Пример 1.5. Насос
01 import numpy as np
02 import matplotlib.pyplot as plt
03 import math
04 N=950; V=0.1;dV=0.0005; p0=1.0e5;
05 qV=V/(V+dV);
06 n1=math.log10(0.01)/math.log10(qV);
07 print ("n=",n1)
08 x=[]; p=[];
09 x.append(0); p.append(p0);
10 for i in range(1,N):
11     p0=p0*qV;
12     x.append(i); p.append(p0);
13 plt.plot(x,p,'k-')
14 plt.xlabel('$n$', fontsize=14)
15 plt.ylabel('$\eta_n$', fontsize=14)
16 plt.show()
```

Комментарий к программе: строки 00 – комментарий; 01-03 – подключение библиотек: **numpy** – для работы с одномерными массивами, **matplotlib.pyplot** – для графического вывода приведенного давления p_n / p_0 от номера n цикла, **math** – для вычисления математических функций; 04-06 – определение исходных данных; 07 – вывод числа циклов; 08 – инициализация одномерных массивов (списков); 09 – запись начальных значений номера цикла и давления; 10-12 – циклический расчет приведенного давления и формирование выходных массивов x, p ; 13-16 – вывод графика.

Подставляя значения давлений и объемов, получаем требуемое число качаний поршня $n = 933$ цикла. Полученный результат относится к «точечным» оценкам для одного набора данных. Найдем поведение давления p на отрезке $[0, n]$ в зависимости от соотношения объемов V и ΔV . График функции $\eta \equiv p(n) / p_0$, рассчитанный по программе `MP_N5_nasos.py` (листинг программы `MP_N5_nasos.py` приведен выше), для $q = 0.995$ показан на рис. 1.2.

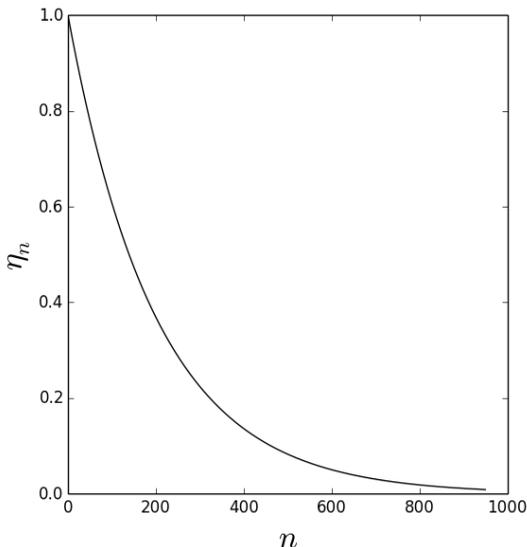


Рис. 1.2. Зависимость приведенного давления p_n / p_0 от числа циклов при $q = 0.995$

Согласно рис. 1.2 можно указать, какое давление газа в сосуде будет после определенного количества качаний поршня, например, давление газа понизилось вдвое после 139–140 качаний.

Ответ: $n = 933$.

Пример 1.6. Найти давление воздуха в откачиваемом сосуде как функцию времени откачки t . Объем сосуда $V = 100$ л. Процесс считать изотермическим и скорость откачки независимой от давления и

равной $C = 0.01$ л/с. Скоростью откачки называют объем газа, откачиваемый за единицу времени, причем этот объем измеряется при давлении газа в данный момент времени.

Решение

Рассмотрим изотермический процесс при изменении объема на dV и давления на dp , тогда $pV = (p + dp)(V + dV)$, или $pV = pV + pdV + Vdp + dpdV$; пренебрегая последним слагаемым, мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $dp/p = -dV/V$. Учитывая, что изменение объема $dV = Cdt$, уравнение можно проинтегрировать:

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{C}{V}t, \text{ или } \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{C}{V}t\right). \quad (11)$$

Полученная формула является решением задачи.

Анализ. Представим решение (11) в безразмерном виде:

$$\eta = \exp(-\beta t), \quad (12)$$

где $\eta = p/p_0$ и $\beta = C/V$. Это решение отличается от формулы (9). Для того чтобы сравнить (9) и (12), необходимо привести оба решения к одной области определения, т. е. перейти в (9) от безразмерного номера n цикла к соответствующему моменту времени t_n , где $t_n = n\Delta t$.

Для произвольного t_n выпишем два решения $\eta_{n-1} = q^{n-1}$ и $\eta_n = q^n$, затем составим разностное уравнение $\Delta\eta_n \equiv \eta_n - \eta_{n-1} = q^n - q^{n-1} = q^{n-1}(q - 1)$, или $\Delta\eta_n / \eta_n = 1 - q^{-1}$. Найдем сумму от 0 до n :

$$\sum_{n=0}^n \frac{\Delta\eta_n}{\eta_n} = \sum_{n=0}^n (1 - q^{-1}).$$

Правая часть выражения есть $(1 - q^{-1})n = (1 - q^{-1})t_n / \Delta t$, а левую часть вычислим, учитывая, что $\eta_0 = 1$, и, переходя от суммирования к интегрированию, запишем:

$$\sum_{n=0}^n \frac{\Delta \eta_n}{\eta_n} \rightarrow \int_0^{\eta_n} \frac{d\eta}{\eta} = \ln \eta_n - \ln \eta_0 = \ln \eta_n.$$

Итак, выражение (9) записывается в виде

$$\ln \eta_n = (1 - q^{-1})t_n / \Delta t \text{ или } \eta_n = \exp(-\gamma t_n), \quad (13)$$

где $\gamma_n = (q^{-1} - 1) / \Delta t$, и совпадает с (12) в узлах t_n дискретной временной сетки.

Листинг программы TD_N2_nasos.py

```

01 # Пример 1.6. Насос 2
02 import numpy as np
03 import matplotlib.pyplot as plt
04 import math
05 N=20; C=0.01; tmax=50.0; dt=tmax/N ; V=0.1;
06 dV=0.0005; qV=V/(V+dV); b1=C/V; dt1=V*(1.0/qV-1.0)/C
07 p0=1.0
08 print ("  q =",qV,"  b1=",b1,"  \Delta t=",dt1)
09 t=[]; p1=[]; p2=[]
10 t.append(0); p1.append(p0); p2.append(p0)
11 for i in range(1,N):
12     t1=i*dt; t.append(t1)
13     p1.append(math.exp(-b1*t1))
14     p2.append(qV**(t1/dt1))
15 plt.plot(t,p1,'k-')
15 plt.plot(t,p2,'ko:')
16 plt.xlabel('$t$', fontsize=14)
17 plt.ylabel('$\eta_1, \eta_2$', fontsize=14)
18 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 01 – комментарий, 02-04 – подключение библиотек `numpy`, `matplotlib.pyplot`, `math`; 05-08 – определение исходных данных; 09-10 – инициализация одномерных массивов (списков); 11-14 – циклический расчет приведенного давления и формирование выходных массивов t , p_1 , p_2 ; 15-18 – вывод графиков (13) и (9).

На рис. 1.3 показаны решение (13) (сплошная линия, T_2) и решение (9) (кружки, η_2).

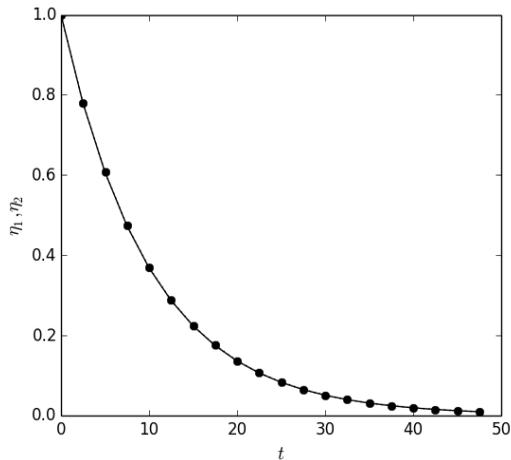


Рис. 1.3. Зависимость приведенного давления η от времени откачки t (пояснения в тексте)

Ответ: $\eta = \exp(-\beta t)$.

Самостоятельная работа 1

1.1. Самое низкое давление, получаемое с помощью самой совершенной вакуумной техники, приблизительно равно 10^{-12} Па. Сколько молекул воздуха содержится при таком давлении в 1 см^3 при температуре 273 К?

1.2. Какую часть объема одного моля газа при нормальных условиях занимает собственный объем его молекул и каково среднее расстояние между ними?

1.3. В баллоне вместимостью 30 л находится кислород при давлении 7.3 МПа и температуре 264 К. Затем часть газа из баллона выпустили, причем температура газа повысилась до 290 К, а давление упало до 2.94 МПа. Найти количество кислорода, выпущенного из баллона.

1.4. Камеру автомобильной шины накачивают с помощью насоса, работающего от двигателя. Сколько времени потребуется, чтобы накачать камеру от давления 1 атм до давления 2.5 атм, если объем автомобильной камеры 40 л, при каждом ходе насос захватывает из атмосферы столб воздуха высотой 10 см и диаметром 10 см? Время одного качания 1.5 с, температуру считать постоянной.

1.5. Давление воздуха в бутылке равно 0.1 МПа при температуре 280 К. На сколько нужно нагреть бутылку, чтобы пробка вылетела? Без нагревания пробку можно вынуть, прикладывая к ней силу 10 Н. Сечение пробки 2 см².

1.6. Два сосуда вместимости 200 см³ и 100 см³ разделены подвижным поршнем, не проводящим тепло. Сначала температура газа в сосудах 300 К, а его давление 0.1013 МПа, затем меньший сосуд охладил льдом до 273 К, а больший нагрели до 373 К. Какое давление установится в сосудах?

1.7. Баллон вместимости 50 л заполнили воздухом при 300 К до давления 10 МПа. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если вытеснение производится на глубине 40 м? Температура воздуха после расширения 276 К.

2. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ГАЗА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ.

Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_d \rangle, \quad (14)$$

где n – концентрация молекул; $\langle \epsilon_d \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул. Часто используют другую форму основного уравнения кинетической теории газов (3).

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы:

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT. \quad (15)$$

Число степеней свободы молекулы

$$i = n_1 + n_2 + 2n_3, \quad (16)$$

где n_1 – число поступательных степеней свободы; n_2 – число вращательных степеней свободы; n_3 – число колебательных степеней свободы.

Средняя квадратичная (тепловая) скорость молекул

$$v_T = \sqrt{3RT / \mu} = \sqrt{3kT / m_a}, \quad (17)$$

где m_a – масса частицы.

Средняя арифметическая скорость молекул

$$v_a = \sqrt{8RT / \pi \mu} = \sqrt{8kT / \pi m_a}. \quad (18)$$

Наиболее вероятная скорость молекул

$$v_p = \sqrt{2RT / \mu} = \sqrt{2kT / m_a}. \quad (19)$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = i\nu RT / 2. \quad (20)$$

Пример 2.1. Кислород массой $m = 0.012$ кг находится при температуре $T = 973$ К, при этом 40 % ($\alpha = 0.4$) молекул диссоциировались на атомы. Чему равна средняя энергия $\langle E \rangle$ теплового движения частиц? Колебательные степени свободы молекул кислорода «заморожены», $\mu = 0.032$ кг/моль, $i_1 = 3$, $i_2 = 5$ – число степеней свободы атома и молекулы кислорода.

Решение

При высокой температуре α молекул диссоциировало на атомы, поэтому расчетная формула для смеси из атомарного и молекулярного кислорода будет иметь вид

$$\langle E \rangle = N_1 \langle \varepsilon_1 \rangle + N_2 \langle \varepsilon_2 \rangle, \quad (21)$$

где $N_1 = 2\alpha N_0$ – число атомов кислорода; $N_2 = (1-\alpha)N_0$ – число молекул кислорода; $N_0 = mN_A / \mu$ – исходное число молекул кислорода; $\langle \varepsilon_1 \rangle = (i_1/2)kT$ и $\langle \varepsilon_2 \rangle = (i_2/2)kT$ – средняя тепловая энергия атома и молекулы кислорода соответственно.

Составляем программу `MP_N2_1_disso.py` для расчета средней энергии теплового движения частиц.

Листинг программы `MP_N2_1_disso.py`

```
00 # Пример 2.1. Диссоциация-1
01 k=1.38e-23; NA=6.02e23;
02 m=0.012; mu=0.032; T=973; a=0.4; i1=3; i2=5;
03 e1=i1*k*T/2; e2=i2*k*T/2;
04 N0=m*NA/mu; N1=2*a*N0; N2=(1-a)*N0; E=N1*e1+N2*e2;
05 print (" E= ",E)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01-02 – определение входных данных; 03-04 – расчетные формулы; 05 – вывод результата расчета.

Расчет по программе дает:

```
>>>
```

```
E= 8184.335985
```

```
>>>
```

Приводим результат расчета в соответствие с точностью исходных данных, тогда искомая средняя энергия газа будет равна $\langle E \rangle = 8.2 \times 10^3$ Дж.

Ответ: $\langle E \rangle = 8.2 \times 10^3$ Дж.

Пример 2.2. При определении скорости атомов серебра по методу Штерна установлено, что при вращении цилиндра А против часовой стрелки со скоростью $\omega = 80\pi \text{ с}^{-1}$ середина серебряной полоски на медном полированном цилиндре сместилась на $\Delta l = 3.2 \text{ мм}$. Определить скорость атомов серебра, если радиус цилиндра А $R_A = 0.1 \text{ м}$, а соосного с ним цилиндра В $R_B = 0.01 \text{ м}$. Сравнить полученный результат со средней квадратичной скоростью (17) и найти относительную погрешность, если температура нити равна $T = 2000 \text{ К}$. Молярная масса серебра $\mu = 0.108 \text{ кг/моль}$.

Решение

Расстояние от внутреннего цилиндра до полированной поверхности внешнего цилиндра частица пролетит за время $\tau = (R_A - R_B) / v_1$, где v_1 — скорость частиц атомного пучка. За это время полета внешний цилиндр повернется на угол $\Delta\phi = \omega\tau$, связанный с длиной отрезка дуги $\Delta l = R_A \Delta\phi$, тогда $\tau = \Delta l / \omega R_A$. Приравнявая правые части полученных выражений $(R_A - R_B) / v_1 = \Delta l / \omega R_A$, находим искомую скорость атомов серебра в пучке $v_1 = (R_A - R_B)\omega R_A / \Delta l$. Тепловая скорость атомов серебра, соответствующая температуре пучка атомов серебра, согласно (17), есть $v_2 = \sqrt{3RT/\mu}$. Эксперимент имеет более высокий статус, чем теория, поэтому определим относительную ошибку скорости частиц пучка так: $\delta v = |v_1 - v_2| / v_1$.

Составим программу **MP_N2_2_stern.py** для расчета скорости атомов серебра в пучке.

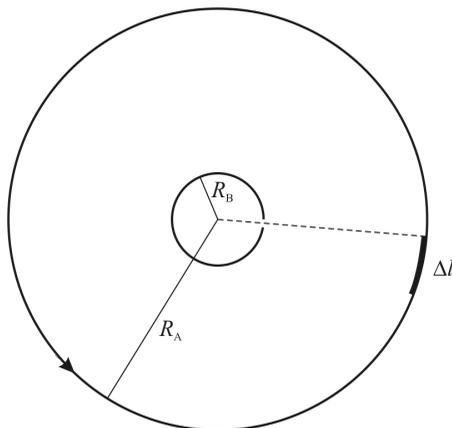


Рис. 2.1. Схема опыта Штерна

Листинг программы MP_N2_2_stern.py

```
00 # Пример 2.2. Опыт Штерна-Герлаха
01 import math
02 R=8.31;      mu=0.108;   T=2000;   RA=0.1;   RB=0.01;
03 DL=0.0032; omega=2*math.pi*40;
04 v1=(RA-RB)*omega*RA/DL;      v2=math.sqrt(3*R*T/mu);
05 dv=math.fabsabs(v1-v2)/v1;
06 print("v1=%7.2f"%v1, "\nv2=%7.2f"%v2, "\ndv=%7.3f"%dv)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки `math`; 02-03 – определение исходных данных; 04-05 – расчетные формулы; 06 – форматированный вывод результатов расчета.

Расчет по программе дает:

>>>

v1= 706.86

v2= 679.46

dv= 0.039

>>>

Ответ: $v_1 = 707$ м/с, $v_2 = 679$ м/с, $\delta v = 0.04$.

Самостоятельная работа 2

2.1. Самая низкая температура в космосе составляет 2.7 К. Какова средняя квадратичная скорость молекул водорода при такой температуре?

2.2. Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул водорода, содержащихся в одном моле газе при 291 К.

2.3. Средняя энергия молекул одноатомного идеального газа равна 6.00×10^{-21} Дж. Давление газа 0.2 МПа. Найти концентрацию молекул газа.

2.4. Найти внутреннюю энергию 20 г кислорода при температуре 293 К. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая – на вращательное движение?

2.5. Найти внутреннюю энергию двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом 2 л под давлением 0.15 МПа.

2.6. Как изменится средняя квадратичная скорость молекул кислорода, находящихся в сосуде объемом 2.5 л при нормальных условиях, если газ расширяется до объема 5 л: а) изотермически; б) изобарически?

2.7. На пути направленного молекулярного пучка, излучаемого накаленной нитью, в вакууме стоит «зеркальная стенка». Найти давление, испытываемое этой стенкой, если температура нити, из которой вылетают атомы серебра, равна 1500 К, концентрация атомов в пучке 10^{11} м^{-3} , стенка расположена перпендикулярно направлению движения частиц в пучке.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА, БОЛЬЦМАНА

А. Распределение молекул по скоростям Максвелла

Пусть $W(a, b)$ – вероятность, что случайная величина лежит в интервале $[a, b]$, тогда:

$$W(v_{x1}, v_{x2}) = \int_{v_{x1}}^{v_{x2}} f(v_x) dv_x, \quad f(v_x) = \sqrt{\frac{m_a}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right); \quad (22)$$

$$W(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} F(v) dv, \quad F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_a}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m_a v^2}{2kT}\right); \quad (23)$$

$$W(v_{\perp 1}, v_{\perp 2}) = \int_{v_{\perp 1}}^{v_{\perp 2}} g(v_{\perp}) dv_{\perp}, \quad g(v_{\perp}) = \left(\frac{m_a}{kT}\right)^{1/2} v_{\perp} \exp\left(-\frac{m_a v_{\perp}^2}{2kT}\right), \quad (24)$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, $4\pi v^2 dv = dv_x dv_y dv_z$, $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$.

Используя наиболее вероятную скорость v_p , (22) и (23) можно представить как

$$W(u_{x1}, u_{x2}) = \int_{u_{x1}}^{u_{x2}} f(u_x) du_x, \quad f(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u_x^2); \quad (25)$$

$$W(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} F(u) du, \quad F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2), \quad (26)$$

где

$$u_x = v_x / v_p, \quad u = v / v_p, \quad v_p = \sqrt{2RT / \mu}. \quad (27)$$

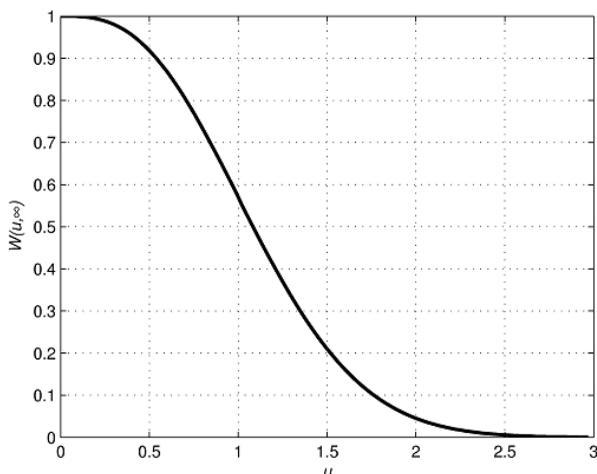


Рис. 3.1. Вероятность $W(u, \infty)$ в зависимости от u

Пример 3.1. Определите, какая часть молекул азота при температуре $T = 423$ К обладает скоростями от $v_1 = 300$ м/с до $v_2 = 800$ м/с.

Решение

Найдем согласно (27) наиболее вероятную скорость: $v_p = \sqrt{2RT / \mu} = 501$ м/с, тогда грубая оценка доли молекул по рис. 3.1

равна $W(0.6, 1.6) = W(0.6, \infty) - W(1.6, \infty) \approx 0.87 - 0.15 = 0.72$. Уточним оценку приближенным интегрированием по методу прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = \Delta x \sum_{n=1}^{N-1} f(x_n), \quad (28)$$

где $x_n = a + n\Delta x$, $\Delta x = (b - a) / N$. Искомая вероятность равна

$$W(u_1, u_2) = \Delta u \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{N-1} u_n^2 \exp(-u_n^2). \quad (29)$$

Составим программу **MP_N3_1_maxwell_1.py** для расчета вероятности нахождения молекул в заданном скоростном интервале $[u_1, u_2]$.

Листинг программы MP_N3_1_maxwell_1.py

```
00 # Пример 4.1. Вероятность -1
01 import math
02 R=8.31; mu=0.028; T=423; v1=300; v2=800;
03 vp=math.sqrt(2*R*T/mu);
04 u1=v1/vp; u2=v2/vp; N=100; du=(u2-u1)/N; sum=0;
05 print("vp=%7.3f"%vp, "\nu1=%7.3f"%u1, "\nu2=%7.3f"%u2)
06 for j in range(1,N):
07     u =u1+j*du;
08     sum=sum+u*u*math.exp(-u*u);
09 W=4*du*sum/math.sqrt(math.pi);
10 print("N =      ", N, "\nW=%7.3f"%W)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки **math**; 02 – определение исходных данных; 03-04 – расчетные формулы; 05 – вывод результата расчета; 06-08 – интегрирование по (29); 09 – расчет вероятности W ; 10 – вывод значений N и W .

Расчет по программе дает:

>>>

vr= 501.080

u1= 0.599

u2= 1.597

N = 100

W = 0.699

>>>

При $N = 100$, $W(0.6, 1.6) = 0.699$, при $N = 1000$, $W(0.6, 1.6) = 0.704$, округлим до двух значащих цифр, таким образом, более точная оценка составляет $W \approx 0.70$, что практически совпадает с нашей грубой оценкой по графику.

Ответ: $W \approx 0.70$.

Распределение молекул по энергиям в интервале $E, E + dE$:

$$dW(E) = \left(2/\sqrt{\pi}\right)(kT)^{-3/2} \sqrt{E} \exp(-E/kT) dE . \quad (30)$$

Пример 3.2. Энергия ионизации атомов водорода составляет $E_{\text{ion}} = 13.6$ эВ. Найти, при какой температуре 10 % всех атомов водорода имеют энергию поступательного движения атомов, превышающую энергию ионизации.

Решение

В безразмерных единицах $\varepsilon = E/kT$ распределение молекул по энергиям (30) принимает следующий простой вид:

$$dW(\varepsilon) = \left(2/\sqrt{\pi}\right) \sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon) d\varepsilon , \quad (31)$$

а вероятность, или доля частиц, имеющих кинетическую энергию ε , большую некоторой энергии ε_1 , есть

$$W(\varepsilon_1, \infty) = \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \left(2/\sqrt{\pi}\right) \sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon) d\varepsilon , \quad (32)$$

график которой показан на рис. 3.2. Из этого рисунка по условию $W(\varepsilon_1, \infty) = 0.1$ определим значение энергии, равное $\varepsilon_1 \approx 3.1$. Более точный расчет ε_1 требует решения нелинейного уравнения $f(\varepsilon_1) = W(\varepsilon_1, \infty) - 0.1$. Этот расчет проведем на основе метода деления пополам, а интегрирование (32) при этом выполним с учетом следующего аддитивного свойства определенных интегралов:

$$\int_{\varepsilon_m}^{\infty} (2/\sqrt{\pi})\sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\infty} (2/\sqrt{\pi})\sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon) d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon_m} (2/\sqrt{\pi})\sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon) d\varepsilon,$$

где первое слагаемое равно единице [12], а второй интеграл в конечных пределах легко вычислить любым квадратурным методом, например, методом прямоугольников:

$$W(\varepsilon_m, \infty) \equiv \int_{\varepsilon_m}^{\infty} (2/\sqrt{\pi})\sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon) d\varepsilon \approx 1 - \Delta\varepsilon \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{N-1} \sqrt{\varepsilon_n} \exp(-\varepsilon_n). \quad (33)$$

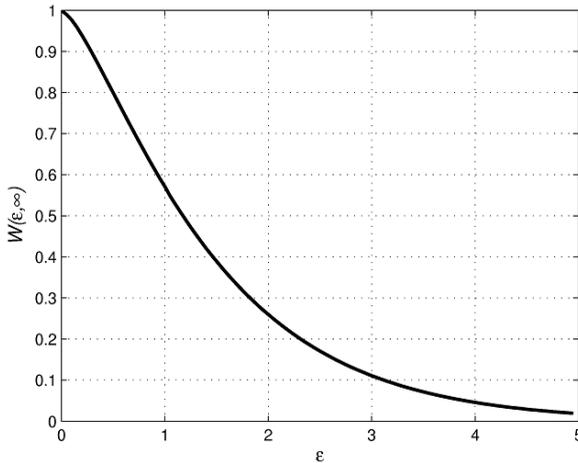


Рис. 3.2. Вероятность $W(\varepsilon, \infty)$ в зависимости от ε ,
где $\varepsilon = E / kT$

Составим программу `MP_N3_2_maxwell_1.py` для расчета температуры, при которой с вероятностью, большей η , частицы находятся в заданном энергетическом интервале $[E, \infty]$.

Листинг программы `MP_N3_2_maxwell_1.py`

```
00 # Пример 4.2. Вероятность -1
01 import math as mt
02 k=1.38e-23; q=1.6e-19; E1=q*13.6; W=0.1;
03 def f(x):
04     NX=800; dx=x/NX; sum=0.0;
05     for j in range(NX):
06         xj=j*dx;
07         sum=sum+mt.sqrt(xj)*mt.exp(-xj);
08     return 1.0-2*dx*sum/mt.sqrt(mt.pi)-W;
09 u1=2.0; u2=4.0; f1=f(u1); f2=f(u2); tol=0.001;
10 n=int(mt.ceil(mt.log(abs(u2-u1)/tol)/mt.log(2.0)))
11 for i in range(n):
12     u3=0.5*(u1+u2); f3=f(u3);
13     if f2*f3<0.0:
14         u1=u3; f1=f3;
15     else:
16         u2=u3; f2=f3;
17 u=0.5*(u1+u2);
18 T=E1/(k*u);
19 print ("e1= %7.3f"%u, "\nT1= %8.3e"%T)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки `math`; 02 – определение исходных данных; 03-08 – определение функции $f(\varepsilon_1)$; 09-17 – нахождение нуля функции $f(\varepsilon_1)$; 18 – температура газа; 19 – вывод результата расчета.

Расчет по программе дает:

>>>

e1= 3.129

T1= 5.039e+04

>>>

При температуре атомарного газа $T = E_{\text{ion}} / k\varepsilon_m \approx 5.0 \times 10^4$ К десять процентов атомов водорода имеют энергию, превышающую энергию ионизации атома водорода.

Ответ: $T \approx 5.0 \times 10^4$ К.

Пример 3.3. По оси откачанной цилиндрической трубки натянута нихромовая нить, разогретая до $T = 1000$ К. Считая, что скорости эмитируемых электронов распределены по закону Максвелла, найти долю электронов, достигающих цилиндрической стенки (анода), если она находится под задерживающим потенциалом относительно нити, равным $\Delta V = 0.10$ В.

Решение

Чтобы эмитированные электроны достигали стенки, они должны совершить работу против электрического поля, равную

$$A = q\Delta V.$$

Пусть продольная компонента скорости v_{\parallel} направлена вдоль оси трубки, тогда компонента скорости v_{\perp} совпадает с радиальным направлением. Минимальную поперечную составляющую скорости $v_{\perp,1}$, необходимую для преодоления задерживающего электрического поля, можно определить из закона сохранения энергии

$$m \frac{v_{\perp,1}^2}{2} = q\Delta V.$$

Используя (24), запишем выражение для искомой доли молекул

$$W(v_{\perp}, \infty) = \int_{v_1}^{\infty} \left(\frac{m_a}{kT} \right)^{1/2} v_{\perp} \exp\left(-\frac{m_a v_{\perp}^2}{2kT} \right) dv_{\perp}. \quad (34)$$

Переходя к безразмерной переменной $u = v_{\perp} / v_p$, перепишем (34):

$$W(u_{\perp}, \infty) = 2 \int_{u_1}^{\infty} \exp(-u^2) u du = \int_{u_1^2}^{\infty} \exp(-u^2) du^2, \quad (35)$$

интегрируя (35), получаем расчетную формулу для искомой доли молекул

$$W(\Delta V) = \exp\left(-\frac{q\Delta V}{kT}\right). \quad (36)$$

Составим программу **MP_N3_3_maxwell_1.py** для расчета (36)

Листинг программы MP_N3_3_maxwell_1.py

```
00 # Пример 3.3. MP_N3_3_maxwell_1.py
01 import matplotlib.pyplot as plt
02 import math as mt
03 me=9.1e-11;qe=1.6e-19;kB=1.38e-23;T1=1000.0;V1=0.1;
05 def part(V,T):
06     f=mt.exp(-qe*V/(kB*T));
07     return f
08 print ("V1=",V1,"    W1=%7.3f"%part(V1,T1));
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01-02 – подключение библиотек **matplotlib.pyplot**, **math**; 03 – определение исходных данных; 05-07 – расчетная формула (36); 08 – вычисление доли молекул, при $\Delta V = 0.1$ В достигающих цилиндрического анода при температуре T , и вывод результатов расчета.

Вычисление искомой доли электронов (строчка 08) дает такой результат:

```
>>>
```

```
V1= 0.1    W1= 0.314
```

```
>>>
```

Ответ: $W = 0.31$.

В. Распределение Больцмана

Распределение Больцмана можно представить в таком виде:

$$p(y) = p_0 \exp(-\varepsilon), \quad n(y) = n_0 \exp(-\varepsilon), \quad w(y) = \exp(-\varepsilon), \quad (37)$$

где $\varepsilon = E / kT = m_a g y / kT = \mu g y / RT$; E – потенциальная энергия частицы газа.

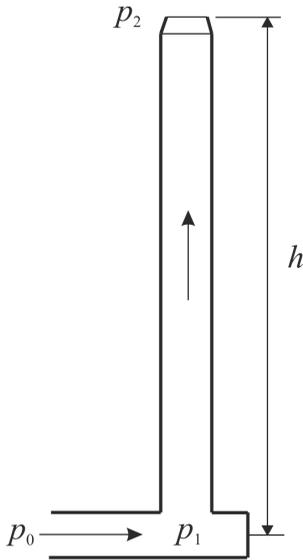


Рис. 3.4. Схема трубы

Пример 3.4. Кирпичная труба высотой $h = 25$ м выпускает дым при температуре $T_1 = 330$ К (рис. 3.4). Определить перепад давления на входе в трубу, обеспечивающий тягу. Температура наружного воздуха $T_0 = 230$ К, давление $p_0 = 10^5$ Па.

Решение

Согласно распределению Больцмана давление воздуха изменяется с высотой так:

$$p' = p_0 \exp\left(-\frac{\mu_0 g h}{RT_0}\right), \quad (38)$$

где $\mu_0 = 0.029$ кг/моль, $R = 8.31$ Дж/моль · К, $g = 9.8$ м/с².

Считаем, что температура T_1 выходных газов в трубе постоянная, на высоте h давление нагретых газов внутри трубы согласно (38) равно

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{\mu_1 g h}{RT_1}\right), \quad (39)$$

а давление p'_2 наружного воздуха на той же высоте (на срезе трубы) равно давлению выходящих газов: $p_2, p_2 = p'_2$.

Учитывая (38)

$$p'_2 = p_0 \exp\left(-\frac{\mu_0 gh}{RT_0}\right), \quad (40)$$

получаем следующее соотношение

$$p_1 \exp\left(-\frac{\mu_1 gh}{RT_1}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu_0 gh}{RT_0}\right). \quad (41)$$

Искомый перепад давлений на нулевом уровне равен

$$\Delta p = p_0 - p_1 = p_0 - p_0 \exp\left(-\frac{\mu_0 gh}{RT_0} + \frac{\mu_1 gh}{RT_1}\right),$$

или

$$\Delta p = p_0 \left(1 - \exp\left(\left(\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_0}{T_0}\right) \frac{gh}{R}\right)\right). \quad (42)$$

График $\Delta p(T_1)$ показан на рис. 3.5.

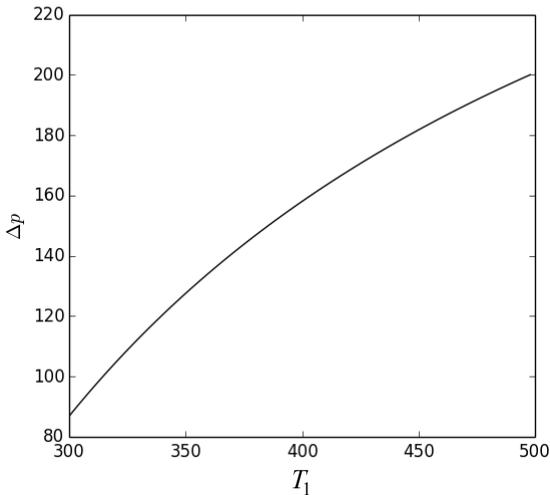


Рис. 3.5. Разность давлений Δp в зависимости от температуры газов в трубе

Составим программу **MP_N3_4_boltzmann_1.py** для расчета (42).

Листинг программы **MP_N3_4_boltzmann_1.py**

```
00 # Пример 3.4. MP_3_4_Boltzmann_1
01 import matplotlib.pyplot as plt
02 import math as mt
03 g=9.81; R=8.31; mu0=0.029; mu1=0.029;
04 T0=230; T1=330; p0=1.0e5; h=25;
05 def dp(y,T):
06     f=p0*(1-mt.exp((mu1/T-mu0/T0)*g*y/R));
07     return f
08 print ("T1=",T1," W1=%7.1f"%dp(h,T1));
09 Tmin=300; Tmax=500; NT=100; dT=(Tmax-Tmin)/NT;
10 t=[];DN=[]; t.append(Tmin); DN.append(dp(h,Tmin))
11 for i in range(1,NT):
12     t1=Tmin+i*dT; t.append(t1); DN.append(dp(h,t1))
13 plt.plot(t,DN,'k-')
14 plt.xlabel('$T$',fontsize=14)
15 plt.ylabel('$\Delta p$',fontsize=14)
16 plt.show()
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01-02 – подключение библиотек **matplotlib.pyplot**, **math**; 03-04 – определение исходных данных; 05-07 – расчетная формула (42); 08 – вычисление перепада давления при $h = 0$; 09-12 – вычисление перепада давлений при разной температуре отходящих газов; 13-16 – графический вывод результатов расчета.

Вычисление разности давлений для исходных данных дает такой результат.

```
>>>
```

```
T1= 330 W1= 112.7
```

```
>>>
```

Ответ: $\Delta p \approx 0.11$ кПа.

Пример 3.5. В атмосфере находятся частицы пыли, имеющие массу $m = 8 \times 10^{-22}$ кг и объем $V = 5 \times 10^{-22}$ м³. Найти уменьшение их концентрации на высотах $h_1 = 1.5$ м и $h_2 = 15$ м. Считать, что воздух находится при нормальных условиях $T_0 = 273$ К, $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Па.

Решение

Потенциальную энергию частицы с учетом архимедовой силы можно записать так: $U(y) = (mg - \rho Vg)y$, где mg – сила тяжести; ρVg – выталкивающая сила Архимеда; ρ – плотность воздуха ($\rho = p_0 \mu / RT_0$), тогда расчетную формулу для отношения $w = n / n_0$ концентраций запишем в виде (37) (рис. 3.6): $w = \exp(-\varepsilon)$, где $\varepsilon = (m - \rho V)gy / kT$.

Составим программу `MP_N3_5_boltzmann_1.py` для расчета w .

Листинг программы `MP_N3_5_boltzmann_1.py`

```

00 # Пример 3.5. MP_3_5_Boltzmann_1
01 import matplotlib.pyplot as plt
02 import math as mt
03 g=9.81;R=8.31;k=1.38e-23;mu0=0.029;T0=230;p0=1.0e5;
04 m=8.0e-22; V=5.0e-22; h1=1.5; h2=15;
05 ro=p0*mu0/(R*T0)
06 def dp(y):
07     f=mt.exp(-(m-ro*V)*g*y/(k*T0));
08     return f
09 print ("h1=",h1," w1=%7.3f"%dp(h1));
10 print ("h2=",h2," w2=%7.3f"%dp(h2));
11 ymin=0; ymax=25; N=100; dy=(ymax-ymin)/N;
12 z=[];DN=[]; z.append(ymin); DN.append(dp(ymin))
13 for i in range(1,N):
14     y1=ymin+i*dy; z.append(y1); DN.append(dp(y1))
15 plt.plot(z,DN,'k-')
16 plt.xlabel('$y$', fontsize=14)
17 plt.ylabel('$w$', fontsize=14)
18 plt.grid(True)
19 plt.show()

```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01-02 – подключение библиотек `matplotlib.pyplot`, `math`; 03-05 – определение исходных данных; 06-08 – расчетная формула для w ; 09-10 – вычисление отношения концентраций для $h_1 = 1.5$ и $h_2 = 15$; 11-14 – вычисление отношения концентраций w на разной высоте; 15-19 – графический вывод результатов расчета.

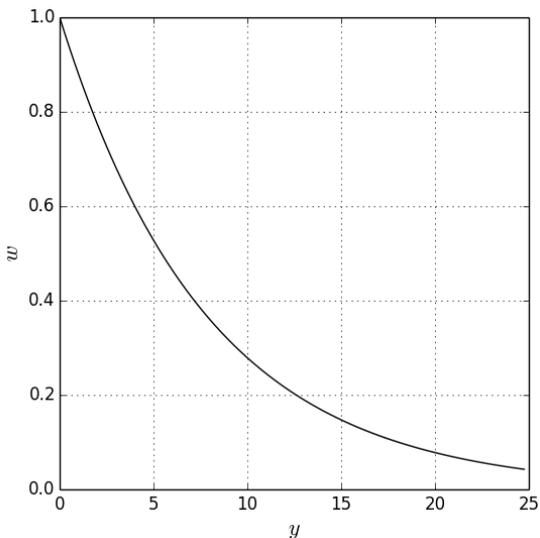


Рис. 3.6. Отношение концентраций $w = n(y) / n_0$ на разных высотах y

Вычисление w для исходных данных дает такой результат:

```
>>>
```

```
h1= 1.5  w1= 0.826
```

```
h2= 15   w2= 0.147
```

```
>>>
```

Чем выше над уровнем земли, тем чище воздух. Этот вывод справедлив при условии постоянства температуры и отсутствия потоков воздуха.

Ответ: $w_1 = 0.83$, $w_2 = 0.15$.

Самостоятельная работа 3

3.1. Температура водорода 550 К. Определить отношение числа молекул этого газа, компоненты скоростей которых лежат в интервале от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул, компоненты скоростей которых лежат в интервале от 1500 до 1510 м/с.

3.2. Температура кислорода 500 К. Определить долю молекул этого газа, чьи модули скоростей больше наиболее вероятной скорости (использовать рис. 3.1).

3.3. Энергия ионизации атомов калия равна 4.34 эВ. Найти, при какой температуре 10 % всех атомов калия имеют кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию, необходимую для ионизации отдельных атомов калия.

3.4. Ж. Перрен, наблюдая при помощи микроскопа изменение концентрации взвешенных частиц гуммигута с изменением высоты и применяя барометрическую формулу, экспериментально нашел значение числа Авогадро N_A . В одном из опытов Перрен нашел, что при расстоянии между двумя слоями 100 мкм число взвешенных частиц гуммигута в одном слое вдвое больше, чем в другом. Температура жидкости с гуммигутом равна 293 К, частицы гуммигута имеют диаметр 0.3 мкм, взвешены в жидкости, плотность которой на 200 кг/м³ меньше плотности частиц. Найти по этим данным число Авогадро.

3.5. Определить массу воздуха m в цилиндре с основанием 1 м² и высотой $h_1 = 1$ м, $h_2 = 1$ км, $h_3 = 10$ км. Найти отношение $\alpha \equiv m_0 / m$, где m_0 – масса воздуха на нулевой высоте. Считать, что воздух находится при нормальных условиях.

3.6. Барометр в кабине самолета все время показывает одинаковое давление $p_1 = 80$ кПа, благодаря чему летчик считает высоту полета неизменной. Однако температура воздуха изменилась на $\Delta T = 1$ К. Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Считать, что температура не зависит от высоты и что у поверхности Земли давление $p_0 = 100$ кПа.

4. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Первое начало термодинамики – закон сохранения энергии

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}. \quad (43)$$

где Q_{12} – количество теплоты, сообщенное системе; ΔU_{12} – изменение внутренней энергии системы; A_{12} – работа, совершаемая системой против внешних сил.

Внутренняя энергия U идеального газа

$$U = \frac{i}{2} \nu RT = \nu C_V T, \quad (44)$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Адиабатический процесс

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}; \quad (45)$$

$$A_{12} = \frac{\nu R}{\gamma-1} (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right), \quad (46)$$

где $\gamma = C_p / C_V$ – показатель адиабаты; C_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

Молярная теплоемкость

$$C_V = \delta U / dT = iR / 2, \quad (47)$$

$$C_p = C_V + R. \quad (48)$$

Некоторую помощь в решении задач раздела оказывает графическое представление изучаемого термодинамического процесса, который может состоять из последовательности различных подпроцессов.

Алгоритм 2. Графическое представление составного процесса

1. Весь процесс разобьем на подпроцессы, узловые состояния которых: $(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$.

2. Пусть $i = 1, N_0 = 0$, определим количество узлов на каждом интервале $\{N_i\}_{i=1}^N$.

3. Для i -го подпроцесса использовать алгоритм 1 получения одномерных массивов $\{x_j\}, \{y_j\}$.

3.1. Задаем сетку в i -м интервале: $x_{j+1} = x_j + j\Delta x_i$,

$$j = M_i + 1 \dots M_i + N_i, \quad M_i = \sum_{k=1}^{i-1} N_k, \quad \Delta x_i = (X_i - X_{i-1}) / N_i.$$

3.2. Вычисляем $y_j = f(x_j)$

4. $i = i + 1$.

5. if $i \leq N$ then goto 3.

6. Пользуясь процедурами пакета **Matplotlib**, строим график составного процесса.

Пример 4.1. Автомобильная камера накачана до давления $p_1 = 220$ кПа при температуре $T_1 = 290$ К. Во время движения она нагрелась до температуры $T_2 = 330$ К и с шумом лопнула. Считая процесс, происходящий после повреждения камеры, адиабатным, определить изменение температуры вышедшего из нее воздуха. Внешнее давление $p_0 = 100$ кПа.

Решение

Выделим два термодинамических процесса задачи. Первый $1 \rightarrow 2$ – изохорическое нагревание воздуха в камере; второй $2 \rightarrow 0$ – адиабатическое расширение воздуха: 1) $p_1 / T_1 = p_2 / T_2$, $p_2 = p_1 T_2 / T_1$; 2) $T_2 p_2^{(1-\gamma)/\gamma} = T_0 p_0^{(1-\gamma)/\gamma}$, где T_0 – температура воздуха в конце адиабатического расширения, $T_0 = T_2 p_2^{(1-\gamma)/\gamma} / p_0^{(1-\gamma)/\gamma}$. Найдем разность температур $\Delta T = T_0 - T_2$, $\Delta T = T_2 (p_2 / p_0)^{(1-\gamma)/\gamma} - T_2$ и $\Delta T = T_2 \times ((p_2 / p_0)^{(1-\gamma)/\gamma} - 1)$.

Составим программу **TD_N4_1_TD_1.py** для расчета ΔT

Листинг программы TD_N4_1_TD_1.py

```
00 # Пример 4.1. TD_N4_1_TD_1.py
01 import matplotlib.pyplot as plt
02 import math as mt
03 R=8.31;p0=1.0e5;p1=2.2e5;T1=290;T2=330;g=1.4;
04 b=(1-g)/g;c=1/b;p2=p1*T2/T1;
05 T0=T2*mt.pow(p2/p0,b); DT=T2-T0;
06 print ("p2=%8.3e"%p2,"T0=%5.1f"%T0,"DT=%5.1f"%DT);
07 N1=100; dT1=(T2-T1)/N1; dT2=(T0-T2)/N1;
08 t=[];DN=[]; t.append(T1); DN.append(p1)
09 for i in range(1,N1):
10     t1=T1+i*dT1; t.append(t1); DN.append(p1*t1/T1)
11 for i in range(1,N1):
12     t1=T2+i*dT2;
13     t.append(t1);DN.append(p2*mt.pow(T2/t1,c));
14 plt.plot(t,DN,'k-')
15 plt.xlabel('$T$', fontsize=14)
16 plt.ylabel('$p$', fontsize=14)
17 plt.show()
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01-02 – подключение библиотек **matplotlib.pyplot**, **math**; 03 – определение исходных данных; 04-06 – расчет p_2 , T_0 , ΔT и их вывод; 07 – определение двух сеток для процессов $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 0$ соответственно; 08-13 – вычисление одномерных массивов температуры и давления; 14-17 – графический вывод результатов расчета (рис. 4.1).

Вычисление p_2 , T_0 , ΔT для исходных данных дает такой результат:

```
>>>
p2=2.503e+05 T0=253.9 DT= -76.1
>>>
```

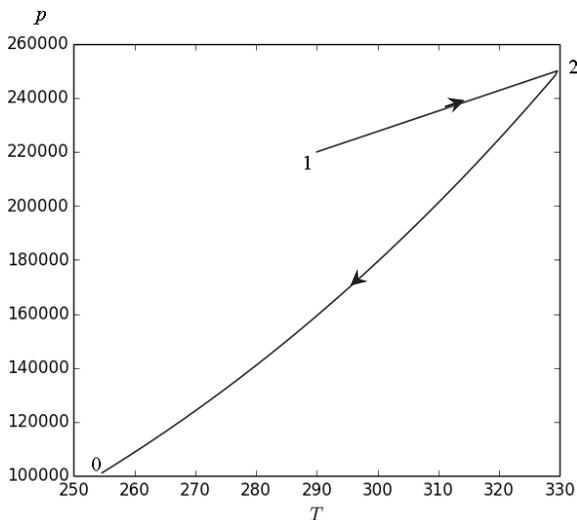


Рис. 4.1. Зависимость давления от температуры в процессе $1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$

Ответ: $\Delta T = -76$ К.

Примечание. Самые большие грузовики трудятся в карьерах, их грузоподъемность более 300 тонн, например, **БЕЛАЗ-75710** имеет рекордную грузоподъемность **450 тонн**. Определите, насколько понизится температура, если лопнет шина такого карьерного самосвала.

Пример 4.2. В результате обратимого адиабатического расширения температура 1 кг азота понижается на 20 К. Определить работу, совершаемую газом при расширении. Учесть, что колебательные степени свободы молекул азота при рассматриваемых температурах не возбуждаются.

Решение

Для расчета работы адиабатического расширения удобно использовать первую формулу (46). Учитывая, что $\nu = m/\mu$ и $\gamma = 1.4$, найдем величину работы A адиабатического расширения. Составим программу **TD_N4_2_TD_1.py** для расчета A_{12} .

Листинг программы TD_N4_2_TD_1.py

```
00 # Пример 4.2. TD_N4_2_TD_1.py
01 R=8.31;mu=0.028; m=1.0;DT=20; g=1.4;
02 A12=m*R*DT/(mu*(g-1));
03 print ("A12=%8.3e"%A12);
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – определение исходных данных; 02 – расчетная формула для работы A_{12} – адиабатического расширения; 03 – вывод результата расчета A_{12} .

Вычисление адиабатической работы дает такой результат:

>>>

A12=1.484e+04

>>>

Ответ: $A_{12} \approx 15$ кДж.

Пример 4.3. Смешали две части водорода и одну часть кислорода (по объему). Общая масса смеси 72 г, температура 290 К. Определить молярную теплоемкость C_V и внутреннюю энергию U смеси газов. Параметры: $i_1 = 5$, $i_2 = 5$, $\mu_1 = 0.002$, $\mu_2 = 0.032$ кг/моль.

Решение

Внутренняя энергия смеси газов есть сумма внутренних энергий компонентов $U = U_1 + U_2 = \nu C_V T$, где $C_V = iR/2$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме. Найдем количество молей ν вещества. Для этого воспользуемся законом Авогадро в форме «в равных объемах содержится равное количество молей газов при прочих равных условиях», тогда $m_1 = 2n\mu_1$ – масса водорода, $m_2 = n\mu_2$ – масса кислорода, где n – число частей компонент смеси, которое определим из массы смеси $m = m_1 + m_2$, $m = 2n\mu_1 + n\mu_2$ и $n = m / (2\mu_1 + \mu_2)$. Число молей смеси газов есть $\nu = \nu_1 + \nu_2 = m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2$.

Составим программу TD_N4_3_TD_1.py для расчета C_V , U .

Листинг программы TD_N4_3_TD_1.py

```
00 # Пример 5.3. TD_N5_3_TD_1.py
01 R=8.31;mu1=0.002;mu2=0.032;m=0.072;T=290;
02 n=m/(2*mu1+mu2); m1=2*n*mu1; m2=n*mu2;
03 v1=m1/mu1; v2=m2/mu2; v=v1+v2; i1=i2=5;
04 CV=0.5*i1*R; U=v*CV*T;
05 print ("CV=%8.3f"%CV, " U=%8.3e"%U);
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01-03 – определение исходных данных; 04 – расчетные формулы для молярной теплоемкости C_V и внутренней энергии смеси газа U ; 05 – вывод результатов расчета.

После вычисления мы получили такой результат:

>>>

CV= 20.775 U=3.615e+04

>>>

Ответ: $C_V \approx 21$ Дж/моль·К, $U \approx 36$ кДж.

Самостоятельная работа 4

4.1. Один моль идеального двухатомного газа сначала изохорически нагрели, а затем изобарически охладили до первоначальной температуры 300 К, уменьшив при этом объем газа в 3 раза. Какое количество теплоты получил газ на первом участке? Какая работа совершена газом на втором участке?

4.2. Расширяясь, один моль водорода совершил работу, равную 10 Дж. Какое количество теплоты было подведено к газу, если газ расширялся: а) изотермически; б) изобарически?

4.3. Принимая, что процесс распространения звука в воздухе является адиабатическим, Пьер Лаплас для определения скорости звука получил формулу $v = \sqrt{\gamma p / \rho}$, где p – давление, ρ – плотность воздуха, $\gamma = C_p / C_V$ – показатель адиабаты. Докажите: а) что скорость звука в воздухе является функцией температуры; б) что скорость звука при

температуре $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ равна 332 м/с ; определите скорость звука при температуре $22.5\text{ }^{\circ}\text{C}$.

4.4. Воздух, занимавший объем 10 л при давлении 1 атм , был адиабатически сжат до объема 1 л . Под каким давлением находился воздух после сжатия?

А4.5. При адиабатическом увеличении объема в 10 раз его внутренняя энергия уменьшилась на 42 кДж . Начальная температура кислорода 280 К . Найти массу кислорода.

4.6. Сравнить конечные температуру и объем воздуха при его сжатии в поршневом компрессоре от 1 до 5 атм : а) адиабатически; б) изотермически.

4.7. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p для газовой смеси, состоящей из 7 г азота и 20 г аргона. Газы идеальные.

5. ЦИКЛЫ. ЦИКЛ КАРНО. ЭНТРОПИЯ

Коэффициент полезного действия (КПД)

$$\eta_1 = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad \eta_1^* = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (49)$$

где A – работа системы за цикл; Q_1 – количество теплоты, полученной рабочим телом системы от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданной рабочим телом системы холодильнику; T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

Коэффициент преобразования холодильника (КПХ)

$$\eta_2 \equiv \frac{|Q_3|}{|A|}, \quad \eta_2^* = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad (50)$$

где Q_3 – количество теплоты, полученной рабочим телом от холодильника; A – работа системы за цикл.

Энтропия S

$$dS \equiv \frac{\delta Q}{T}, \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (51)$$

$$S = k \ln(\Gamma_0), \quad (52)$$

где Γ_0 – число микросостояний, посредством которых реализуется состояние системы (статистический вес макросостояния)

Пример 5.1. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из двух изохор (1-2, 3-4) и двух адиабат (2-3, 4-1). Температура рабочего тела (двухатомный газ) в точках 1, 2 и 4 равна $T_1 = 524$ К, $T_2 = 786$ К и $T_4 = 300$ К. Найти температуру T_3 и коэффициент полезного действия.

Решение

Состояния в крайних точках цикла: $p_1V_1 = \nu RT_1$, $p_2V_2 = \nu RT_2$, $p_3V_3 = \nu RT_3$, $p_4V_4 = \nu RT_4$. В цикле $V_1 = V_2$ и $V_3 = V_4$. Состояния 2-3 и 4-1 связаны так: $T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1}$ и $T_4V_4^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}$, т. е. $T_2 / T_3 = (V_3 / V_2)^{\gamma-1}$ и $T_1 / T_4 = (V_4 / V_1)^{\gamma-1}$, поэтому $T_2 / T_3 = T_1 / T_4$. Таким образом, $T_3 = T_2T_4 / T_1$.

На участке 1-2 тепловая машина получает энергию Q_{12} от нагревателя, а на участке 3-4 отдает количество теплоты Q_{34} холодильнику. Коэффициент полезного действия равен $\eta_1 = A / Q_{12}$, где $A \equiv A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$, $A = A_{23} + A_{41}$ и, окончательно, $A = Q_{12} - Q_{34}$ (считается, что диссипативных потерь нет). Согласно первому началу термодинамики $Q_{12} = (i/2)\nu R(T_2 - T_1)$ и $Q_{34} = (i/2)\nu R(T_4 - T_3)$, тогда КПД тепловой машины равен $\eta_1 = (T_2 - T_1 - T_3 + T_4) / (T_2 - T_1)$.

Дополнение. При решении задачи зачастую не проводят анализ правильности решения. На этом этапе использование численного моделирования достаточно эффективно. Например, расширим постановку задачи и найдем КПД цикла η_2 , вычисляя параметры процесса. Для численного расчета циклической диаграммы в координатах (p, V) необходимо доопределить одно состояние, например, первое.

Состояние 1 определим как $p_1 = 10^5$ Па, $V_1 = 0.1$ м³ (BOGUS DATA) и вычислим инвариант цикла $\nu R = p_1 V_1 / T_1$ (произвольное задание начального состояния не должно влиять на численное значение КПД η_2 цикла, так как в расчетной формуле КПД η_1 используются только температуры).

Состояние 2 определяем из изохорического процесса:
 $p_1 / T_1 = p_2 / T_2$, $p_2 = p_1 T_2 / T_1$, $V_2 = V_1$.

Состояние 3 определяем из адиабатического процесса:
 $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$, $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$, $V_3 = V_2 (T_2 / T_3)^{1/(\gamma-1)}$, $p_3 V_3 = \nu R T_3$,
 $p_3 = (p_1 V_1 / T_1) T_3 / V_3$.

Состояние 4 определяем из изохорического процесса:
 $p_3 / T_3 = p_4 / T_4$, $p_4 = p_3 T_4 / T_3$, $V_4 = V_3$.

Найдем работу тепловой машины за цикл

$$A \equiv A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = A_{23} + A_{41} =$$

$$= \int_2^3 p dV + \int_4^1 p dV = p_2 V_2^\gamma \int_2^3 \frac{dV}{V^\gamma} + p_4 V_4^\gamma \int_4^1 \frac{dV}{V^\gamma}.$$

В листинге программы расчета приведен простейший квадратурный метод прямоугольников (28) для расчета интегралов.

Составим программу для расчета КПД тепловой машины

Листинг программы TD_N5_1_engine_1.py

```
00 # Пример 5.1. Тепловая машина Карно
01 g=1.4; T1=524.0; T2=786.0; T4=300.0
02 T3=T4*T2/T1
03 k1=(T2-T1-T3+T4)/(T2-T1)
04 print ("T3=%6.1f"%T3, " k1=%5.3f"%k1)
05 p1=1.0e5; V1=0.1;
06 vR=p1*V1/T1; p2=p1*T2/T1; V2=V1
07 V3=V2*(T2/T3)**(1/(g-1)); p3=vR*T3/V3
```

```

08  p4=p3*T4/T3; V4=V3
09  NV=4000; dV=(V4-V1)/NV;
10  s1=0.0;s2=0.0; a1=p1*V1**g;a2=p2*V2**g;
11  for i in range(1,NV):
12      v=V1+(i-1)*dV
13      s1=s1+dV*a1/(v**g);s2=s2+dV*a2/(v**g)
14  print ("s1=%5.3e"%s1, " s2=%5.3e"%s2)
15  A=s2-s1;Q12=vR/(g-1)*(T2-T1); k2=A/Q12;dk=(k2-k1)/k1
16  print ("A=%8.3e"%A, "Q12=%5.3e"%Q12, "k=%5.3f"%k2, "dk=%8.4f"%dk)

```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – исходные данные; 02 – вычисление T_3 и КПД рабочего цикла η_1 ; 04 – вывод рассчитанных значений T_3 и η_1 ; 05 – доопределение (BOGUS DATA) параметров цикла (состояние 1) p_1, V_1 ; 06-08 – вычисление параметров циклического процесса; 09 – задание параметров сетки; 11-14 – вычисление и вывод работ на участках A_{23} 2-3 и A_{14} 4-1; 15-16 – вычисление и вывод суммарной работы цикла, теплоты поступающей в нагреватель, КПД и относительной точности КПД.

После вычисления мы получили такой результат:

>>>

$T_3= 450.0$ $k_1=0.427$

$s_1=1.069e+04$ $s_2=1.603e+04$

$A=5.345e+03$ $Q_{12}= 1.250e+04$ $k= 0.428$ $dk=0.0002$

>>>

Итак, относительная погрешность приближенного расчета $|\eta_1 - \eta_2|/\eta_1 = 2 \times 10^{-4}$, следовательно, результаты расчета с хорошей точностью совпали. Как убедились, от конкретных значений давления и объема начального состояния результат не зависит.

Ответ: $T_3 = 450$ К, $\eta_1 \approx 0.428$.

Пример 5.2. Холодильная машина работает по обратному циклу Карно в интервале температур от 250 до 310 К. Рабочее тело – азот,

масса которого $m = 0.2$ кг. Найти количество теплоты Q_3 , отбираемого от охлаждаемого тела, работу внешних сил A^* за цикл и КПХ холодильной машины, если отношение максимального объема V_2 к минимальному V_4 равно пяти.

Решение

Обратный цикл Карно состоит: из 1-2 – изотермического расширения при температуре T_2 в тепловом контакте с охлаждаемым телом, при этом рабочим телом производится работа A_{12} и отбирается Q_3 теплоты от холодильника; 2-3 – адиабатического сжатия, при этом температура рабочего тела возрастает до T_1 , над рабочим телом совершается работа A_{23} ; 3-4 – изотермического сжатия при температуре T_1 , при этом в теплообменнике выделяется Q_4 теплоты и передается в термостат (комнатный воздух); 4-1 – адиабатического расширения, при этом температура понижается до T_2 , рабочее тело совершает работу A_{41} . Выпишем формулы, описывающие этот цикл:

$$1-2: A_{12} = \nu RT_2 \ln(V_2 / V_1), Q_3 = A_{12} (\Delta U_{12} = 0);$$

$$2-3: Q_{23} = 0, A_{23} = -\Delta U_{23}, A_{23} = -\nu C_V (T_1 - T_2);$$

$$3-4: A_{34} = \nu RT_1 \ln(V_4 / V_3), Q_4 = A_{34} (\Delta U_{34} = 0);$$

$$4-1: Q_{41} = 0, A_{41} = -\Delta U_{41}, A_{41} = -\nu C_V (T_2 - T_1).$$

Полная работа за цикл: $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$, $T_0 = 273$, $p_0 = 1.013 \times 10^5$, $A = \nu RT_2 \ln(V_2 / V_1) + \nu RT_1 \ln(V_4 / V_3)$.

Для цикла Карно известно, что $V_2 / V_1 = V_3 / V_4$ и $A = \nu R(T_2 - T_1) \times \ln(V_2 / V_1)$. Найдем отношение объемов из условия задачи $V_2 / V_4 = n = 5$, а V_4 связан с V_1 уравнением Пуассона $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, тогда $T_1 V_4^{\gamma-1} = T_2 V_1^{\gamma-1}$, $V_1 = V_4 (T_1 / T_2)^{1/(\gamma-1)}$. Тогда $V_2 / V_1 = n V_4 / (V_4 (T_1 / T_2)^{1/(\gamma-1)}) = n (T_2 / T_1)^{1/(\gamma-1)}$. Полная работа за цикл равна $A = \nu R(T_2 - T_1) \ln(n (T_2 / T_1)^{1/(\gamma-1)})$, работа внешних сил (компрессора)

равна $A^* = -A$, количество теплоты, отнятой у охлаждаемого тела, равна $Q_3 = \nu RT_2 \ln \left(n(T_2 / T_1)^{1/(\gamma-1)} \right)$, холодильный коэффициент $\eta_2 = Q_3 / |A|$.

Составим программу **TD_N5_2_cryo_1.py** для расчета C_V , U .

Листинг программы TD_N5_2_cryo_1.py

```
00 # Пример 5.2. Холодильная машина Карно
01 import math as mt
02 R=8.31;g=1.4;mu=0.028;m=0.2;T1=310;T2=250;a24=5;
03 v=m/mu; b=1/(g-1); a21=a24*mt.pow(T1/T2,b);
04 A0=v*R*(T2-T1)*mt.log(a24*a21);
05 Q3=v*R*T2*mt.log(a24*a21);
06 k1=Q3/mt.fabs(A0); k2=T2/(T1-T2); A1=-A0;
07 print ("A1=%6.3e"%A1, " Q3=%6.3e"%Q3)
08 print ("k1=%5.3f"%k1, " k2=%5.3f"%k2)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки **math**; 02 – определение исходных данных; 03-06 – расчетные формулы V_2 / V_1 (a_{21}), работы A рабочего тела за цикл (A_0), количество теплоты Q_3 , отнятое у охлаждаемого резервуара (Q_3); КПХ η_1 (k_1), КПХ η_2 тепловой машины, работающей по обратному циклу Карно, рассчитанный по второй формуле (50) (k_2); 07-08 – вывод результатов расчета.

После вычисления мы получили такой результат:

```
>>>
```

```
A1=1.338e+04 Q3=5.575e+04
```

```
k1=4.167 k2=4.167
```

```
>>>
```

Проверка: КПХ тепловой машины, работающей по обратному циклу Карно, согласно (50) равен $\eta_2 = \eta_2^*$, что и требовалось показать.

Ответ: $A^* \approx 13$ кДж, $Q_3 \approx 56$ кДж, $\eta_2 \approx 4.2$.

Пример 5.3. Главный герой романа известного писателя Ж. Верна «Вокруг света в 80 дней» Филеас Фогг требовал от слуги, чтобы тот готовил воду строго определенной температуры. Паспарту эту задачку решил. Решим подобную задачу. Смешали 3 л воды при температуре 10 °С с 2 л воды при температуре 100 °С. Найти: 1) температуру смеси; 2) изменение энтропии, происходящее при смешивании. Теплоемкость воды $c = 4190$ Дж/кг·К.

Решение

1. Количество теплоты, которым обмениваются эти части $\Delta Q_1 = cm_1(T - T_1)$ и $\Delta Q_2 = cm_2(T_2 - T)$, численно равно $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$, т. е. $cm_1(T - T_1) = cm_2(T_2 - T)$, тогда $m_1(T - T_1) = m_2(T_2 - T)$ и получаем расчетную формулу: $T = (m_1T_1 + m_2T_2) / m$, где $m = m_1 + m_2$.

2. Найдем изменение энтропии при смешивании двух частей воды, для этого используем (51) и, учитывая, что изменение энтропии при смешивании равно сумме изменения энтропий смешиваемых частей $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$, где

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = cm_1 \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} = cm_1 \ln \frac{T}{T_1}, \quad \Delta S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = cm_2 \int_{T_2}^T \frac{dT}{T} = cm_2 \ln \frac{T}{T_2},$$

получаем $\Delta S = cm_1 \ln \frac{T}{T_1} + cm_2 \ln \frac{T}{T_2}$.

Составим программу **TD_N5_3_entropy_1.py** для расчета T , ΔS .

Листинг программы TD_N5_3_entropy_1.py

```
00 # Пример 6.3. Энтропия
01 import math as mt
02 m1=3; m2=2; T1=283; T2=373; c=4190;
03 m=m1+m2; T=(m1*T1+m2*T2)/m;
04 DS=c*m1*mt.log(T/T1)+c*m2*mt.log(T/T2);
05 print ("T=%4.1f"%T, " DS=%6.3f"%DS)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки **math**; 02 – определение исходных данных, 03 – расчетные

формулы m , температуры смеси T холодной и горячей воды; 04 – изменение энтропии при смешивании ΔS (DS); 05 – вывод результатов расчета.

После вычисления мы получили такой результат:

>>>

T=319.0 DS=194.659

>>>

Ответ. 1. $T = 319$ К, или $t = 46$ °С. Паспарту смешивал в определенной пропорции две части воды, одна часть воды при температуре, меньшей требуемой, а вторая – большей температуры, чем требуемая.
2. $\Delta S = 195$ Дж/К.

Пример 5.4. Найти приращение энтропии двух молей идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.3$, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в $\alpha = 2$ раза, а давление уменьшилось в $\beta = 3$ раза.

Решение

Энтропия является функцией состояния, следовательно, не важно, при помощи каких обратимых процессов система перешла из начального состояния 1 в конечное состояние 2; тогда мы разобьем весь процесс на 1-3 – изохорический процесс и 3-2 – изобарический процесс, как показано на рис. 5.1. При помощи (51) найдем изменение энтропии:

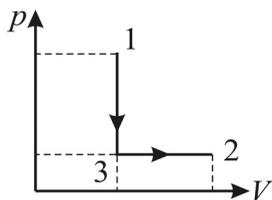


Рис. 5.1. Изопроцессы в координатах p, V

$$\Delta S_{12} = \Delta S_{13} + \Delta S_{32} = \int_1^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^2 \frac{\delta Q}{T} = \nu C_V \int_1^3 \frac{dT}{T} + \nu C_p \int_3^2 \frac{dT}{T}$$

или

$$\Delta S_{12} = \nu C_V \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \right) + \nu C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_3} \right).$$

На участке 13: $p_1/T_1 = p_2/T_3$ и $T_3/T_1 = p_2/p_1 = 1/\beta$, на участке 32: $V_1/T_3 = V_2/T_2$ и $T_2/T_3 = V_2/V_1 = \alpha$. Учитывая, что показатель адиабаты $\gamma = C_p/C_V$ и $C_V = iR/2 = R/(\gamma - 1)$, получаем для изменения энтропии $\Delta S_{12} = \nu C_p \ln \alpha - \nu C_V \ln \beta$ и $\Delta S_{12} = \nu C_V (\gamma \ln \alpha - \ln \beta) = \nu R (\gamma \ln \alpha - \ln \beta) / (\gamma - 1)$.

Составим программу **TD_N5_4_entropy_1.py** для расчета ΔS .

Листинг программы **TD_N5_4_entropy_1.py**

```
00 # Пример 5.4. Энтропия
01 import math as mt
02 R=8.31; v=2; g=1.3; a=2; b=3;
03 CV=R/(g-1); DS=v*CV*(g*mt.log(a)-mt.log(b));
04 print ("DS=%6.3f"%DS)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки **math**; 02 – определение исходных данных; 03 – расчетные формулы C_V (CV), изменение энтропии при смешивании ΔS (DS); 04 – вывод результатов расчета.

После вычисления мы получили такой результат:

```
>>>
```

```
DS=-10.943
```

```
>>>
```

Ответ: $\Delta S_{12} \approx -11$ Дж/К.

Самостоятельная работа 5

5.1. Паровая машина мощностью 14.7 кВт потребляет за один час работы 8.1 кг угля с удельной теплотой сгорания 3.3×10^7 Дж/кг. Температура котла 473 К, холодильника 331 К. Найти КПД этой машины и сравнить его с КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно.

5.2. Домашний холодильник потребляет из электрической сети 200 Вт. Температура окружающей среды (воздух в комнате) равна 293 К. Определить температуру в камере холодильника, если количе-

ство отведенного тепла в 5 раз превышает количество затраченной энергии. Холодильник работает по циклу Карно.

5.3. Масса водорода, равная 6.6 г, изобарически расширяется от V до $2V$. Найти изменение энтропии при этом расширении.

5.4. Идеальный газ, расширяясь изотермически при температуре 400 К, совершает работу 800 Дж. Что происходит при этом с энтропией?

5.5. Некоторое количество идеального газа (воздух) совершает цикл, состоящий из двух изохор 12 и 34 при объемах $V_1 = 25$ л и $V_2 = 50$ л и двух изотерм при температурах $T_1 = 300$ К и $T_2 = 600$ К. Доказать, что КПД этого цикла меньше, чем у цикла Карно.

6. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Диффузия. Закон Фика

$$J_{n_i}(x) = -D_i \frac{dn_i}{dx} S, \quad m_i = -D_i \frac{d\rho_i}{dx} S t, \quad D_i = \frac{1}{3} v_i \lambda, \quad (53)$$

где J_{n_i} – поток молекул; D_i – коэффициент диффузии; n_i – концентрация; m_i – масса; ρ_i – плотность; v_i – средняя скорость (18) молекул i -й компоненты газа соответственно; S – площадь поперечного сечения; t – длительность процесса.

Внутреннее трение. Вязкость. Закон Ньютона

$$F = -\eta \frac{dv}{dy} S, \quad \eta = \frac{1}{3} \rho v \lambda, \quad (54)$$

где F – касательная сила трения между слоями газа или между поверхностью тела и примыкающим слоем; dv/dy – градиент скорости течения слоев газа (жидкости); η – коэффициент динамической вязкости; ρ – плотность газа (жидкости); v – средняя арифметическая скорость молекул; λ – средняя длина свободного пробега молекул; S – площадь касательной поверхности.

Теплопроводность. Закон Фурье

$$J_Q = -\lambda_T \frac{dT}{dx} S, \quad \lambda_T = \frac{1}{3} c_V \rho v \lambda, \quad c_V = \frac{i}{2} R. \quad (55)$$

где J_Q – поток энергии; λ_T – коэффициент теплопроводности; S – площадь поперечного сечения; c_V – удельная теплоемкости материала; dT/dx – градиент температуры; ρ – плотность материала; v – средняя арифметическая скорость молекул.

Параметры

$$z = \sqrt{2} \cdot \sigma n v, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma n}, \quad \tau = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma n v}. \quad (56)$$

где z – среднее число соударений молекулы газа в единицу времени; σ – эффективное поперечное сечение, $\sigma = \pi d^2$; d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; τ – среднее время свободного движения.

Вероятность того, что молекулы испытывают столкновения, пройдя путь x на отрезке $[x, x + dx]$,

$$dW(x, x + dx) = w(x) dx, \quad w(x) = \exp(-x/\lambda) / \lambda, \quad (57)$$

где $w(x)$ – плотность распределения вероятности.

Пример 6.1. Какая часть молекул азота, находящегося при температуре 273 К и давлении 2.5 Па, имеет длину свободного пробега, лежащую в интервале от $x_1 = 2.5$ мм до $x_2 = 3.5$ мм? Эффективный диаметр молекулы азота 0.36 нм.

Решение

Найдем среднюю длину свободного пробега по (56), для этого надо найти концентрацию азота $n = p/kT$; эффективное поперечное сечение молекулы азота $\sigma = \pi d^2$; $\lambda = 1/(\sqrt{2} \cdot \sigma n)$ м. Искомую вероятность найдем из (57) интегрированием:

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) dx, \quad W(x_1, x_2) = \exp(-r_1) - \exp(-r_2), \quad (58)$$

где $r_1 = x_1 / \lambda$ и $r_2 = x_2 / \lambda$.

Составим программу `TD_N6_1_transfer_1.py` для расчета вероятности W .

Листинг программы `TD_N6_1_transfer_1.py`

```
00 # Пример 6.1. Явление переноса
01 import math as mt
02 k=1.38e-23;T=273;p=2.5;d=0.36e-9; x1=0.0025;x2=0.0035;
03 sigma=mt.pi*d*d; n=p/(k*T); lam=1/(mt.sqrt(2)*sigma*n);
04 r1=x1/lam; r2=x2/lam; W=mt.exp(-r1)-mt.exp(-r2);
05 print ("W=%6.3f"%W)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки `math`; 02 – определение исходных данных; 03 – расчетные формулы σ (`sigma`), концентрации n (`n`), средней длины свободного пробега λ (`lam`); 04-05 – вычисление пределов интегрирования r_1 (`r1`), r_2 (`r2`), вероятности молекул иметь λ в интервале от x_1 до x_2 ; 06 – вывод результатов расчета.

Результат машинного расчета такой:

```
>>>
```

```
W= 0.122
```

```
>>>
```

Ответ: $W(x_1, x_2) \approx 0.12$.

Пример 6.2. Расстояние между катодом и анодом в разрядной трубке равно $L = 15$ см. Какое давление надо создать в трубке, чтобы электроны не сталкивались с молекулами по пути от катода к аноду? Температура $T = 300$ К; эффективный диаметр молекулы $d = 0.3$ нм. Средняя длина свободного пробега электрона в газе в $\alpha = 5.7$ раза больше, чем у молекул газа.

Решение

Найдем верхнюю границу давления газа, считая, что расстояние $L = \lambda_1$, где λ_1 – средняя длина свободного пробега электронов, которая определяется из средней длины свободного пробега молекул воз-

духа λ_2 , где λ_2 определяется из (56). $\lambda_2 = 1/(\sqrt{2} \cdot \sigma n)$, $\lambda_1 = \alpha \lambda_2 = \alpha / (\sqrt{2} \cdot \sigma n)$, $L = \alpha / (\sqrt{2} \cdot \sigma n)$, $p = nkT$, $p = \alpha kT / (\sqrt{2} \cdot \sigma L)$, $\sigma = \pi d^2$.

Составим программу **TD_N6_2_transfer_1.py** для расчета давления.

Листинг программы TD_N6_2_transfer_1.py

```
00 # Пример 6.2. Явление переноса
01 import math as mt
02 k=1.38e-23;T=300;L=0.15; d=0.3e-9;a=5.7;
03 sigma=mt.pi*d*d; p=a*k*T/(mt.sqrt(2)*sigma*L);
04 print ("p=%6.3f"%p)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки **math**; 02 – определение исходных данных; 03 – расчетные формулы σ (sigma), давления p (p); 04 – вывод результатов расчета.

Результат машинного расчета такой:

```
>>>
```

```
p= 0.393
```

```
>>>
```

Давление в трубке равно $p \approx 0.39$ Па.

Ответ. При давлении газа $p \leq 0.39$ Па электроны не рассеиваются в рентгеновской трубке на пути от катода к аноду.

Пример 6.3. Определить коэффициент диффузии кислорода при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы $d = 0.3$ нм.

Решение

Нормальные условия: $T = 273$ К, $p = 1.013 \times 10^5$ Па, коэффициент диффузии определяется по (53): $D = \nu \lambda / 3$, где средняя скорость молекул кислорода определяется по (18): $\nu = \sqrt{8RT / \pi m}$, средняя длина свободного пробега вычисляется по (56): $\lambda = 1/(\sqrt{2} \cdot \sigma n) = kT / (\sqrt{2} \cdot \sigma p)$.

Составим программу **TD_N6_3_transfer_1.py** для расчета D .

Листинг программы **TD_N6_3_transfer_1.py**

```
00 # Пример 6.3. Явление переноса
01 import math as mt
02 k=1.38e-23;R=8.31;mu=0.032;T=273;p=1.013e5;d=0.3e-9;
03 sigma=mt.pi*d*d; vt=mt.sqrt(8.0*R*T/(mt.pi*mu));
04 lam=k*T/(mt.sqrt(2)*sigma*p); D=vt*lam/3.0;
05 print ("vt=%5.1f"%vt, "lambda=%5.2e"%lam, "D=%5.2e"%D)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки **math**; 02 – определение исходных данных; 03 – расчетные формулы σ (σ), скорости v (vt); 04 – средней длины свободного пробега λ (lam) и коэффициента диффузии D (D); 05 – вывод результатов расчета.

Результат машинного расчета такой:

>>>

vt=424.9 lambda=9.30e-08 D=1.32e-05

>>>

Ответ: $D \approx 1.3 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Пример 6.4. Найти массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку 100 см^2 за 10 с , если градиент плотности в направлении перпендикулярной площадки равен $\Delta\rho / \Delta x = 1.26 \text{ кг}/\text{м}^4$. Температура азота $T = 300 \text{ К}$, средняя длина свободного пробега молекул равна $\lambda = 10 \text{ мкм}$.

Решение

Согласно закону Фика (53) масса газа равна

$$m = -D \frac{d\rho}{dx} St, \text{ где } \frac{d\rho}{dx} = - \left| \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \right| \text{ и } m = D \left| \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \right| St,$$

где D – коэффициент диффузии, который подсчитаем по (53).

Составим программу **TD_N6_4_transfer_1.py** для расчета ΔS .

Листинг программы TD_N6_4_transfer_1.py

```
00 # Пример 6.4. Явление переноса
01 import math as mt
02 R=8.31; mu=0.028; T=300; lam=1.0e-5; dr=1.26;
03 S=0.01; t=10; vt=mt.sqrt(8.0*R*T/(mt.pi*mu));
04 D=vt*lam/3.0; m=D*dr*S*t;
05 print ("vt=%5.1f"%vt, "D=%5.2e"%D, "m=%5.2e"%m)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки **math**; 02 – определение исходных данных; 03-04 – расчетные формулы средней скорости v (vt), коэффициента диффузии D (D), массы азота m (m); 05 – вывод результатов расчета.

Результат машинного расчета такой:

>>>

vt=476.2 D=1.59e-03 m=2.00e-04

>>>

Масса азота, прошедшего через площадку за 10 с, равна $m = 2 \times 10^{-4}$ кг.

Ответ: $m = 2 \times 10^{-4}$ кг.

Пример 6.5. Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной $h = 0.1$ м могут свободно вращаться вокруг общей оси. Радиус большого цилиндра $R_2 = 0.05$ м, радиус внутреннего цилиндра $R_1 = 0.048$ м. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях: $T_0 = 273$ К, $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Па. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной скоростью $\omega_1 = 40\pi$ рад/с. Внешний цилиндр заторможен. Определить, через какое время с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет угловую скорость $\omega_2 = 2\pi$ рад/с. Масса внешнего цилиндра $m = 0.1$ кг, эффективный диаметр молекул воздуха $d = 0.3$ нм.

Решение

Описанная конструкция является основой ротационных вискозиметров. На внешний цилиндр действует момент силы внутреннего трения (54), вызывая угловое ускорение, которое определим из основного уравнения вращательного движения $J\varepsilon = M$, где $J = mR_2^2$ – момент инерции внешнего цилиндра, $M = R_2F$. Поскольку угловое ускорение не зависит от времени, искомое время находится из соотношения $\omega_2 = \varepsilon t_1$ и $t_1 = \omega_2 / \varepsilon$. Найдем сначала силу внутреннего трения (54), коэффициент вязкости η есть $\eta = nm_a \nu \lambda / 3$. Угловое ускорение $\varepsilon = R_2F / mR_2^2 = \eta |\Delta v| S / mR_2 |\Delta R|$, где $|\Delta v| = \omega_1 R_1$, $|\Delta R| = R_2 - R_1$, $S = 2\pi R_2 h$.

Составим программу **TD_N6_5_transfer_1.py** для расчета ν , η , ε , t_1 .

Листинг программы TD_N6_5_transfer_1.py

```
00 # Пример 6.5. Явление переноса
01 import math as mt
02 k=1.38e-23;R=8.31;NA=6.02e23;mu=0.029;T=273;p=1.013e5;
03 d=0.3e-;R1=0.048;R2=0.05;h=0.1;m1=0.1;
04 w1=40*mt.pi;w2=2*mt.pi; sigma=mt.pi*d*d;
05 vt=mt.sqrt(8.0*R*T/(mt.pi*mu)); n=p/(k*T);
06 lam=1/(mt.sqrt(2)*sigma*n); D=vt*lam/3.0; ma=mu/NA;
07 S=2*mt.pi*R2*h; nu=n*ma*vt*lam/3; dv=w1*R1; dR=R2-R1;
08 e=nu*dv*S/(m1*R2*dR); t1=w2/e;
09 print("vt=%5.1f"%vt,"nu=%5.2e"%nu)
10 print("e=%5.2f"%e,"t1=%5.2f"%t1)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки **math**; 02-03 – определение исходных данных; 04 – расчетные формулы σ (**sigma**); 05 – скорость ν (**vt**), концентрация n (**n**); 06 – средняя длина свободного пробега λ (**lam**), коэффициент диффузии D (**D**), масса молекулы m_a (**ma**); 07 – площадь боковой поверхности внешнего цилиндра S

(S), коэффициент вязкости η (nu), Δv , ΔR ; 08 – ускорение ε (e), время раскрутки t_1 (t1); 09-10 – вывод результатов расчета.

Результат машинного расчета такой:

>>>

vt=446.3 nu=1.79e-05 e=0.34 t1=18.50

>>>

Ответ: $t_1 = 18.5$ с.

Пример 6.6. Для расчета отопительной системы рассчитывают потерю теплоты через единицу площади поверхности стены здания в течение $t_1 = 24$ ч. Толщина кирпичной стены $L_1 = 0.40$ м, температура стены внутри здания $T_1 = 291$ К, снаружи $T_2 = 253$ К. Определить потери тепла через единицу площади $S = 1$ м² поверхности кирпичной стены. Какой толщины должна быть деревянная стена, чтобы потеря теплоты была такой же? Какой толщины должна быть стена, изготовленная из сэндвич-панели, чтобы потеря теплоты была такой же? Коэффициенты теплопроводности: кирпичной кладки $\lambda_T = 0.70$ Вт/м · К, дерева поперек волокон $\lambda_T = 0.175$ Вт/м · К, минеральной ваты $\lambda_T = 0.054$ Вт/м · К.

Решение

Найдем потери энергии за сутки $Q_1 = J_{Q_1} S t_1$, где поток J_{Q_1} определяется законом Фурье (55) $J_{Q_1} = \lambda_{T_1} (T_1 - T_2) / L_1$ Вт/м². Найдем толщину деревянной стены из бруса с эквивалентными потерями тепла: $Q_2 = J_{Q_2} S t_1$, где $J_{Q_2} = \lambda_{T_2} (T_1 - T_2) / L_2$, $\lambda_{T_1} (T_1 - T_2) / L_1 = \lambda_{T_2} (T_1 - T_2) / L_2$ и $\lambda_{T_1} / L_1 = \lambda_{T_2} / L_2$, окончательно: $L_2 = L_1 \lambda_{T_2} / \lambda_{T_1}$. Найдем толщину сэндвич-панели с эквивалентными потерями тепла: $\lambda_{T_1} / L_1 = \lambda_{T_3} / L_3$, окончательно: $L_3 = L_1 \lambda_{T_3} / \lambda_{T_1}$.

Составим программу **TD_N6_6_transfer_1.py** для расчета Q_1 , L_2 , L_3 .

Листинг программы TD_N6_6_transfer_1.py

```
00 # Пример 6.6. Явление переноса
01 import math as mt
02 T1=291;T2=253;L1=0.4;lamt1=0.7;lamt2=0.175;lamt3=0.054;
03 dT=T1-T2;JQ1=lamt1*dT/L1;time1=24*3600;Q1=JQ1*time1;
04 L2=L1*lamt2/lamt1; L3=L1*lamt3/lamt1;
05 print("Q1=%5.2e"%Q1,"L2=%5.3f"%L2,"L3=%5.3f"%L3)
```

Комментарий к программе. Строки: 00 – комментарий; 01 – подключение библиотеки **math**; 02 – определение исходных данных; 03 – расчетные формулы $\Delta T = T_1 - T_2$ (ΔT), поток тепла J_{Q1} ($JQ1$), промежуток времени t_1 ($time1$), количество теплоты, прошедшей за единицу площади стены Q_1 ($Q1$); 04 – толщина деревянной стены L_2 ($L2$), толщина сэндвич-панели L_3 ($L3$); 05 – вывод результатов расчета.

Результат машинного расчета такой:

>>>

Q1=5.75e+06 L2=0.100 L3=0.031

>>>

Ответ: $Q_1 \approx 5.8$ МДж; $L_2 = 0.10$ м; $L_3 = 0.031$ м.

Самостоятельная аудиторная работа 6

6.1. Определить относительную долю молекул, длина свободного пробега которых меньше 0.5λ .

6.2. Вакуум считается высоким, если длина свободного пробега молекул больше линейных размеров сосуда, в котором находится газ. Какое давление можно считать высоким вакуумом для шарообразного сосуда диаметром 3 см, заполненного воздухом при температуре 300 К? Эффективный диаметр молекулы воздуха принять равным 0.3 нм.

6.3. При помощи ионизационного манометра, установленного на искусственном спутнике Земли, определили, что на высоте 300 км от

поверхности Земли концентрация частиц газа в атмосфере $n = 10^{15} \text{ м}^{-3}$. Найти среднюю длину свободного пробега частиц газа на этой высоте. Эффективный диаметр молекулы воздуха на высоте 300 км принять равным 0.2 нм.

6.4. Коэффициенты диффузии и вязкости при некоторых условиях равны $D = 1.42 \times 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $\eta = 8.5 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$. Найти число молекул водорода в единице объема, его плотность, среднюю длину свободного пробега и среднюю арифметическую скорость его молекул.

6.5. Определить массу азота, прошедшего вследствие диффузии через 100 см^2 за минуту, если градиент плотности в направлении перпендикулярной площадки равен $1 \text{ кг}/\text{м}^4$. Температура азота 300 К, давление азота 10 Па, эффективный диаметр молекулы воздуха принять равным 0.31 нм.

6.6. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено газом. Радиусы цилиндров равны 5 и 5.2 см. Высота внутреннего цилиндра 25 см. Внешний цилиндр вращается со скоростью 360 об/мин. Для того чтобы внутренний цилиндр оставался неподвижным, к нему надо приложить касательную силу 1.38 мН. Определить вязкость газа между цилиндрами.

6.7. Какое количество теплоты теряет помещение за один час через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы 4 м^2 , расстояние между ними 30 см, температура помещения 291 К, температура наружного воздуха 253 К. Температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур помещения и наружного воздуха. Давление воздуха 1 атм. Эффективный диаметр молекулы воздуха принять равным 0.3 нм.

Ответы

Раздел 1. **1.1.** 265 см^{-3} ; **1.2.** 0.04 %, 3.3 нм; **1.3.** 2.02 кг; **1.4.** 19.6 с; **1.5.** 140 К; **1.6.** $1.15 \times 10^5 \text{ Па}$; **1.7.** 0.93 м^3 .

Раздел 2. **2.1.** 183 м/с; **2.2.** 2.42 кДж; **2.3.** $5 \times 10^{25} \text{ м}^{-3}$; **2.4.** 3.8 кДж; 0.6 и 0.4; **2.5.** 750 Дж; **2.6.** а) 0 м/с, б) 191 м/с; **2.7.** $1.2 \times 10^{-8} \text{ Па}$.

Раздел 3. **3.1.** 0.91; **3.2.** 0.57; **3.3.** 16 000 К; **3.4.** 5.9×10^{23} моль⁻¹;
3.5. $m_1 = 1.300$ кг, $m_2 = 1220$ кг, $m_3 = 7380$ кг, $\alpha_1 = 1.00$, $\alpha_2 = 1.06$,
 $\alpha_3 = 1.75$; **3.6.** $\Delta h = 6.5$ м.

Раздел 4. **4.1.** $Q_1 = 12.5$ кДж, $A_2 = -5.0$ кДж; **4.2.** $Q_1 = 10$ Дж,
 $Q_2 = 35$ Дж; **4.3.** 345 м/с; **4.4.** $p \approx 2.55$ МПа; **4.5.** $m = 0.38$ кг;
4.6. $T_{\text{ad}} / T_{\text{iso}} = p_{\text{ad}} / p_{\text{iso}} \approx 1.6$; **4.7.** $c_V = 423$ Дж/кг·К, $c_p = 654$ Дж/кг·К.

Раздел 5. **5.1.** 20 %, 30 %; **5.2.** $T_2 = 244$ К; **5.3.** 66.5 Дж/К;
5.4. $\Delta S = 2.0$ Дж/К; **5.5.** $\eta^* / \eta = 2.8$.

Раздел 6. **6.1.** 0.39; **6.2.** 0.345 Па; **6.3.** 5600 м; **6.4.** 0.23 нм;
6.5. 0.092 кг; **6.6.** 18 мкПа·с; **6.7.** $Q = 93.5$ кДж.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. – 5-е изд. – М.: Высшая школа, 1988. – 528 с.
2. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 432 с.
3. *Савельев И.В.* Сборник вопросов и задач по общей физике. – СПб.: Лань, 2005. – 288 с.
4. *Булат В.Л., Рязанова Е.Ф., Фадеева М.С.* Задачник-практикум по общей физике. Молекулярная физика и введение в термодинамику. – М.: Просвещение, 1975. – 136 с.
5. *Горбунова О.И., Зайцева А.М., Красников С.Н.* Задачник-практикум по общей физике. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Просвещение, 1978. – 120 с.
6. *Лутц М.* Изучаем Python. – СПб.: Символ-Плюс, 2009.
7. *Лутц М.* Программирование на Python. – 4-е изд. – Том 1. – СПб.: Символ-Плюс, 2011.
8. *Лутц М.* Программирование на Python. – 4-е изд. – Том 2. – СПб.: Символ-Плюс, 2011.
9. *Сузи Р.* Язык программирования Python. – М.: Бином, 2007.
10. *Вабишевич П.Н.* Численные методы. Вычислительный практикум. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 320 с.
11. *Гордин В.А.* Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2013. – 736 с.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1982. – 780 с.

**ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРА**
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Методическое пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 20.04.2016. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 3,72. Печ. л. 4,0. Изд. № 293/15. Заказ № 646. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20