Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

А.А. ШТЫГАШЕВ, Ю.Г. ПЕЙСАХОВИЧ

# ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

## Электромагнетизм

## Электромагнитные волны

## Волновая и квантовая оптика

## Элементы квантовой физики и физики твердого тела

## Элементы ядерной физики

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2019

УДК 53(076.1)
Ш 948

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук *А.В. Баранов*
д-р физ.-мат. наук *Я.С. Гринберг*

Работа подготовлена на кафедре общей физики
для студентов АВТФ

**Штыгашев А.А.**

Ш 948 Задачи по физике: электромагнетизм; электромагнитные волны; волновая и квантовая оптика; элементы квантовой физики и физики твердого тела; элементы ядерной физики: учебное пособие / А.А. Штыгашев, Ю.Г. Пейсахович. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2019. – 228 с.

ISBN 978-5-7782-3853-4

Учебное пособие соответствует второй части рабочей программы по физике для студентов АВТФ НГТУ, обучающихся по направлениям: «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии», «Программная инженерия», «Информационная безопасность», «Биотехнические системы и технологии», «Машиностроение», «Приборостроение», «Управление в технических системах» и по специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем». Приведены примеры решения и задачи по всем темам разделов «Электромагнетизм. Электромагнитные волны. Волновая и квантовая оптика. Элементы квантовой физики и физики твердого тела. Элементы ядерной физики». Предназначено для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

**УДК 53(076.1)**

**Штыгашев Александр Анатольевич**
**Пейсахович Юрий Григорьевич**

**ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ**

**Электромагнетизм; электромагнитные волны; волновая и квантовая оптика; элементы квантовой физики и физики твердого тела; элементы ядерной физики**

**Учебное пособие**

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 05.04.2019. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 13,25. Печ. л. 14,25. Изд. № 230/18. Заказ № 692. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

**ISBN 978-5-7782-3853-4**

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие является второй частью работы: Штыгашев А.А., Пейсахович Ю.Г. Задачи по физике; механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество, изданной в 2017 году.

Как и в первой части, весь материал пособия распределен по темам, соответствующим календарному плану курса физики, изучаемого студентами АВТФ. Каждая тема содержит краткий теоретический раздел справочного характера, примеры решения типовых задач, список задач для аудиторной работы и задания на дом.

Задачи подбирались из апробированных задачников для студентов и преподавателей естественнонаучных дисциплин, список которых приведен в конце пособия [1–3].

# ПРАКТИКУМ 1

# РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО ФОРМУЛЕ БИО–САВАРА–ЛАПЛАСА

*Закон Био–Савара–Лапласа для линейного тока*:

$$d\mathbf{B} = \tilde{k}\frac{Id\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

$$\mathbf{B} = \int\limits_{\Gamma} d\mathbf{B} = \tilde{k}\int\limits_{\Gamma}\frac{Id\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}, \qquad (1.1)$$

где $Id\mathbf{l}$ – линейный элемент тока $I$; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения поля относительно элемента тока; $\Gamma$ – контур с током; $\tilde{k} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} = \mu\cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м $= 1{,}26\cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнитная постоянная; $\mu$ – магнитная проницаемость однородной среды.

*Закон Био–Савара–Лапласа для объемного тока*:

$$d\mathbf{B} = \tilde{k}\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}dV,$$

$$\mathbf{B} = \int\limits_{V} d\mathbf{B} = \tilde{k}\int\limits_{V}\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}dV, \qquad (1.2)$$

где $\mathbf{j}$ – плотность тока в элементе объема $dV$; $\mathbf{j}dV$ – объемный элемент тока; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения поля относительно элемента тока; $V$ – объем, в котором текут токи плотности $\mathbf{j}$.

*Направление индукции магнитного поля определяется правилом правого винта (буравчика) или правилом правой руки.*

*Принцип суперпозиции*

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{B}_j \,. \qquad (1.3)$$

*Модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого отрезком прямого проводника с током* (рис. 1.1):

$$B = \tilde{k}\frac{I}{b}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \tilde{k}\frac{I}{b}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)\,, \qquad (1.4)$$

где $b$ – расстояние от точки наблюдения поля до проводника с током; $\alpha_1$ – угол между направлением тока и направлением от начала проводника в точку наблюдения; $\alpha_2$ – угол между направлением тока и направлением от конца проводника в точку наблюдения; $\beta_1$ и $\beta_2$ – алгебраические значения углов между перпендикуляром к проводнику и направлениями, в которых концы проводника видны из точки наблюдения поля.

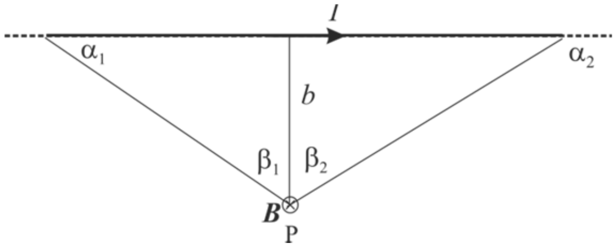



*Рис. 1.1.* Отрезок проводника с током

*Модуль вектора индукции магнитного поля бесконечного прямого проводника с током* $I$:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi b}\,, \qquad (1.5)$$

где $b$ – расстояние от точки наблюдения поля до проводника с током.

*Модуль вектора индукции магнитного поля кругового тока $I$ в центре витка*

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}. \tag{1.6}$$

*Модуль вектора индукции магнитного поля кругового тока $I$* на оси симметрии:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \tag{1.7}$$

где $z$ – расстояние от точки наблюдения поля до центра витка; $R$ – радиус витка.

**Пример 1.1.** Найти индукцию магнитного поля проводника с током $I = 1$ А в точке 0 (рис. 1.2). Угол между прямолинейными участками проводника равен $\beta = 120°$, радиус дуги окружности $r = 0{,}1$ м.

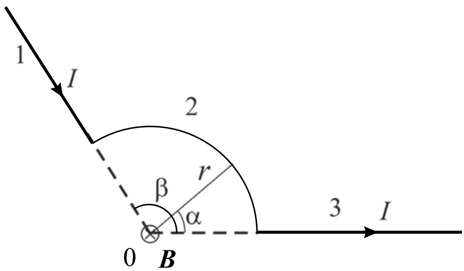



*Рис. 1.2.* К примеру 1.1

**Решение**

Вектор индукции магнитного поля дается криволинейным интегралом (1.1):

$$\mathbf{B} = \tilde{k} \int_{\Gamma} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

который целесообразно разбить на сумму трех интегралов по частям контура $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, пронумерованным на рис. 1.2:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \tilde{k} \int_{\Gamma_1} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} + \tilde{k} \int_{\Gamma_2} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} + \tilde{k} \int_{\Gamma_3} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Очевидно, что $B_1 = B_3 = 0$, так как на участках 1 и 3 векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ коллинеарны, поэтому их векторное произведение равно нулю. На втором участке проводника с током $d\mathbf{l} \perp \mathbf{r}$, $|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}| = r\,dl$, вектор $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2$ направлен за плоскость, изображенную на рис. 1.2, а величину $r = \text{const}$ можно вынести за знак интеграла, так что

$$B = \tilde{k} \int_{\Gamma_2} \frac{I|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}|}{r^3} = \tilde{k} \int_{\Gamma_2} \frac{I\,r\,dl}{r^3} = \tilde{k} \frac{I}{r^2} \int_{\Gamma_2} dl\,.$$

Элемент дуги окружности $dl = r\,d\alpha$, а $\beta = 2\pi / 3$, поэтому

$$B = \tilde{k} \frac{I}{r} \int_0^{\beta} d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \beta = \frac{\mu_0}{6} \frac{I}{r} = 2{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ Тл.}$$

**Ответ:** $B \approx 2{,}1$ мкТл.

**Пример 1.2.** Найти индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника с током $I = 20$ А, в точке, расположенной на расстоянии $b = 0{,}05$ м от середины отрезка. Угол между направлениями, в которых концы проводника видны из точки наблюдения поля, равен 60° ($\beta_1 + \beta_2 = \pi / 3$).

**Решение**

Модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого отрезком прямого проводника с током (см. рис. 1.1), дается формулой (1.4). В данном случае $\alpha_1 = \pi / 3$, $\alpha_2 = 2\pi / 3$ ($\beta_1 = -\pi / 6$, $\beta_2 = \pi / 6$), т. е.

$$B = \tilde{k} \frac{I}{b} \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = \tilde{k} \frac{I}{b} \left( \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \tilde{k} \frac{I}{b} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right),$$

получаем $B = \tilde{k} \dfrac{I}{b} = 4 \cdot 10^{-5}$ Тл.

**Ответ:** $B = 4 \cdot 10^{-5}$ Тл.

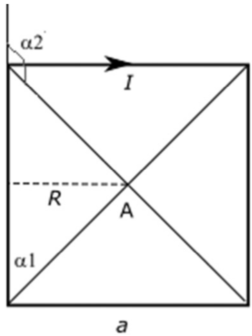



*Рис. 1.3.* К примеру 1.3

**Пример 1.3.** Определить магнитную индукцию поля в центре квадратного контура со стороной $a = 0{,}1$ м, образованного проводом, по которому в направлении часовой стрелки (рис. 1.3) течет ток $I = 20$ А.

**Решение**

Согласно принципу суперпозиции индукция магнитного поля равна векторной сумме $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4$ взаимно равных индукций $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4$, каждая из которых создается током одной из четырех сторон квадрата, т. е. вектор $\mathbf{B} = 4\mathbf{B}_1$ и направлен за плоскость рисунка. Величину $B_1$ находим по формуле (1.4) с учетом $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = 3\pi/4$, ($\beta_1 = -\pi/4$, $\beta_2 = \pi/4$), $b = a/2$ (см. рис. 1.1), что дает

$$B = 4B_1 = \tilde{k}\frac{I}{b}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\sqrt{2}\cdot\tilde{k}\frac{I}{a} = 2{,}26\cdot 10^{-4} \approx 2{,}3\cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

**Ответ:** $B \approx 2{,}3\cdot 10^{-4}$ Тл.

**Пример 1.4.** В одной из моделей, объясняющих природу земного магнетизма, было предположено, что внутри Земли в плоскости экватора течет кольцевой ток радиусом $R \approx 5000$ км. Оценить величину такого тока, если известно, что вблизи магнитного полюса Земли индукция магнитного поля равна 0,1 мТл. Землю считать сферой радиусом $R_0 = 6380$ км.

**Решение**

Из формулы (1.7) выражаем силу кольцевого тока, при этом считаем, что на поверхности Земли $z = R_0$ и $\mu \approx 1$:

$$I = \frac{2B(R^2 + z^2)^{3/2}}{\mu_0 R^2}.$$

Подставляя численные значения величин, получаем $I = 3{,}39 \cdot 10^9 \approx$ $\approx 3{,}4 \cdot 10^9$ А.

**Ответ:** $I \approx 3{,}4 \cdot 10^9$ А.

**Пример 1.5.** Прямой бесконечный проводник с изоляцией образует круговую петлю радиусом $R = 0{,}8$ м (рис. 1.4). Определить силу тока в проводнике, если известно, что в центре витка магнитная индукция $B = 12{,}5$ мкТл.

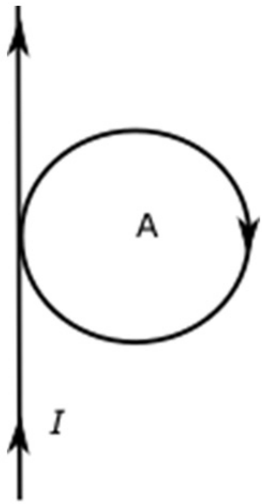



*Рис. 1.4.* К примеру 1.5

**Решение**

Согласно принципу суперпозиции индукция магнитного поля равна векторной сумме $\mathbf{B}_1$ прямого бесконечного проводника и $\mathbf{B}_2$ петли. По правилу буравчика векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ в центре витка направлены перпендикулярно плоскости витка. Тогда модуль вектора индукции суммарного поля в центре витка равен $B = B_1 + B_2$, где $B_1$ дается выражением (1.4) с $b = R$, а $B_2$ – выражением (1.6), в итоге

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi b} + \frac{\mu_0 \mu I}{2R} = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right).$$

Откуда при $\mu = 1$ имеем

$$I = \frac{2RB}{(\pi^{-1} + 1)\mu_0} \approx 12{,}1 \text{ А}.$$

**Ответ:** $I \approx 12{,}1$ А.

**Пример 1.6.** Кольцо из диэлектрика, внешний радиус которого $b = 0{,}08$ м, а внутренний $a = 0{,}05$ м, равномерно заряжено с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1{,}25$ Кл/м$^2$ (рис. 1.5). Кольцо вращается с угловой скоростью $\omega = 750$ рад/с вокруг оси перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Определить индукцию магнитного поля в центре кольца.

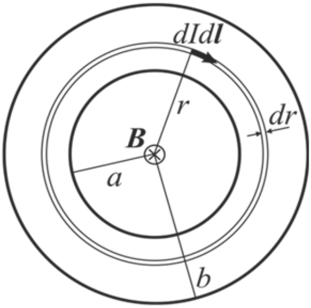



*Рис. 1.5.* К примеру 1.6

**Решение**

**Способ 1.** Движущиеся по окружностям заряды образуют электрический ток, который создает магнитное поле. Введем полярную систему координат с началом в центре кольца. Бесконечно малый элемент площади кольца $dS = rdrd\varphi$ несет заряд $dq = \sigma dS = \sigma rdrd\varphi$, который за промежуток времени $dt$ перемещается вдоль окружности радиусом $r$ на расстояние $dl = rd\varphi$, образует ток $dI = dq/dt = \sigma rdr(d\varphi/dt) = \sigma\omega rdr$, где $\omega = d\varphi/dt$ – угловая скорость кольца, и линейный элемент тока по модулю, равный $Idl = \sigma\omega r^2 drd\varphi$. Очевидно, что $Id\mathbf{l} \perp \mathbf{r}$ в формулах (1.1) и результирующий вектор индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ направлен вдоль оси кольца за плоскость (рис. 1.5), а по абсолютной величине он равен интегралу по поверхности кольца:

$$B = \tilde{k}\int\limits_a^b dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sigma\omega r^2}{r^2} = \tilde{k}2\pi\sigma\omega(b-a) = \frac{1}{2}\mu_0\mu\sigma\omega(b-a).$$

Подставляя численные значения заданных величин и $\mu = 1$, получаем $B \approx 17{,}7$ мкТл.

**Способ 2.** Разобьем заданное кольцо на бесконечно тонкие концентрические кольца радиусом $r$ с площадью $dS_к = 2\pi rdr$ и зарядами $dq_к = \sigma dS_к = \sigma 2\pi rdr$, создающими круговые токи $dI = \dfrac{dq}{T} = \dfrac{\sigma 2\pi rdr}{T} = \sigma\omega rdr$, где $T = 2\pi/\omega$ – период вращения кольца. Каждое бесконечно тонкое кольцо создает в центре индукцию в соответствии с формулой (1.6), в которой надо сделать замены $R \to r$, $I \to dI$, $B \to dB$, где $dB = \dfrac{\mu_0\mu dI}{2r} = \dfrac{\mu_0\mu}{2r}\sigma\omega rdr = \dfrac{\mu_0\mu}{2}\sigma\omega dr$ – поле такого тонкого кольца.

Суммарная индукция магнитного поля всех колец дается интегралом

$$B = \int_a^b dB = \int_a^b \frac{\mu_0 \mu}{2} \sigma \omega dr dr = \frac{\mu_0 \mu \sigma \omega}{2}(b-a).$$

**Ответ:** $B \approx 17,7$ мкТл.

## Задачи для аудиторной работы

**А1.1.** Найти индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника с током $I = 1$ А, в точке, расположенной на расстоянии 10 см от отрезка, из которой концы отрезка видны под углами 45° и 60°.

**А1.2.** Ток $I = 10$ А течет по бесконечно длинному проводнику, согнутому под прямым углом. Найти магнитную индукцию в точке, лежащей на биссектрисе угла на расстоянии $a = 0,2$ м от вершины.

**А1.3.** По круговому витку радиусом $R = 0,1$ м циркулирует ток силой $I = 1$ А. Найти магнитную индукцию $\mathbf{B}$: а) в центре витка; б) на оси витка на расстоянии $z = 0.1$ м от его центра.

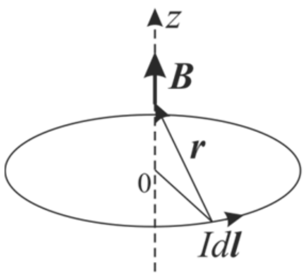



*Рис. 1.6.* К примерам А1.3 и А1.4

**А1.4.** Чему равна магнитная индукция поля на оси кругового витка радиусом $R = 0,3$ м в точке, расположенной на расстоянии $z = 0,4$ м от центра, если в центре витка индукция $B_0 = 25$ мкТл?

**А1.5.** Непроводящий тонкий диск радиусом $R = 0,08$ м, равномерно заряженный поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1,25$ Кл/м$^2$, вращается с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить индукцию магнитного поля в центре диска.

## Задание на дом

**В1.1.** При какой силе тока, текущего по тонкому проводящему кольцу радиусом 20 см, магнитная индукция в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние 30 см, станет равной 20 мкТл?

**В1.2.** По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам текут токи 50 и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами равно 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого провода и на 40 см от второго провода.

**В1.3.** По бесконечно длинному проводу, согнутому под углом 120°, течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины на расстояние 5 см.

**В1.4.** Два круговых соосных витка радиусом 8 см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии 1 см друг от друга. По виткам текут в одном направлении токи $I_1 = 1$ А и $I_2 = 2$ А. Найти индукцию магнитного поля на оси витков в точке, находящейся на равном расстоянии от витков.

**В1.5.** Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из 100 плотно расположенных витков, по которому течет ток 8 мА. Радиусы внутреннего и внешнего витков равны $a = 50$ мм, $b = 100$ мм. Найти индукцию магнитного поля в центре плоской спирали.

# ПРАКТИКУМ 2

# СИЛА ЛОРЕНЦА

# ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОСТОЯННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

*Сила Лоренца*

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}, \tag{2.1}$$

где

$$\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\upsilon_y B_z - \upsilon_z B_y)\boldsymbol{i} + (\upsilon_z B_x - \upsilon_x B_z)\boldsymbol{j} + (\upsilon_x B_y - \upsilon_y B_x)\boldsymbol{k}\,. \tag{2.2}$$

В однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ траектория заряженной частицы представляет собой *винтовую линию*, ось которой направлена вдоль вектора магнитной индукции. Если начальная скорость $\upsilon_0$ частицы массы $m$ направлена под углом $\theta$ к силовой линии магнитного поля, то *радиус винтовой линии (ларморовский радиус)* или (при $\theta = \pi/2$) – *радиус окружности*

$$R = m\upsilon_0 \sin\theta \,/\, qB\,. \tag{2.3}$$

*Циклотронная частота*

$$\omega = qB \,/\, m\,. \tag{2.4}$$

*Шаг винтовой линии*

$$h = T\upsilon_0 \cos\theta = 2\pi m\upsilon_0 \cos\theta / qB\,, \qquad (2.5)$$

где $T = 2\pi m / qB$ – *время прохождения одного витка спирали* или (при $\theta = \pi/2$) – *период движения по окружности*.

**Пример 2.1.** Внутри зазора между горизонтально расположенными обкладками плоского конденсатора находится заряженная пылинка массой $m = 6{,}4 \cdot 10^{-16}$ кг. Расстояние между обкладками $d = 1$ см. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости пылинки. В отсутствие напряжения между обкладками пылинка падает с постоянной скоростью $\upsilon_1 = 0{,}078$ мм/с. После подачи на конденсатор напряжения $U = 94{,}5$ В пылинка движется вверх с постоянной скоростью $\upsilon_2 = 0{,}016$ мм/с. Определить заряд пылинки.

**Решение**

В отсутствие электрического поля пылинка падает равномерно под действием силы тяжести $m\mathbf{g}$ и силы сопротивления среды $\mathbf{F}_\mu = -k\boldsymbol{\upsilon}_1$, которую считаем пропорциональной скорости падения пылинки $\boldsymbol{\upsilon}_1$ с коэффициентом $k$. Второй закон Ньютона $0 = mg - k\upsilon_1$ позволяет выразить коэффициент сопротивления среды $k = mg / \upsilon_1$. После включения напряжения на пылинку начинает действовать и электрическое поле с направленной против силы тяжести силой $\mathbf{F}_q = q\mathbf{E}$, где $q$ – заряд пылинки, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля. В итоге заряженная пылинка начинает двигаться вверх с постоянной скоростью $\upsilon_2$, и из второго закона Ньютона имеем уравнение $0 = qE - mg - k\upsilon_2$, откуда $q = (mg + k\upsilon_2) / E$. Напряженность однородного поля плоского конденсатора равна $E = U / d$, тогда $q = (mg + mg\upsilon_2 / \upsilon_1)d / U$. Подставляя численные значения величин, получаем $q \approx 8 \cdot 10^{-19}$ Кл.

**Ответ:** $q \approx 8 \cdot 10^{-19}$ Кл, т. е. $q = 5\,|e|$, где $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный электрический заряд.

**Пример 2.2** Сначала электрон двигался свободно со скоростью $\upsilon_0 = 10^6$ м/с. В некоторый начальный момент времени $t = 0$ было включено однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^5$ В/м, образующей с направлением начальной скорости $\boldsymbol{\upsilon}_0$ угол $\alpha = \pi/3$. По какой траектории движется электрон после включения поля? Найти радиус кривизны $R$ траектории в той точке, где скорость минимальна?

**Решение**

Выберем декартову систему координат, в которой ось $y$ направлена вдоль вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{E} = E\mathbf{j}$, а ось $x$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_0$. Запишем второй закон Ньютона $m\boldsymbol{a} = e\mathbf{F}_E$ для электрона ($e$ – заряд, $m$ – масса, $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{\upsilon}/dt$ – ускорение электрона) с учетом электрической составляющей силы Лоренца (2.1) $\mathbf{F}_E = e\mathbf{E} = -qE\mathbf{j}$, где $q = |e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный электрический заряд. В проекциях на оси выбранной системы координат уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} ma_x = 0, \\ ma_y = -qE. \end{cases}$$

Учитывая дифференциальные связи между ускорением $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{\upsilon}/dt$, скоростью $\boldsymbol{\upsilon} = d\mathbf{r}/dt$ и радиусом-вектором $\mathbf{r}$ электрона, проинтегрируем эту систему дифференциальных уравнений с учетом начальных условий: $x_0 = y_0 = 0$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sin\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cos\alpha$. Получим соотношения:

$$\begin{cases} a_x = 0, \\ a_y = -\dfrac{q}{m}E, \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{0x}, \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} - \dfrac{q}{m}Et, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \upsilon_{0x}t, \\ y = \upsilon_{0y}t - \dfrac{q}{m}E\dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Последние два соотношения представляют собой систему уравнений параметрического задания кривой траектории электрона ($x = x(t),\ y = y(t)$, параметром является время $t$). Очевидно, что кривая траектории является *параболой*, явное уравнение которой получается исключением параметра путем выражения времени $t = x/\upsilon_{0x}$

из первого уравнения и подстановки его во второе уравнение. В итоге получаем явное уравнение траектории движения заряда $y = p_1 x - p_2 x^2$, где $p_1 = \mathrm{ctg}\,\alpha$, $p_2 = qE / 2m\upsilon_{0x}^2$. В системе координат ($x$, $y$) максимум параболы $y = y(x)$ соответствует моменту времени $t_1$, в который скорость электрона $|\boldsymbol{\upsilon}|$ минимальна, так как в этой точке величина $\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t_1 = 0$ равна нулю, а $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sin\alpha$ вообще не зависит от времени, т. е. $t_1 = -\upsilon_{0y} / a_y = m\upsilon_{0y} / qE$. Кроме того, в точке максимума полное ускорение направлено по нормали к вектору скорости и равно нормальному ускорению $|\boldsymbol{a}| = |a_n| = |\boldsymbol{\upsilon}|^2 / R$, где $R$ – радиус кривизны траектории в этой точке, а $|\boldsymbol{\upsilon}| = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sin\alpha$. Следовательно, радиус кривизны в точке максимума траектории равен $R = |\upsilon_x^2 / a_y| = m\upsilon_0^2 \sin^2\alpha / qE$. Подставляя численные значения величин, получаем значение радиуса кривизны в вершине параболы $R(t_1) = 0{,}43$ мкм.

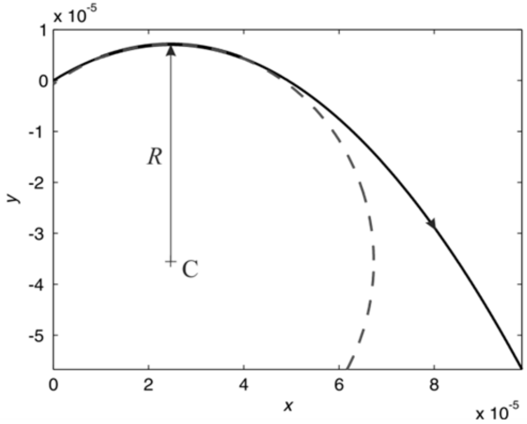



*Рис. 2.1.* К примеру 2.2:

сплошная линия – параболическая траектория движения электрона; штриховая линия – окружность кривизны в вершине параболы; точка $C$ – мгновенный центр кривизны в момент времени $t_1$

**Ответ:** 1. Траектория есть парабола (рис. 2.1). 2. $R(t_1) = 0{,}43$ мкм.

**Пример 2.3.** В установке для разделения изотопов $U^{238}$ и $U^{235}$ пучок однократно ионизованных ускоренных ионов урана с кинетической энергией $E_K = 5$ кэВ попадает от источника через щель $S$ (рис. 2.2) в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рисунка. В магнитном поле ионы разных масс движутся по разным окружностям и, совершив полуоборот, попадают в приемники. Конструкция приемников должна быть такова, чтобы расстояние между пучками $U^{238}$ и $U^{235}$ на выходе было не меньше $\Delta x = 5$ мм. Каково должно быть магнитное поле, удовлетворяющее этому условию? Найти время, необходимое для полного разделения $M = 1$ кг природного урана, если ионный ток, создаваемый источником, $I = 5$ мА. Принять молярную массу природного урана равной $\mu = 0,238$ кг/моль, $m_1 = 3,9526 \cdot 10^{-25}$ кг – масса ядра $U^{238}$, $m_2 = 3,9029 \cdot 10^{-25}$ кг – масса ядра $U^{235}$.

**Решение**

Уравнение движение однозарядных положительных ионов дается вторым законом Ньютона $m\boldsymbol{a} = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} = q\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}$ – магнитная сила Лоренца.

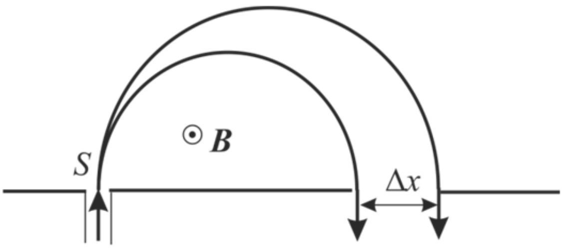



*Рис. 2.2.* К примеру 2.3. Схема траекторий пучков изотопов урана в установке по разделению изотопов

Проецируя уравнение Ньютона на радиальное направление, получаем $ma = q\upsilon B$, где $a = \upsilon^2 / R$ – центростремительное ускорение, откуда $R = m\upsilon / qB$ – ларморовский радиус пучка ионов со скоростью $\upsilon$. Из кинетической энергии иона $E_K = m\upsilon^2 / 2$ (нерелятивистский случай) выражаем его скорость $\upsilon = \sqrt{2E_K / m}$, и радиус пучка ионов с массой $m$ равен $R = \sqrt{2E_K m} / qB$. У однозарядных ионов изотопов $U^{238}$ и $U^{235}$ заряды равны $q_1 = q_2 = q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, тогда радиусы их траекторий $R_1 = \sqrt{m_1}\sqrt{2E_K} / qB$ и $R_2 = \sqrt{m_2}\sqrt{2E_K} / qB$, т. е. $\Delta R = R_1 - R_2 = \left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right)\sqrt{2E_K} / qB$. Принимая, что $\Delta R = \Delta x / 2$, определяем верхнюю границу значений индукции магнитного поля $B = \left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right)\sqrt{2E_K} / q\Delta R$. Подставляем численные значения величин и получаем для этой верхней границы индукции значение $B = 0{,}396 \approx 0{,}4$ Тл.

Природный уран содержит 99,3 % изотопа $U^{238}$ и 0,7 % изотопа $U^{235}$. Источник ионов с током $I$ в течение времени $t$ выдает заряд, равный $Q = It$. Для полного разделения $N$ ионов изотопов вещества урана массой $M$ в течение времени $t$ необходимо, чтобы этот заряд был равен $Q = qN = qMN_A / \mu$, тогда необходимое время $t = qMN_A / \mu I \approx$ $\approx 8{,}1 \cdot 10^7$ с $\approx 2{,}6$ года.

**Ответ:** $B \le 0{,}4$ Тл; $t \approx 2{,}6$ года.

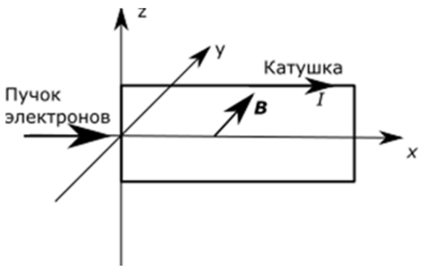



*Рис. 2.3.* К примеру 2.4

**Пример 2.4.** В электронно-лучевой трубке после прохождения ускоряющей разности потенциалов $U = 20$ кВ пучок электронов попадает в магнитное поле катушек вертикального отклонения пучка. Внутри катушек магнитное поле можно считать однородным с индукцией $B = 5$ мТл, направленной вдоль оси $y$, как показано на рис. 2.3, за плоскость чертежа. Электроны влетают в магнитное поле слева, так что $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_{0z} = 0$; $x = 0, y = 0, z = 0$ в начальный момент времени $t = 0$. Вне катушек магнитное поле пренебрежимо мало. На какой угол отклонится пучок, если длина рабочей области катушек $l = 2$ см?

**Решение**

Сила Лоренца, действующая на электрон в магнитном поле, равна $\mathbf{F} = e\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}$, где $\mathbf{B} = B\boldsymbol{j} = (0, B, 0)$ и $e\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B} = -e\upsilon_z B\boldsymbol{i} - e\upsilon_x B\boldsymbol{k}$. Второй закон Ньютона для электрона $m\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}$ в декартовых координатах дает три уравнения:

$$\begin{cases} ma_x = q\upsilon_z B, \\ ma_y = 0, \\ ma_z = -q\upsilon_x B, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{\upsilon}_x = \omega\upsilon_y, \\ \dot{\upsilon}_y = 0, \\ \dot{\upsilon}_z = -\omega\upsilon_x, \end{cases}$$

так как $a_{x,y,z} = \dot{\upsilon}_{x,y,z}$, $\omega = qB/m$, $q = |e|$ (здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени). Первое уравнение из правой системы продифференцируем по переменной $t$ и подставим в полученный результат $\dot{\upsilon}_z$ из третьего уравнения, получим дифференциальное уравнение второго порядка $\ddot{\upsilon}_x + \omega^2\upsilon_x = 0$. Общее решение этого однородного дифференциального уравнения для $x$-компоненты скорости имеет вид $\upsilon_x = A\cos\omega t + C\sin\omega t$. Продифференцируем это решение по переменной $t$ и, подставив результат в верхнее уравнение, найдем общее решение для $z$-компоненты скорости электрона $\upsilon_z = -A\sin\omega t + C\cos\omega t$. Постоянные интегрирования $A$ и $C$ найдем, воспользовавшись начальными условиями $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 = A$, $\upsilon_{0y} = 0$, $\upsilon_{0z} = 0 = C$ при $t = 0$. Таким образом, компоненты вектора скорости электрона изменяются со временем по закону

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dot{x} = \upsilon_0 \cos\omega t, \\ \upsilon_y = \dot{y} = 0, \\ \upsilon_z = \dot{z} = -\upsilon_0 \sin\omega t. \end{cases}$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения по времени с начальными условиями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ при $t = 0$, найдем зависимость координат электрона от времени:

$$\begin{cases} x = R\sin\omega t, \\ y = 0, \\ z = R(\cos\omega t - 1), \end{cases}$$

где $R = \upsilon_0 / \omega = m\upsilon_0 / qB$. Поскольку $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$, это означает, что каждый электрон движется в $xz$-плоскости по окружности радиусом $R$ с центром в точке $x = 0,\ y = 0,\ z = -R$, уравнение которой $x^2 + (z + R)^2 = R^2$.

Начальную скорость электрона найдем из закона сохранения энергии $m\upsilon_0^2 / 2 = qU$, т. е. $\upsilon_0 = \sqrt{2qU / m}$. В условиях задачи $R = m\upsilon_0 / qB = 0{,}095$ м, длина катушки $l = 0{,}02$ м, т. е. $R > l$, и внутри катушки умещается только часть ларморовской окружности (рис. 2.4). Если $t_1$ – время пролета активной области катушки, то в точке вылета из катушки $x$-координата электрона равна $l = R\sin\omega t_1$, откуда $t_1 = \omega^{-1}\arcsin(l / R)$. Угол отклонения $\varphi_1$ пучка электронов после прохождения отклоняющей системы найдем из соотношения $\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \upsilon_z(t_1) / \upsilon_x(t_1) = -\mathrm{tg}\,\omega t_1$. $\varphi_1 = \arctan(\upsilon_z(t_1) / \upsilon_x(t_1))$ и $\varphi_1 = -\omega t_1 = -\arcsin(l / R)$. Подставляя численные значения величин, получаем $\varphi_1 = -0{,}211$ или $\varphi_1 = -12{,}1°$.

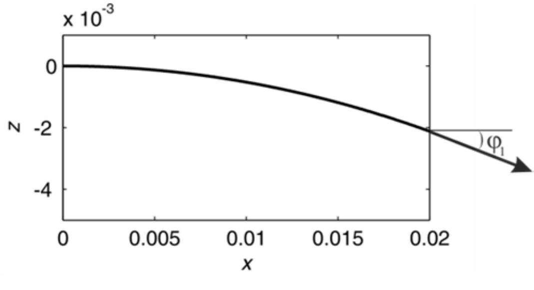



*Рис. 2.4*. К примеру 2.4. Участок траектории электрона внутри катушки

**Ответ:** $\varphi_1 = -0{,}211$ рад $= -12{,}1°$.

**Пример 2.5.** Электрон, движущейся в вакууме со скоростью $\upsilon_0 = 2 \cdot 10^6$ м/с, попадает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1{,}2$ мТл под углом 45° к силовым линиям поля. Определить радиус винтовой линии, по которой будет двигаться электрон, и ее шаг.

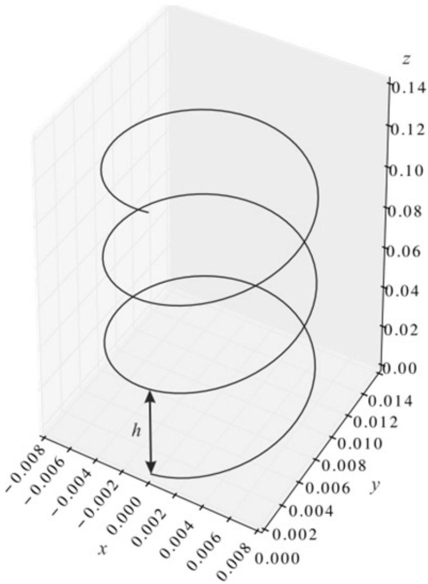



*Рис. 2.5.* К примеру 2.5

**Решение**

Воспользуемся результатами предыдущего примера. Направим ось $z$ вдоль вектора индукции магнитного поля, а начало координат и направления осей $x$ и $y$ выберем так, чтобы в начальный момент времени $t = 0$ компоненты радиуса-вектора и скорости электрона имели значения: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sin\theta$, $\upsilon_{0y} = 0$, $\upsilon_{0z} = \upsilon_0 \cos\theta$. Тогда компоненты скорости в любой момент времени даются выражениями: $\upsilon_x = \upsilon_{0x} \cos\omega t$, $\upsilon_y = -\upsilon_{0x} \sin\omega t$, $\upsilon_z = \upsilon_0 \cos\theta$, где $\omega = qB / m = 2\pi/T$ – циклотронная частота. Интегрируя еще раз и учитывая координатные начальные условия, получаем выражения координат электрона: $x = R\sin\omega t$, $y = R - R\cos\omega t$, $z = \upsilon_0 t \cos\theta$, где

$R = \upsilon_0 \sin\theta / \omega$ – радиус цилиндра, на который навивается траектория электрона (рис. 2.5). Шаг винтовой линии равен $h = \upsilon_{0y} T = = 2\pi\upsilon_0 \cos\theta / \omega$. Подставляя численные значения величин, получаем: $R = 0{,}0067$ м и $h = 0{,}042$ м

**Ответ:** $R = 0{,}0067$ м и $h = 0{,}042$ м.

## Задачи для аудиторной работы

**А2.1.** Вычислить скорость, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов: 1) 100 В; 2) 100 кВ. Сравнить значения скоростей, получающиеся с применением: а) классической $\left(E_K = m\upsilon^2 / 2\right)$ и б) релятивистской $\left(E_K = mc^2(1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} - 1)\right)$ формул для кинетической энергии.

**А2.2.** Электрон двигался свободно со скоростью $\upsilon_0 = 10^6$ м/с. В момент времени $t = 0$ включается однородное электрическое поле с напряженностью $E = 10^5$ В/м, образующее с направлением скорости $\upsilon_0$ угол $\alpha = \pi / 3$. Чему равно приращение импульса электрона за время $t_2 = 50$ пс?

**А2.3.** Два однозарядных иона, которые прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям индукции. Один ион, масса которого равна 12 а.е.м. (ион углерода), описал дугу окружности радиусом 4 см. Определить массу другого иона, который описал дугу окружности радиусом 6 см.

**А2.4.** Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кВ, пролетает область пространства, в которой имеется поперечное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}51$ Тл. Толщина области с полем $l = 10$ см. Найти угол отклонения протона от первоначального направления движения.

**А2.5.** Определите силу Лоренца, действующую на электрон, влетевший со скоростью $\upsilon_0 = 4 \cdot 10^6$ м/с в однородное магнитное поле под углом 30° к линиям индукции. Магнитная индукция поля равна 0,2 Тл.

## Задание на дом

**В2.1.** Электрон летел свободно со скоростью $\upsilon_0 = 10^6$ м/с. В момент времени $t = 0$ включается однородное электрическое поле с напряженностью $E = 10^5$ В/м, образующее с направлением $\upsilon_0$ угол $\alpha = \pi / 3$. Как изменяется со временем момент импульса $\mathbf{L}$ электрона относительно точки, в которой находился электрон в момент включения электрического поля? Чему равно приращение момента импульса $\mathbf{L}$ электрона за время $t = 50$ пс?

**В2.2.** Электрон, движущийся с нерелятивистской скоростью $\upsilon = \upsilon_0 \mathbf{i}$, влетает в область $0 < x < a$, где создано постоянное электрическое поле вида $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}$. Определить приращение кинетической энергии электрона после выхода из области поля. Принять $\upsilon_0 = 10^6$ м/с, $a = 0{,}01$ м и $E_0 = 10^5$ В/м.

**В2.3.** Вычислить радиус дуги окружности, которую описывает протон в магнитном поле с индукцией 15 мТл, если скорость протона равна $2 \cdot 10^6$ м/с.

**В2.4.** Электрон со скоростью $8 \cdot 10^6$ м/с влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл. Вектор скорости составляет угол 60° с направлением линии индукции. Определить радиус и шаг винтовой линии, по которой движется электрон в магнитном поле.

# ПРАКТИКУМ 3

# СИЛА АМПЕРА. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ. МАГНИТНЫЙ ПОТОК

*Сила Ампера*

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = \int_{\Gamma} Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{3.1}$$

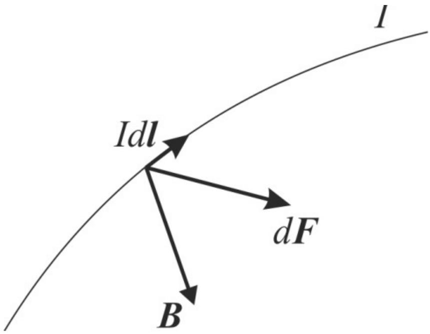



*Рис. 3.1.* К формуле (3.1)

*Сила взаимодействия на единицу длины для двух параллельных бесконечно длинных проводников с токами*

$$dF/dl = \tilde{k} 2 I_1 I_2 / R, \tag{3.2}$$

где $R$ – расстояние между проводниками.

*Вектор напряженности магнитного поля* **H** в однородных изотропных средах связан с вектором магнитной индукции **B** *материальным соотношением*

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} . \tag{3.3}$$

*Циркуляцией* $C_a$ *вектора* **a** *вдоль замкнутого контура* Г называется криволинейный интеграл

$$C_a = \oint_\Gamma \mathbf{a} d\mathbf{l} , \tag{3.4}$$

где $\mathbf{a}d\mathbf{l} = a \cos\alpha dl$ – скалярное произведение векторов **a** и $d\mathbf{l}$ ; $\alpha$ – угол между ними.

*Закон полного тока* (*закон Эрстеда*)

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} d\mathbf{l} = I , \qquad I = \sum_m I_m \tag{3.5}$$

– *циркуляция вектора напряженности магнитного поля* вдоль произвольного замкнутого контура Г равна *полному току I*, охватываемому этим контуром. *Полный ток* равен алгебраической сумме токов $I_m$, охватываемых контуром, *знаки токов* $I_m$ связаны с направлением обхода контура *правилом правого винта.*

*Соленоидом* называется проволочная спираль с током, характеризуемая числом витков на единицу длины $n$, длиной $l$ и диаметром $d$. Толщина провода и шаг винтовой линии малы по сравнению с $d$ и $l$.

*Напряженность и индукция магнитного поля внутри длинного цилиндрического соленоида и внутри тороидального соленоида* с однородным сердечником магнитной проницаемости $\mu$:

$$H = nI , \qquad B = \mu\mu_0 nI . \tag{3.6}$$

*Магнитным потоком* через поверхность $S$ называется поверхностный интеграл

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} , \tag{3.7}$$

где $\mathbf{B}d\mathbf{S} = B\cos\alpha dS$ – скалярное произведение векторов **B** и $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$; $\alpha$ – угол между ними; **n** – единичный вектор нормали к элементу площади поверхности $dS$.

**Пример 3.1.** По медному стержню массой $m = 0{,}14$ кг, лежащему поперек двух параллельных рельсов, расположенных друг от друга на расстоянии 0,3 м, течет ток $I = 50$ А (рис. 3.2). Система помещена в магнитное поле, перпендикулярное плоскости рельсов. Определить минимальную индукцию магнитного поля, при которой проводник начнет движение по рельсам, если коэффициент трения скольжения стержня по рельсам 0,6.

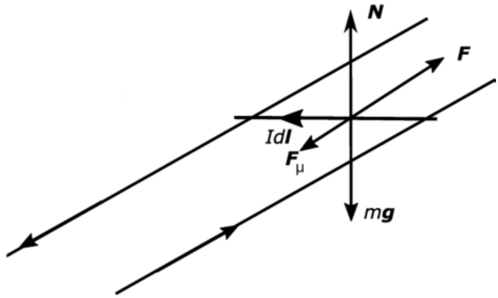


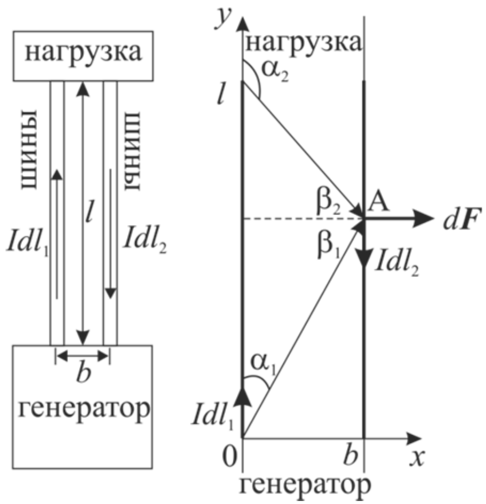

*Рис. 3.2*. К примеру 3.1

**Решение**

На движущийся стержень действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила нормальной реакции рельсов $\boldsymbol{N}$, сила Ампера $\boldsymbol{F}$ и сила трения $\boldsymbol{F}_\mu$. Проецируя уравнение Ньютона $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_\mu$ на направление движения стержня с учетом того, что $m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} = 0$, $F_\mu = \mu mg$, а $F = IlB$, получаем $ma = F - \mu mg$. Минимальное значение $B$, при котором движение перемычки становится равномерным, т. е. $a = 0$, получаем из условия $0 = IlB_{\min} - \mu mg$, что дает $B_{\min} = \mu mg / Il$. Подставляя численные значения величин, получаем $B_{\min} = 0{,}055$ Тл.

**Ответ:** $B_{\min} = 0{,}055$ Тл.

**Пример 3.2.** Генератор и нагрузку соединяют два тонких параллельных провода длиной $l = 2$ м, отстоящие друг от друга на расстояние $b = 0{,}2$ м (рис. 3.3). Оценить силу $F$ взаимного отталкивания проводов в случае короткого замыкания, когда по ним течет ток $I = 10$ кА.




*а* *б*

*Рис. 3.3*. К примеру 3.2

**Решение**

По условию задачи длина проводов на порядок больше расстояния между ними. Грубую оценку силы их взаимного отталкивания получим применением формулы (3.2) для силы на единицу длины бесконечно длинных параллельных проводов с антипараллельными токами: на участке $l = 2$ м сила их отталкивания равна $F_0 = \tilde{k}2I^2 l / b = 200$ Н.

Однако провода конечной длины создают более слабое магнитное поле и сила их взаимодействия должна быть меньше. В соответствии с формулой (1.4), раздел 1, первый провод создает в некоторой точке А на втором проводе магнитное поле с индукцией

$$B = \tilde{k}\frac{I_1}{b}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1),$$

где $\beta_1$ и $\beta_2$ – алгебраические значения углов между перпендикуляром из точки А к первому проводнику и направлениями, в которых концы первого проводника видны из точки А на втором проводнике; $I_1$ – ток, текущий по первому проводу. Начало декартовой системы координат поместим в начале первого провода, ось $y$ направим вдоль тока этого провода, а ось $x$ – в направлении ко второму проводу. Синусы $\sin\beta_1$ и $\sin\beta_2$ легко выразить через $y$-ю координату точки А, рассматривая соответствующие прямоугольные треугольники

$$\sin\beta_1 = -\frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}} \quad \text{и} \quad \sin\beta_2 = \frac{l-y}{\sqrt{b^2+(l-y)^2}}.$$

В точке А вектор индукции **B** направлен за плоскость рисунка, а сила Ампера – вправо. Полная сила Ампера, действующая на второй провод со стороны первого, дается интегралом по длине второго провода:

$$F = \int_0^l I_2 B dy = \tilde{k}\frac{I_1 I_2}{b}\int_0^l (\sin\beta_2 - \sin\beta_1)\,dy,$$

где $I_2$ – ток, текущий по первому проводу. Учитывая предыдущие выражения для синусов и то, что $I_1 = I_2 = I$, имеем

$$F = \tilde{k}\frac{I^2}{b}\int_0^l \left(\frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}} + \frac{l-y}{\sqrt{b^2+(l-y)^2}}\right)dy = \tilde{k}\frac{2I^2}{b}\left(\sqrt{l^2+b^2}-b\right).$$

Подставляя численные значения величин, получаем

$$F = \tilde{k}\frac{2I^2}{b}\left(\sqrt{l^2+b^2}-b\right) = 181 \text{ Н}.$$

Видно, что поскольку $\sqrt{l^2+b^2}-b<l$, то начальная оценка $F_0$ является завышенной. Погрешность такой оценки в нашем случае: $\delta F = |F_0 - F|/F = 0.105$, т. е. чуть больше 10 %, однако эта погрешность становится малой при $b/l \ll 1$.

**Ответ:** $F = 181$ Н.

**Пример 3.3.** По сечению проводника равномерно распределен ток плотностью $j = 2\cdot 10^6$ А/м$^2$. Найти циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль окружности радиусом $R = 5$ мм, проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол 30° с вектором плотности тока.

**Решение**

Из формул (3.3) и (3.5) следует, что в однородной среде закон полного тока можно записать в виде

$$C_B = \oint_\Gamma \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0\mu I .$$

Сила тока, охватываемого контуром $\Gamma$, равна потоку вектора плотности тока $\mathbf{j}$ через поверхность $S$, натянутую на этот контур $I = \int_S \mathbf{j}d\mathbf{S}$, поэтому

$$C_B = \mu\mu_0 \int_S \mathbf{j}d\mathbf{S} = \mu\mu_0 \int_S \mathbf{jn}dS = \mu\mu_0 jS\cos\alpha = \mu\mu_0 j\pi R^2 \cos\alpha ,$$

так как векторный элемент площади $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, $dS$ – элемент площади, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к нему, $\mathbf{jn} = j\cos\alpha$, $\alpha$ – угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{j}$, $S = \pi R^2$ – площадь круга, охватываемого контуром $\Gamma$. В нашем случае $\alpha = 60°$, $\mu = 1$. Подставляя численные значения параметров, получаем $C = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ Тл · м.

**Ответ:** $C = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ Тл · м.

**Пример 3.4.** Вдоль длинного однородного проводника цилиндрической формы радиусом $R = 0{,}01$ м течет ток $I = 50$ А, равномерно распределенный по сечению проводника. Определить напряженность и магнитную индукцию поля, создаваемого этим током: а) вне проводника на расстоянии $r_1 = 5{,}0$ см от осевой линии; б) внутри проводника на расстоянии $r_2 = 0{,}8$ см от осевой линии. Магнитная проницаемость вещества внутри проводника $\mu_2 = 2$, вне проводника вакуум $\mu_1 = 1$.

**Решение**

Из соображений симметрии очевидно, что в данном случае силовые линии магнитного поля имеют вид концентрических окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндрического проводника, с центрами на этой оси. Поэтому для расчета магнитного поля удобно воспользоваться законом полного тока (3.5), выбирая в качестве контура Г любую окружность, совпадающую с силовой линией, тогда

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} Hdl = H\oint_{\Gamma} dl = 2\pi rH ,$$

так как на силовой линии векторы $\mathbf{H}$ и $d\mathbf{l}$ параллельны, кроме того, на всей окружности величина $H = |\mathbf{H}|$ имеет одинаковые значения и может быть вынесена за знак криволинейного интеграла, при этом интеграл $\oint_{\Gamma} dl = 2\pi r$ – длине окружности произвольного радиуса $r$. Это справедливо для всех силовых линий как вне, так и внутри цилиндрического проводника с током. Таким образом, (3.5) свелось к уравнению

$$2\pi rH(r) = I(r) ,$$

где $H(r)$ – модуль напряженности магнитного поля на силовой линии радиуса $r$, а $I(r)$ – полный ток, охватываемый этой линией. Отсюда следует, что на расстоянии $r$ от оси бесконечно длинного цилиндрического проводника с током $I(r)$ модуль напряженности магнитного поля равен

$$H(r) = \frac{I(r)}{2\pi r} .$$

Зависимость $I(r)$ различна внутри и вне проводника.

1. Вне проводника при $r > R$ любая силовая линия охватывает полный ток, текущий по проводу, т. е. $I(r) = I$ не зависит от $r$. Напряженность магнитного поля равна

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad r > R ,$$

а индукция магнитного поля равна

$$B(r) = \frac{\mu_1 \mu_0 I}{2\pi r}, \quad r > R .$$

2. Внутри проводника при $r < R$ любая силовая линия охватывает полный ток, равный $I(r) = jS(r)$, где $j = I/\pi R^2$ – плотность тока; $S(r) = \pi r^2$ – площадь, охватываемая силовой линией внутри проводника, т. е. $I(r) = jS(r) = I r^2 / R^2$, и напряженность магнитного поля равна

$$H(r) = \frac{I r}{2\pi R^2}, \; r < R,$$

а индукция магнитного поля равна

$$B(r) = \frac{\mu_2 \mu_0 I r}{2\pi R^2}, \quad r < R.$$

Видно, что на поверхности проводника при $r = R$ напряженность магнитного поля $H(r)$ непрерывна, а индукция магнитного поля $B(r)$ испытывает разрыв, определяемый различием магнитных проницаемостей $\mu_1$ и $\mu_2$.

Подставляя числовые значения параметров, получим

$$B_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} \quad \text{и} \quad B_2 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

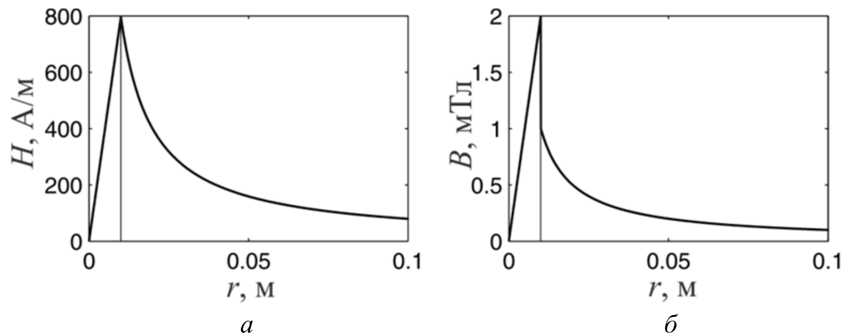



*Рис. 3.4.* К примеру 3.4

**Ответ:** 1. $B_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Тл. 2. $B_2 = 16 \cdot 10^{-4}$ Тл.

**Пример 3.5.** Плоская квадратная рамка со стороной $a = 20$ см лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 100$ А (рис. 3.5). Рамка расположена так, что ближайшая сторона параллельна проводу и находится на расстоянии $b = 10$ см от него. Определить магнитный поток $\Phi$, пронизывающий рамку.

**Решение**

На расстоянии $r$ от прямого провода создаваемая им индукция магнитного поля перпендикулярна плоскости рамки и описывается формулой (1.5)

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}.$$

В соответствии с определением (3.6) магнитный поток этого поля через рамку равен

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B dS,$$

так как в данном случае $\mathbf{B} d\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{n} dS = B dS$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к элементу площади $dS$, охватываемой рамкой поверхности $S$. Интегрировать по поверхности проще всего, если выбирать в качестве дифференциального элемента площадь $dS = a dr$ бесконечно тонкой полоски, параллельной прямому проводу и расположенной на расстоянии $r$ от него.

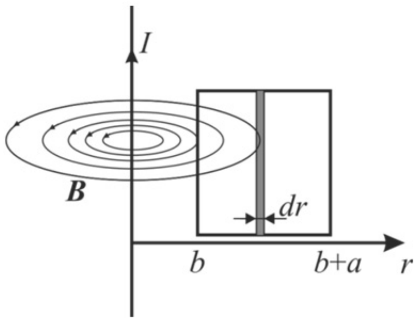



*Рис. 3.5*. К примеру 3.5

Тогда

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_b^{b+a} Badr = \frac{\mu_0 \mu a I}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu a I}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \approx 4{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ Вб.}$$

**Ответ:** $\Phi = 4{,}4 \cdot 10^{-6}$ Вб.

## Задачи для аудиторной работы

**А3.1.** Прямой провод, по которому течет ток 1000 А, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно к линиям индукции. С какой силой действует поле на отрезок провода длиной один метр, если магнитная индукция равна 1 Тл?

**А3.2.** Двухпроводная линия состоит из длинных параллельных прямых проводов, находящихся на расстоянии 4 мм друг от друга. По проводам текут одинаковые токи в 50 А. Определить силу взаимодействия токов, приходящуюся на единицу длины.

**А3.3.** Вычислить циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль контура, охватывающего токи $I_1 = 1$ А, $I_2 = 1{,}5$ А, текущие в одном направлении, и ток $I_3 = 2$ А, текущий в противоположном направлении.

**А3.4.** Вдоль тонкой трубы радиусом $R = 5$ см течет ток $I = 100$ А. Найти магнитную индукцию поля внутри и вне трубы на расстоянии $r = 5$ см от ее поверхности.

**А3.5.** Плоский контур, охватывающий площадь $S = 25$ см$^2$, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}04$ Тл. Определить магнитный поток, пронизывающий контур, плоскость которого составляет угол 30° с линиями индукции.

**А3.6.** Найти плотность тока как функцию расстояния $r$ от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока электронов зависит от $r$ как $B = \beta r^{\alpha}$, где $\alpha$, $\beta$ – положительные постоянные. Для расчета принять значения постоянных $\alpha = 2$, $\beta = 0{,}01$ Тл/м$^2$, а $r = 2$ мм.

## Задание на дом

**В3.1.** Прямой провод длиной 10 см, по которому течет ток $I = 20$ А, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл. Найти угол $\alpha$ между направлениями вектора индукции и тока, если на провод действует сила 10 мН.

**В3.2.** По двум параллельным проводам длиной 1 м каждый текут одинаковые токи. Расстояние между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой 1 мН. Найти силу тока в проводах.

**В3.3.** По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии 10 см друг от друга, текут одинаковые токи 100 А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу, действующую на отрезок длиной 1 м, каждого провода в случаях: а) все токи параллельны, б) ток в третьем проводе течет в направлении, противоположном первым двум токам.

**В3.4.** По круглому прямому проводу радиусом $R = 1$ мм течет ток, равномерно распределенный по всему сечению, с плотностью тока $j = 50$ А/м$^2$. Найти выражение для индукции магнитного поля в точке, положение которой относительно оси провода определяется перпендикулярным к этой оси радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$. Рассмотреть случаи, когда точка лежит внутри ($r_1 = 0{,}5$ мм) и вне ($r_2 = 1{,}5$ мм) провода.

**В3.5.** Квадратная рамка со стороной длиной 20 см расположена в одной плоскости с бесконечно длинным проводом, по которому течет ток. Расстояние от провода до середины рамки равно 1 м. Вычислить относительную погрешность, которая будет допущена при расчете магнитного потока, пронизывающего рамку, если магнитное поле в пределах рамки считать однородным, а магнитную индукцию – равной значению ее в центре рамки.

## ПРАКТИКУМ 4

# МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ. МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. НАМАГНИЧЕННОСТЬ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

*Магнитный момент плоского* контура с током $I$

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}\,, \tag{4.1}$$

где $S$ – площадь контура с током, направление $\mathbf{p}_m$ определяется направлением единичного вектора $\mathbf{n}$ и связано с направлением обхода контура правилом буравчика.

*Магнитный момент точечной частицы, обладающей зарядом $q$, движущейся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ в точке $\mathbf{r}$,*

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} q\mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon}\,. \tag{4.2}$$

Момент импульса *точечной частицы, обладающей массой $m$, движущейся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ в точке $\mathbf{r}$,*

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon}\,. \tag{4.3}$$

*Магнитомеханическое отношение*

$$g = \frac{p_m}{L} = -\frac{q}{2m}\,. \tag{4.4}$$

*Момент сил, действующий на магнитный момент в магнитном поле*,

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}\,. \tag{4.5}$$

*Потенциальная энергия магнитного момента в магнитном поле*

$$U_m = -\mathbf{p}_m \mathbf{B}\ . \tag{4.6}$$

*Магнитное поле точечного магнитного момента*

$$\mathbf{B} = \tilde{k}\left( \frac{3\mathbf{p}_m \mathbf{r}}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right). \tag{4.7}$$

*Магнитный момент системы зарядов*

$$\mathbf{p}_m = \sum_i \mathbf{p}_{mi}\ , \tag{4.8}$$

где $\mathbf{p}_{mi}$ – магнитные моменты частиц,

*Вектор намагниченности вещества*

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_{mi}\ . \tag{4.9}$$

*Напряженность магнитного поля в любой среде*

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}, \quad \text{или} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{H} + \mathbf{J} \right). \tag{4.10}$$

*В однородных изотропных магнитонеупорядоченных средах*

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \kappa \mathbf{H}, \tag{4.11}$$

где $\mu$ – магнитная проницаемость вещества; $\kappa$ – магнитная восприимчивость вещества.

*Связь между магнитной проницаемостью* $\mu$ *и магнитной восприимчивостью* $\kappa$ *в однородных изотропных средах*

$$\mu = 1 + \kappa\ . \tag{4.12}$$

*Магнитонеупорядоченные среды: парамагнетики* имеют $\kappa > 0$, во внешнем магнитном поле намагничиваются вдоль поля, *диамагнетики* имеют $\kappa < 0$, во внешнем магнитном поле намагничиваются против поля.

*Магнитоупорядоченные среды – ферромагнетики, антиферромагнетики, ферримагнетики и прочее.*

*Граница раздела двух магнетиков*:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \text{ т. е. } \mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0; \tag{4.13}$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_\tau, \text{ т. е. } B_{2\tau}/\mu_2 - B_{1\tau}/\mu_1 = \mu_0 i_\tau, \tag{4.14}$$

где $i_\tau$ – перпендикулярная к выбранной касательной компонента плотности поверхностного тока.

*Работа по перемещению части проводящего контура* с током $I$ в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение $\Delta\Phi$ магнитного потока, проходящего через поверхность, ограниченную контуром

$$A = I\int_1^2 \mathbf{B}d\mathbf{S} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi . \tag{4.15}$$

**Пример 4.1.** Напряженность магнитного поля в центре кругового витка равна $H = 200$ А/м, магнитный момент витка $p_m = 1$ А/м$^2$. Вычислить силу тока в витке $I$ и радиус витка $R$.

**Решение**

Индукция магнитного поля $B = \mu_0\mu H$ в центре витка (1.6), $B = \mu_0\mu I/2R$, т. е. напряженность в центре витка $H = I/2R$. Магнитный момент витка $p_m = IS = \pi R^2 I$, так как площадь витка $S = \pi R^2$. Из системы уравнений $H = I/2R$ и $p_m = \pi R^2 I$ выражаем $I = \sqrt[3]{4p_m H^2/\pi}$ и $R = \sqrt[3]{p_m/2\pi H}$. Подставляя численные значения параметров, получаем: $I = 37{,}1$ А, $R = 0{,}0927$ м.

**Ответ:** $I = 37{,}1$ А, $R = 0{,}0927$ м.

**Пример 4.2.** По тонкому стержню длиной $l = 0{,}2$ м равномерно распределен заряд $q = 240$ нКл. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину (рис. 4.1). Определить: 1) магнитный момент, обусловленный вращением заряженного стержня; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса, если стержень имеет массу 12 г.

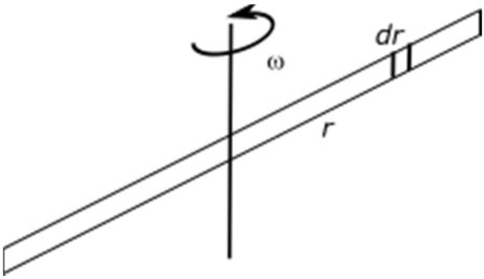



*Рис. 4.1.* К примеру 4.2

**Решение**

Пусть $dr$ – элемент длины стержня, расположенный на расстоянии $r$ от оси вращения. Заряд этого элемента $dq = \lambda dr$, где $\lambda = q/l$ – линейная плотность равномерно распределенного заряда. Элемент длины $dr$ и его заряд $dq = q dr / l$ совершают вращательное движение с линейной скоростью $\upsilon = \omega r$, создавая в соответствии с (4.2) магнитный момент $dp_m = \frac{1}{2} r \upsilon dq = \frac{1}{2} \omega r^2 dq = \frac{q}{2l} \omega r^2 dr$. Полный магнитный момент стержня равен интегралу

$$p_m = 2\int_0^{l/2} dp_m = 2\int_0^{l/2} \frac{q}{2l} \omega r^2 dr = \frac{q}{l} \omega \int_0^{l/2} r^2 dr = \frac{1}{24} q \omega l^2 .$$

Момент импульса стержня равен $L = J\omega$, где $J = ml^2/12$ – момент инерции стержня. Тогда отношение $g = \frac{p_m}{L} = \frac{q}{2m}$. Подставляя числовые данные, получаем $p_m = 4 \cdot 10^{-9}$ А·м$^2$, $L = 4 \cdot 10^{-4}$ кг·м$^2$, $p_m / L = 10^{-5}$ А/кг.

**Ответ:** $p_m = 4 \cdot 10^{-9}$ А·м$^2$, $p_m / L = 10^{-5}$ А/кг.

**Пример 4.3.** Рамка гальванометра длиной $a = 4$ см и шириной $b = 1,5$ см, содержащая $N = 200$ витков тонкой проволоки, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найти: 1) механический момент сил $M$, действующий на рамку, когда по виткам течет ток $I = 1$ мА; 2) магнитный момент $p_m$ рамки при таком токе; 3) работу, которую требуется совершить, чтобы повернуть эту рамку с током в магнитном поле на угол $\pi / 2$.

**Решение**

Магнитный момент рамки гальванометра равен сумме магнитных моментов его витков, т. е. согласно (4.1) $p_m = NIS = NIab$, так как $S = ab$. В магнитном поле на рамку действует момент сил (4.5): $M = p_m B \sin\alpha$, где $\alpha = \pi / 2$ – угол между вектором индукции магнитного поля, лежащим в плоскости рамки, и вектором магнитного момента, который перпендикулярен к плоскости рамки. При вычислении работы учтем, что в начальном положении рамки гальванометра магнитный поток $\Phi_1$ через рамку равен нулю, в конечном положении рамки магнитный поток $\Phi_2$ равен $BS$. Работа по повороту рамки на угол $\pi / 2$ согласно (4.15) равна $A_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = ISB$.

Подставляя численные значения заданных величин, получаем: $p_m = 1,2 \cdot 10^{-4}$ А $\cdot$ м$^2$, $M = 1,2 \cdot 10^{-5}$ Н · м, $A_{12} = 60$ мкДж.

**Ответ:** $p_m = 1,2 \cdot 10^{-4}$ А $\cdot$ м$^2$, $M = 1,2 \cdot 10^{-5}$ Н · м, $A_{12} = 60$ мкДж.

**Пример 4.4.** Проволочный виток радиусом $R = 0,1$ м расположен в плоскости магнитного меридиана на широте, где горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл. В центре витка установлен компас. Какой ток $I$ течет по витку, если магнитная стрелка компаса отклонена на угол $\alpha = 30°$ от плоскости магнитного меридиана, как показано на рис. 4.2.

**Решение**

Магнитная стрелка компаса установится вдоль вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$, который равен сумме вектора индукции магнитного поля Земли $\mathbf{B}_0$ (лежит в плоскости магнитного меридиана) и вектора

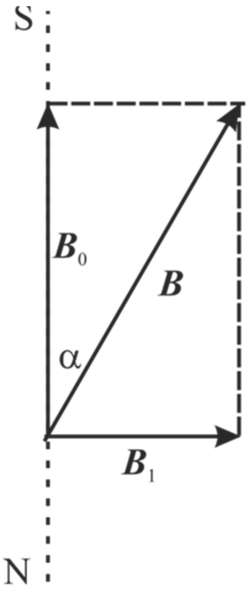


*Рис. 4.2.* К примеру 4.4

индукции $\mathbf{B}_1$, создаваемого витком с током, и который перпендикулярен плоскости витка и меридиана (рис. 4.2).

Индукция магнитного поля в центре кругового витка равна согласно (1.6) $B_1 = \mu_0\mu I/2R$. Стрелка компаса отклонилась на угол $\alpha$, т. е. $B_1 = B_0 \operatorname{tg}\alpha$, поэтому сила тока витка равна $I = 2B_0 R \operatorname{tg}\alpha / \mu_0\mu$. Считая $\mu = 1$ и подставляя численные значения параметров, получаем $I \approx 1{,}8$ А.

**Ответ:** $I \approx 1{,}8$ А.

**Пример 4.5.** Тороидальный соленоид со стальным сердечником имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. По соленоиду течет ток $I = 2$ А. Вычислить магнитный поток Ф в сердечнике, если его сечение $S = 4$ см$^2$. Считать, что средний радиус $R$ тороидального сердечника много больше радиуса $r$ витка катушки.

**Решение**

При условии $R \gg r$ можно считать, что магнитное поле в тороидальном соленоиде с плотной намоткой приближенно однородно, поэтому магнитный поток через поперечное сечение приближенно равен

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = BS,$$

где $S$ – индукция поля внутри соленоида; $S$ – площадь поперечного сечения соленоида. Напряженность магнитного поля внутри тороида равна $H = nI = 2000$ А/м. Индукция магнитного поля в ферромагнитной среде (сталь) нелинейно зависит от напряженности $H$ магнитного поля, она определяется опытным путем и табулируется. Поэтому значение индукции $B$ внутри стального сердечника при заданном $H$ найдем из табл. П4.1, что дает $B = 1{,}300$ Тл. Следовательно, магнитный поток внутри сердечника равен $\Phi = 5{,}2 \cdot 10^{-4}$ Вб.

**Ответ:** $\Phi = 5{,}2 \cdot 10^{-4}$ Вб.

**Пример 4.6.** У железного сердечника в тороидальном соленоиде длиной $l_1 = 1$ м имеется короткий воздушный зазор длиной $l_2 = 0,01$ м. Число витков в обмотке тороидального соленоида $N = 1000$. При токе соленоида $I = 20$ А индукция магнитного поля в воздушном зазоре равна $B = 1,6$ Тл. Оценить магнитную проницаемость железного сердечника при этих условиях.

**Решение**

Под действием магнитного поля тока катушки соленоида сердечник намагничивается вдоль этого поля, представляя собой постоянный магнит. Напряженность магнитного поля равна сумме напряженностей поля тока катушки и поля такого постоянного магнита, поэтому напряженность магнитного поля в зазоре $H_2$ отличается от напряженности поля внутри сердечника $H_1$. Зазор тонкий $(l_2 << l_1)$, и можно считать, что силовые линии перпендикулярны поверхностям зазора и на этих поверхностях выполняются граничные условия (4.13).

Отсюда следует, что внутри сердечника и внутри зазора величины индукции магнитного поля одинаковы $(B_2 = B_1)$, а величины напряженностей связаны соотношением $\mu_2 H_2 = \mu_1 H_1$, поскольку $B_{1,2} = \mu_{1,2}\mu_0 H$ .

Для последующих оценок воспользуемся законом полного тока (3.5) $\oint\limits_\Gamma \mathbf{H}d\mathbf{l} = I.$ В качестве контура $\Gamma$ возьмем силовую линию вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, имеющую вид окружности, проходящей внутри кольца тороида. Интеграл в левой части формулы (3.5) приближенно равен $H_1 l_1 + H_2 l_2$, а правая часть равна $IN$, т. е.

$$IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 = B_1 l_1 / \mu\mu_0 + B_2 l_2 / \mu_0,$$

где $\mu_1 = \mu$ и $\mu_2 = 1$. Откуда

$$\mu = l_1 / (\mu_0 IN / B_1 - l_2).$$

Подставляем численные значения заданных параметров и получаем: $\mu = 438$.

**Ответ:** $\mu = 438$.

## Задачи для аудиторной работы

**А4.1.** По кольцу радиусом $R$ течет ток. На оси кольца на расстоянии $z=1$ м от его плоскости магнитная индукция $B=10$ нТл. Определить магнитный момент $p_m$ кольца с током. Считать $R$ много меньше $z$.

**А4.2.** Тонкое кольцо радиусом 10 см несет заряд 10 нКл. Кольцо равномерно вращается с частотой $10\ \text{с}^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определить: а) магнитный момент кругового тока, обусловленный вращением заряженного кольца; б) отношение магнитного момента к моменту импульса, если кольцо имеет массу 10 г.

**А4.3.** Проволочный виток радиусом $R=5$ см находится в однородном магнитном поле напряженностью $H=2$ кА/м. Плоскость витка образует угол 60° с направлением магнитного поля. Найти механический момент сил, действующий на виток, если сила тока в витке равна 4 А. Какую работу надо совершить, чтобы медленно повернуть виток с током вокруг оси, проходящей через диаметр витка так, чтобы магнитный момент витка был сонаправлен с линиями поля?

**А4.4.** Длинный прямой соленоид, содержащий пять витков на каждый сантиметр длины, расположен перпендикулярно плоскости магнитного меридиана Земли с горизонтальной составляющей вектора магнитной индукции 20 мкТл. Внутри соленоида, в его средней части, находится магнитная стрелка, установившаяся в магнитном поле Земли. Когда по соленоиду пустили ток, стрелка отклонилась на 60°. Найти силу тока.

**А4.5.** На железное кольцо намотано в один слой 500 витков провода. Средний диаметр кольца 25 см. Определить магнитную индукцию в железе и магнитную проницаемость железа, если сила тока в обмотке равна 2,5 А. (Указание: воспользуйтесь табл. П4.2.)

**А4.6.** Стальной сердечник тороида, длина которого по средней линии равна 1 м, имеет вакуумный зазор длиной 4 мм. Обмотка содержит восемь витков на один сантиметр. При какой силе тока индукция в зазоре будет равна 1 Тл? (Указание: воспользуйтесь табл. П4.1.)

## Задание на дом

**В4.1.** Напряженность магнитного поля в центре кругового витка равна 200 А/м. Магнитный момент витка равен 1 нА·м$^2$. Вычислить силу тока в витке и радиус витка.

**В4.2.** Диск радиусом 10 см несет равномерно распределенный по поверхности заряд 0,2 мкКл. Диск равномерно вращается с угловой частотой $20\ \text{с}^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить: а) магнитный момент кругового тока, создаваемого диском; б) отношение магнитного момента к моменту импульса, если масса диска 0,1 кг.

**В4.3.** Короткая катушка площадью поперечного сечения $150\ \text{см}^2$ содержит 200 витков провода, по которому течет ток 4 А. Катушка помещена в однородное магнитное поле напряженностью 8 кА/м. Определить магнитный момент катушки, а также вращающий момент сил, действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол 60° с линиями магнитной индукции.

**В4.4.** Короткий прямой магнит расположен перпендикулярно плоскости магнитного меридиана. На оси магнита на расстоянии 50 см от его середины (которое много больше длины магнита) находится магнитная стрелка. Вычислить магнитный момент магнита, если стрелка отклонена на угол 6° от плоскости магнитного меридиана (горизонтальную составляющую магнитной индукции поля Земли принять равной 20 мкТл).

**В4.5.** Железный сердечник находится в однородном магнитном поле напряженностью 1,65 кА/м. Определить индукцию магнитного поля в сердечнике и магнитную проницаемость железа (табл. П4.2).

## Приложение к практикуму 4

Таблица П4.1

**$B = B(H)$ (сталь)**

| $H$, А/м | 500 | 1000 | 1500 | 1800 | 2000 | 2200 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$, Тл | 0,875 | 1,12 | 1,225 | 1,255 | 1,300 | 1,325 |

Таблицы П4.2

**$B = B(H)$ (железо)**

| $H$, А/м | 1500 | 1600 | 1700 |
|---|---|---|---|
| $B$, Тл | 1,355 | 1,375 | 1,400 |

# ПРАКТИКУМ 5

## ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ИНДУКТИВНОСТЬ. САМОИНДУКЦИЯ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЭНЕРГИЯ ТОКА

*Закон электромагнитной индукции Фарадея*:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{5.1}$$

ЭДС электромагнитной индукции $\varepsilon$ в замкнутом контуре равна взятой со знаком минус скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур.

*Правило Ленца*: индукционный ток в контуре имеет такое направление, что его магнитное поле препятствует изменению магнитного потока (знак «минус» в формуле (5.1)).

Электрический ток $I$, текущий вдоль замкнутого контура, создает в этом контуре магнитный поток Ф, который пропорционален этой силе тока $I$, коэффициент пропорциональности $L$ называется *индуктивностью контура*:

$$\Phi = LI. \tag{5.2}$$

Для полной ЭДС электромагнитной индукции, создаваемой соленоидом (катушкой индуктивности), содержащей $n$ витков на единицу длины, можно также использовать формулы (5.1) и (5.2), заменяя $\Phi$ на $\Phi_N$ – суммарный магнитный поток всех $N$ витков через сечение соленоида (потокосцепление), при этом $L$ называется *индуктивностью соленоида*

$$L = n^2\mu\mu_0 V, \tag{5.3}$$

здесь $V = Sl$ – объем соленоида; $S$ – площадь поперечного сечения катушки; $l$ – ее длина; $\mu$ – магнитная проницаемость сердечника.

*ЭДС самоиндукции*

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}. \tag{5.4}$$

Если имеется $N$ замкнутых контуров с токами $I_l$ ($l = 1, 2, ..., N$), то магнитный поток через *k*-й контур равен сумме

$$\Phi_k = \sum_{l=1}^{N} L_{lk} I_k, \tag{5.5}$$

коэффициенты $L_{lk} = L_{kl}$ (при $l \neq k$) называются *коэффициентами взаимной индукции* между *l*-м и *k*-м контурами, коэффициент $L_{kk}$ называют *коэффициентом самоиндукции* (*индуктивности*) *k*-го контура.

*ЭДС электромагнитной индукции* $\varepsilon_k$ *в k-м замкнутом контуре*

$$\varepsilon_k = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -\sum_{l=1}^{N} L_{lk}\frac{dI_k}{dt}. \tag{5.6}$$

*Энергия магнитного поля системы контуров* с линейными токами

$$U_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Phi_k I_k = \sum_{k=1}^{N}\frac{L_{kk} I_k^2}{2} + \sum_{k,l=1(k>l)}^{N} L_{lk} I_l I_k. \tag{5.7}$$

*Энергия магнитного поля уединенного контура* с током (*энергия тока*)

$$U_m = \frac{LI^2}{2}. \tag{5.8}$$

*Энергия магнитного поля в объеме* $V$

$$U_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{\mathbf{HB}}{2} dV. \tag{5.9}$$

*Плотность энергии магнитного поля*

$$w_m = \frac{\mathbf{HB}}{2}. \tag{5.10}$$

Вычислив по (5.9) энергию магнитного поля в объеме $V$, занимаемом магнитным полем любого отрезка цепи с током (проводника с током) и представив результат в виде (5.8), можно определить *индуктивность* этого *отрезка цепи* (*проводника*).

**Пример 5.1.** Тонкий металлический стержень длиной $l = 1{,}2$ м вращается с частотой $\nu = 2$ об/с в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к стержню и отстоящей от одного из концов на расстояние $l_1 = 0{,}25$ м (рис. 5.1).

Вектор магнитной индукции параллелен оси вращения и по модулю равен $B = 1$ мТл. Найти разность потенциалов, возникающую между концами стержня.

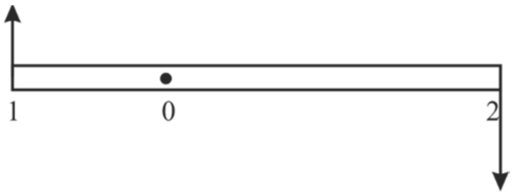



*Рис. 5.1.* К примеру 5.1

**Решение**

При вращении стержня в магнитном поле на каждый электрон с зарядом *e*, находящийся внутри стержня на расстоянии $r$ от оси, действует магнитная сила Лоренца, направленная вдоль стержня и равная по модулю

$$F_B = e\upsilon B = e\omega rB = 2\pi\nu eBr,$$

так как линейная скорость вращательного движения электрона $\upsilon = \omega r = 2\pi\nu r$, а угловая скорость вращения $\omega = 2\pi\nu$. Эта сила смещает электроны к одному из концов стержня до тех пор, пока на противоположных концах стержня накопятся такие заряды противоположного знака (создающие между концами стержня разность потенциалов $\Delta\varphi$

и напряженность $E = E(r)$), что сила электрического поля $F_E = eE$ уравновешивает магнитную силу Лоренца $F_E = F_B$. Отсюда получаем зависимость напряженности электрического поля от расстояния до оси

$$E = 2\pi\nu Br.$$

Разность потенциалов между концами стержня равна интегралу

$$\Delta\varphi = -\int_{l_1}^{l_2} Edr = -2\pi\nu B\int_{l_1}^{l_2} rdr = -2\pi\nu B\left.\frac{r^2}{2}\right|_{l_1}^{l_2} = \pi\nu B\left(l_1^2 - l_2^2\right) = 5,278\cdot 10^{-3}\text{ В},$$

где $l_2 = l - l_0$ – расстояние от оси до второго конца стержня.

Другой способ решения может быть основан на законе электромагнитной индукции (5.1), если рассмотреть два круговых проводящих контура радиусом $l_1$ и $l_2$, по которым скользят концы стержня. Разность потенциалов между концами стержня равна разности ЭДС индукции в этих контурах $\Delta\varphi = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. ЭДС индукции в первом контуре равна $\varepsilon_1 = -d\Phi_1 / dt$, где $d\Phi_1 = BdS_1$ – магнитный поток через площадь сектора $dS_1 = l_1^2 d(\omega t) / 2 = l_1^2\omega dt / 2$, отметаемого радиусом $l_1$ за время $dt$, тогда $\varepsilon_1 = -Bl_1^2\omega / 2$. Аналогично для второй части стержня: $\varepsilon_2 = -Bl_2^2\omega / 2$. В итоге $\Delta\varphi = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \pi\nu B\left(l_1^2 - l_2^2\right) = 5,278\cdot 10^{-3}$ В.

**Ответ:** $\Delta\varphi \approx 5,3\cdot 10^{-3}$ В.

**Пример 5.2.** В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,35$ Тл равномерно с частотой $\nu = 8$ об/с вращается рамка, содержащая $N = 500$ витков площадью $S = 50$ см$^2$. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции $\varepsilon_m$, возникающую в рамке.

**Решение**

ЭДС индукции в рамке находится по формуле (5.1), где суммарный магнитный поток через все витки рамки равен $\Phi = NBS\cos\alpha$, где $\alpha = \omega t$ – угол между вектором магнитной индукции и нормалью к плоскости рамки $(\omega = 2\pi\nu)$, а ЭДС индукции рамки $\varepsilon = -d\Phi / dt =$

$= \omega NBS \sin \omega t$. Максимальная ЭДС индукция равна амплитуде $\varepsilon_m = \omega NBS$. Подставляя численные значения заданных величин, получаем: $\varepsilon_m = 43{,}98 \approx 44$ В.

**Ответ:** $\varepsilon_m \approx 44$ В.

**Пример 5.3.** В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. По цепи протекло количество электричества $Q = 10$ мкКл. Определить магнитный поток $\Phi$, пересеченный кольцом, если сопротивление $R$ цепи гальванометра равно 30 Ом.

**Решение**

Пренебрегаем сопротивлением витка, тогда полное сопротивление цепи определяется сопротивлением гальванометра. ЭДС индукции в цепи дается законом (5.1), тогда изменение потока за время $dt$ равно $d\Phi = -\varepsilon dt$. Но по закону Ома $\varepsilon = IR$, где сила тока $I = dQ / dt$, а $dQ$ – заряд, протекший по цепи за время $dt$. Таким образом, $d\Phi = -RIdt = -RdQ$, интегрируя, получим

$$\Phi = RQ = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

**Ответ:** $\Phi = 3 \cdot 10^{-4}$ Вб.

**Пример 5.4.** Индуктивность $L$ катушки равна 2 мГн. Ток частотой $\nu = 50$ Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определить среднюю ЭДС самоиндукции за интервал времени, в течение которого ток в катушке изменяется от нуля до максимального значения. Амплитудное значение силы тока $I_m = 10$ А.

**Решение**

Среднее значение ЭДС определяется выражением

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon dt.$$

Мгновенная ЭДС $\varepsilon$ в соответствии с формулой (5.4) равна $\varepsilon = -LdI / dt$, сила тока изменяется по закону $I = I_m \sin \omega t$, тогда

$\varepsilon = -\omega L I_m \cos\omega t$, а $t_1 = 0$, $t_2 = T/4$, причем $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ и $T$ – период изменения тока. В итоге имеем

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{4}{T}\int_0^{T/4}(-\omega L I_m \cos\omega t)dt =$$

$$= -\frac{4}{T} L I_m \int_0^{\pi/2}\cos u du = -\frac{4}{T} L I_m = -4\nu L I_m = -4 \text{ В}.$$

**Ответ:** $\langle\varepsilon\rangle = -4$ В.

**Пример 5.5.** На цилиндрический каркас диаметром $d = 120$ мм намотано в один слой $N = 100$ витков проволоки. Вся намотка разместилась на длине $l = 60$ мм. Оценить индуктивность $L$ такой катушки. Магнитную проницаемость сердечника катушки принять равной единице.

*Указание*. Индуктивность однослойных катушек можно вычислять по формуле $L = \alpha L_\infty$, где $L_\infty$ – индуктивность идеальной бесконечно длинной катушки (5.3), а поправочный коэффициент $\alpha = (1 + 0{,}45d/l)^{-1}$.

**Решение**

При выводе приближенной формулы (5.3) считается, что внутри катушки магнитное поле однородное, как в бесконечно длинном соленоиде, учет конечности длины требует введения поправочных коэффициентов $L = \alpha L_\infty$, т. е. $L_\infty = \mu_0 \mu n^2 V$, $V = \pi d^2 l/4$ – объем внутри соленоида, $\alpha = (1 + 0{,}45d/l)^{-1}$. Подставляя численные значения, получаем $L_\infty = 2{,}369 \cdot 10^{-3}$ Гн и коэффициент $a = 0{,}526$. Окончательно $L = 1{,}247 \cdot 10^{-3}$ Гн.

**Ответ:** $L \approx 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ Гн.

## Задачи для аудиторной работы

**А5.1.** В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, вращается стержень длиной 10 см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов на концах стержня при частоте вращения 16 об/с.

**А5.2.** Рамка площадью 100 см$^2$ содержит 1000 витков провода сопротивлением 12 Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление 20 Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл с частотой вращения 8 об/с. Определить максимальную мощность тока в цепи.

**А5.3.** Проволочный виток радиусом $r = 4$ см находится в однородном магнитном поле индукции $B = 0,04$ Тл. Плоскость витка образует угол 30° с направлением магнитного поля. Какое количество заряда протечет по витку при выключении магнитного поля? Сопротивление витка равно 0,01 Ом.

**А5.4.** С помощью реостата увеличивают силу тока в катушке по закону $I = \alpha t^2$ с коэффициентом $\alpha = 0,1$ А/с. Индуктивность катушки равна 0,01 Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции.

**А5.5.** Катушка, плотно намотанная в один слой на немагнитный цилиндрический каркас, имеет 750 витков и индуктивность 25 мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до 36 мГн, обмотку с катушки сняли и заменили плотной обмоткой в один слой из более тонкой проволоки, длина катушки осталась прежней. Определить число витков катушки после перемотки.

**А5.6.** Две катушки расположены на небольшом расстоянии одна от другой. Когда сила тока в первой катушке изменяется с быстротой 5 А/с, во второй катушке возникает ЭДС индукции 0,1 В. Определить коэффициент взаимной индукции.

## Задание на дом

**В5.1.** Рамка площадью 200 см$^2$ равномерно вращается с частотой 10 об/с относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного тока. Каково среднее значение ЭДС индукции за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от минимального значения до максимального значения? Принять $B = 0,2$ Тл.

**В5.2.** Короткая катушка, содержащая 1000 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией 0,04 Тл с угловой скоростью 5 рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям индукции поля. Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол 60° с линиями индукции поля. Площадь катушки равна 100 см$^2$.

**B5.3.** Проволочное кольцо радиусом 10 см лежит на столе. Какое количество электричества протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца равно 1 Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

**B5.4.** По катушке индуктивностью 0,03 мГн течет ток 0,6 А. При размыкании цепи сила тока изменяется практически до нуля за 120 мкс. Определить среднюю ЭДС самоиндукции, возникающей в контуре.

**B5.5.** Сколько витков проволоки диаметром 0,4 мм с изоляцией ничтожной толщины нужно намотать на картонный цилиндр диаметром 2 см, чтобы получить однослойную катушку индуктивностью 1 мГн? Витки вплотную прилегают друг к другу.

**B5.6.** Длинный прямой соленоид, намотанный на немагнитный каркас, имеет 1000 витков и индуктивность 3 мГн. Какой магнитный поток Ф и какое потокосцепление $\Phi_N$ создает соленоид при силе тока в 1 А?

**B5.7.** Обмотка соленоида со стальным сердечником содержит 500 витков. Длина соленоида равна 50 см. Как и во сколько раз изменится индуктивность соленоида, если сила тока, текущего по обмотке, возрастает от 0,1 до 1 А (см. таблицу).

## Приложение к практикуму 5

**Связь *B*(*H*) для стали (марка 1572 [12, с. 639])**

| *H*, А/м | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|
| *B*, Тл | 0,045 | 0,57 | 0,87 | 1,25 | 1,30 |

## ПРАКТИКУМ 6

# КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ЗАМЫКАНИИ И РАЗМЫКАНИИ КОНТУРОВ, СОДЕРЖАЩИХ *R*, *C* И *L*

*Квазистационарными* называются *переменные электромагнитные поля и токи*, которые изменяются со временем достаточно *медленно*. Этот случай важен прежде всего потому, что он позволяет хорошо описывать явления, происходящие в цепях переменного тока низкой частоты и вблизи таких цепей там, где *можно пренебречь электромагнитным излучением*. В квазистационарном приближении можно пренебречь явлениями, определяемыми *током смещения* $\mathbf{j}' = \partial \mathbf{D}/\partial t = \varepsilon\varepsilon_0\, \partial \mathbf{E}/\partial t$.

*Квазистационарным* можно считать *ток* $I$ *в проводнике с характерной длиной* $l$ *много меньше расстояния* $c\Delta t$, на которое электромагнитное поле распространяется со скоростью света $c$ за характерное *время* $\Delta t$ *изменения тока*, т. е. $c\Delta t \gg l$ (для периодически изменяющегося тока и поля $\Delta t = T$ – есть период колебаний тока и поля, а $c\Delta t = \lambda$ – характерная длина электромагнитной волны, т. е. $cT = \lambda \gg l$). Кроме того, внутри проводника мгновенная плотность тока $j = I / S = \sigma E$ ($S$ – характерная площадь сечения проводника, $\sigma$ – удельная проводимость, $E$ – напряженность электрического поля) должна быть достаточно велика, а скорость изменения электрического поля напряженности $E$ достаточно мала, так что $j \gg \varepsilon_0\, \partial E/\partial t \approx \varepsilon_0\, E/\Delta t \approx \varepsilon_0\, \partial E/T$, т. е. $T \gg \varepsilon_0 / \sigma$.

Мгновенное значение квазистационарного тока одинаково во всей цепи, при этом применимы правила Кирхгофа.

*Первое правило Кирхгофа*

$$\sum_i I_i = 0, \tag{6.1}$$

сумма токов в любом узле цепи равна нулю.

*Второе правило Кирхгофа* для каждого из замкнутых контуров с квазистационарным током дает уравнение

$$\sum_k \sum_l L_{lk} \frac{dI_k}{dt} + \sum_i R_i I_i + \sum_s \frac{1}{C_s} \int_0^t I_s dt = \sum_j \varepsilon_j(t), \tag{6.2}$$

здесь индексы $k$, $i$, $s$, $j$ обозначают суммирование по соответствующим элементам выбранного замкнутого контура, а индекс $l$ подразумевает суммирование по индуктивным элементам всех контуров рассматриваемой цепи. В уравнении (6.2) соответствующие слагаемые называют:

$$U_{R_i} = R_i I_i \tag{6.3}$$

– *напряжением на активном сопротивлении* $R_i$;

$$U_{C_s} = \frac{Q_s}{C_s} = \frac{1}{C_s} \int_0^t I_{C_s} dt \tag{6.4}$$

– *напряжением на конденсаторе емкости* $C_s$, при этом $Q_s = \int_0^t I_s dt$ – заряд на одной из обкладок этого конденсатора в момент времени $t$ при условии, что этот заряд был равен нулю в момент $t = 0$, а $I_{C_s} = dQ_s / dt = C_s dU_{C_s} / dt$ – ток через конденсатор в момент $t$;

$$\varepsilon_{i\,k} = -\sum_l L_{lk} \frac{dI_l}{dt} \tag{6.5}$$

– *ЭДС электромагнитной индукции* в $k$-м индуктивном элементе контура, создаваемой током $I_l$, текущим в $l$-м элементе любого контура цепи (включая самоиндукцию $L_{kk}$ и взаимную индукцию $L_{lk}$ $l$-го и $k$-го элементов);

$$U_{L_k} = L_k \frac{dI_k}{dt} \tag{6.6}$$

– *напряжением на индуктивности* $L_k \equiv L_{kk}$*, связанным с самоиндукцией*; $\varepsilon_j(t)$ *– ЭДС j-го источника сторонних сил (источника тока), из действующих в контуре.*

Уравнения (6.2) для системы контуров эквивалентны *дифференциальным уравнениям второго порядка*

$$\sum_k \sum_l L_{lk} \frac{d^2 Q_k}{dt^2} + \sum_i R_i \frac{dQ_i}{dt} + \sum_s \frac{Q_s}{C_s} = \sum_j \varepsilon_j(t) \qquad (6.7)$$

*для зарядов*, протекающих по соответствующим ветвям контура, поскольку $I_i = dQ_i / dt$. Уравнения (6.7) математически эквивалентны ньютоновским уравнениям механики, описывающим систему связанных гармонических осцилляторов с трением, способных совершать вынужденные колебания. Они позволяют получить временные зависимости зарядов, токов и напряжений не только в режимах установившихся колебаний, но и в различных *переходных процессах*.

*Переходным процессом* в электрических цепях называется процесс перехода цепи из одного установившегося режима в другое. При *установившихся* (*стационарных*) режимах в цепях постоянного тока напряжения и токи неизменны во времени, а в цепях переменного тока они являются периодическими функциями времени. Переходные процессы возникают при любых изменениях режима электрической цепи, которые можно представить в виде различных *переключений*, называемых *коммутацией* (подключение, отключение и переключение элементов цепи, изменение нагрузки, источников и т. п.).

Если имеется всего один контур, в который последовательно включены сопротивление $R$, индуктивность $L$, емкость $C$ и источник тока с ЭДС $\varepsilon(t)$, то достаточно решить дифференциальное уравнение

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t), \qquad I = \frac{dQ}{dt} \qquad (6.8)$$

с соответствующими начальными (при $t = 0$) или асимптотическими (например, при $t \to \infty$) условиями, где $Q$ – заряд на одной из обкладок конденсатора. Это уравнение может описывать установившиеся свободные или вынужденные колебания заряда и тока, а также переходные процессы с затуханием или нарастанием. Например: а) при размыкании или б) замыкании цепи контура с большой индуктивностью $L$ (катушка соленоида) и сопротивлением $R$, в пренебрежении емкостью $C$, ток экспоненциально а) затухает $I = I_0 e^{-t/\tau_L}$ или б) нарастает $I = I_0(1 - e^{-t/\tau_L})$ за характерное время $\tau_L = L/R$, здесь $I_0 = \varepsilon / R$ – сила постоянного тока, возбуждаемая ЭДС $\varepsilon$. Аналогично: а) при разряде конденсатора через сопротивление или б) зарядке конденсатора от источника тока через сопротивление в цепи контура с большой емкостью $C$ (конденсатор) и сопротивлением $R$, в пренебрежении индуктивностью $L$, заряд конденсатора экспоненциально а) затухает $Q = Q_0 e^{-t/\tau_C}$ (ток в цепи тоже затухает $I = -I_0 e^{-t/\tau_C}$) или б) нарастает $Q = Q_0(1 - e^{-t/\tau_C})$ (ток в цепи тоже затухает $I = I_0 e^{-t/\tau_C}$) за характерное время $\tau_C = RC$, здесь $Q_0 = \varepsilon C$. Величины $\tau_L$ и $\tau_C$ иногда называют *временами релаксации*.

**Пример 6.1.** Конденсатор емкостью $C = 0{,}47$ мкФ включен последовательно в цепь с источником постоянной ЭДС $\varepsilon = 12$ В и сопротивлением $R = 1{,}0$ Ом, как показано на рис. 6.1. Определить $U_C$ и $I$ в моменты времени $t_1 = 1$ мкс, $I_2 = 2$ мкс после замыкания ключа.

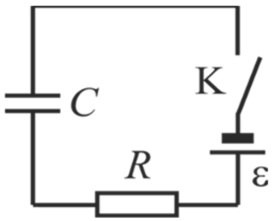


*Рис. 6.1.* К примеру 6.1

**Решение**

После замыкания ключа уравнение (6.8) с $L = 0$ имеет вид дифференциального уравнения первого порядка

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon,$$

где $Q$ – заряд на обкладках конденсатора. Разделяем переменные

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{Q - \varepsilon C}$$

и интегрируем с начальным условием $Q = 0$ при $t = 0$, получим

$$Q = Q_0(1 - e^{-t/\tau_C}),$$

где $\tau_C = RC$, $Q_0 = \varepsilon C$ – заряд на конденсаторе при $t \to \infty$. Сила тока в цепи

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau_C} e^{-t/\tau_C} = I_0 e^{-t/\tau_C},$$

где $I_0 = Q_0 / \tau_C = \varepsilon / R$. Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{Q}{C} = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau_C}).$$

Подставляя численные значения параметров, получаем $U_{C1} = 10{,}57$ В, $I_1 = 1{,}43$, при $t_1 = 1$ мкс и $U_{C2} = 11{,}8$ В и $I_2 = 0{,}17$ А при $t_2 = 1$ мкс.

**Ответ:** $U_{C1} = 10{,}57$ В, $I_1 = 1{,}43$, $U_{C2} = 11{,}8$ В и $I_2 = 0{,}17$ А.

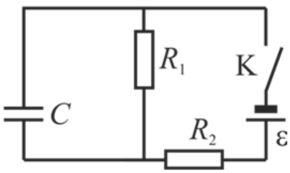


*Рис. 6.2.* К примеру 6.2

**Пример 6.2.** Определить временную зависимость заряда $Q$ на обкладках конденсатора емкости $C$ в схеме, представленной на рис. 6.2, после замыкания ключа К. Найти заряд $Q$ и напряжение $U_C$ в момент времени $t_1 = 1$ мкс. Принять, что $R_1 = R_2 = 1$ Ом, $C = 0{,}47$ мкФ, $\varepsilon = 1{,}5$ В.

**Решение**

После замыкания ключа цепь образует два замкнутых контура, для которых согласно правилам Кирхгофа составим систему уравнений

$$\begin{cases} I_2 = I_1 + I, \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon, \\ U_C - I_1 R_1 = 0, \end{cases}$$

где $I_1$ – сила тока через резистор $R_1$; $I_2$ – сила тока через резистор $R_2$; $I = dQ / dt = C dU_C / dt$ – сила тока через конденсатор $C$; $U_C = Q / C$ – напряжение на конденсаторе; $Q$ – заряд на обкладке конденсатора. Из последнего уравнения системы выражаем $I_1 =$

$= U_C / R_1$, тогда из первого уравнения системы $I_2 = I_1 + I = U_C / R_1 + $ $+ C dU_C / dt$. Подставляя эти выражения во второе уравнение системы, получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $U_C(t)$:

$$R_2 C \frac{dU_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_C = \varepsilon .$$

Разделяя переменные, имеем

$$-\left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right) dt = \frac{dU_C}{U_C - \varepsilon R_1 (R_1 + R_2)^{-1}} .$$

Интегрируя с начальным условием $U_C = 0$ при $t = 0$, получим

$$U_C = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + R_2}(1 - e^{-\alpha t}) = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + R_2}(1 - e^{-t/\tau}),$$

где $\alpha = \dfrac{1}{R_1 C} + \dfrac{1}{R_2 C} \equiv \dfrac{1}{\tau}$, тогда заряд на обкладках конденсатора равен $q = CU_C = \dfrac{\varepsilon R_1 C}{R_1 + R_2}(1 - e^{-\alpha t})$, см. рис. 6.3.

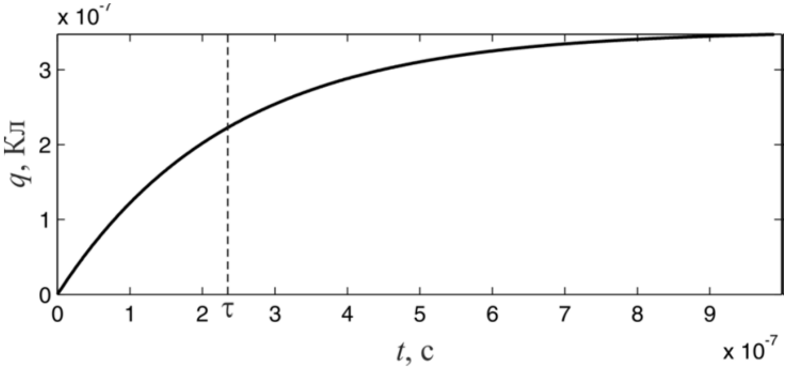



*Рис. 6.3.* К примеру 6.2

Подставляя численные значения, получаем для $t_1 = 1$ мкс: $U_C(t_1) = 0{,}74$ В, $q(t_1) = 0{,}35$ мкКл.

**Ответ:** $U_C(t_1) = 0{,}74$ В, $q(t_1) = 0{,}35$ мкКл.

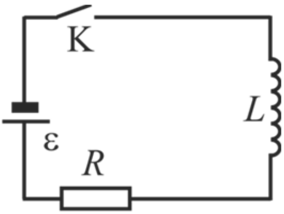


*Рис. 6.4.* К примеру 6.3

**Пример 6.3.** Сопротивление $R = 1$ Ом, катушка индуктивности $L = 0{,}25$ мГн и источник ЭДС $\varepsilon = 12$ В соединены последовательно (рис. 6.4). Определить напряжение на сопротивлении в момент $t_1 = 1$ мкс после замыкания ключа.

**Решение**

После замыкания ключа уравнение (6.8) без слагаемого с емкостью имеет вид дифференциального уравнения первого порядка

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon,$$

где $I$ – ток в контуре. Разделяем переменные

$$-\frac{R}{L}dt = \frac{dI}{I - \varepsilon / R}$$

и интегрируем с начальным условием $I = 0$ при $t = 0$, получим

$$I = I_0(1 - e^{-t/\tau_L}),$$

где $\tau_L = L/R$, здесь $I_0 = \varepsilon / R$ – сила постоянного тока, возбуждаемая ЭДС $\varepsilon$ при $t \to \infty$.

Напряжение на сопротивлении

$$U_R = RI = RI_0(1 - e^{-t/\tau_L}) = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau_C}).$$

Подставляя численные значения параметров, получаем для $t_1 = 1$ мкс: $U(t_1) = 0{,}048$ В.

**Ответ:** $U(t_1) = 0{,}048$ В.

**Пример 6.4.** В схеме (рис. 6.5) известны ЭДС источника постоянного тока $\varepsilon = 1{,}5$ В, сопротивление резистора $R = 1$ Ом и индуктивности катушек $L_1 = 0{,}25$ мГн и $L_2 = 0{,}5$ мГн. Внутреннее сопротивление источника и сопротивление катушек пренебрежимо малы. Найти установившиеся токи в катушках после замыкания ключа К.

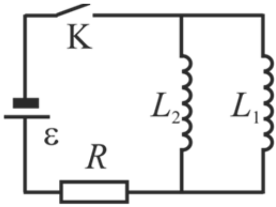



*Рис. 6.5.* К примеру 6.4

**Решение**

Согласно правилам Кирхгофа составим систему уравнений

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2, \\ L_2 \dfrac{dI_2}{dt} + IR = \varepsilon, \\ 0 = L_1 \dfrac{dI_1}{dt} - L_2 \dfrac{dI_2}{dt}, \end{cases} \tag{6.9}$$

где $I$ – сила тока в резисторе $R$; $I_1$ – сила тока в катушке индуктивности $L_1$; $I_2$ – сила тока в катушке индуктивности $L_2$.

Интегрируя последнее уравнение системы с начальными условиями $I_1 = 0,\ I_2 = 0$ при $t = 0$, получаем взаимную связь токов в катушках $I_1 = L_2 I_2 / L_1$, тогда из первого уравнения $I = I_1 + I_2 = I_2 + L_2 I_2 / L_1 = (1 + L_2 / L_1) I_2$, откуда

$$I_1 = I \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \qquad I_2 = I \frac{L_1}{L_1 + L_2} \tag{6.10}$$

Подставляя $I_2$ во второе уравнение, имеем

$$\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon .$$

Разделим переменные в этом дифференциальном уравнении:

$$-\left( \frac{R}{L_1} + \frac{R}{L_2} \right) dt = \frac{dI}{I - \varepsilon/R} .$$

Интегрируя с начальным условием $I=0$ при $t=0$, получим

$$I = I_0(1-e^{-t/\tau_L}),$$

где $\tau_L = \dfrac{R}{L_1}+\dfrac{R}{L_2}$; $I_0 = \varepsilon / R$ – сила постоянного тока в резисторе $R$, возбуждаемая ЭДС $\varepsilon$ при $t\to\infty$. Подставляя в (6.10), имеем

$$I_1 = \frac{L_2}{L_1+L_2} I_0(1-e^{-t/\tau_L}), \qquad I_2 = \frac{L_1}{L_1+L_2} I_0(1-e^{-t/\tau_L}).$$

Установившиеся токи найдем в пределе $t\to\infty$:

$$I_1(t=\infty) = \frac{\varepsilon L_2}{R(L_1+L_2)}, \qquad I_2(t=\infty) = \frac{\varepsilon L_1}{R(L_1+L_2)}.$$

Подставляя численные значения параметров, получаем $I_{1\infty}=1$ А, $I_{2\infty}=0{,}5$ А.

**Ответ:** $I_1(t=\infty)=1{,}0$ А, $I_2(t=\infty)=0{,}5$ А.

**Пример 6.5.** Конденсатор емкостью $C=0{,}47$ мкФ заряжается от источника постоянной ЭДС $\varepsilon=12$ В через последовательно соединенные с ним индуктивность $L=0{,}25$ мкГн и сопротивление $R$, причем $R^2=4L/C$. Определить, как изменяются со временем напряжение на конденсаторе $U_C$ и сила тока $I$. Вычислить $U_C$ и $I$ в момент времени $t=1$ мкс.

**Решение**

Согласно уравнению (6.8) и $Q=CU_C$ имеем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2U_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dU_C}{dt}+\frac{1}{LC}(U_C-\varepsilon)=0,$$

которое следует решить с начальными условиями $U_C=0$ (так как $Q=0$) и $dU_C/dt=0$ (так как $I=dQ/dt=0$) при $t=0$. Введем параметры $\beta=R/2L$ и $\omega_0^2=1/LC$, а также новую переменную $u=U_C-\varepsilon$, удовлетворяющую начальным условиям $u=-\varepsilon$ и $du/dt=0$ при $t=0$, и перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\beta\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0 .$$

Неколебательный режим реализуется при следующих условиях:

1) $\beta=\omega_0$: $u=(A+Bt)e^{-\beta t}$;

2) $\beta>\omega_0$: $u=Ae^{-\lambda_1 t}+Be^{-\lambda_2 t}$, $\lambda_{1,2}=\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$ .

В условиях задачи имеет место первый случай, так как $R^2=4L/C$. Постоянные интегрирования $A$ и $B$ находятся из начальных условий при $t=0$, которые дают систему линейных уравнений $-\varepsilon=A$ и $-\beta A+B=0$, откуда $A=-\varepsilon,\quad B=-\beta\varepsilon$ .

В итоге рассматриваемое решение имеет вид

$$U_C=\varepsilon(1-(1+\beta t)e^{-\beta t}),$$

$$I=CdU_C/dt=\varepsilon\beta^2te^{-\beta t} .$$

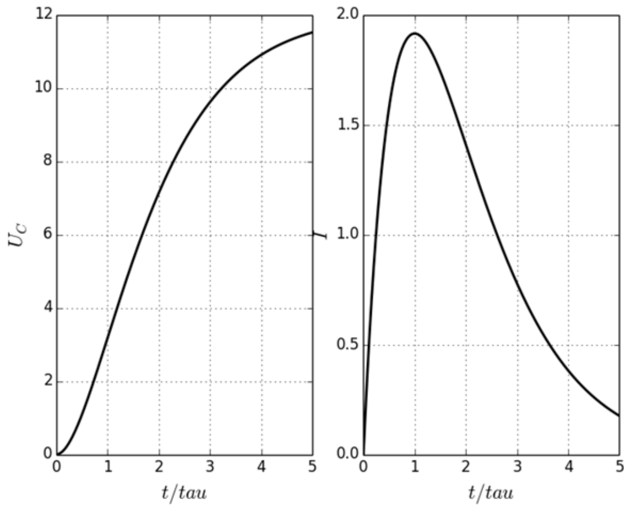



*Рис. 6.6.* К примеру 6.5

Подставляя численные значения, получаем $R = \sqrt{4L/C} = 4{,}613$ Ом, и для $t_1 = 1$ мкс находим: $U_C = 2{,}83$ В, $I = 1{,}91$ А.

*Примечание.* На рис. 6.6 изображены найденные функциональные зависимости. Ток (правая панель) достигает максимального значения в момент времени $t_m = \tau = 1/\beta$. В этом легко убедиться, приравнивая нулю производную тока по времени $dI/dt = 0$, что дает $\varepsilon\beta^2 e^{-\beta t} - \varepsilon\beta^3 t e^{-\beta t} = \varepsilon\beta^2(1-\beta t)e^{-\beta t} = 0$, откуда $1 - \beta t_m = 0$ и $t_m = 1/\beta$.

**Ответ:** $U_C = 2{,}83$ В, $I = 1{,}91$ А.

## Задачи для аудиторной работы

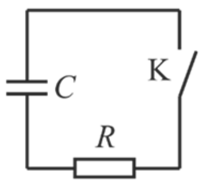



*Рис. 6.7.* К задаче А6.1

**А6.1.** Заряженный до напряжения $U_C = 12$ В конденсатор емкостью $C = 0{,}47$ мкФ соединен последовательно с сопротивлением $R = 2$ Ом, как показано на рис. 6.7.

Определить $U_C$ и $I$ в моменты времени $t_1 = 1$ мкс, $t_2 = 2$ мкс после замыкания ключа К.

**А6.2.** Найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе после замыкания ключа К (рис. 6.8). Сопротивления $R_1 = R_2 = 1$ Ом, емкость конденсатора $C = 0{,}47$ мкФ, ЭДС источника напряжения $\varepsilon = 1{,}5$ В. Найти силу тока, протекающего через сопротивление $R_2$, в моменты времени $t_1 = 1$ мкс, $t_2 = 2$ мкс.

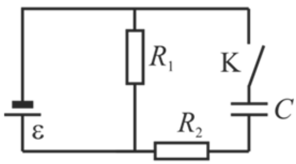



*Рис. 6.8.* К задаче А6.2

**А6.3.** Катушка с индуктивностью $L = 250$ мГн и сопротивлением $R = 0{,}3$ Ом подключается к источнику постоянного напряжения. Через какой промежуток времени сила тока в катушке достигнет: а) 50 %, б) 75 % установившегося значения? Сопоставьте оба значения промежутка времени.

**А6.4.** Электрическая лампочка, сопротивление которой в горячем состоянии $R = 10$ Ом, подключается через дроссель к 12-вольтовому аккумулятору. Индуктивность дросселя $L = 2$ Гн, а сопротивление $r = 1$ Ом. Через какое время $t$ после включения лампочка загорится, если она начинает заметно светиться при напряжении на ней $U = 6$ В?

**А6.5.** Найти закон изменения во времени тока, текущего через индуктивность после замыкания ключа К. Принять, что $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $L = 0,25$ мГн, $\varepsilon = 12$ В (рис. 6.9). Найти силу тока в моменты времени $t_1 = 1$ мкс и $t_2 = 2$ мкс.

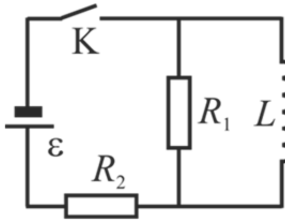



*Рис. 6.9.* К задаче А6.5

## Задание на дом

**В6.1.** В цепи (рис. 6.9) ключ К замкнули и через достаточно продолжительный промежуток времени разомкнули. Найти силу тока $I_L$, протекающего через катушку индуктивности, в моменты времени $t_1 = 1$ мс и $t_2 = 2$ мс. Принять, что $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $L = 0,5$ мГн, $\varepsilon = 12$ В.

**В6.2.** Источник тока замкнули на катушку индуктивностью 1 Гн и сопротивлением 10 Ом. Через какое время сила тока замыкания достигнет 0,9 предельного значения?

**В6.3.** Цепь состоит из сопротивления 10 Ом и катушки индуктивностью 1 Гн. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Через какое время сила тока уменьшится до 0,001 начального значения?

**В6.4.** К источнику тока с внутренним сопротивлением 1 Ом подключают катушку индуктивностью 0,5 Гн и сопротивлением 8 Ом. Через какое время сила тока в катушке индуктивности достигнет значения, отличающегося на 1 % от максимального значения?

**В6.5.** В цепи (рис. 6.9) резисторы $R_1 = 95$ Ом, $R_2 = 0,001$ Ом, катушка с индуктивностью $L = 0,5$ Гн и сопротивлением 5 Ом, $\varepsilon = 12$ В. Определить силу тока $I_1$, протекающего через резистор $R_1$, в следующих случаях: 1) до размыкания цепи ключом К; 2) через время $t = 0,05$ с после размыкания.

# ПРАКТИКУМ 7

# КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

*Гармонические электрические колебания* в *идеальном колебательном LC-контуре* – колебания заряда на конденсаторе, тока и напряжения, при которых эти величины изменяются со временем по гармоническому закону

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \alpha)\,, \tag{7.1}$$

$$I \equiv dQ/dt \equiv \dot{Q} = -I_m \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad I_m = \omega_0 Q_m\,, \tag{7.2}$$

$$U_C = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad U_m = Q_m / C\,. \tag{7.3}$$

*Частота колебаний*

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,, \qquad \nu_0 = \frac{1}{T_0}\,, \tag{7.4}$$

где $L$ – индуктивность катушки; $C$ – электроемкость конденсатора.

*Формула Томсона*

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}\,. \tag{7.5}$$

*Энергия электрического поля в конденсаторе*

$$W_Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \alpha)\,. \tag{7.6}$$

*Энергия магнитного поля в катушке*

$$W_I = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha), \tag{7.7}$$

причем полная энергия $W = W_Q + W_I$ равна

$$W = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}. \tag{7.8}$$

*Колебательный контур с сопротивлением* $R$ описывается дифференциальным уравнением

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0, \text{ или } \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0. \tag{7.9}$$

Вводя параметры $\beta = R/2L$ и $\omega_0^2 = 1/LC$, записываем (7.9) в виде

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0. \tag{7.10}$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

1) при $\omega_0 > \beta$ (т. е. при $R^2 < 4L/C$) *в колебательном режиме с экспоненциальным затуханием амплитуды*

$$Q = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha) = A(t)\cos(\omega t + \alpha), \quad A(t) = Ae^{-\beta t}; \tag{7.11}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}; \tag{7.12}$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = U_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha); \tag{7.13}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = Ae^{-\beta t}\omega_0\left(\frac{-\beta}{\omega_0}\cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega t + \alpha)\right); \tag{7.14}$$

2) при $\beta > \omega_0$ (т. е. при $R^2 > 4L / C$) *в неколебательном экспоненциальном режиме затухания*

$$Q = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\,; \tag{7.15}$$

3) при $\beta = \omega_0$ (т. е. при $R^2 = 4L / C$) *в особом промежуточном неколебательном режиме затухания*

$$Q = (A + Bt)e^{-\beta t}, \tag{7.16}$$

где $A$ и $B$ – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями.

*Логарифмический декремент затухания* колебательного контура

$$\tilde{\lambda} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{R\pi}{L\omega}. \tag{7.17}$$

*Добротность системы* характеризует темп релаксации (затухания) колебаний тока в колебательном контуре и определяется как произведение $2\pi$ на отношение энергии, запасенной системой в момент времени $t$ к убыли этой энергии за период колебания:

$$\Theta = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}, \tag{7.18}$$

где $W(t) = \dfrac{Q^2(t)}{2C} + \dfrac{LJ^2(t)}{2}$ – энергия.

При слабом затухании $\beta \ll \omega_0$ имеем $W(t) \approx \dfrac{A^2}{2C} e^{-2\beta t}$ и

$$\Theta = \frac{\pi}{\tilde{\lambda}} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{L\omega_0}{R}. \tag{7.19}$$

**Пример 7.1.** Конденсатор электроемкостью $C = 500$ пФ соединен параллельно с катушкой длиной $l = 0,4$ м и площадью сечением $S = 5$ см$^2$. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Сердечник катушки немагнитный. Определить период колебаний.

**Решение**

Период колебаний заряда (тока) в $LC$-контуре определяется формулой Томсона $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, индуктивность катушки равна $L = \mu_0 N^2 S / l = 1,57 \cdot 10^{-3}$ Гн (см. (5.3)). Подставим численные значения величин в формулу Томсона, получим $T_0 = 5,568 \cdot 10^{-6} \approx 5,6 \cdot 10^{-6}$ с.

**Ответ:** $T_0 \approx 5,6$ мкс.

**Пример 7.2.** Ток в колебательном контуре зависит от времени по закону $I = I_m \sin\omega_0 t$, где $I_m = 9,0$ мА, $\omega_0 = 4,5 \cdot 10^4$ с$^{-1}$. Электроемкость конденсатора равна $C = 0,47$ мкФ. Найти индуктивность контура и напряжение на конденсаторе в момент времени $t = 0$.

**Решение**

Из формулы Томсона $\omega_0 = 1\big/\sqrt{LC}$ следует, что $L = 1\big/C\omega_0^2$, а из второго правила Кирхгофа для $LC$-контура $U_C = LdI / dt$, таким образом, $U_C = L\omega_0 I_m \cos\omega_0 t$. Подставляя численные значения параметров, получаем $L = 1,05 \cdot 10^{-3}$ Гн и $U_C = L\omega_0 I_m = 0,42$ В при $t = 0$.

**Ответ:** $L = 1,05 \cdot 10^{-3}$ Гн, $U_C(t = 0) = 0,42$ В.

**Пример 7.3.** В контуре (рис. 7.1) левый конденсатор был заряжен до напряжения $U_0 = 9$ В, правый конденсатор не заряжен. В момент $t = 0$ замкнули ключ. Выписать формулы, выражающие зависимость напряжения на конденсаторах от времени. Электроемкости конденсаторов равны $C_1 = C_2 = 0,047$ мкФ, индуктивность катушки $L = 1$ мГн. Построить графики осцилляций заряда на $C_1$, $C_2$ и тока $I$.

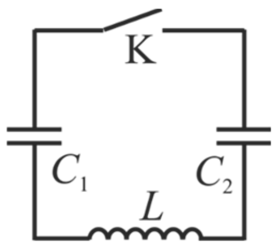


*Рис. 7.1*. К примеру 7.3

**Решение**

В начальный момент времени левый конденсатор заряжен до напряжения $U_0$, тогда электрический заряд на его обкладке равен $Q_0 = CU_0$. При замыкании ключа заряд начнет перетекать из левого конденсатора в правый, заряды на соединенных обкладках имеют одинаковый знак, т. е. напряжения на емкостях имеют противоположный знак, процесс описывается уравнением Кирхгофа, $U_{C1} + U_L - U_{C2} = 0$, где $U_{C1} = Q_1 / C$, $U_{C2} = Q_2 / C$ и $U_L = LdI / dt$, знак «минус» учитывает, что направление обхода контура противоположно направлению электрического поля в правом конденсаторе. Учитывая, что $Q_1 + Q_2 = Q_0$ и обозначая $Q_1 = Q$, $Q_2 = Q_0 - Q$, так что $I = dQ / dt$, придаем уравнению Кирхгофа вид

$$\frac{2Q - Q_0}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0, \text{ или } \frac{d^2\tilde{Q}}{dt^2} + \tilde{\omega}_0^2\tilde{Q} = 0,$$

где $\tilde{Q} = Q - Q_0 / 2$ и $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{2 / LC}$. Решением этого уравнения является гармоническая функция $\tilde{Q} = A\cos(\tilde{\omega}_0 t + \alpha)$. Амплитуду $A$ и начальную фазу $\alpha$ определим из начальных условий при $t = 0$: $\tilde{Q}(t = 0) = Q_0 - Q_0 / 2 = A\cos\alpha$ и $I(t = 0) = -\omega_0 A\sin\alpha = 0$. Из последнего выражения следует, что $\alpha = 0$, тогда $A = Q_0 / 2$. Окончательно получаем, что заряд и напряжение на левом конденсаторе изменяются со временем, как $Q_1 = \dfrac{Q_0}{2}(1 + \cos\tilde{\omega}_0 t)$ и $U_1 = \dfrac{U_0}{2}(1 + \cos\tilde{\omega}_0 t)$. Аналогично, заряд и напряжение на правом конденсаторе изменяются как $Q_2 = \dfrac{Q_0}{2}(1 - \cos\tilde{\omega}_0 t)$ и $U_2 = \dfrac{U_0}{2}(1 - \cos\tilde{\omega}_0 t)$. Подставляя значения заданных параметров, найдем $\tilde{\omega}_0 = 6{,}5 \cdot 10^4$ с$^{-1}$; $U_{1,2} = \dfrac{U_0}{2}(1 \pm \cos\omega_0 t)$.

Эти результаты соответствуют тому, что два последовательно соединенных одинаковых конденсатора образуют конденсатор с емкостью $C_{\text{eff}} = C / 2$. На рис. 7.2 представлены графики осцилляций заряда на конденсаторах и тока.

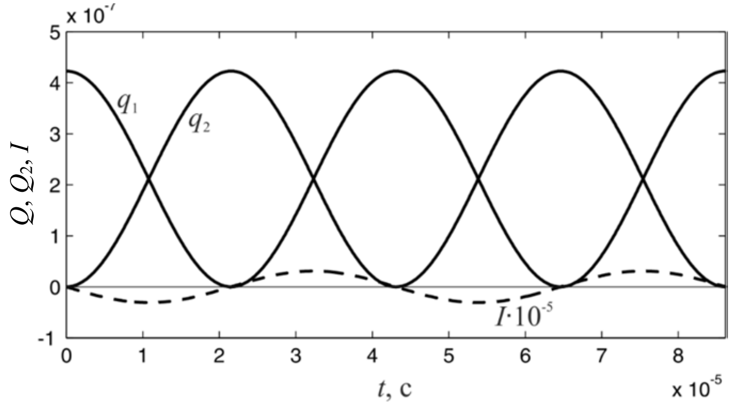



*Рис. 7.2.* Осцилляции электрического заряда и тока

Как видно из рис. 7.2, сумма зарядов $Q_1 + Q_2 = Q_0$. Это отражает закон сохранения электрического заряда. Сила тока в цепи равна нулю в моменты времени, когда достигаются экстремальные значения зарядов на конденсаторах.

**Ответ:** 1) $\tilde{\omega}_0 = 6{,}5 \cdot 10^4$ с$^{-1}$; 2) $U_{1,2} = \dfrac{U_0}{2}(1 \pm \cos\tilde{\omega}_0 t)$.

**Пример 7.4.** Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 20$ мкГн и конденсатора с электроемкостью $\overline{C} = 80$ нФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на 2 %. Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны, на которой резонирует контур.

**Решение**

Длина резонансно поглощаемой или излучаемой электромагнитной волны связана с частотой колебаний колебательного контура выражением

$$\lambda = cT = 2\pi c / \omega_0,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

Циклическая частота колебательного $LC$ контура равна $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Величина емкости конденсатора известна с относительной погрешностью $\delta C = \Delta C / \overline{C} = 0,02 \ll 1$, и с абсолютной погрешностью $\Delta C = \overline{C}\delta C$, т. е. $C = \overline{C} \pm \Delta C$. Таким образом, длина волны $\lambda = 2\pi c\sqrt{L(\overline{C} \pm \Delta C)} = 2\pi c\sqrt{L\overline{C}}\sqrt{1 \pm \Delta C / \overline{C}} \approx 2\pi c\sqrt{L\overline{C}}\left(1 \pm \Delta C / 2\overline{C}\right)$ лежит в диапазоне от $\overline{\lambda} - \Delta\lambda$ до $\overline{\lambda} + \Delta\lambda$, где $\overline{\lambda} = 2\pi c\sqrt{L\overline{C}} = 2384$ м, а $\Delta\lambda = \pi c\sqrt{L\overline{C}}\Delta C / \overline{C} = 23,84$ м.

**Ответ:** $\overline{\lambda} = 2384$ м и $\Delta\lambda = 23,84$ м.

**Пример 7.5.** Ток в идеальном колебательном контуре зависит от времени как $I = -I_m \sin\omega_0 t$, где $I_m = 20$ мА, $\omega_0 = 400\pi$ с$^{-1}$. Индуктивность контура равна $L = 1$ Гн. Найти период колебаний, электроемкость конденсатора и максимальные энергии магнитного и электрического поля.

**Решение**

Из формулы Томсона $T_0 = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ следует, что $C = 1\big/L\omega_0^2$, а из формул (7.6)–(7.8), что

$$W_{Q\max} = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = W_{I\max}.$$

Подставляем численные значения величин, получаем $T_0 = 5$ мс, $C = 6,33$ мкФ, $W_{Q\max} = W_{I\max} = 0,2$ мДж.

**Ответ:** $T_0 = 5$ мс, $C = 6,33$ мкФ, $W_{Q\max} = W_{I\max} = 0,2$ мДж.

**Пример 7.6.** Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 2,22$ нФ и катушку длиной $l = 0,2$ м из медной проволоки диаметром $d = 0,5$ мм. Найти логарифмический декремент затухания.

**Решение**

Пусть намотка катушки произведена плотно виток к витку в один слой. Считаем, что затухание слабое, т. е. $\beta \ll \omega_0$ и $\omega \approx \omega_0$. Расчет логарифмического декремента затухания выполним по формуле (7.17):

$$\tilde{\lambda} = \pi R / L\omega_0 = \pi R\sqrt{C / L}, \tag{7.20}$$

где $R = \rho l_1 / S_1$ – омическое сопротивление катушки; $l_1 = N\pi D$ – длина провода; $D$ – диаметр поперечного сечения катушки; $N = l / d$ – число витков плотной намотки; $S_1 = \pi d^2 / 4$ – площадь поперечного сечения медного провода; $\rho = 0{,}017$ мкОм · м – удельное сопротивление меди, тогда $R = 4\rho l D / d^3$ .

Индуктивность катушки равна $L = \mu_0 n^2 S l$, где $n = N / l = 1 / d$, $S = \pi D^2 / 4$ – площадь сечения катушки, т. е. $L = \mu_0 \pi D^2 l / 4d^2$ . Подставляя данные задачи в формулу (7.20), выразим логарифмический декремент затухания: $\tilde{\lambda} = \pi R\sqrt{C / L} = 8\pi\rho\sqrt{C / \mu_0 \pi l} / d^2 \approx 0{,}018$ .

**Ответ:** $\lambda \approx 0{,}018$ .

## Задачи для аудиторной работы

**А7.1.** Катушка индуктивностью $L = 1$ мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром $D = 20$ см каждая, соединены параллельно. Расстояние между пластинами равно $d = 1$ см. Определить период колебаний заряда и тока в контуре.

**А7.2.** Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}5$ мГн и конденсатора электроемкостью $C = 8$ пФ. Каково максимальное напряжение на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока $I_m = 40$ мА?

**А7.3.** В колебательном контуре (рис. 7.3) индуктивность катушки равна 2,5 мГн, а электроемкости конденсаторов $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ (рис. 7.3).

Конденсаторы зарядили до напряжения 180 В и замкнули ключ К. Определить: 1) частоту собственных колебаний; 2) амплитудное значение тока через катушку.

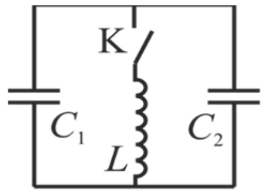


*Рис. 7.3.* К примеру А7.3

**А7.4.** На какую длину и частоту электромагнитной волны будет резонировать контур, состоящий из катушки индуктивностью $L = 4$ мкГн и конденсатора электроемкостью $C = 1{,}11$ нФ ?

**А7.5.** В LC-контуре $Q = Q_m = 10^{-3}$ Кл и $I = 0$ при $t = 0$ . Через какую долю периода от начального момента $t = 0$ энергия впервые распределится поровну между катушкой и конденсатором? Каким в этот момент будет заряд конденсатора?

**А7.6.** Катушка индуктивностью $L = 5{,}07$ мГн и воздушный конденсатор электроемкостью $C = 0{,}2$ мкФ соединены параллельно. При каком сопротивлении $R$ и логарифмическом декременте затухания разность потенциалов на обкладках конденсатора уменьшится в три раза за одну миллисекунду?

## Задание на дом

**В7.1.** Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора электроемкостью 1 мкФ и катушки индуктивности 1 мГн. Сопротивление контура ничтожно мало. Найти частоту колебаний.

**В7.2.** Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора электроемкостью 0,04 мкФ и катушки индуктивности 1,6 мГн. Сопротивление контура ничтожно мало. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора равно 200 В. Определить максимальную силу тока в контуре.

**В7.3.** Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора электроемкостью $C$ = 10 нФ и катушки индуктивностью $L$ = 0,5 мГн. Сопротивление контура ничтожно мало. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны $\lambda = 300$ м?

**В7.4.** Колебательный контур состоит из конденсатора электроемкостью $C = 0{,}47$ мкФ, катушки индуктивности $L = 1$ мГн с пренебрежимо малым сопротивлением и ключа. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения $U_m = 10$ В и затем в момент времени $t = 0$ замкнули ключ. Найти: 1) ток в контуре как функцию времени; 2) ЭДС самоиндукции в катушке в моменты, когда электрическая энергия конденсатора равна энергии тока в катушке.

**В7.5.** Найти отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $T/6$.

**В7.6.** Колебательный контур состоит из конденсатора электроемкостью $C = 1{,}1$ нФ, катушки индуктивности $L = 5$ мГн. Логарифмический декремент затухания равен $\lambda = 0{,}005$. За какое время вследствие затухания потеряется 99 % энергии?

**В7.7.** Определить активное сопротивление колебательного контура, индуктивность которого $L = 1$ Гн, если через $t = 0{,}1$ с амплитудное значение разности потенциалов на обкладках конденсатора уменьшилось в $n = 4$ раза.

# ПРАКТИКУМ 8

# ГАРМОНИЧЕСКИЙ ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ РЕЗОНАНС ТОКОВ, РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

Если в цепи действует ЭДС*, которая изменяется со временем по гармоническому закону с частотой* $\omega$, то такая ЭДС по аналогии с уравнениями (6.2), (6.7) или (6.8), соответствующими уравнениям механики, играет роль гармонической внешней вынуждающей силы для токов, текущих в ветвях контуров цепи. По аналогии с результатом решения механической задачи о вынужденных колебаниях гармонических осцилляторов можно утверждать, что при этом *токи, заряды и напряжения* на элементах цепи *тоже изменяются по гармоническому закону с той же частотой* $\omega$. Это справедливо для моментов времени $t \gg \tau$ после включения ЭДС, где $\tau$ – максимальное из времен релаксации в цепи, когда переходные процессы в цепи закончились и релаксационные токи затухли, а остались только установившиеся стационарные гармонические колебания тока – *гармонические переменные токи*.

Временная зависимость (зарядов $Q_n$, токов $I_n$ и напряжений $U_n$ на элементах цепи) описывается гармоническими функциями

$$X_n = A_n(\omega)\cos(\omega t + \alpha_n(\omega)), \tag{8.1}$$

где $X_n = Q_n, I_n, U_n, ...$ При этом *амплитуды* $A_n(\omega)$ и *фазы* $\alpha_n(\omega)$ зависят от частоты. Чтобы рассчитать эти зависимости, удобно использовать *метод комплексных амплитуд*, основанный на формуле Эйлера

$$\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha, \tag{8.2}$$

где $i^2 = -1$, когда (8.1) находят из

$$X_n = \mathrm{Re}\{\tilde{X}_n\}, \tag{8.3}$$

а комплексные величины $\tilde{X}_n = \tilde{A}_n e^{i\omega t}$, где $\tilde{A}_n = A_n(\omega)e^{i\alpha_n(\omega)}$ – комплексные амплитуды, рассчитывают по *методу векторных диаграмм*. Амплитуды $A_n(\omega)$ пропорциональны амплитуде внешней гармонической ЭДС.

*Закон Ома* для комплексных элементов цепи

$$\tilde{U} = Z\tilde{I}, \tag{8.4}$$

где $\tilde{U}$, $\tilde{I}$, $Z$ – комплексные напряжение, ток, сопротивление на участке цепи соответственно.

*Активное сопротивление резистора*

$$Z = R, \tag{8.5}$$

$$\tilde{U}_R = R\tilde{I}, \tag{8.6}$$

напряжение на сопротивлении $R$ синфазно с током.

*Реактивное емкостное сопротивление*

$$Z = X_C = 1/i\omega C = -iR_C, \quad R_C = 1/\omega C; \tag{8.7}$$

$$\tilde{U}_C = (1/i\omega C)\tilde{I} = R_C e^{-i\pi/2}\tilde{I}, \tag{8.8}$$

напряжение на конденсаторе $C$ отстает по фазе на $\pi/2$ от тока.

*Реактивное индуктивное сопротивление*

$$Z = X_L = i\omega L = iR_L, \quad R_L = \omega L; \tag{8.9}$$

$$\tilde{U}_L = (i\omega L)\tilde{I} = (\omega L)e^{i\pi/2}\tilde{I}, \tag{8.10}$$

напряжение на индуктивности $L$ опережает по фазе на $\pi/2$ ток.

*Мощность* $P$ на участке электрической цепи переменного тока

$$P = UI = \mathrm{Re}(\tilde{U}\tilde{I}^*)/2 = \mathrm{Re}(\tilde{U}^*\tilde{I})/2. \tag{8.11}$$

*Средняя по периоду мощность* на участке цепи переменного тока

$$\langle P\rangle \equiv P_e = \langle UI\rangle = U_e I_e \cos\varphi, \tag{8.12}$$

где $U_e = U_m/\sqrt{2}$ – *действующее* (*эффективное*) *значение напряжения*, $I_e = I_m/\sqrt{2}$ – *действующее* (*эффективное*) *значение тока* на элементе цепи, $U_m$, $I_m$ – *амплитуды напряжения и тока* соответственно, $\varphi$ – *разность фаз* между колебаниями напряжения $\tilde{U}$ и тока $\tilde{I}$.

*Для электрической цепи с одним источником гармонической* ЭДС, характеризуемой *комплексной* ЭДС $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_m e^{i\omega t}$, $\tilde{\varepsilon}_m = \varepsilon_m e^{i\alpha_\varepsilon}$, $\varepsilon_m = |\tilde{\varepsilon}|$ (ЭДС внешнего источника переменного тока) можно использовать *аналог закона Ома* для замкнутой цепи в виде

$$\tilde{\varepsilon} = Z\tilde{I}, \tag{8.13}$$

где $Z = |Z|e^{i\varphi} = X + iY$ – *полное комплексное сопротивление* (*импеданс*) *цепи*, $X = \operatorname{Re} Z$ – активное сопротивление, $Y = \operatorname{Im} Z$ – реактивное сопротивление цепи.

*Разность фаз* $\varphi$ между колебаниями ЭДС $\tilde{\varepsilon}$ и тока $\tilde{I}$ равна

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Im} Z / \operatorname{Re} Z = Y/X. \tag{8.14}$$

Если в цепи переменного тока действует несколько гармонических источников ЭДС (источников переменного тока) одной частоты, то для одного из них фаза $\alpha_\varepsilon$ обычно принимается равной нулю.

Если имеется всего *один контур, в который последовательно включены сопротивление $R$, индуктивность $L$, емкость $C$ и источник тока с ЭДС* $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos\omega t$, то дифференциальное уравнение (6.8) принимает вид

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_m \cos\omega t, \qquad I = \frac{dQ}{dt}, \tag{8.15}$$

или

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{\varepsilon_m}{L}\cos\omega t, \tag{8.16}$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – *частота собственных колебаний* в идеальном колебательном контуре, а $\beta = R/2L$ – *коэффициент затухания свободных* *колебаний*. Последние уравнения эквивалентны (8.13), в котором $\tilde{Z} = R + i(R_L - R_C)$. Отсюда следует, что вынужденные колебания тока происходят по закону

$$I = I_m(\omega)\cos(\omega t - \varphi). \tag{8.17}$$

*Амплитуда вынужденных колебаний тока* $I_m(\omega) = \varepsilon_m / |Z|$ (рис. 8.1, *а*),

$$|Z| = \frac{L}{\omega}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\beta\omega)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2},$$

$$I_m(\omega) = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}. \tag{8.18}$$

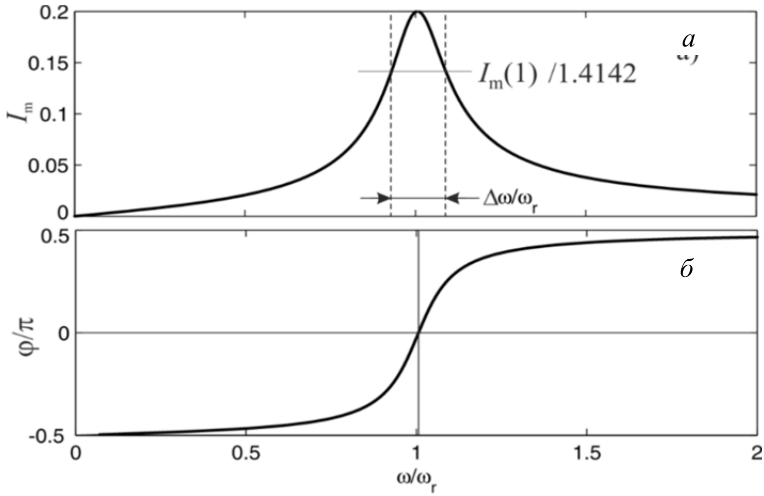



*Рис. 8.1*. Частотная зависимость амплитуды тока (ширину резонанса $\Delta\omega$ принято определять на уровне амплитуды тока $I_m(\omega) = I_m(\omega_r)/\sqrt{2} = I_m(\omega_r)/1,4142$ и при малом затухании $\beta \ll \omega_r$ она равна $\Delta\omega = 2\beta$) (*а*); частотная зависимость разности фаз между током и напряжением (*б*)

*Разность фаз между током и напряжением* (рис. 8.1, *б*)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega} = \frac{R_L - R_C}{R} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \qquad (8.19)$$

*Резонансная частота вынужденных колебаний*

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \qquad (8.20)$$

*Резонансная амплитуда вынужденных колебаний тока*

$$I_m(\omega_r) = \frac{\omega\varepsilon_m}{2\beta L\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{\varepsilon_m}{2\beta L} = \frac{\varepsilon_m}{R}. \qquad (8.21)$$

**Пример 8.1.** К сети с действующим напряжением $U_e = 100$ В подключили катушку, индуктивное сопротивление которой $R_L = 30$ Ом и модуль импеданса $|Z| = 50$ Ом. Найти разность фаз $\varphi$ между током и напряжением (рис. 8.2), а также мощность, выделяемую в катушке.

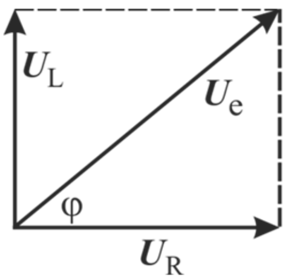



*Рис. 8.2.* К примеру 8.1

**Решение**

Разность фаз между током $I_e$ и напряжением $U_e$ (внешнее ЭДС) найдем из (8.14) или (8.19) с учетом того, что

$$|Z| = \sqrt{R^2 + R_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = R_L / R = \omega L / R,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(R_L / \sqrt{|Z|^2 - R_L^2}\right) = \operatorname{arctg}(30/40) = 36{,}9^\circ \approx 37^\circ.$$

Мощность тока согласно (8.13) равна

$$P_e = U_e I_e \cos\varphi = \frac{U_e^2}{|Z|}\cos\varphi = \frac{U_e^2}{|Z|^2} R = 160 \text{ Вт}.$$

На рис. 8.2 изображена векторная диаграмма системы. Ток $I$ и напряжение $U_R$ на активном сопротивлении синфазны и соответствующие векторы направлены вдоль оси абсцисс, напряжение на катушке индуктивности опережает ток на 90°, следовательно, вектор $\boldsymbol{U}_L$ направлен вверх по оси ординат. Угол между током и напряжением $\varphi$ определяется через тангенс $\operatorname{tg}\varphi = U_L / U_R = X_L / R$.

**Ответ:** $\varphi \approx 37°$, $P_e = 160$ Вт.

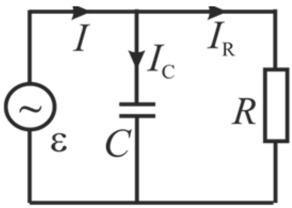



*Рис. 8.3.* К примеру 8.2

**Пример 8.2.** Конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ и резистор с сопротивлением $R = 3$ кОм соединены параллельно и подключены к сети переменного тока частотой 50 Гц. Найти полное сопротивление $|Z|$ цепи и разность фаз $\varphi$ между током и напряжением на входе (рис. 8.3).

**Решение**

Напряжение в сети $\tilde{U} = \tilde{U}_m e^{i\omega t}$, $\tilde{U}_m = U_0 e^{i\alpha_\varepsilon}$ удобно характеризовать нулевой начальной фазой $\alpha_\varepsilon = 0$. Согласно первому правилу Кирхгофа для параллельно соединенных конденсатора и резистора $\tilde{I} = \tilde{I}_R + \tilde{I}_C$, где $\tilde{I}$ – ток на входе схемы; $\tilde{I}_R = \varepsilon_0 / R$, $\tilde{I}_C = \varepsilon_0 / X_C = -i\omega C\varepsilon_0 = \omega C\varepsilon_0 e^{-i\pi/2}$. По определению (8.4) $\tilde{U} = Z\tilde{I}$, т. е. $1/Z = 1/R + 1/X_C = 1/R - i\omega C$ и $Z = (1/R - i\omega C)^{-1}$. Тогда сдвиг фаз между напряжением и током на входе, согласно (8.19), определяется как $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Im} Z / \operatorname{Re} Z = -1/\omega CR$, откуда $\varphi = -\operatorname{arctg}(1/\omega CR) = -0{,}756$ рад $= -43{,}3°$, а $|Z| = 1 \big/ \sqrt{R^{-2} + (\omega C)^2} = 2{,}138$ кОм.

**Ответ:** $\varphi = -0{,}756$ рад $= -43.3°$; $|Z| = 2{,}138$ кОм.

**Пример 8.3.** В цепь переменного тока с действующим напряжением $U_e = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно емкость $C = 35{,}4$ мкФ, сопротивление $R = 100$ Ом и индуктивность $L = 0{,}7$ Гн. Найти действующее значение тока $I_e$ в цепи и действующие значения напряжений $U_C$, $U_R$ и $U_L$ на емкости, сопротивлении и индуктивности.

**Решение**

Согласно формуле (8.4) действующие значения тока и напряжения на входе цепи связаны соотношениям $U_e = |Z| I_e$, где $|Z| = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$, $R_L = \omega L$, $R_C = 1/\omega C$. Откуда $I_e = U_e / |Z| =$ $= 220 / \sqrt{100^2 + (220 - 90)^2} \approx 1{,}34$ А. Действующие значения напряжений $U_R = I_e R = 134$ В, $U_C = I_e R_C = 121$ В, $U_L = I_e R_L = 295$ В.

**Ответ:** $I_e = 1{,}34$ А, $U_R = 134$ В, $U_C = 121$ В, $U_L = 295$ В.

**Пример 8.4.** Найти добротность колебательного контура с емкостью $C = 2$ мкФ и индуктивностью $L = 5$ мГн, если на поддержание в нем незатухающих колебаний с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_{Cm} = 10$ В необходимо подводить среднюю мощность $\langle P \rangle$ мВт. Затухание колебаний в контуре достаточно мало.

**Решение**

Добротность колебательного контура при малом затухании можно вычислить по формуле (7.19)

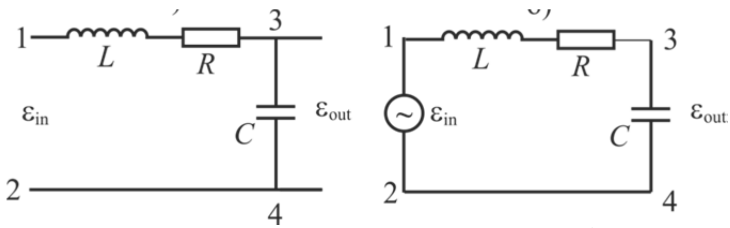
$$\Theta = \frac{L\omega_0}{R},$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а сопротивление контура $R$ найдем из условия, что вся подводимая извне в единицу времени энергия компенсирует ее тепловые потери на этом активном сопротивлении, т. е. $\langle P \rangle = \left\langle I^2 R \right\rangle$.

По определению среднего значения $\langle P \rangle = \left\langle I^2 R \right\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I^2 R dt$, где $I = I_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$, или $\langle P \rangle = R I_m^2 \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sin^2(\omega_0 t + \alpha) dt = \frac{1}{2} R I_m^2$. Сила тока $I = dQ/dt = C dU_C / dt$, где $Q$ – заряд на конденсаторе, а $U_C$ – напряжение на конденсаторе $U_C = \frac{1}{C}\int I dt = -U_{Cm}\cos(\omega_0 t + \alpha)$, т. е. $I_m = \omega_0 C U_{Cm} = U_{Cm}\sqrt{C/L}$. Таким образом, $\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} U_{Cm}^2 RC/L$, откуда $R = 2\langle P\rangle L / CU_{Cm}^2$, и добротность контура есть $\Theta = \dfrac{\omega_0 L}{R} = \sqrt{\dfrac{C}{L}}\dfrac{U_{Cm}^2}{2\langle P\rangle} = 2\cdot 10^4$.

**Ответ:** $\Theta \approx 2\cdot 10^4$.

**Пример 8.5.** В резонансном контуре во входной цепи телевизионного приемника, показанном на рис. 8.4, емкость $C = 0{,}567$ пФ, индуктивность $L = 1{,}26$ мкГн, активное сопротивление $R = 20$ Ом. Амплитуда входного сигнала с антенны равна $\varepsilon_{\text{in}} = 100$ мкВ. Выходной сигнал образуется напряжением и током на конденсаторе. Найти амплитуды выходных напряжений $\varepsilon_{m\,\text{out}} = U_{Cm}$ девятого и десятого каналов при частотах $\nu_9 = 188$ МГц и $\nu_{10} = 194$ МГц. Показать, что резонансный контур настроен на частоту девятого канала. Определить добротность контура.




*а* *б*

*Рис. 8.4.* Входной контур приемника телевизионного сигнала (*а*); одноконтурная эквивалентная схема (*б*)

**Решение**

С помощью формулы (8.18)

$$I_m(\omega) = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}$$

построим график частотной зависимости колебаний амплитуды тока во входном колебательном контуре (рис. 8.5, *а*), а с помощью формулы (8.8) $U_{Cm} = (1/\omega C) I_m(\omega)$ – график частотной зависимости колебаний амплитуды напряжения на конденсаторе (рис. 8.5, *б*). Резонансная частота входного контура согласно формуле (8.20) равна

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = 1{,}18 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1},$$

где $\omega = 2\pi\nu$, т. е. $\nu = \omega / 2\pi = 188$ МГц $= \nu_9$. Из этой оценки и графиков, изображенных на рис. 8.5, видно, что входная цепь телевизионного приемника настроена на девятый канал.

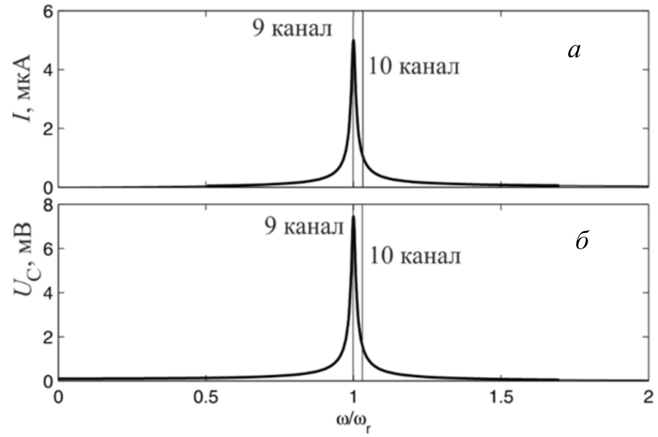



*Рис. 8.5*. Резонансная характеристика входного тракта телевизионного приемника:

*а* – тока; *б* – выходного напряжения

Добротность контура найдем из формулы (7.19)

$$Q \approx \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 74{,}6 .$$

Для пикового значения тока (8.21) имеем $I_m(\omega_r) \approx \varepsilon_m / R = 5$ мкА, а амплитудное значение выходного напряжения на конденсаторе $U_{Cm,9} = I_m(\omega_r) / \omega_9 C = 7{,}46$ мВ.

Таким образом, при данных параметрах элементов $C$, $L$ и $R$ входного колебательного контура резонанс внешнего телевизионного сигнала с входным контуром выделяет частоту девятого канала, а амплитудные значения сигналов на частотах других каналов значительно меньше (рис. 8.5).

**Ответ:** $U_{Cm,9} = 7,46$ мВ, $Q = 74,6$.

## Задачи для аудиторной работы

**А8.1.** Катушка с индуктивностью $L = 0,318$ Гн и активным сопротивлением $R = 100$ Ом подключена к источнику синусоидального напряжения частотой 50 Гц, действующее значение которого $U_e = 120$ В. Определить мощность, выделяемую в катушке.

**А8.2.** Конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и резистор, сопротивление которого $R = 150$ Ом, включены последовательно в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Какую часть напряжения, приложенного к этой цепи, составляют падения напряжения на конденсаторе и на резисторе?

**А8.3.** В цепь переменного тока с действующим напряжением $U_e = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно емкость, сопротивление и индуктивность. Найти падение напряжения на сопротивлении, если известно, что падение напряжения на конденсаторе $U_C = U_R$, а падение напряжения на индуктивности $U_L = 3U_R$.

**А8.4.** В колебательный контур последовательно включен генератор переменного напряжения с амплитудой $\varepsilon_m = 1,5$ В. Амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе равна $U_{Cm} = 30$ В. Определить добротность $\theta$ контура.

**А8.5.** Какую среднюю мощность должен потреблять колебательный контур с активным сопротивлением $R = 0,45$ Ом, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой тока 30 мА?

## Задание на дом

**В8.1.** Чему равно эффективное значение силы тока в последовательной $RL$ цепочке ($R = 65$ Ом, $L = 50$ мГн), включенной в сеть 220 В, 50 Гц? Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? Какая мощность рассеивается в цепочке?

**В8.2.** Конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ и резистор с сопротивлением $R = 3$ кОм включены в цепь переменного тока частотой 50 Гц.

Найти полное сопротивление цепи, если конденсатор и резистор включены последовательно.

**В8.3.** Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением $R = 800$ Ом, индуктивностью $L = 1,27$ Гн и емкостью $C = 1,59$ мкФ. На зажимы цепи подано действующее напряжение $U = 127$ В частотой 50 Гц. Найти: 1) действующее значение силы тока $I$ в цепи; 2) сдвиг по фазе между током и напряжением; 3) мощность, выделяющуюся в цепи.

**В8.4.** Последовательный контур ($R = 100$ Ом, $L = 1$ Гн, $C = 1$ мкФ) подключен к генератору переменного напряжения (частота 50 Гц). Найти сдвиг фаз между током и напряжением на концах всей цепи (на клеммах генератора).

**В8.5.** Цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления $R = 160$ Ом и катушки с активным сопротивлением $r$ подключили к сети переменного тока частотой 50 Гц с действующим напряжением $U = 220$ В. Найти тепловую мощность, выделяемую на катушке, если действующие напряжения на сопротивлении $R$ и катушке равны соответственно $U_R = 80$ и $U_L = 180$ В.

## ПРАКТИКУМ 9

# ВОЛНЫ. УПРУГИЕ ВОЛНЫ. АКУСТИКА СКОРОСТЬ ЗВУКА. ИНТЕНСИВНОСТЬ ЗВУКА, ДЕЦИБЕЛ. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

*Плоские волны, бегущие вдоль оси* $x$,

$$u(x,t) = A\cos(\omega t \mp kx + \alpha) = A\cos(\omega(t \mp x/\upsilon) + \alpha), \qquad (9.1)$$

где $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ – циклическая частота; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; $T$ – период; $\lambda$ – длина волны; $\upsilon = \lambda/T = \omega/k$ – фазовая скорость волны.

*Плоские стоячие волны в одномерной упругой системе*:

если левый конец свободен (пучность при $x = 0$) $\partial u(0,t)/\partial x = 0$, то

$$u(x,t) = A\cos kx \cos\omega t, \qquad (9.2)$$

$x_n = 0{,}5\lambda n$ – координаты пучностей,

$x_n = 0{,}5\lambda(n + 0{,}5)$ – координаты узлов, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

если левый конец закреплен (узел при $x = 0$) $u(0,t) = 0$, то

$$u(x,t) = A\sin kx \sin\omega t, \qquad (9.3)$$

$x_n = 0{,}5\lambda n$ – координаты узлов,

$x_n = 0{,}5\lambda(n + 0{,}5)$ – координаты пучностей, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

В упругой системе длиной $l$ могут существовать стоячие волны только с дискретным спектром $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ волнового числа $k_m = 2\pi/\lambda_m$, длиной волны $\lambda_m$ и частотой $\omega_m = \upsilon k_m$:

если правый конец свободен (пучность при $x = l$) $\partial u(l,t)/\partial x = 0$, то

$\lambda_m = 2l/m,\quad k_m = m\pi/l,\quad \omega_m = m\pi\upsilon/l$ *в случае* (9.2);

$\lambda_m = 2l/(m-0{,}5),\quad k_m = (m-0{,}5)\pi/l,\quad \omega_m = (m-0{,}5)\pi\upsilon/l$ *в случае* (9.3);

если правый конец закреплен (узел при $x = l$) $u(0,t) = 0$, то

$\lambda_m = 2l/m,\quad k_m = m\pi/l,\quad \omega_m = m\pi\upsilon/l$ *в случае* (9.3);

$\lambda_m = 2l/(m-0{,}5),\quad k_m = (m-0{,}5)\pi/l,\quad \omega_m = (m-0{,}5)\pi\upsilon/l$ *в случае* (9.2).

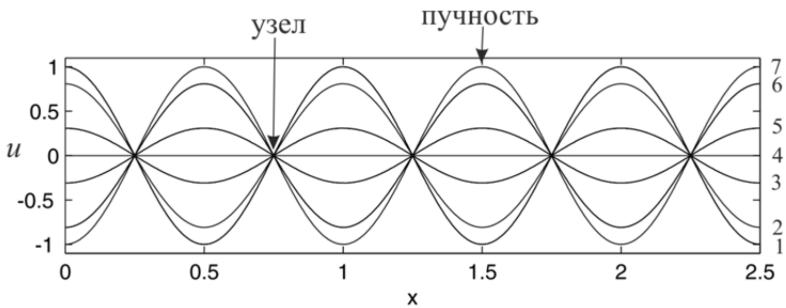



*Рис. 9.1*. Профиль стоячей волны (9.2) с $A$ = 1 в упругой системе со свободными концами в разные моменты времени первого полупериода:

*1* – $t$ = 0; *2* – $t$ = $T$/10; *3* – $t$ = 2$T$/10; *4* – $t$ = 2,5$T$/10; *5* – $t$ = 3$T$/10; *6* – $t$ = 4$T$/10; *7* – $t$ = 5$T$/10 = $T$/2

*Сферическая волна*

$$u(r,\ t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha). \tag{9.4}$$

*Одномерное дифференциальное волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{9.5}$$

*Скорость продольных акустических упругих волн в кристаллах* при $\lambda \gg a$

$$\upsilon = \sqrt{E / \rho}\,, \qquad (9.6)$$

где $E$ – модуль Юнга; $\rho$ – плотность; $a$ – расстояние между атомами.

*Скорость поперечных акустических упругих волн в кристаллах* при $\lambda \gg a$

$$\upsilon = \sqrt{G / \rho}\,, \qquad (9.7)$$

где $G$ – модуль сдвига.

*Скорость звука в жидкостях*

$$\upsilon = \sqrt{K / \rho}\,, \qquad (9.8)$$

где $K$ – модуль объемного сжатия.

*Скорость звука в разреженных газах*

$$\upsilon = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}\,, \qquad (9.9)$$

где $T$ – температура; $\mu$ – молярная масса; $R$ – газовая постоянная; $\gamma$ – показатель адиабаты.

*Энергия $W$ звукового поля в объеме $V$*

$$W = \langle w_u \rangle V\,, \qquad (9.10)$$

где $\langle w_u \rangle$ – усредненная плотность объемной энергии.

*Интенсивностью звука $I$* называют усредненную *плотность потока $\langle j \rangle$* энергии волны

$$I \equiv \langle j \rangle = \Phi / S = \langle w_u \rangle \upsilon\,, \qquad (9.11)$$

где $\Phi$ – поток звуковой энергии через поверхность площади $S$.

*Связь интенсивности с мощностью $P$ излучения точечного источника звука*

$$I = P / 4\pi r^2\,, \qquad (9.12)$$

где $r$ – расстояние от точечного источника до точки измерения интенсивности звукового поля.

*Уровень громкости в децибелах* (дБ)

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}, \qquad (9.13)$$

где $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м$^2$ – интенсивность порога слышимости.

*Эффект Доплера* – различие частоты $\nu$ или длины волны $\lambda$, воспринимаемых наблюдателем при движении источника колебаний и наблюдателя относительно друг друга,

$$\nu = \frac{\upsilon \pm u_p}{\upsilon \mp u_s}\nu_0, \qquad (9.14)$$

где $\nu_0$ – частота колебаний источника звука; $\nu$ – частота звука, воспринимаемого приемником излучения; $\upsilon$ – скорость звука в среде; $u_p$ – скорость приемника излучения; $u_s$ – скорость источника излучения, здесь все скорости малы по сравнению со скоростью света, верхний знак – источник и приемник сближаются, нижний знак – удаляются.

**Пример 9.1.** Плоская звуковая волна возбуждается источником колебаний частотой 200 Гц. Амплитуда $A$ колебаний источника равна 4 мм. Написать уравнение колебаний источника $u(0,t)$, если в начальный момент смещение точек максимально. Найти смещение точек среды, находящихся на расстоянии $x_1 = 1$ м от источника, в момент $t_1 = 0{,}1$ с. Скорость $\upsilon$ звуковой волны принять равной 300 м/с. Затуханием звука пренебречь.

**Решение**

Для описания колебаний источника воспользуемся выражением (9.1) при $x = 0$. Начальная фаза $\alpha$ определяется условием, как при $t = 0$, смещение точек максимально, т. е. $A\cos\alpha = A$, откуда $\alpha = 0$. Циклическая частота $\omega = 2\pi\nu = 400\pi$. Таким образом, уравнение колебаний источника звуковых волн имеет вид $u(0,t) = 0{,}004\cos(400\pi t)$. Смещение точек среды при $x_1 = 1$ м от источника, в момент $t_1 = 0{,}1$ с равно $u(x_1,t_1) = A_0\cos(\omega t_1 - kx_1) = -0{,}002$ м, где $k = \omega/\upsilon$ – волновое число.

**Ответ:** 1) $u(0,t) = 0{,}004\cos(400\pi t)$; 2) $u(x_1,t_1) = -0{,}002$ м.

**Пример 9.2.** Температура $T$ воздуха у поверхности Земли равна 300 К; при увеличении высоты она понижается на $\Delta T = 0,007$ К на каждый метр высоты. За какое время звук, распространяясь, достигнет высоты $h = 8$ км?

**Решение**

Скорость звука убывает с высотой над поверхностью Земли $y$, поскольку с ростом высоты падает температура воздуха по линейному закону $T = T_0 - \beta y$ с коэффициентом $\beta = 0,007$ К/м и $T_0 = 300$ К. Согласно (9.9) имеем дифференциальное уравнение $\upsilon = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}$. Разделим переменные, получим

$$dt = \frac{dy}{\upsilon} = \frac{dy}{\sqrt{\gamma RT/\mu}} = \frac{dy}{\sqrt{\gamma R(T_0 - \beta y)/\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma R\beta}} \frac{dy}{\sqrt{T_0/\beta - y}}.$$

Интегрируем в левой части по времени от $t = 0$ до $t = t_1$, а в правой части – по координате от $y = 0$ до $y = h$, имеем

$$t_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma R\beta}} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{T_0/\beta - y}} = 2\sqrt{\frac{\mu}{\gamma R\beta}} \left(\sqrt{T_0/\beta} - \sqrt{T_0/\beta - h}\right),$$

где использован неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a - x}} = -2\sqrt{a - x}$.

Подставив для воздуха $\mu = 0,029$ кг/моль, $\gamma = 1,4$, $R =$ $= 8,31$ Дж/кг · моль, найдем $t_1 = 24,25$ с.

**Ответ:** $t \approx 24,3$ с.

**Пример 9.3.** Звуковая волна прошла через перегородку, вследствие чего уровень громкости звука уменьшился на 30 дБ. Во сколько раз уменьшилась интенсивность звука?

**Решение**

В соответствии с (9.13) при падении на перегородку звука интенсивности $I_1$ уровень громкости равен $L_1 = 10\lg\frac{I_1}{I_0}$, а для прошедшего звука интенсивности $I_2$ уровень громкости равен $L_2 = 10\lg\dfrac{I_2}{I_0}$. Тогда уменьшение уровня громкости равно $\Delta L = L_1 - L_2 = 10\lg\dfrac{I_1}{I_0} - 10\lg\dfrac{I_2}{I_0} =$ $= 10\lg\dfrac{I_1}{I_2}$, откуда $I_1 / I_2 = 10^{\Delta L/10} = 10^3$.

**Ответ:** $I_1 / I_2 = 10^3$.

**Пример 9.4.** Узкий пучок ультразвуковых волн частотой $\nu_0 =$ $= 50$ кГц направлен от неподвижного эхолокатора к приближающейся подводной лодке. Определить скорость $u$ подводной лодки, если разность частот колебаний источника и сигнала, отраженного от лодки, равна $\Delta\nu = 250$ Гц. Скорость $\upsilon$ ультразвука в морской воде равна 1,5 км/с.

**Решение**

Обозначим через $\nu_0$ частоту ультразвуковых колебаний источника звука локатора; $\nu_1$ – частоту этого и отраженного звука в системе отсчета, связанной с подводной лодкой; $\nu_2$ – частоту отраженного звука в системе отсчета, связанной с локатором. При распространении сигнала от локатора до лодки согласно (9.14) $u_s = 0$, $u_p = u$, тогда $\nu_1 = \dfrac{\upsilon + u}{\upsilon}\nu_0$. При распространении отраженного сигнала от лодки до локатора $u_s = u$, $u_p = 0$, тогда $\nu_2 = \dfrac{\upsilon}{\upsilon - u}\nu_1$. Подставляя $\nu_1$, имеем $\nu_2 = \dfrac{\upsilon}{\upsilon - u}\dfrac{\upsilon + u}{\upsilon}\nu_0 = \dfrac{\upsilon + u}{\upsilon - u}\nu_0$, откуда $u = \dfrac{\nu_2 - \nu_0}{\nu_2 + \nu_0}\upsilon$. Но согласно условию $\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu$, поэтому окончательно $u = \dfrac{\Delta\nu}{2\nu_0 + \Delta\nu}\upsilon$. Подставляем численные значения параметров и получаем скорость подводной лодки $u = 3{,}74$ м/с.

**Ответ:** $u = 3{,}74$ м/с.

**Пример 9.5**. Мощность $P$ изотропного точечного источника звуковых волн равна 10 Вт. Какова средняя объемная плотность энергии на расстоянии $r = 10$ м от источника волн? Температуру $T$ воздуха принять равной 300 К.

**Решение**

Используя (9.11) $I = \langle w_u \rangle \upsilon$ и (9.12) $I = P / 4\pi r^2$, получаем: $\langle w_u \rangle = P / 4\pi r^2 \upsilon$. Скорость звука в воздухе найдем по (9.9) $\upsilon = \sqrt{\gamma RT / \mu}$, где для воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль, $\gamma = 1{,}4$, $R =$ = 8,31 Дж/кг · моль. Окончательно получаем для объемной плотности энергии $\langle w_u \rangle \approx 2{,}3 \cdot 10^{-5}$ Дж/м$^3$.

**Ответ:** $\langle w_u \rangle \approx 2{,}3 \cdot 10^{-5}$ Дж/м$^3$.

## Задачи для аудиторной работы

**А9.1.** От источника колебаний распространяется плоская волна вдоль прямой линии. Амплитуда $A$ колебаний равна 10 см. Как велико смещение точки, удаленной от источника на $0{,}75\lambda$, в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 0{,}9T$?

**А9.2.** В воздухе звук проходит расстояние 800 м на 1,74 секунды дольше, чем в воде. Найти скорость звука в воде, если температура воздуха равна 303 К.

**А9.3.** Определить длину волны бегущей звуковой волны в двух случаях: если в стоячей волне, образованной при отражении этой волны от твердой стены, расстояние между: а) первой и седьмой пучностями равно 15 см; б) первым и четвертым узлом равно 15 см.

**А9.4.** На расстоянии 24 м от точечного изотропного источника уровень его интенсивности 32 дБ. Найти уровень интенсивности звука этого источника на расстоянии 16 м.

**А9.5.** По цилиндрической трубе диаметром 20 см и длиной 5 м, заполненной сухим воздухом, распространяется звуковая волна со средней за период интенсивностью 50 мВт/м$^2$. Скорость звука 332 м/с. Найти энергию звукового поля в трубе.

**А9.6.** Поезд проходит мимо станции со скоростью 72 км/ч. Частота тона гудка электровоза равна 350 Гц. Определить частоту тона, воспринимаемого человеком, стоящим на платформе, в двух случаях: 1) поезд приближается; 2) поезд удаляется. Скорость звука 332 м/с.

## Задание на дом

**В9.1.** Волна с периодом 2,4 с и амплитудой 5 см распространяется со скоростью $\upsilon = 20$ м/с. Чему равно смещение точки, находящейся на расстоянии $x_1 = 50$ м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время $t_1 = 8$ с?

**В9.2.** Найти скорость звука в воздухе при температурах 273 и 323 К.

**В9.3.** В трубе длиной 1,2 м с закрытым правым концом находится воздух при температуре 300 К. Определить минимальную частоту возможных колебаний воздушного столба в двух случаях: а) левый конец трубы открыт; б) левый конец трубы закрыт.

**В9.4.** Мимо неподвижного электровоза, гудок которого издает звуковой сигнал частотой 300 Гц, проезжает поезд со скоростью 120 км/ч. Температура воздуха равна 300 К. Какую частоту тона воспринимает пассажир поезда: 1) когда поезд приближается к электровозу? 2) когда удаляется от него?

**В9.5.** Интенсивность звука 1 Вт/м$^2$. Определить среднюю объемную плотность энергии звуковой волны, если звук распространяется в сухом воздухе при нормальных условиях.

**В9.6.** Уровень интенсивности шума двигателя равен 60 дБ. Каков будет уровень интенсивности шума, если одновременно будут работать: а) два мотора; б) десять таких моторов?

# ПРАКТИКУМ 10
# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

*Уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные волны в однородной изотропной среде* (*и в вакууме при* $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) *в отсутствие свободных зарядов и токов*:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{10.1}$$

где $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (не путать единичный вектор-орт $\boldsymbol{k}$ с волновым вектором $\mathbf{k}$ и волновым числом $k$ !).

*Волновое уравнение*

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{10.2}$$

аналогично для $\mathbf{H}, \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$.

*Фазовая скорость распространения электромагнитной волны*

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \tag{10.3}$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме; $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель преломления среды, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $= 1,26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м; $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9} 10^{-9}$ Ф/м $= 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

*Решение уравнений Максвелла в виде плоской монохроматической волны, распространяющейся* (*бегущей*) *в направлении волнового вектора* $\mathbf{k}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}, \tag{10.4}$$

где $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{H}_m$ – комплексные амплитуды; $\mathbf{k} = \boldsymbol{i}k_x + \boldsymbol{j}k_y + \boldsymbol{k}k_z$; $\mathbf{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$ и поскольку $\nabla e^{-i\mathbf{kr}} = -i\mathbf{k}e^{-i\mathbf{kr}}$, $\partial e^{i\omega t} \big/ \partial t = i\omega e^{i\omega t}$, то

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\mathbf{k}\times\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu\mu_0}\mathbf{k}\times\mathbf{E}, \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0, \tag{10.5}$$

т. е. векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ взаимно ортогональны и образуют правовинтовую тройку.

*Связь между амплитудами напряженностей поля плоской монохроматической электромагнитной волны*

$$|\mathbf{H}_m| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}|\mathbf{E}_m|. \tag{10.6}$$

*Напряженность поля плоской электромагнитной волны, бегущей вдоль* (*знак* «минус») *или против* (*знак* «плюс») *оси* $x$:

$$E_{y,z} = E_{my,mz}\cos(\omega t \mp kx + \alpha_{y,z}); \qquad H_{y,z} = H_{my,mz}\cos(\omega t \mp kx + \alpha_{y,z}). \tag{10.7}$$

*Плотность энергии электромагнитного поля*

$$w = \frac{\mathbf{ED} + \mathbf{HB}}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu_0\mu\mathbf{H}^2}{2}. \tag{10.8}$$

*Плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга)*

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = w\boldsymbol{\upsilon}. \tag{10.9}$$

*Плотность импульса электромагнитного поля*

$$\mathbf{p}_S = \mathbf{S} / \upsilon^2 . \qquad (10.10)$$

*Давление электромагнитной волны*

$$p = \langle w \rangle (1 + \rho) , \qquad (10.11)$$

где $\rho$ – коэффициент отражения электромагнитной волны; $\rho = 0$ – для поглощающей поверхности тела, $\rho = 1$ – для зеркальной поверхности тела.

*Интенсивность электромагнитной волны*

$$I = \langle S \rangle = \langle w \rangle \upsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} H_m^2 . \qquad (10.12)$$

**Пример 10.1.** Плоская электромагнитная волна с частотой $\nu = 10$ ГГц распространяется в среде без потерь с проницаемостями $\varepsilon = 10$ и $\mu \approx 1$. Найти фазовую скорость $\upsilon$ и длину волны $\lambda$.

**Решение**

Согласно (10.3) фазовая скорость электромагнитной волны в среде равна $\upsilon = c / \sqrt{\varepsilon \mu}$, а длина волны выражается через период $T$ или частоту $\nu$ как $\lambda = \upsilon T = \upsilon / \nu$. Что дает $\upsilon \approx 9{,}5 \cdot 10^7$ м/с, $\lambda = 9{,}5$ мм.

**Ответ:** $\upsilon \approx 9{,}5 \cdot 10^7$ м/с, $\lambda = 9{,}5$ мм.

**Пример 10.2.** В вакууме распространяется вдоль оси $x$ плоская электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{j} E_m \cos(\omega t - kx)$, где $E_m = 200$ В/м, $k = 0{,}5$ м$^{-1}$, $\mathbf{j}$ – единичный вектор вдоль оси $y$. Найти векторы напряженности магнитного поля и плотности тока смещения в точке с координатой $x = 1$ м в момент времени: а) 0 с; б) 1 мкс.

**Решение**

В вакууме $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Из уравнений (10.5)–(10.7) следует, что напряженность магнитного поля электромагнитной волны $H = H_z =$

$= H_m \cos(\omega t - kx)$, где $H_m = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon / \mu_0 \mu} E_m = \sqrt{8{,}85 \cdot 10^{-12} / 4\pi \cdot 10^{-7}}\, 200 =$ $= 0{,}53$ А/м. Плотность тока смещения найдем из его определения: $\mathbf{j}' = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Получаем $\mathbf{j}' = -\mathbf{j} \varepsilon_0 \varepsilon \omega E_m \sin(\omega t - kx)$. Таким образом:

1) в момент времени $t_1 = 0$ с

$H(t_1) = H_m \cos(\omega t_1 - kx) = 0{,}466$ А/м;

$j'(t_1) = -\varepsilon_0 \varepsilon \omega E_m \sin(\omega t_1 - kx) = -0{,}233$ А/м$^2$;

2) в момент времени $t_2 = 10^{-6}$ с

$H(t_2) = H_m \cos(\omega t_2 - kx) = 0{,}144$ А/м;

$j'(t_2) = -\varepsilon_0 \varepsilon \omega E_m \sin(\omega t_2 - kx) = -0{,}072$ А/м$^2$.

**Ответ:** 1) $H(t_1) = 0{,}466$ А/м, $j'(t_1) = -0{,}233$ А/м$^2$;
2) $H(t_2) = 0{,}144$ А/м, $j'(t_2) = -0{,}072$ А/м$^2$.

**Пример 10.3.** В вакууме вдоль оси $x$ распространяется плоская электромагнитная волна с $\mathbf{E} = \boldsymbol{j} E_{my} \cos(\omega t - kx)$, где $E_{my} = 50$ В/м. Вектор Пойнтинга равен $\mathbf{S}_m = \boldsymbol{i} S_{mx}$, где $S_{mx} = 10$ Вт/м$^2$, где $\boldsymbol{i}$ – единичный вектор вдоль оси $x$. Найти вектор напряженности магнитного поля.

**Решение**

Вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен направлению вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{j}$ и направлению распространения волны $\boldsymbol{i}$, т. е. вдоль оси $z$.

По определению (10.9) вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} E_y H_z .$$

Таким образом, $H_{mz} = S_{mx} / E_{my} = 0{,}4$ А/м.

**Ответ:** $\mathbf{H}_m = 0{,}4\boldsymbol{k}$ А/м.

**Пример 10.4.** Плотность потока солнечной энергии на орбите Земли равна $\langle S \rangle = 1340$ Вт/м$^2$. Чему равны амплитуды напряженности $E_m$ и $H_m$ плоской электромагнитной волны с такой плотностью потока энергии?

**Решение**

Согласно уравнению (10.12) усредненная плотность потока энергии $\langle S \rangle$ выражается через амплитуду напряженности электрического поля волны как

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 ,$$

где учтено, что в условиях космического вакуума $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$. Отсюда находим амплитуду напряженности электрического поля

$$E_m = \sqrt{2\langle S \rangle \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} ,$$

но в соответствии с (10.6) амплитуда напряженности магнитного поля в электромагнитной волне $H_m$ равна

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m .$$

Подставляем значения исходных величин и получаем $E_m = 1$ кВ/м, а $H_m = 2{,}67$ А/м.

**Ответ:** $E_m = 1$ кВ/м, $H_m = 2{,}67$ А/м.

**Пример 10.5.** Шар радиусом $R = 0{,}5$ м находится в немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. В среде распространяется плоская электромагнитная волна, длина волны которой $\lambda \ll R$ и амплитуда напряженности электрического поля 200 В/м. Какая энергия падает на шар за одну минуту?

**Решение**

Энергия облучения шара за время $t$ равна энергии, которую переносит волна за это время через площадь проекции шара на плоскость, перпендикулярную направлению распространения волны: $W = IS_A t_1$, где $S_A = \pi R^2$, а $I = \langle w \rangle \upsilon = \langle w \rangle c = \langle S \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^2$, где $\mu = 1$. Таким образом, $W = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^2 \pi R^2 t_1 = 5$ кДж.

**Ответ:** $W = 5$ кДж.

**Пример 10.6.** Показать, что если плоская электромагнитная волна падает на зеркально отражающую поверхность под углом $\theta$, то оказываемое на поверхность давление равно $p_\theta = 2\langle w \rangle \cos^2\theta$, где $\langle w \rangle$ – средняя плотность энергии поля падающей волны. Показать также, что если падающее излучение изотропно, то полное давление на поверхность равно $P = \langle w \rangle / 3$.

**Решение**

В соответствии с уравнениями (10.10) и (10.11) в направлении перемещения волнового фронта средняя плотность импульса электромагнитной волны равна $\mathbf{p} = \langle \mathbf{S} \rangle / \upsilon^2 = \langle w \rangle \boldsymbol{\upsilon} / \upsilon^2 = \langle w \rangle \mathbf{n} / \upsilon$, где $\mathbf{n} = \boldsymbol{\upsilon} / \upsilon = \mathbf{k} / k$ – единичный вектор в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$; $\boldsymbol{\upsilon}$ – скорость света. За единицу времени через перпендикулярную $\mathbf{n}$ площадку единичной площади волна переносит импульс своего поля, который содержится в объеме цилиндра с единичным основанием и образующей длиной $\upsilon$, это дает давление на такую перпендикулярную площадку $P_\perp = p\upsilon = \langle w \rangle$. Если волна падает на плоскую поверхность площади $S_A$ под углом $\theta$, то полный поток импульса через $S_A$ за единицу времени равен $\mathrm{P}_\perp S_A \cos\theta$, он равен силе, с которой волна действует на площадку в направлении своего распространения, т. е. под углом $\theta$ к $S_A$: $\mathbf{F} = \mathrm{P}_\perp S_A \cos\theta\, \mathbf{n} = \langle w \rangle S_A \cos\theta\, \mathbf{n}$. Сила давления падающей волны на площадку $S_A$ равна нормальной проекции этой силы $F\cos\theta = \langle w \rangle S_A \cos^2\theta$. Поскольку поверхность зеркальная, то отраженная волна уносит аналогичный импульс отдачи, как при упругом соударении, поэтому в итоге при отражении плоской волны на зеркальную поверхность оказывается удвоенное давление $p_\theta = 2F\cos\theta / S_A = 2\langle w\rangle\cos^2\theta$.

Если излучение падает на поверхность изотропно, т. е. равновероятно со всех направлений, то его полное давление $P$ дается суммированием по всем направлениям падающих плоских волн, что эквивалентно интегрированию по телесному углу $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ в пределах полупространства, из которого приходит излучение:

$$P = \sum_{p_\theta} p_\theta = \int_\Omega p_\theta \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} p_\theta \sin\theta d\theta,$$

что дает

$$P = \langle w\rangle \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \langle w\rangle \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}\langle w\rangle.$$

**Ответ:** $P = \langle w\rangle / 3$.

## Задачи для аудиторной работы

**А10.1.** Электромагнитная волна частотой 3 МГц переходит из вакуума в диэлектрик проницаемостью $\varepsilon = 4$. Найти приращение ее длины волны.

**А10.2.** В вакууме распространяется вдоль оси $x$ плоская электромагнитная волна $\mathbf{E} = \boldsymbol{j}E_m\cos(\omega t - kx)$ (В/м), где $E_m = 160$ В/м, $k = 0,51$ м$^{-1}$. Найти вектор напряженности магнитного поля в точке с координатой $x = 7,7$ м в момент времени: а) 0 с; б) 33 нс.

**А10.3.** В некоторой среде распространяется плоская электромагнитная волна частотой $\omega$. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 2$, магнитная проницаемость $\mu \approx 1$. Найти напряженность магнитного поля и вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ в той точке, в которой электрический вектор изменяется по закону $\mathbf{E} = \boldsymbol{j}10\cos\omega t$ (В/м).

**А10.4.** В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью поглощающего волну. Амплитуда напряженности магнитного поля волны 0,05 А/м. Определить: а) среднюю по времени плотность импульса $p_S$ волны; б) давление $p$, оказываемое электромагнитной волной на тело.

**А10.5.** Определить энергию, которую переносит за одну минуту плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, через площадку 10 см$^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Амплитуда напряженности электрического поля волны 1 мВ/м.

## Задание на дом

**В10.1.** В вакууме распространяется вдоль оси $x$ плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны 0,05 А/м. Определить: а) амплитуду напряженности электрического поля волны; б) среднюю по времени плотность энергии; в) интенсивность волны.

**В10.2.** В однородной изотропной среде с $\varepsilon = 3$ и $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны 10 В/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля волны и фазовую скорость волны.

**В10.3.** Импульс, переносимый плоской электромагнитной волной через площадку в 10 см$^2$ за 5 с, равен $5 \cdot 10^{-8}$ кг · м/с. Определить интенсивность волны.

**В10.4.** Плоская электромагнитная волна распространяется в немагнитной среде без потерь с неизвестным значением диэлектрической проницаемости. Измерения показали, что на пути, равном 10 см, колебание с частотой 1 ГГц приобретает дополнительный по сравнению с вакуумом сдвиг по фазе в 40°. Определить относительную диэлектрическую проницаемость среды.

**В10.5.** В вакууме распространяется плоская ЭМВ с частотой порядка 10 ГГц. Амплитуда электрического вектора волны равна 0,775 В/м. На пути волны располагается поглощающая волну поверхность, имеющая форму сферы радиуса 0,632 м. Какую энергию поглощает сфера за одну секунду?

# ПРАКТИКУМ 11

# ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

*Интерференция волн* – явление взаимного усиления или ослабления двух (или большего количества) волн при их наложении друг на друга.

*Интенсивность света при интерференции двух гармонических световых волн с интенсивностями* $I_1$, $I_2$ *и разностью фаз* $\Delta\varphi$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\,\langle\cos\Delta\varphi\rangle, \qquad (11.1)$$

для некогерентных волн $\langle\cos\Delta\varphi\rangle = 0$ и $I = I_1 + I_2$.

*Оптическая длина пути световой волны*

$$l_n = \int_0^l n(l')dl' = nl, \qquad (11.2)$$

где $l$ – геометрическая длина пути; $n$ – показатель преломления среды.

*Оптическая разность хода двух световых волн*

$$\Delta = l_{n2} - l_{n1}. \qquad (11.3)$$

*Разность фаз колебаний поля двух световых волн в точке пространства*

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta, \qquad (11.4)$$

где $\lambda_0$ – длина волн в вакууме.

*Условие максимумов интенсивности* ( $\Delta\varphi = \pm 2m\pi$ )

$$\Delta = \pm m\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, ... \qquad (11.5)$$

*Условие минимумов интенсивности* ( $\Delta\varphi = \pm(2m+1)\pi$ )

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0,1,2,... \tag{11.6}$$

*Двухлучевая интерференция Юнга* (рис. 11.1).

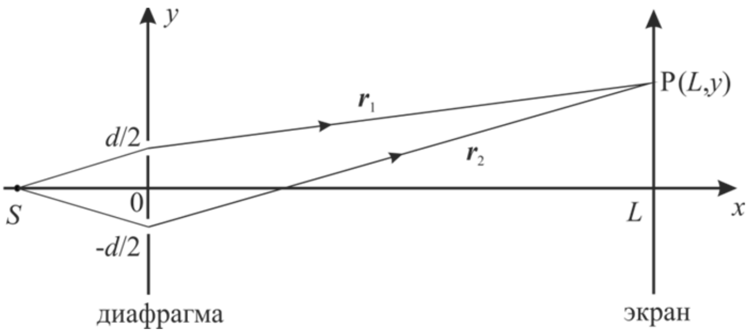



*Рис. 11.1.* Схема Юнга

*Координаты максимумов интенсивности на экране*

$$y_m = \pm\frac{\Delta}{n}\frac{L}{d} = \pm m\frac{L}{d}\lambda, \quad m = 0,1,2,..., \tag{11.7}$$

где $\Delta / n = r_2 - r_1$ – геометрическая разность хода; $\lambda = \lambda_0 / n$ – длина волны в среде с показателем преломления $n$ между диафрагмой и экраном.

*Координаты минимумов интенсивности на экране*

$$y_m = \pm\frac{\Delta}{n}\frac{L}{d} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{L}{d}\lambda, \quad m = 0,1,2,... \tag{11.8}$$

*Ширина интерференционной полосы*

$$\Delta y = \frac{L}{d}\lambda . \tag{11.9}$$

*Интерференция света в тонкой пленке* (рис. 11.2).

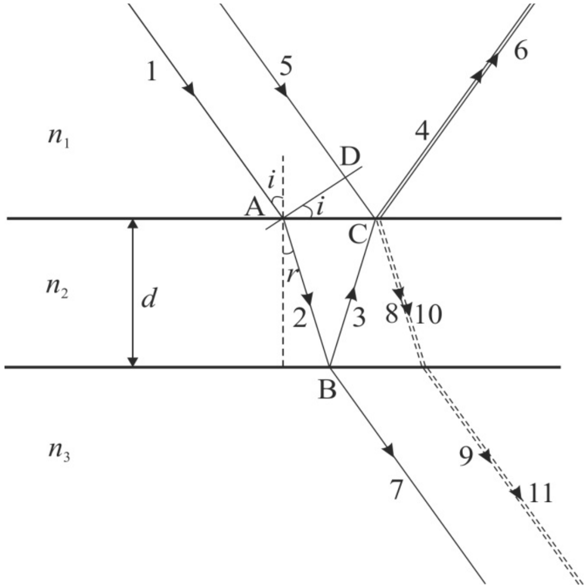



*Рис. 11.2.* Ход интерферирующих лучей (*4*, *6* – отраженные лучи; *7*, *9*, *11* – прошедшие лучи)

*Полосы равного наклона*

*Для света, отраженного от пленки, условия максимумов интенсивности*

$$2n_2 d\cos r = \left(m \mp \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (11.10)$$

*и минимумов интенсивности*

$$2n_2 d\cos r = m\lambda\,, \qquad (11.11)$$

где $n_2\cos r = \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 i}$, $r$ – угол преломления, $i$ – угол падения, $n_{12}$ – относительный показатель преломления.

*Для света, прошедшего сквозь пленку, условия максимумов интенсивности*

$$2n_2 d\cos r = m\lambda \qquad (11.12)$$

*и минимумов интенсивности*

$$2n_2 d\cos r = \left(m \mp \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (11.13)$$

по своему виду меняются местами в сравнении со случаем отражения.

*Полосы равной толщины* – возникают при интерференции на клине с малым углом, когда в предыдущих формулах можно считать $i = 0$.

*Кольца Ньютона* – полосы равной толщины – возникают при нормальном падении света на плоскопараллельную линзу большого радиуса кривизны $R$. *В отраженном свете* радиусы светлых колец $r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0 R}$ ($m = 1,2,3,...$), а радиусы темных колец $r_m = \sqrt{m\lambda_0 R}$ ($m = 0,1,2,...$). *В прошедшем свете* – наоборот.

**Пример 11.1.** Плоская монохроматическая волна падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на $d = 2{,}5$ мм. На экране, расположенном за диафрагмой на расстоянии $L = 100$ см (рис. 11.1), образуется система интерференционных полос. На какое расстояние и в какую сторону сместятся эти полосы, если одну из щелей покрыть стеклянной пластинкой толщиной $d_1 = 10$ мкм? Найти относительное смещение интерференционных полос для света с длиной волны $\lambda = 550$ нм (зеленый цвет). Показатель преломления стекла $n_1 = 1{,}5$.

**Решение**

В среде с показателем преломления $n_0$ оптическая разность хода волн (рис. 11.1), приходящих в точку на экране, равна

$$\Delta_0 = n_0 r_2 - n_0 r_1 = n_0(r_2 - r_1) \approx n_0 \frac{d}{L} y_m,$$

где $y_m$ – координата несмещенного максимума или минимума. Если первую щель покрыть стеклянной пластинкой с показателем преломления $n_1$, то оптическая разность хода этих волн будет равна

$$\Delta' = n_0 r_2' - n_1 d_1 - n_0(r_1' - d_1) =$$

$$= n_0(r_2' - r_1') + d_1(n_0 - n_1) \approx n_0 \frac{d}{L} y_m' + d_1(n_0 - n_1),$$

где $y_m'$ – координата смещенного максимума или минимума. Для любого $m$-го максимума (11.5), (11.7) или минимума (11.6), (11.8) $\Delta_0 = \Delta'$, т. е. $n_0 \frac{d}{L} y_m = n_0 \frac{d}{L} y_m' + d_1(n_0 - n_1)$, откуда получаем величину смещения всех максимумов и минимумов

$$y_m' - y_m = L \frac{d_1}{d} \frac{n_1 - n_0}{n_0}.$$

При $n_1 > n_0$ эти смещения положительные (интерференционная картина смещается вверх вдоль оси $y$). Принимая $n_0 = 1$ (вакуум) и подставляя численные значения параметров, получаем $y_0' = 0{,}002$ м.

Найдем относительное смещение интерференционных полос, т. е. отношение $(y_m' - y_m)/\Delta y$, где $\Delta y$ – ширина интерференционной полосы (11.9):

$$\frac{y_m' - y_m}{\Delta y} = L \frac{d_1}{d} \frac{n_1 - n_0}{n_0} \frac{d}{L\lambda} = \frac{d_1}{\lambda} \frac{n_1 - n_0}{n_0}.$$

При длине волны $\lambda = 550$ нм имеем

$$\frac{y_m' - y_m}{\Delta y} = \frac{d_1}{\lambda} \frac{n_1 - n_0}{n_0} \approx 9{,}1,$$

т. е. для зеленого света интерференционные полосы сместились на девять полос.

**Ответ:** $y_0' = 0{,}002$ м, смещение равно 9,1 полосы.

**Пример 11.2.** На поверхности стекла находится пленка воды. На нее падает свет длиной волны $\lambda = 0{,}68$ мкм под углом $i = \pi/6$ к нормали. Найти скорость, с которой уменьшается толщина пленки (из-за испарения), если интенсивность отраженного света меняется так, что промежуток времени между двумя последовательными максимумами отражения составляет $\Delta t = 15$ мин.

**Решение**

Считаем, что толщина пленки $d = d(t)$ уменьшается со временем $t$ по линейному закону $d(t) = d_0 - at$, где $d_0$ – начальная толщина; $a$ – искомая скорость уменьшения толщины. Очевидно, что $a = (d(t) - d(t + \Delta t)) / \Delta t$, где $d(t)$ и $d(t + \Delta t)$ – толщины пленки при двух последовательных максимумах отражения под одним и тем же углом. Согласно (11.10) условия этих двух максимумов отражения (см. рис. 11.2) есть $2n_2 d(t)\cos r = (m + 0,5)\lambda$ и $2n_2 d(t + \Delta t)\cos r =$ $= (m - 1 + 0,5)\lambda$. Вычитая из первого выражения второе, получаем $2n_2(d(t) - d(t + \Delta t))\cos r = \lambda$. Разделив на $\Delta t$, имеем $2n_2 a\cos r = \lambda / \Delta t$, откуда $a = \lambda / 2n_2 \cos r \Delta t$, где $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 i / n_{21}^2}$. Подставляя численные значения заданных величин, а также показателей преломления воды и вакуума, получаем $a = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м/с = 1,1 мкм/ч.

**Ответ:** $a = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м/с = 1,1 мкм/ч.

**Пример 11.3.** Воздушный клин, имеющий наибольшую толщину $h = 0{,}01$ мм, образован горизонтальной зеркальной поверхностью и плоскопараллельной стеклянной пластинкой. При освещении пластинки вертикальными лучами с длиной волны $\lambda = 0{,}580$ мкм наблюдатель видит в отраженном свете интерференционные полосы. После того как в пространство между пластинкой и горизонтальной поверхностью ввели жидкость, число интерференционных полос увеличилось на 12. Определить показатель преломления жидкости. Считать, что из-за малости угла при вершине клина углы падения на границу клина и преломления близки к нулю, т. е. $\sin i \approx 0$ и $\cos r \approx 1$.

**Решение**

Пусть на воздушном клине умещается $m_1$ интерференционных полос, тогда на краю клина выполняется условие максимума (11.10): $2n_2 h\cos r = (m_1 + 0,5)\lambda$ или $2n_2 h = (m_1 + 0,5)\lambda$, где $n_2 = 1$, так как $\cos r \approx 1$. После введения в полость клина жидкости число интерференционных полос увеличилось на 12 и стало равным $m_2 = m_1 + 12$, а условие максимума (11.10) принимает вид $2n_2' h = (m_2 + 0,5)\lambda$, где $n_2'$ – показатель преломления жидкости. Вычитая почленно, получаем

$2(n_2' - n_2)h = (m_2 - m_1)\lambda$, откуда выражаем показатель преломления исследуемой жидкости $n_2' = n_2 + (m_2 - m_1)\lambda / 2h = 1{,}348 \approx 1{,}35$.

**Ответ:** $n_2' \approx 1{,}35$.

**Пример 11.4.** Для измерения показателя преломления аргона в одно из плеч интерферометра Майкельсона поместили пустую стеклянную трубку длиной $l = 12$ см с плоскопараллельными торцевыми поверхностями (рис. 11.3). При заполнении трубки аргоном (при нормальных условиях) интерференционная картина сместилась на $m = 106$ полос. Определить показатель преломления $n$ аргона, если длина волны света $\lambda = 639$ нм.

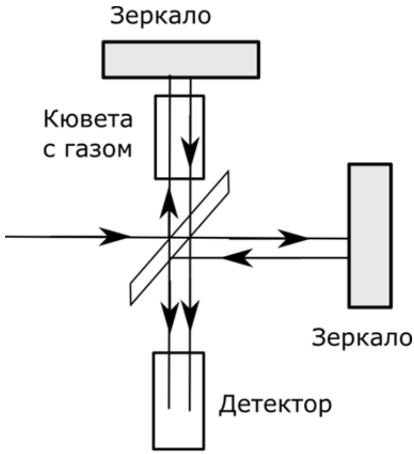



*Рис. 11.3.* К примеру 11.4

**Решение**

При заполнении трубки аргоном межу лучами интерферометра возникает дополнительная оптическая разность хода $\Delta l = 2(nl - l)$, которая равна $m\lambda$. Множитель 2 появился вследствие того, что луч света дважды проходит трубку с аргоном. Таким образом, $2(n-1)l = m\lambda$, откуда выразим показатель преломления аргона: $n = 1 + m\lambda / 2l =$ $= 1 + 2{,}82 \cdot 10^{-4} = 1{,}000282$.

**Ответ:** $n = 1{,}000282$.

## Задачи для аудиторной работы

**А11.1.** На пути монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм находится стеклянная пластинка толщиной 100 мкм. Свет падает на пластину нормально. На какой угол следует повернуть пластину, чтобы оптическая длина света изменилась на $\lambda / 2$?

**А11.2.** Расстояние между двумя когерентными источниками света равно 0,1 мм. Расстояние между соседними интерференционными полосами в средней части интерференционной картины равно 1 см. Определить расстояние от источников света до экрана. Длина волны 0,5 мкм.

**А11.3.** Пучок монохроматических световых волн падает под углом 30° на находящуюся в воздухе мыльную пленку с показателем преломления $n = 1,30$. Длина волны 0,6 мкм. При какой наименьшей толщине пленки отраженные световые волны будут максимально ослаблены интерференцией?

**А11.4.** На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет. Длина волны 0,6 мкм. Определить угол между поверхностями клина, если расстояние между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм.

**А11.5.** На экране наблюдается интерференционная картина от двух когерентных источников света с длиной волны 0,480 мкм. Когда на пути одного из пучков поместили тонкую пластину из плавленого кварца с показателем преломления 1,46, то интерференционная картина сместилась на 69 полос. Определить толщину кварцевой пластины.

**А11.6.** Определить перемещение $\Delta x$ зеркала в интерферометре Майкельсона, если интерференционная картина сместилась на 100 полос. Опыт проводился со светом с длиной волны 0,546 мкм.

## Задание на дом

**В11.1.** Найти все длины волн видимого света (от 0,76 до 0,38 мкм), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены при оптической разности хода интерферирующих лучей, равной 1,8 мкм.

**В11.2.** В опыте Юнга (см. рис. 11.1) расстояние между щелями равно 0,8 мм. Длина волны света равна 0,55 мкм. На каком расстоянии от щелей следует расположить экран, чтобы ширина интерференционной полосы оказалась равной 2 мм?

**В11.3.** На мыльную пленку, находящуюся в воздухе, падает нормально пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине пленки отраженный свет с длиной волны 0,55 мкм оказывается максимально усиленным в результате интерференции? Показатель преломления мыльной пленки равен 1,3.

**В11.4.** На тонкий стеклянный клин падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол между поверхностями клина равен двум минутам. Определить длину световой волны, если расстояние между смежными интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,3 мм. Показатель преломления стекла равен 1,55.

**В11.5.** В интерферометре Майкельсона на пути одного из интерферирующих пучков света с длиной волны 0,59 мкм поместили закрытую с двух концов стеклянную трубку длиной 10 см, откачанную до высокого вакуума. При заполнении трубки хлористым водородом произошло смещение интерференционной картины. Когда хлористый водород был заменен бромистым водородом, смещение интерференционной картины возросло на 42 полосы. Определить разность показателей преломления бромистого и хлористого водорода.

## ПРАКТИКУМ 12

# ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

*Дифракция волн* – любые отклонения от законов геометрической оптики при распространении волн, в частности огибание волнами препятствий и проникновение их в область геометрической тени.

*Метод зон Френеля* (рис. 12.1).

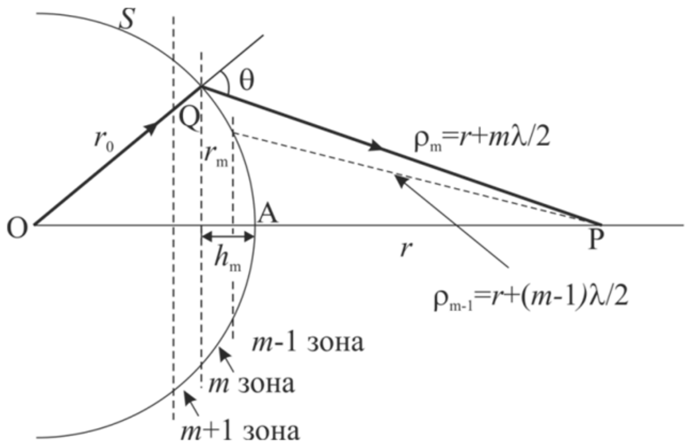



*Рис. 12.1*. Построение зон Френеля

*Радиус $m$-й зоны Френеля*

$$r_m = \sqrt{\frac{r_0 r}{r_0 + r} m\lambda} \,. \tag{12.1}$$

*Дифракция Френеля* (дифракция в сходящихся лучах) – дифракция сферической световой волны на препятствии (на диске или отверстии в экране), размер которого $b$ сравним с диаметром первой зоны Френеля $2r_1$, где $r$ – расстояние от точки наблюдения до препятствия ($2r_1 \sim \sqrt{r\lambda}$ при $r \ll r_0$); $\lambda$ – длина волны. Таким образом, *условие дифракции Френеля* $b \sim \sqrt{r\lambda}$ .

*Дифракция Фраунгофера* (дифракция в параллельных лучах) – дифракция плоской световой волны ($r_0 \to \infty$) на препятствии (на диске или отверстии в экране), размер которого $b$ много меньше диаметра первой зоны Френеля $\sqrt{r\lambda}$, где $r$ – расстояние от точки наблюдения до препятствия; $\lambda$ – длина волны. Таким образом, *условие дифракции Фраунгофера* $b \ll \sqrt{r\lambda}$ .

*Законы геометрической оптики применимы для описания образования тени* при падении света на препятствие, если размер препятствия $b$ много больше диаметра первой зоны Френеля $\sqrt{r\lambda}$ (диск или отверстие в экране покрывают $m \gg 1$ зон Френеля). Таким образом, *условие применимости законов геометрической оптики* $b \gg \sqrt{r\lambda}$ , т. е. они применимы для достаточно коротких волн $\lambda \ll b^2 / r$ на не слишком больших расстояниях от препятствия $r \ll b^2 / \lambda$ (на расстояниях $r \sim b^2 / \lambda$ наблюдается дифракция Френеля, а на расстояниях $r \gg b^2 / \lambda$ – дифракция Фраунгофера).

*Дифракция Фраунгофера на щели шириной* $b$ (рис. 12.2).

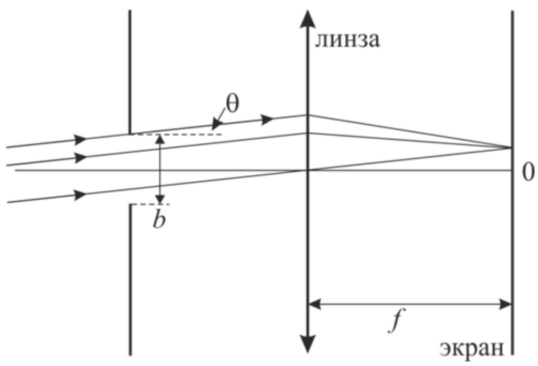



*Рис. 12.2.* Дифракция Фраунгофера

*Условие минимумов интенсивности*

$$b\sin\theta_m = \pm 2m\frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda\,, \qquad m = 1, 2, 3, ... \qquad (12.2)$$

*Условие максимумов интенсивности* (кроме центрального при $\theta = 0$)

$$b\sin\theta_m \approx \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\,, \qquad m = 1, 2, 3, ... \qquad (12.3)$$

При условии минимумов дифракции Фраунгофера плоскую волновую поверхность внутри щели можно разбить на $2m$ (а при условии максимумов – на $2m+1$) равных по ширине зон (полос), так что колебания поля соседних из них компенсируют друг друга в направлении наблюдения. Называть их «зонами Френеля» неправильно, так как ширина всей щели (и их ширина) много меньше ширины зон Френеля.

*Интенсивность дифракции Фраунгофера на щели*

$$I = I_0\left(\frac{\sin\eta}{\eta}\right)^2, \qquad (12.4)$$

где $\eta = \dfrac{\pi b}{\lambda}\sin\theta$, а $I_0$ – интенсивность в середине центрального максимума.

*Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке, имеющей $N$ щелей шириной $b$ и постоянную решетки d.*

*Условия главных максимумов интенсивности*

$$d\sin\theta_m = \pm 2m\frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda\,, \qquad m = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (12.5)$$

*Условия главных минимумов интенсивности*

$$b\sin\theta_m = \pm 2m\frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda\,, \qquad m = 1, 2, 3, ... \qquad (12.6)$$

*Условия дополнительных (вторичных) минимумов интенсивности*

$$d \sin \theta_{m'} = \pm \frac{m'}{N} \lambda, \qquad (12.7)$$

где $m'$ – любое натуральное число, не равное $0, N, 2N, 3N, \ldots$. Между двумя главными максимумами имеется $N-1$ дополнительных минимумов, разделенных слабыми дополнительными (вторичными) максимумами.

*Интенсивность дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке*

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 \left( \frac{\sin N\Lambda}{\sin \Lambda} \right)^2, \qquad (12.8)$$

где $\eta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta, \Lambda = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$, а $I_0$ – интенсивность, создаваемая одной щелью в середине центрального максимума, первые два множителя совпадают с (12.4) – интенсивностью дифракции на одной щели, третий множитель описывает интерференцию полей $N$ щелей. В главных максимумах $I \sim N^2$.

Направления главных максимумов дифракционной решетки очень сильно зависят от длины волны света и могут быть хорошо разрешены, поэтому решетку используют как спектральный прибор.

*Угловой дисперсией* называют величину

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}, \qquad (12.9)$$

где $\theta$ – угол главного дифракционного максимума $m$-го порядка, т. е.

$$D = \frac{d}{d\lambda} \arcsin\left( \frac{m\lambda}{d} \right) = \frac{m}{d\sqrt{1 - \left( \frac{m\lambda}{d} \right)^2}}. \qquad (12.10)$$

*Разрешающая способность (сила)* оптического прибора определяется отношением характерной длины волны к минимальной разности длин волн $\delta\lambda$, при которой две спектральные линии воспринимаются раздельно,

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}. \qquad (12.11)$$

*Критерий Рэлея*: две спектральные линии с длинами волн $\lambda_1$ и $\lambda_2$ воспринимаются раздельно, если середина главного дифракционного максимума, соответствующего длине волны $\lambda_1$, совпадает с первым дифракционным минимумом, соответствующим $\lambda_2$ в одном и том же порядке спектра. Это дает для дифракционной решетки в $m$-м порядке

$$R = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right| = mN, \qquad (12.12)$$

где $N$ – число периодов решетки, $m$ – порядок спектра.

**Пример 12.1.** Между точечным источником монохроматического света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого $R$ можно менять. Расстояние от диафрагмы до источника $r_0 = 1$ м, до экрана – $r = 1{,}25$ м. Определить длину волны света, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $R_1 = 1$ мм, а следующий максимум – при $R_2 = 1{,}29$ мм.

**Решение**

Запишем формулу (12.1) при $r_{m_1} = R_1$ и $r_{m_2} = R_2$, учитывая, что число открытых зон Френеля различается на два, т. е. $m_2 = m_1 + 2$:

$$r_{m_1}^2 = \frac{rr_0}{r + r_0} m_1\lambda, \qquad r_{m_2}^2 = \frac{rr_0}{r + r_0}(m_1 + 2)\lambda.$$

Исключая $m_1$ из этой системы уравнений, выразим длину волны:

$$\lambda = \left(r_{m_2}^2 - r_{m_1}^2\right)\frac{r + r_0}{2rr_0} = \left(R_2^2 - R_1^2\right)\frac{r + r_0}{2rr_0} = 0{,}597 \text{ мкм}.$$

**Ответ:** $\lambda = 0{,}597$ мкм.

**Пример 12.2.** Монохроматический свет падает нормально на щель шириной $b = 11$ мкм. За щелью находится тонкая линза с фокусным расстоянием $f = 150$ мм, в фокальной плоскости которой расположен экран (рис. 12.3). Найти длину волны света, если расстояние между симметрично расположенными минимумами третьего порядка (на экране) равно $\Delta x_3 = 50$ мм. Построить график распределения интенсивности света на экране.

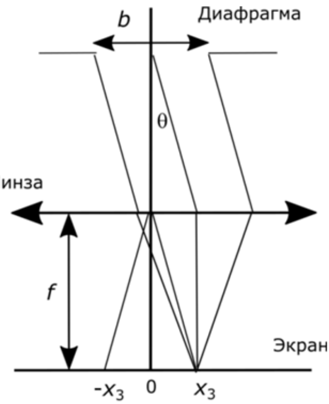



*Рис. 12.3.* К примеру 12.2

**Решение**

Расстояние от нулевого максимума до третьего $m = 3$ минимума равно $x_m = f \operatorname{tg} \theta_m$. Угол $\theta_m$ найдем из (12.2): $\theta_m = \arcsin(m\lambda / b)$. Таким образом, расстояние между минимумами $m = \pm 3$ равно $\Delta x_m = 2f \operatorname{tg} \arcsin(m\lambda / b)$. Воспользовавшись известным соотношением $\operatorname{tg} \arcsin x = x / \sqrt{1 - x^2}$, найдем $\lambda = \dfrac{b}{m} \dfrac{\Delta x_m}{\sqrt{4f^2 + \Delta x_m^2}} = 6{,}03 \cdot 10^{-7}$ м/с.

Для построения графика распределения интенсивности света на экране воспользуемся уравнением (12.4), а также связью между координатой $x$ (рис. 12.4) и углом дифракции $\theta$: $\theta = \operatorname{arctg}(x / f)$, т. е.

$$I(x) / I_0 = \left( \frac{\sin \eta(x)}{\eta(x)} \right)^2, \quad \eta(x) = \frac{\pi b}{\lambda} \sin\left( \operatorname{arctg}\left( \frac{x}{f} \right) \right).$$

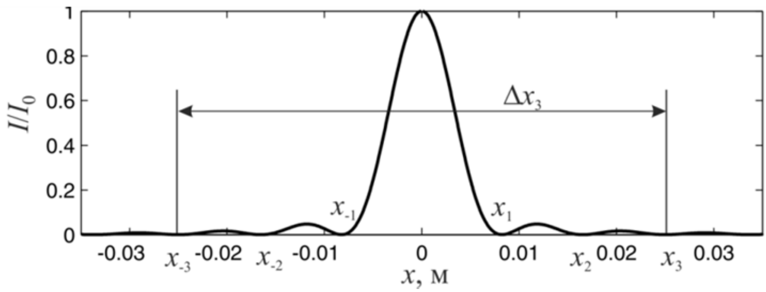



*Рис. 12.4.* Распределение интенсивности света при дифракции на щели

**Ответ:** $\lambda = 0,603$ мкм.

**Пример 12.3.** Определить длину волны света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2,2$ мкм, если угол между направлениями на главные максимумы первого и второго порядка $\Delta\theta = 15°$.

**Решение**

Согласно (12.5) $d\sin\theta_1 = m_1\lambda$ и $d\sin\theta_2 = m_2\lambda$, откуда $\sin\theta_1 = m_1\lambda / d$, $\sin\theta_2 = m_2\lambda / d$, где $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$. Подставляя эти выражения в известные тригонометрические тождества $\cos\theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_1}$, $\sin\theta_2 = \sin(\theta_1 + \Delta\theta) = \sin\theta_1\cos\Delta\theta + \sin\Delta\theta\cos\theta_1$, получим уравнение

$$m_2\lambda / d = (m_1\lambda / d)\cos\Delta\theta + \sin\Delta\theta\sqrt{1 - (m_1\lambda / d)^2},$$

из которого выразим

$$\lambda = \frac{d\sin\Delta\theta}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2\cos\Delta\theta}}.$$

Подставляя значения заданных параметров, получим $\lambda = 534$ нм.
**Ответ:** $\lambda = 534$ нм.

**Пример 12.4.** С помощью дифракционной решетки с периодом $d = 20$ мкм требуется разрешить дублет натрия ($\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм) в спектре второго порядка. При какой наименьшей длине решетки это возможно?

**Решение**

Длина дифракционной решетки равна $l = Nd$. Согласно формуле (12.12), разрешающая сила дифракционной решетки для данных спектральных линий есть

$$R = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right| = mN, \quad m = 2,$$

откуда

$$N = \frac{\lambda_2}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} = 490, \quad l = Nd = 0{,}0098 \text{ м.}$$

**Ответ:** $N = 490$, $l = 9{,}8$ мм.

## Задачи для аудиторной работы

**А12.1.** Радиус четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 3 мм. Определить радиус шестой зоны Френеля.

**А12.2.** На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет. Определить угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу. Длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм.

**А12.3.** Плоская световая волна падает нормально на диафрагму со щелью шириной 1,4 мм. Определить расстояния от щели до трех наиболее удаленных от нее точек на экране, в которых наблюдаются минимумы интенсивности. Длина волны $\lambda = 0{,}7$ мкм, расстояние от щели до экрана $l = 0{,}5$ м.

**А12.4.** На щель шириной 0,1 мм падает нормально пучок монохроматического света (длина волны 0,5 мкм). Дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся в фокальной плоскости линзы (фокусное расстояние 0,2 м). Найти расстояние между минимумами второго порядка.

**А12.5.** Сколько штрихов на каждый миллиметр содержит дифракционная решетка, если при наблюдении в монохроматическом свете максимум пятого порядка отклонен на 18°? Длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм.

**А12.6.** Какой наименьшей разрешающей силой должна обладать дифракционная решетка, чтобы с ее помощью можно было разрешить две спектральные линии калия (578, 580 нм)? Какое наименьшее число штрихов должна иметь эта решетка, чтобы разрешение линий было возможно в спектре второго порядка?

## Задание на дом

**В12.1.** На диафрагму с круглым отверстием диаметром 4 мм падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света. Длина волны света равна 0,5 мкм. Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии 1 м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения поместить экран?

**В12.2.** Точечный источник света, плоская диафрагма с круглым отверстием диаметром $d = 2$ мм и экран расположены так, как показано на рис. 12.5. Длина волны света равна 0,5 мкм, $a = 1$ м. Определить расстояние $b$ от экрана до диафрагмы, при котором отверстие открывало бы для точки $B$ три зоны Френеля.

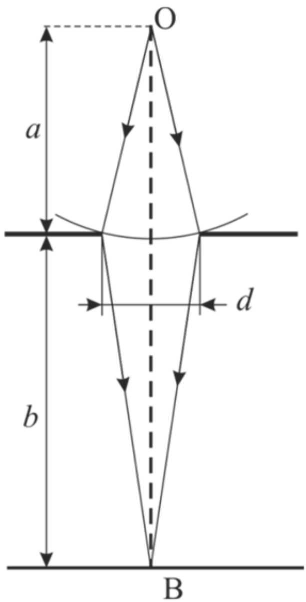


*Рис. 12.5.* К задаче В12.2

**В12.3.** На дифракционную решетку, содержащую 100 штрихов на 1 мм, падает нормально пучок монохроматического света. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум третьего порядка. Чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол 20°. Определить длину волны света.

**В12.4.** Дифракционная картина получена с помощью дифракционной решетки длиной 1,5 см и периодом 5 мкм. Определить, в спектре какого наименьшего порядка этой картины получаются раздельные изображения двух спектральных линий с разностью длин волн 0,1 нм, если линии лежат в крайней красной части спектра. Длина волны света равна 0,76 мкм.

**В12.5.** Угловая дисперсия дифракционной решетки для излучения некоторой длины волны (при малых углах дифракции) составляет 5 мин/нм. Определить разрешающую силу этой решетки для излучения той же длины волны, если длина решетки равна 2 см.

# ПРАКТИКУМ 13
# ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

*Поляризация электромагнитной волны* – характеристика, описывающая пространственную направленность векторов поля волны. *Состояние поляризации* плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси *z*, обычно связывают с типом движения вектора $\mathbf{E} = \boldsymbol{i}E_x + \boldsymbol{j}E_y$ (вектор $\mathbf{H}$ изменяется синхронно с $\mathbf{E}$ в перпендикулярном направлении), компоненты которого в каждой точке пространства являются гармоническими функциями времени:

$$E_x = E_{mx}\cos(\omega t - kz + \alpha),$$
$$E_y = E_{my}\cos(\omega t - kz + \alpha + \delta), \qquad (13.1)$$

где $\alpha$ – начальная фаза; $\delta$ – разность фаз между колебаниями $E_x$ и $E_y$. Исключая величину $\omega t - k\,z + \alpha$, для переменных $E_x$ и $E_y$ получим уравнение эллипса

$$\left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{my}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{mx}}\frac{E_y}{E_{my}}\cos\delta = \sin^2\delta, \qquad (13.2)$$

вписанного в прямоугольник со сторонами $2E_{mx}$ и $2E_{my}$, эту траекторию описывает на плоскости $xy$ проекция конца вектора $\mathbf{E}$. В системе координат, направленных вдоль главных полуосей эллипса (13.2), уравнение эллипса имеет канонический вид

$$\left(\frac{E'_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{E'_y}{b}\right)^2 = 1, \qquad (13.3)$$

а компоненты вектора $\mathbf{E} = \boldsymbol{i}'E'_x + \boldsymbol{j}'E'_y$ выражаются следующим образом:

$$E'_x = a\cos(\omega t - kz - \delta_0),$$
$$E'_y = \pm b\sin(\omega t - kz - \delta_0), \tag{13.4}$$

где $a$ и $b$ – амплитуды $E'_x$ и $E'_y$ компонент поля; $\delta_0$ – начальная фаза. В каждой точке пространства вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ вращается с частотой $\omega$ в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, а его конец описывает эллипс. Такая волна называется *эллиптически поляризованной*. При знаке «плюс» вращение происходит в направлении, определяемом правилом правого винта, ввинчиваемого вдоль оси $z$ (*правовинтовая поляризация*), а при знаке «минус» – в обратном направлении (*левовинтовая поляризация*). Отметим, что в оптике принято противоположное определение право- и левовинтовой поляризации.

В частном случае $a = b$ ($\delta = \pm\pi/2$, $E_{mx} = E_{my}$) эллипс превращается в окружность (имеет место *круговая поляризация волны*). Если же $a = 0$ или $b = 0$ $\left(\delta = n\pi,\ E_x / E_y = (-1)^n E_{mx} / E_{my},\ n = 0 \text{ или } n = 1\right)$, то волна называется *линейно поляризованной* (или *плоскополяризованной*) – поле волны все время остается параллельным одному и тому же направлению с углом наклона $\theta = \pm\operatorname{arctg}(E_{my} / E_{mx})$ к оси абсцисс. Эллиптически поляризованная волна есть векторная сумма двух взаимно перпендикулярных линейнополяризованных волн, а линейнополяризованная волна может быть получена сложением право- и левовинтовой волны круговой поляризации с одинаковыми соответствующими параметрами.

*Закон Брюстера*: при угле падения

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{13.5}$$

отраженный свет полностью линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, при этом (рис. 13.1).

$$i_B + r = \frac{\pi}{2}. \tag{13.6}$$

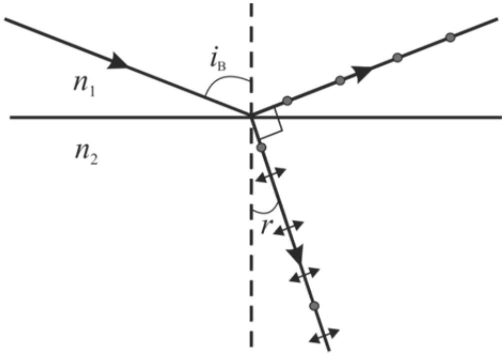



*Рис. 13.1.* Ход лучей при эффекте Брюстера

*Закон Малюса:*

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \tag{13.7}$$

где $I_0$ и $I$ – интенсивности линейно поляризованного света, падающего на анализатор и выходящего из него; $\alpha$ – угол между плоскостями поляризации падающего света и анализатора.

*Степень поляризации света*

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \tag{13.8}$$

где $I_{max}$ и $I_{min}$ – максимальная и минимальная интенсивность *частично поляризованного света*, пропускаемого анализатором при его повороте. Для плоскополяризованного света $I_{min} = 0$ и $P = 1$, для естественного света $I_{max} = I_{min}$ и $P = 0$.

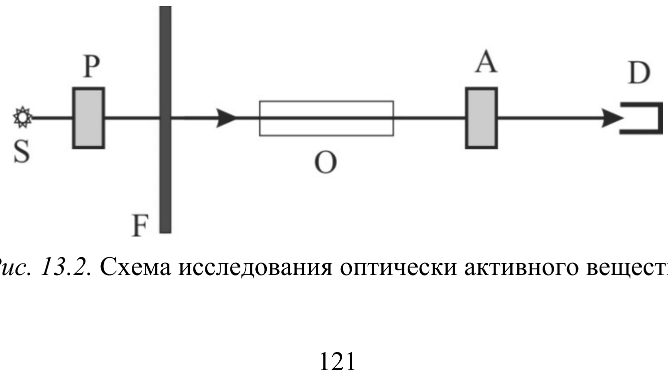



*Рис. 13.2.* Схема исследования оптически активного вещества

*Угол поворота* $\varphi$ *плоскости поляризации света оптически активными веществами толщиной* $l$ (рис. 13.2):

*в твердых телах*

$$\varphi = \beta l , \tag{13.9}$$

где $\beta$ – вращательная способность вещества (угол поворота на единицу длины);

*в растворах*

$$\varphi = [\beta] c l , \tag{13.10}$$

где $[\beta]$ – удельное вращение; $c$ – концентрация оптически активного вещества в растворе.

*Формулы Френеля* для интенсивности линейнополяризованного света:

а) отраженного от границы раздела двух диэлектриков:

$$I'_{\perp} = I_{m\perp} \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} ; \tag{13.11}$$

$$I'_{||} = I_{m||} \frac{\mathrm{tg}^2(i-r)}{\mathrm{tg}^2(i+r)} , \tag{13.12}$$

где $I'_{\perp}$ и $I'_{||}$ – интенсивности компонент, поляризованных перпендикулярно и параллельно плоскости отражения;

б) преломленного света на границе раздела двух диэлектриков

$$I''_{\perp} = I_{m\perp} \left( \frac{2\cos i \sin r}{\sin(i+r)} \right)^2 ; \tag{13.13}$$

$$I''_{||} = I_{m||} \left( \frac{2\cos i \sin r}{\sin(i+r)\cos(i-r)} \right)^2 , \tag{13.14}$$

где $I''_{\perp}$ и $I''_{||}$ – интенсивности компонент, поляризованных перпендикулярно и параллельно плоскости преломления.

*Коэффициенты отражения компонент плоскополяризованного света* (рис. 13.3):

$$\rho_{\perp} = I'_{\perp} / I_{m\perp} ; \qquad (13.15)$$

$$\rho_{||} = I'_{||} / I_{m||} . \qquad (13.16)$$

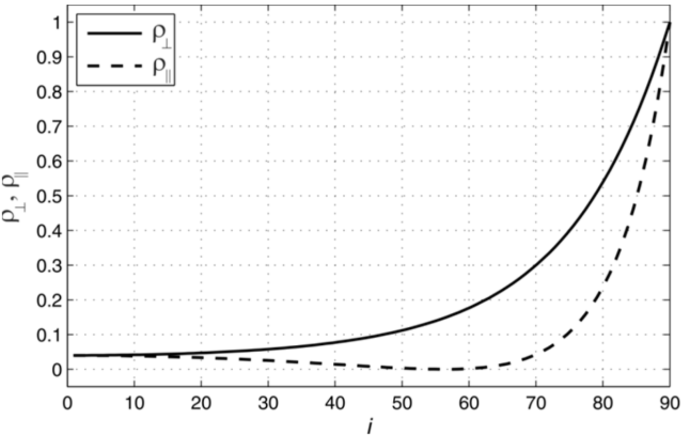



*Рис. 13.3*. Зависимость от угла падения коэффициентов отражения линейно-поляризованного света

*Коэффициент отражения неполяризованного света*

$$\rho = 0.5(\rho_{||} + \rho_{\perp}) . \qquad (13.17)$$

## Задачи для аудиторной работы

**Пример 13.1.** Угол Брюстера $i_B$ при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57°. Определить скорость света $\upsilon$ в этом кристалле.

**Решение**

Воспользуемся формулой (13.5) для определения относительного показателя преломления $n_{21} \equiv n_2 / n_1 = \mathrm{tg}\, i_B$. Показатель преломления воздуха практически равен единице $(n_1 \approx 1)$, а абсолютный показатель преломления среды $n_2 = c/\upsilon$, т. е. $\upsilon = c / \operatorname{tg} i_B = 1{,}94 \cdot 10^8$ м/с.

**Ответ:** $\upsilon = 1{,}94 \cdot 10^8$ м/с.

**Пример 13.2.** При падении естественного света на некоторый поляризатор проходит $\gamma_1 = I_1 / I_0 = 0{,}3$ исходного светового потока, а через два таких поляризатора проходит $\gamma_2 = I_2 / I_0 = 0{,}135$ исходного светового потока. Найти угол между плоскостями пропускания этих поляризаторов.

**Решение**

Пусть $\eta$ – коэффициент пропускания поляризатора, связанный с потерей интенсивности из-за отражения и поглощения, равный аналогичному коэффициенту анализатора. Отношение интенсивности прошедшего через поляризатор света к интенсивности падающего естественного света равно $I_1 / I_0 = \gamma_1$. С другой стороны, с учетом потерь в поляризаторе интенсивность на выходе связана с интенсивностью падающего света соотношением $I_1 = \eta(I_0 / 2)$, т. е. $\eta = 2\gamma_1$. Линейно-поляризованный свет интенсивностью $I_1$ попадает на такой же поляризатор (анализатор), причем интенсивность выходящего из него света, согласно закону Малюса, равна $I_2 = \eta I_1 \cos^2 \alpha$ или $I_2 = \eta^2 (I_0 / 2) \cos^2 \alpha$. Разделим последнее соотношение на $I_0$ и, учитывая условие $\gamma_2 = I_2 / I_0$, получим $2\gamma_2 = \eta^2 \cos^2 \alpha$. Подставляя $\eta = 2\gamma_1$, окончательно имеем $2\gamma_2 = 4\gamma_1^2 \cos^2 \alpha$, откуда $\alpha = \arccos\left(\sqrt{\gamma_2 / 2} / \gamma_1\right) = 30°$.

**Ответ:** $\alpha = 30°$.

**Пример 13.3.** Пластинку кварца толщиной $l_1 = 2$ мм, вырезанную перпендикулярно оптической оси кристалла, поместили между поляризатором и анализатором, в результате чего плоскость поляризации света повернулась на угол $\varphi_1 = 53°$. Определить, при какой толщине пластинки кварца данный монохроматический свет не будет проходить через анализатор.

**Решение**

Оптическая ось кристалла – это направление в кристалле, вдоль которого не происходит двойного лучепреломления. Согласно (13.9) $\varphi_1 = \beta l_1$ и $\varphi_2 = \beta l_2$, тогда $\varphi_2 / \varphi_1 = l_2 / l_1$. По условию задачи во втором случае поляризованный свет, падающий на анализатор, не проходит через него, т. е. согласно закону Малюса (13.7), угол $\varphi_2 = \pi / 2$ – прямой. При этом толщина кварцевой пластинки равна $l_2 = (\varphi_2 / \varphi_1) l_1 = (\pi / 2\varphi_1) l_1 = 3,4$ мм.

**Ответ:** $l_2 = 3,4$ мм.

**Пример 13.4.** Пучок естественного света падает на стеклянный шар ($n = 1,54$). Отраженный луч полностью поляризован. Найти угол $\gamma = \angle BAD$ между преломленным и падающим лучами в точке А.

**Решение**

Отраженный луч полностью поляризован, значит, луч падает на шар под углом Брюстера $\operatorname{tg} i_B = n$, а угол преломления найдем из (13.6): $r = \pi / 2 - i_B$. Искомый угол $\gamma$ найдем согласно рис. 13.4 как сумму углов $\angle BAO$ и $\angle OAD$: $\gamma = (\pi - i_B) + r = 1,5\pi - 2 i_B$.

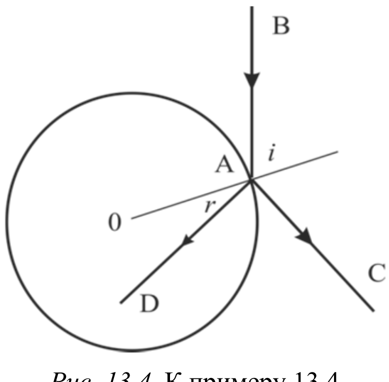



*Рис. 13.4.* К примеру 13.4

Подставляя численные значения исходных величин, получаем $i_B = 0,995$, $r = 0,576$, $\gamma = 2,723$ рад = 156°.

**Ответ:** $\gamma = 2,723$ рад = 156°.

**Пример 13.5.** Естественный свет падает под углом Брюстера на плоскую поверхность стекла ( $n = 1,50$ ). Найти коэффициент отражения света.

**Решение**

Согласно (13.17) коэффициент отражения неполяризованного света равен $\rho = 0,5(\rho_{||} + \rho_{\perp})$, где коэффициенты отражения $\rho_{\perp,||}$ заданы (13.15) и (13.16). При угле падения, равном углу Брюстера, интенсивность $I'_{||} = 0$, тогда с учетом (13.11) и (13.12) имеем

$$\rho = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(i_B - r)}{\sin^2(i_B + r)} = \frac{1}{2}\sin^2(i_B - r),$$

где $i_B = \operatorname{arctg}(n)$, а $r = \pi / 2 - i_B$. Подставляя численные значения исходных величин, получаем $i_B = 0,983$, $r = 0,588$, $\rho = 0,074$.

Проверку правильности результата можно оценить при помощи рис. 13.3 с учетом того, что при $i = i_B$ коэффициент отражения $\rho_{||} = 0$, а $\rho_{\perp} \approx 0,15$, тогда $\rho = 0,5\rho_{\perp} \approx 0,075$, что согласуется с приведенным точным расчетом.

**Ответ:** $\rho = 0,074$.

## Задачи для аудиторной работы

**А13.1.** На какой угловой высоте над горизонтом должно находиться Солнце, чтобы солнечный свет, отраженный от поверхности воды, был полностью поляризован?

**А13.2.** Во сколько раз ослабляется интенсивность естественного света, проходящего через два одинаковых поляризатора, плоскости пропускания которых образуют угол в 30°, если в каждом поляризаторе теряется 10 % интенсивности падающего на него света?

**А13.3.** Степень поляризации частично поляризованного света равна 50 %. Во сколько раз отличается максимальная интенсивность света, пропускаемого через анализатор, от минимальной интенсивности при вращении анализатора?

**А13.4.** Раствор глюкозы с массовой концентрацией $c = 280$ кг/м$^3$, содержащейся в стеклянной трубке, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света, проходящего через этот раствор, на угол 32°. Определить массовую концентрацию глюкозы в другом растворе глюкозы, налитом в трубку такой же длины, если он поворачивает плоскость поляризации на угол 24°.

**А13.5.** Определить коэффициент отражения света при нормальном падении естественного света на оконное стекло. Показатель преломления оконного стекла равен 1.52.

**А13.6.** Естественный свет падает под углом $i$ = 30° на поверхность озера. Найти коэффициент отражения света.

## Задание на дом

**В13.1.** Предельный угол полного отражения пучка света на границе жидкости с воздухом равен 43°. Определить угол Брюстера для падения луча из воздуха на поверхность этой жидкости.

**В13.2.** Угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора равен 45°. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол увеличить до 60°?

**В13.3.** Некоторый поляризатор пропускает $\gamma_1 = I_1 / I_0 = 0{,}3$ светового потока естественного света, а расположенный за ним анализатор, по устройству тождественный поляризатору, пропускает $\gamma_2 = 0{,}135$ светового потока. Найти угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора.

**В13.4.** На пути частично поляризованного света, степень поляризации которого равна 0,6, поставили анализатор так, что интенсивность света $I'$, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света $I''$, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол 30°?

**В13.5.** Угол поворота плоскости поляризации желтого света натрия при прохождении трубки с раствором сахара равен 40°. Длина трубки равна 15 см. Удельное вращение сахара равно 0,0117 рад · м$^2$/кг. Определить плотность раствора.

**В13.6.** Пучок естественного света падает на стеклянный шар, находящийся в воде. Определить коэффициент отражения света в зависимости от положения точки падения. Показатель преломления стекла принять равным 1,58.

## ПРАКТИКУМ 14

## ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

*Закон Кирхгофа.* Для любого тела, находящегося в термодинамическом равновесии со своим тепловым излучением, отношение его *испускательной способности* $r_{\nu,T}$ (*спектральной плотности энергетической светимости*) к *поглощательной способности* $a_{\nu,T}$ не зависит от природы тела и равно *испускательной способности абсолютно черного тела* при данной температуре и частоте $r^*_{\nu,T}$, т. е. $r_{\nu,T} / a_{\nu,T} = r^*_{\nu,T}$.

*Закон Стефана–Больцмана.* Энергетическая светимость $R^*_T$ абсолютно черного тела пропорциональна $T^4$:

$$R^*_T = \int_0^\infty r^*_{\nu,T} d\nu = \int_0^\infty r^*_{\lambda,T} d\lambda = \sigma T^4 , \tag{14.1}$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м$^2$ · К$^4$ – постоянная Стефана–Больцмана, $\lambda = c / \nu$, $c$ – скорость света.

*Законы Вина.* Испускательная способность $r^*_{\nu,T}$ абсолютно черного тела в области больших частот (малых длин волн) и низких температур имеет вид (рис. 14.1)

$$r^*_{\nu,T} = C_1 \nu^3 e^{-C_2 \frac{\nu}{T}} , \tag{14.2}$$

где $C_1$ и $C_2$ – некоторые постоянные, зависимость (14.2) является немонотонной функцией частоты, максимум которой смещается с температурой по *закону смещения Вина:*

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad \text{или} \quad \nu_{\max} = \frac{c}{b} T, \tag{14.3}$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К.

*Закон Рэлея–Джинса* справедлив в области малых частот (больших длин волн), см. рис. 14.1:

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 k_B T, \tag{14.4}$$

где $k_B$ – постоянная Больцмана. Экстраполяция (14.4) в область высоких частот ведет к так называемой ультрафиолетовой катастрофе (расходимости интеграла (14.1)):

$$\int_0^\infty r^*_{\nu,T} d\nu = \frac{2\pi}{c^2} k_B T \int_0^\infty \nu^2 d\nu \to \infty. \tag{14.5}$$

*Закон Планка.* М. Планк показал, что энергия светового излучения нагретого тела испускается порциями (квантами), равными

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega, \tag{14.6}$$

где $h = 2\pi\hbar = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

Испускательная способность абсолютно черного тела при любых частотах (и длинах волн) дается *формулой Планка* (см. рис. 14.1):

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \tag{14.7}$$

$$r^*_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}. \tag{14.8}$$

Предельные случаи:

а) $r^*_{\nu,T} \approx \dfrac{2\pi h}{c^2}\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$ при $h\nu / k_B T >> 1$ (*закон Вина*),

б) $r^*_{\nu,T} \approx \dfrac{2\pi}{c^2}\nu^2 k_B T$ при $h\nu / k_B T << 1$ (*закон Рэлея–Джинса*).

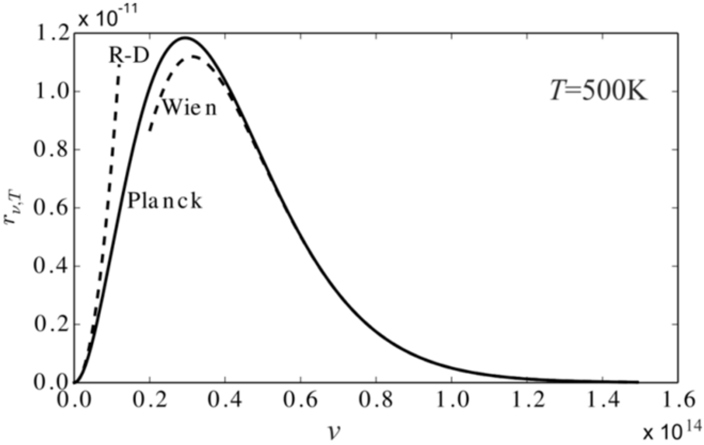



*Рис. 14.1.* Спектральное распределение испускательной способности абсолютно черного тела: R–D (Рэлей–Джинс) – (14.4), Wien (Вин) – (14.2), Plank (Планк) – (14.7)

*Фотоэффект*

*Внешним фотоэффектом* называют явление испускания электронов веществом под действием света. При *внутреннем фотоэффекте* фотовозбужденные электроны остаются внутри тела.

*Законы фотоэффекта*

1. При фиксированной частоте $\nu$ падающего света число фотоэлектронов, вырываемых из фотокатода в единицу времени, пропорционально интенсивности света.

2. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется частотой света $\nu$.

3. Для каждого вещества существует своя минимальная частота света $\nu_0$ (называемая *красной границей фотоэффекта*), ниже которой фотоэффект невозможен.

*Формула Эйнштейна для фотоэффекта*

$$h\nu = A + \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2 , \tag{14.9}$$

где $h\nu$ – энергия кванта света, выбивающего один фотоэлектрон; $\upsilon_{max}$ – максимальная скорость фотоэлектронов, выбитых светом частоты $\nu$; $A$ – работа выхода для данного вещества фотокатода.

*Красная граница фотоэффекта* $\nu_0$ определяется условием $\upsilon_{max} = 0$:

$$h\nu_0 = A . \tag{14.10}$$

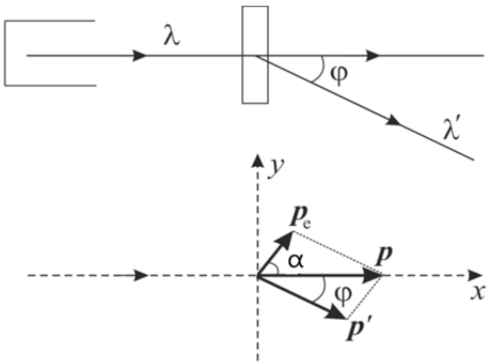



*Рис. 14.2*. Схема эффекта Комптона:

**p** – импульс падающего фотона; **p′** – импульс рассеянного фотона ( $\varphi$ – угол вылета фотона относительно направления падения); $\boldsymbol{p}_e$ – конечный импульс электрона ( $\alpha$ – угол вылета электрона)

*Эффект Комптона* (рис. 14.2) – уменьшение длины волны фотона при его рассеянии на свободном (или слабо связанном в атоме) электроне. В рассеянном излучении наряду с линией исходной длины волны $\lambda$ появляется линия с большей длиной волны $\lambda' > \lambda$ (*комптоновское смещение* $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ ):

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2(\varphi / 2) , \tag{14.11}$$

где $\varphi$ – угол рассеяния излучения; $\lambda_C = h / mc = 2{,}42631 \cdot 10^{-12}$ м – комптоновская длина волны; $m$ – масса электрона.

*Это следует из законов сохранения импульса* $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$, т. е.

$$\begin{cases} p = p' \cos\varphi + p_e \cos\alpha, \\ 0 = p' \sin\varphi - p_e \sin\alpha \end{cases} \tag{14.12}$$

*и энергии*

$$E_0 + \varepsilon = E + \varepsilon', \tag{14.13}$$

где $p = h / \lambda$ и $p' = h / \lambda'$ – импульсы падающего и рассеянного фотонов; $\varepsilon = cp = ch / \lambda$ и $\varepsilon' = cp' = ch / \lambda'$ – их энергии; $E_0 = mc^2$ и $E = c\sqrt{p_e^2 + m^2c^2}$ – начальная и конечная энергии электрона.

*Давление света*

$$p = \langle w \rangle (1 + \rho), \tag{14.14}$$

где $p$ – давление света; $\langle w \rangle = I / c = h\nu n$ – объемная плотность энергии излучения; $I = Nh\nu$ – интенсивность света; $N = nc$ – число фотонов, падающих на поверхность в единицу времени, $n$ – число фотонов в единице объема; $\rho$ – коэффициент отражения света.

**Пример 14.1.** Температура верхних слоев звезды Сириус в созвездии Большого Пса равна 10 кК. Определить поток энергии, излучаемой с поверхности этой звезды площадью $S = 1$ км$^2$.

**Решение**

Считаем, что звезда излучает как абсолютно черное тело и применяем формулу (14.1). Поток энергии излучения выражается через энергетическую светимость звезды как

$$\Phi_T = \int_S R_T dS = R_T S = \sigma T^4 S \approx 6 \cdot 10^{14} \text{ Вт.}$$

**Ответ:** $\Phi_T = 6 \cdot 10^{14}$ Вт.

**Пример 14.2.** Максимум спектральной плотности энергетической светимости самой яркой звезды в северном полушарии Арктур приходится на длину волны $\lambda_m = 580$ нм. Принимаем, что звезда излучает энергию как черное тело, определить температуру поверхности звезды.

**Решение**

Для расчета температуры звезды используем закон смещения Вина (14.3):

$$T = b / \lambda_m = 5 \cdot 10^3 \text{ К}.$$

**Ответ:** $T = 5 \cdot 10^3$ К.

**Пример 14.3.** Температура черного тела равна $T = 2 \cdot 10^3$ К. Определить: а) спектральную плотность энергетической светимости $r^*_{\nu,T}$ для длины волны $\lambda_0 = 600$ нм; б) энергетическую светимость в интервале длин волн от $\lambda_1 = 590$ нм до $\lambda_2 = 610$ нм.

**Решение**

В соответствии с формулой Планка (14.8):

а) $r^*_{\lambda_0,T} = \dfrac{2\pi hc^2}{\lambda_0^5} \dfrac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_0 k_B T}} - 1} \approx 6 \cdot 10^{10}$ Вт/м³;

б) энергетическая светимость в интервале длин волн от $\lambda_1$ нм до $\lambda_2$ нм дается интегралом

$$R_T = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} r^*_{\lambda,T} d\lambda ,$$

который не вычисляется в элементарных функциях, поэтому оценим его с помощью простейшего квадратурного метода прямоугольников:

$$R_T = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} r^*_{\lambda,T} d\lambda \approx \Delta\lambda \sum_{n=1}^{N} r^*_{\lambda_n,T} ,$$

где $\lambda_n = \lambda_1 + n\Delta\lambda$ , $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{N}$.

Вычисляем сумму, получаем $R_T = 587 \approx 590$ Вт.

**Примечание.** Построим график зависимости (14.8) спектральной плотности $r^*_{\lambda,T}$ от длины волны (рис. 14.3) и выделим рассматриваемый участок. Ширина участка очень мала по сравнению с характерной областью изменения энергетической светимости, в этой узкой спектральной области $r^*_{\lambda,T}$ является монотонной функцией, поэтому для оценки интеграла можно воспользоваться теоремой о среднем: $R_T \approx r^*_{0,5(\lambda_1+\lambda_2),T}\Delta\lambda = r^*_{\lambda_0,T}\Delta\lambda = 586 \approx 590$ Вт.

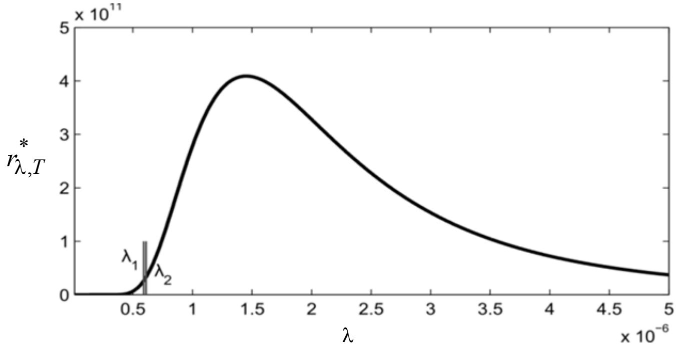



*Рис. 14.3.* График зависимости спектральной плотности

**Ответ:** а) $r^*_{\lambda_0,T} \approx 6\cdot 10^{10}$ Вт/м$^3$; б) $R_T \approx 590$ Вт.

**Пример 14.4.** На цинковую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны 220 нм (УФ-диапазон). Определить максимальную скорость фотоэлектронов.

**Решение**

Работа выхода для цинка равна $A = 3,74$ эВ $= 5,98\cdot 10^{-19}$ Дж (1 эВ – $1,6\cdot 10^{-19}$ Дж). Из формулы Эйнштейна (14.9) выразим максимальную скорость фотоэлектронов

$$\upsilon_m = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)} = 8,2\cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

**Ответ:** $\upsilon_m = 8,2\cdot 10^5$ м/с.

**Пример 14.5.** Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}15$ МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны изменилась на $\Delta\lambda = 3$ пм. Найти угол, под которым вылетел комптоновский электрон.

**Решение**

Абсолютное значение импульса фотона до рассеяния равно $p = h/\lambda = \varepsilon/c$, а после рассеяния равно $p' = h/\lambda' = h/(\lambda + \Delta\lambda)$. До рассеяния электрон покоился. После рассеяния электрон приобрел импульс $\mathbf{p}_e$, направленный под углом $\gamma$, а рассеянный фотон имеет импульс, направленный под углом $\varphi$ к направлению рассеиваемого фотона. Угол рассеяния фотона $\varphi$ найдем из (14.11): $\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2(\varphi/2)$, что дает $\varphi = 2\arcsin(\sqrt{\Delta\lambda / 2\lambda_C})$.

Запишем закон сохранения импульса (14.12) для процесса комптоновского рассеяния $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$. Спроецируем это уравнение на направление вектора $\mathbf{p}$: $p = p'\cos\varphi + p_e\cos\gamma$ и на перпендикулярное направление $0 = p'\sin\varphi - p_e\sin\gamma$. Имеем систему уравнений

$$p_e \sin\gamma = p'\sin\varphi,$$

$$p_e \cos\gamma = p - p'\cos\varphi,$$

из которой находим

$$\mathrm{tg}\,\gamma = p'\sin\varphi / (p - p'\cos\varphi).$$

Подставляем исходные значения параметров задачи, получаем $\gamma = 0{,}7$ рад $\approx 40°$.

**Ответ:** $\gamma \approx 40°$.

## Задачи для аудиторной работы

**А14.1.** Определить энергию, излучаемую за одну минуту из смотрового окна площадью 8 см$^2$ плавильной печи, если ее температура 1200 К.

**А14.2.** Температура верхних слоев Солнца равна 5,3 кК. Рассматриваем излучение Солнца как излучение абсолютно черного тела.

Определить длину волны, которой соответствует максимальная спектральная плотность энергетической светимости Солнца.

**А14.3.** Рассматривая излучение Солнца как тепловое излучение абсолютно черного тела, определить долю энергии этого излучения, приходящуюся на диапазон длин волн видимого света от 0,38 до 0,78 мкм. Температура верхних слоев Солнца равна 5300 К.

**А14.4.** Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение длиной волны: а) 300 нм, б) 200 нм? В случае фотоэффекта найти величину задерживающего потенциала для электронов. Работа выхода серебра 4,7 эВ.

**А14.5.** Определить угол рассеяния фотона, испытавшего соударение со свободным электроном, если изменение длины волны при рассеянии равно 3,62 пм.

**А14.6.** Параллельный пучок монохроматического света падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление 0,3 мкПа. Определить концентрацию фотонов в световом пучке. Длина волны света 662 нм.

**А14.7.** Поток энергии, излучаемый электрической лампой, равен 600 Вт. На расстоянии одного метра от лампы перпендикулярно падающим лучам расположено круглое плоское зеркальце диаметром 2 см. Принимаем, что излучение лампы одинаково во всех направлениях и что зеркальце полностью отражает падающий на него свет. Определить силу светового давления на зеркальце.

## Задание на дом

**В14.1.** Поток энергии, излучаемый из смотрового окна плавильной печи, равен 100 Вт. Определить температуру печи, если площадь окна равна 12 см$^2$.

**В14.2.** Вследствие изменения температуры черного тела максимум спектральной плотности сместился с 2,4 на 0,8 мкм. Как и во сколько раз изменилась энергетическая светимость $R_T^*$ тела и максимальная спектральная плотность $\left(r_{\lambda,T}^*\right)_{\max}$ энергетической светимости?

**В14.3.** Уединенный золотой шарик облучается ультрафиолетовым светом с длиной волны 250 нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик? Работа выхода для золота $A = 4{,}58$ эВ.

**В14.4.** На зеркальце с идеально отражающей поверхностью площадью 1,5 см$^2$ падает нормально свет от электрической дуги. Определить импульс, полученный зеркальцем, если поверхностная плотность потока излучения, падающего на зеркальце, равна 0,1 МВт/м$^2$. Продолжительность облучения – одна секунда.

**B14.5.** Монохроматическое излучение с длиной волны 500 нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой 10 нН. Определить число фотонов, ежесекундно падающих на поверхность.

**B14.6.** Фотон с энергией 0,4 мэВ рассеялся под углом 90° на свободном электроне. Определить энергию рассеянного фотона и кинетическую энергию электрона отдачи.

# ПРАКТИКУМ 15

# ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ, СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

*Корпускулярно-волновой дуализм*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Энергия $\varepsilon$ | Частота $\nu$ | $\varepsilon = h\nu$ | (15.1) |
| Импульс $\mathbf{p}$ | Волновой вектор $\mathbf{k}$ | $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ | (15.2) |

*Длина волны де Бройля*

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}. \tag{15.3}$$

*Кинетическая энергия нерелятивистской частицы*

$$\varepsilon = E_K = \frac{p^2}{2m}. \tag{15.4}$$

*Волна де Бройля (волновая функция) свободной частицы*

$$\Psi(x,t) = A\exp\left(-i\left(\frac{\varepsilon}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)\right). \tag{15.5}$$

*Фазовая скорость $\upsilon_{ph}$ волны де Бройля*

$$\upsilon_{ph} = \frac{\varepsilon}{p}. \tag{15.6}$$

*Групповая скорость волнового пакета*

$$\upsilon_g = \frac{d\varepsilon}{dp}. \tag{15.7}$$

*Соотношения неопределенностей Гейзенберга*

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar, \quad \Delta E \Delta \tau \geq \hbar. \tag{15.8}$$

*Энергия релятивистской частицы*

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 + E_K. \tag{15.9}$$

*Связь между импульсом и кинетической энергией* $E_K$ *релятивистской частицы*

$$pc = \sqrt{E_K (E_K + 2mc^2)}. \tag{15.10}$$

**Пример 15.1.** Найти дебройлевскую длину волны протона, если при попадании в поперечное к скорости магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл он движется по окружности радиуса $R = 23$ мм.

**Решение**

Радиус ларморовской окружности, по которой движется протон в поперечном магнитном поле, равен $R = \upsilon / \omega$ (см. практикум 2), где угловая скорость протона есть $\omega = qB / m_p$, $m_p$ – масса, $q$ – заряд протона. В соответствии с (15.3)

$$\lambda = h / p = h / m_p \upsilon = h / m_p \omega R = h / qBR = \lambda = 1{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

**Ответ:** $\lambda = 1{,}8 \cdot 10^{-12}$ м.

**Пример 15.2.** Найти длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

**Решение**

Воспользуемся правилом квантования Н. Бора: момент импульса электрона $l_n$ на $n$-й орбите радиусом $r_n$ кратен постоянной Планка $l_n = r_n p_n = n\hbar$. Радиус орбиты электрона в основном состоянии $n = 1$ равен боровскому радиусу $r_1 = 0,53$ Å. Тогда $p_1 = \hbar / r_1$, и согласно (15.3): $\lambda = h / p_1 = 2\pi r_1 = 3,3 \cdot 10^{-10}$ м.

**Ответ:** $\lambda = 3,3 \cdot 10^{-10}$ м.

**Пример 15.3.** Параллельный пучок моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью шириной $b = 1$ мкм. Определить скорость этих электронов, если на экране, отстоящем от щели на расстояние $l = 50$ см, ширина центрального дифракционного максимума равна $\Delta x = 0,36$ мм.

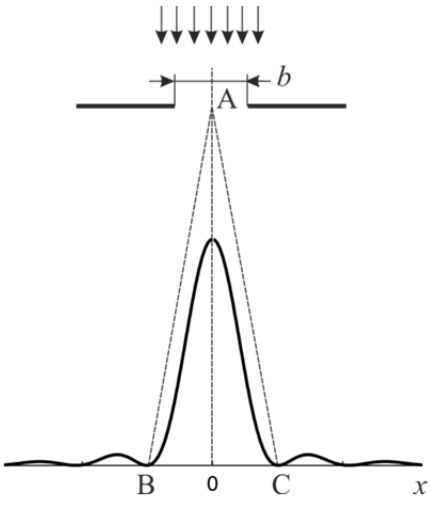



*Рис. 15.1.* К примеру 15.3

**Решение**

Пусть $x$ – координата на экране, отсчитываемая от середины дифракционной картины в поперечном направлении. Ширина центрального дифракционного максимума равна разности координат дифракционных минимумов первого порядка. Как и в волновой оптике, углы дифракции $\theta_n$ для них определяются условиями (12.2) $b\sin\theta_n = \pm n\lambda$ при $n=1$. Отсюда дебройлевская длина волны электрона $\lambda = b\sin\theta_1$. Эти углы также можно выразить из треугольника $ABC$ (см. рисунок, точка $A$ расположена в середине щели, точки $B$ и $C$ – в минимумах первого порядка на экране), поскольку $\mathrm{tg}\,\theta_n = B0/A0$, где $B0 = \Delta x/2$, $A0 = l$, откуда $\theta_n = \mathrm{arctg}(0{,}5\Delta x/l)$.

Скорость электрона массой $m$ в соответствии с (15.3) равна $\upsilon = h/m\lambda$, поэтому окончательно имеем

$$\upsilon = nh/mb\sin(\mathrm{arctg}(0{,}5\Delta x/l)).$$

Так как $\Delta x \ll l$, можно записать

$$\upsilon \approx 0{,}5\Delta xnh/mbl.$$

Подставляем численные значения заданных величин и получаем $\upsilon = 2\cdot 10^6$ м/с.

**Ответ:** $\upsilon = 2\cdot 10^6$ м/с.

**Пример 15.4.** Оценить относительную ширину спектральной линии, если известны время жизни атома водорода ($\tau = 10^{-8}$ с) в возбужденном состоянии и длина волны излучаемого фотона $\lambda = 0{,}12$ мкм.

**Решение**

Из-за взаимодействия атома с полем электромагнитных волн любое возбужденное состояние электрона в атоме имеет энергетическую ширину $\Delta E$, которая определяет конечное время жизни $\tau$ атома в возбужденном состоянии. С учетом последнего соотношения неопределенностей (15.8) получаем $\Delta E \ge \hbar/\tau$, а из (15.1) имеем $E = hc/\lambda$. Из чего следует, что относительная ширина уровня энергии возбужденного атома равна $\Delta E/E \ge \hbar\lambda/hc\tau = \lambda/2\pi c\tau$. Подставляем численные значения заданных величин и получаем $\Delta E/E \approx 6\cdot 10^{-9}$. Эта оценка соответствует спектральной линии серии Лаймана для перехода из первого возбужденного состояния в основное.

**Ответ:** $\Delta E/E \approx 6\cdot 10^{-9}$.

**Пример 15.5.** Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером $l = 0,2$ нм.

**Решение**

Полагаем, что внутри потенциальной ямы электрон движется с нерелятивистской скоростью, тогда его кинетическая энергия равна $E_K = p^2 / 2m$. Эта энергия минимальна в основном энергетическом состоянии квантовой потенциальной ямы шириной $l$. В основном энергетическом состоянии импульс частицы $p$ по порядку величины равен неопределенности импульса частицы $\Delta p$, которая ограничена снизу соотношением неопределенности (15.8): $\Delta p \geq \hbar / \Delta x$, где $\Delta x \approx l$ – неопределенность координаты частицы. Таким образом, $p = p_{\min} \approx \Delta p = \hbar / \Delta x = \hbar / l$, поэтому минимальная кинетическая энергия частицы может быть оценена формулой $E_{K\min} = \hbar^2 / 2ml^2$. Подставляем численные значения заданных величин и получаем $E_{K\min} \approx 1,5 \cdot 10^{-19}$ Дж $\approx 0,9$ эВ.

**Примечание.** Иногда соотношение неопределенности записывают в виде $\Delta x \Delta p \geq \hbar / 2$, тогда ответ задачи будет в четыре раза меньше. Результат оценивает порядок искомой величины.

**Ответ:** $E_{K\min} \approx 0,9$ эВ.

**Пример 15.6.** Свободный электрон в момент $t = 0$ локализован в области $\Delta x_0 = 0,1$ нм (порядок размера атома). Оценить ширину области локализации электрона спустя одну наносекунду.

**Решение**

Квантовая частица описывается волновым пакетом, ширина которого определяет область локализации частицы (область ВС, см. рисунок). Волновой пакет свободной частицы представляет собой суперпозицию волн де Бройля (15.5). Расплывание волнового пакета связано с тем, что разные компоненты этой суперпозиции имеют разные энергии (15.4) $\varepsilon = p^2 / 2m$ и импульсы $p$, т. е. движутся с разными фазовыми скоростями (15.6) $\upsilon_{ph} = \varepsilon / p = p / 2m$. Ширину области локализации частицы в момент времени $t$ оцениваем величиной $\Delta x = \Delta x_0 + \Delta \upsilon_{ph}\ t$, где $\Delta \upsilon_{ph} = \Delta p / 2m$ – разброс фазовых скоростей монохроматических компонент внутри волнового пакета, а $\Delta p$ – разброс (неопределенность) импульсов этих компонент. Разброс импульсов оцениваем из соотношения неопределенностей в начальный момент времени $\Delta p = \hbar / \Delta x_0$. Таким образом,

$$\Delta x = \Delta x_0 + \Delta \upsilon_{ph}\ t = \Delta x_0 + \Delta p t / 2m = \Delta x_0 + \hbar t / 2m \Delta x_0 .$$

Подставляя численные значения параметров, получаем $\Delta x = 5,8 \cdot 10^{-4}$.

**Ответ:** $\Delta x \approx 0,58$ мм.

## Задачи для аудиторной работы

**А15.1.** Электрон движется по окружности радиусом 0,5 см в однородном магнитном поле с индукцией 8 мТл. Определить длину волны де Бройля электрона.

**А15.2.** Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась со 100 до 50 пм?

**А15.3.** При каком значении кинетической энергии дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны $\lambda_C = h / mc = 0,00243$ нм?

**А15.4.** Электрон с кинетической энергией 15 эВ находится в металлической пылинке диаметром 2 мкм. Оценить относительную неточность, с которой может быть определена скорость электрона.

**А15.5.** Ускоряющее напряжение на электронно-лучевой трубке 10 кВ. Расстояние от электронной пушки до экрана 20 см. Оценить неопределенность координаты электрона на экране, если диаметр диафрагмы для электронного пучка равен 0,5 мм.

## Задание на дом

**В15.1.** Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его длина волны де Бройля была равна 0,1 нм?

**В15.2.** Параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с, падает нормально на диафрагму с длинной щелью шириной $b = 1$ мкм. Проходя через щель, электроны рассеиваются и образуют дифракционную картину на экране, расположенном на расстоянии $l = 0{,}5$ м от щели и параллельном плоскости диафрагмы. Определить линейное расстояние между первыми дифракционными минимумами $\Delta x_1$.

**В15.3.** Во сколько раз дебройлевская длина волны частицы меньше неопределенности его координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 %?

**В15.4.** Приняв, что минимальная энергия нуклона в ядре равна 10 МэВ, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

**В15.5.** Использовав соотношения неопределенностей (15.6), оценить ширину энергетического уровня в атоме водорода, находящегося: 1) в основном состоянии; 2) в возбужденном состоянии (время жизни атома в возбужденном состоянии равно 0,1 нс).

# ПРАКТИКУМ 16

# РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

## СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

## ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

*Одномерное нестационарное уравнение Шрёдингера*

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2}+U(x)\Psi\,. \qquad (16.1)$$

*Одномерное стационарное уравнение Шрёдингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+U(x)\psi(x)=E\psi(x) \qquad (16.2)$$

при

$$\Psi(x,t)=\psi(x)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right). \qquad (16.3)$$

*В области, в которой* $E>U(x)=U_0=\text{const}$, *частные решения* (16.2) имеют вид

$$\psi(x)=A\exp\left(\pm i\frac{p}{\hbar}x\right), \qquad (16.4)$$

где $p=\hbar k=\sqrt{2m(E-U_0)}$.

*Вероятность* $dW$ *обнаружить частицу в области от* $x$ *до* $x+dx$ равна

$$dW(x) = |\,\psi(x)\,|^2\, dx\,. \qquad (16.5)$$

*Вероятность обнаружить частицу* $W(a,b)$ *в области от* $a$ *до* $b$ равна

$$W(a,b) = \int_a^b |\,\psi(x)\,|^2\, dx\,. \qquad (16.6)$$

*Граничные условия непрерывности волновой функции и ее производной* на границе раздела $x = d$ двух сред, где происходит скачок потенциальной энергии частицы:

$$\begin{gathered}\psi_1(d) = \psi_2(d), \\ \frac{d}{dx}\psi_1(d) = \frac{d}{dx}\psi_2(d).\end{gathered} \qquad (16.7)$$

Для стационарных состояний *с дискретным спектром энергии в потенциальных ямах* необходимо выполнение *граничных условий на бесконечности* $\psi(x \to \pm\infty) = 0$.

*Граничное условие на бесконечно высокой вертикальной потенциальной стенке при* $x = d$

$$\psi(d) = 0\,. \qquad (16.8)$$

*Волновая функция и энергия частицы в стационарных состояниях внутри потенциальной ямы с бесконечно высокими вертикальными потенциальными стенками*

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{d}}\sin k_n x\,; \qquad (16.9)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2md^2}\,, \qquad (16.10)$$

где $k_n = \pi n / d$, $d$ – ширина ямы, $n = 1, 2, 3, ...$

*Для симметричной потенциальной ямы конечной глубины*

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & |x| > a, \\ U_1, & |x| \le a, \end{cases} \tag{16.11}$$

где $a = d/2$, $d$ – ширина ямы, $U_1 < U_0$, $U_0 - U_1$ – глубина ямы.
*Уравнение для определения энергий стационарных состояний* $U_1 < E_n < U_0$ (*спектральное уравнение*)

$$\operatorname{tg} ka = \frac{2k\kappa}{k^2 - \kappa^2}, \tag{16.12}$$

где

$$\kappa = \hbar^{-1}\sqrt{2m(U_0 - E_n)}; \tag{16.13}$$

$$k = \hbar^{-1}\sqrt{2m(E_n - U_1)}, \tag{16.14}$$

*а волновые функции стационарных состояний имеют вид*

$$\psi(x) = \begin{cases} B_0 \exp(\kappa(x+a), & x < -a \\ B_0\left(\cos k(x+a) + \dfrac{\kappa}{k}\sin k(x+a)\right), & |x| \le a \\ B_0 \exp(-\kappa(x-a)), & x > a, \end{cases}, \tag{16.15}$$

где

$$B_0^{-2} = \left(1 + \left(\frac{\kappa}{k}\right)^2\right)\left(a + \frac{1}{\kappa}\right). \tag{16.16}$$

*Энергия частицы в стационарных состояниях гармонического осциллятора* $\left(\text{т. е. в потенциальной яме вида } U(x) = \dfrac{kx^2}{2}\right)$:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{16.17}$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

*Волновые функции четырех нижних по энергии стационарных состояний гармонического осциллятора*

$$\psi_0(z) = a_0 \exp\left(-z^2 / 2\right); \tag{16.18}$$

$$\psi_1(z) = a_1 z \exp\left(-z^2 / 2\right); \tag{16.19}$$

$$\psi_2(z) = a_2 \left(2z^2 - 1\right)\exp\left(-z^2 / 2\right); \tag{16.20}$$

$$\psi_3(z) = a_3 \left(z^3 - 3z / 2\right)\exp\left(-z^2 / 2\right), \tag{16.21}$$

где $z = x / \lambda$, $\lambda = \sqrt{\hbar / m\omega}$, $a_0 = 1 / \sqrt{\lambda\sqrt{\pi}}$, $a_1 = \sqrt{2 / \lambda\sqrt{\pi}}$, $a_2 = 1 / \sqrt{2\lambda\sqrt{\pi}}$, $a_3 = \sqrt{4 / 3\lambda\sqrt{\pi}}$.

**Пример 16.1.** Электрон находится в состоянии $n = 2$ в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими потенциальными стенками. При этом максимальное значение плотности вероятности $dW(x) / dx$ равно $\rho_{\max}$. Найти ширину ямы $d$, а также энергию частицы в данном состоянии.

**Решение**

Выразим $d$ и $E_n$ через $\rho_{\max}$. Плотность вероятности распределения по координате для частицы в $n$-м стационарном состоянии найдем из (16.5) и (16.9): $\rho(x) = dW(x) / dx = |\psi_n(x)|^2 = \dfrac{2}{d}\sin^2 k_n x$. В точках экстремумов плотности вероятности $d\rho / dx = 0$, т. е. $\dfrac{d\rho(x)}{dx} = = \dfrac{4}{d} k_n \sin k_n x \cos k_n x = \dfrac{2}{d} k_n \sin 2k_n x = 0$, что выполняется при $2k_n x = \pi l$, где $x \le d$, а $l$ – натуральное число. Таким образом, экстремумы $\rho(x)$ находятся в точках $x = x_l = \pi l / 2k_n = ld / 2n \le d$. В максимумах $\dfrac{d^2\rho(x)}{dx^2} = \dfrac{4}{d} k_n^2 \cos 2k_n x < 0$; для $n = 2$ это имеет место при $l = 1$ и при

$l = 3$ (рис. 16.1), т. е. в точках $x_1 = d / 4$ и $x_3 = 3d / 4$, а $\rho_{max} = \dfrac{2}{d}$. Следовательно, в рассматриваемом случае $d = 2 / \rho_{max}$, а энергия стационарного состояния согласно (16.10) равна

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2md^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8m} \rho_{max}^2 .$$

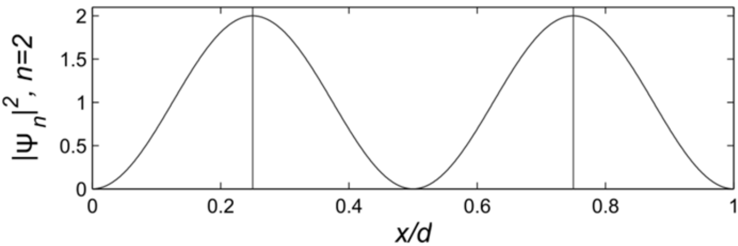



*Рис. 16.1.* К примеру 16.1

**Ответ:** $d = 2 / \rho_{max,(1,3)}$ и $E_2 = \dfrac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \rho_{max}^2$ .

**Пример 16.2.** Электрон находится в основном состоянии ($n = 1$) в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $d = 3$ нм с абсолютно непроницаемыми стенками. Найти вероятность пребывания частицы в области от $a = d / 3$ до $b = 2d / 3$.

**Решение**

Согласно (16.6), для частицы в $n$-м стационарном состоянии вероятность ее нахождения в заданной области дается интегралом

$$W_n(a,b) = \frac{2}{d} \int_a^b \sin^2 k_n x dx = \frac{2}{k_n d} \int_{k_n a}^{k_n b} \sin^2 y dy ,$$

где $k_n = \pi n / d$. Последний интеграл легко берется: $\int \sin^2 y dy = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\sin 2y$, что дает общую формулу для любых $n$ и $0 \le a \le b \le d$:

$$W_n(a,b) = \frac{2}{k_n d}\left(\frac{k_n(b-a)}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2k_n b - \sin 2k_n a)\right) =$$

$$= \frac{(b-a)}{d} - \frac{1}{2\pi n}(\sin 2\pi nb/d - \sin 2\pi na/d).$$

Подставляя численные значения заданных величин, получаем $W_n(a,b) = 0{,}61$.

**Ответ:** $W_n(a,b) = 0{,}61$.

**Пример 16.3.** Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. В состоянии, описываемом волновой функцией $\psi = Ax(x-d)$, найти распределение вероятностей различных значений энергии и ее среднее значение.

**Решение**

Разложим волновую функцию $\psi$ в ряд Фурье по полному базису $\{\psi_n\}$ собственных волновых функций (16.9) $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{d}}\sin k_n x$ системы

$$\psi(x) = \sum_n c_n e^{-ik_n x}\psi_n(x),$$

где $c_n = \int_0^d \psi_n^*(x)\psi(x)dx = A\int_0^d \psi_n^*(x)x(x-d)dx = I_1 - I_2$;

$$I_1 = A\sqrt{\frac{2}{d}}\int_0^d x^2 \sin k_n x dx \quad \text{и} \quad I_2 = A\sqrt{2d}\int_0^d x \sin k_n x dx.$$

Интегралы легко берутся, так как $\int x\sin x dx = \sin x - x\cos x$ и $\int x^2 \sin x dx = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$ (см. [9]), поэтому имеем

$$I_1 = \sqrt{\frac{2}{d}} \frac{Ad^3}{(n\pi)^3}\Big((2-\pi^2 n^2)(-1)^n - 2\Big),\ I_2 = -\frac{Ad^2}{k^2 d^2}\sqrt{2d}\cdot \pi n(-1)^n .$$

Таким образом, спектральные коэффициенты разложения равны

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{d}} \frac{Ad^3}{(n\pi)^3}\Big((2-\pi^2 n^2)(-1)^n - 2\Big) + \frac{Ad^2}{\pi n}\sqrt{2d}\cdot(-1)^n =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{d}} \frac{Ad^3}{\pi n}\left(\frac{(2-\pi^2 n^2)(-1)^n - 2}{\pi^2 n^2} + (-1)^n\right) = \sqrt{\frac{2}{d}} \frac{Ad^3}{\pi^3 n^3}(2(-1)^n - 2). \quad (16.22)$$

Постоянную нормировки $A$ найдем из условия $\int\limits_0^d \psi^*(x)\psi(x)dx = 1$, тогда $|A|^2 \int\limits_0^d x^2(x-d)^2 dx = 1$, т. е. $|A|^2 \frac{d^5}{30} = 1$, откуда $A = \sqrt{\frac{30}{d^5}}$. Подставляем $A$ в (16.22), получаем

$$c_n = 4\sqrt{15}\frac{(-1)^n - 1}{\pi^3 n^3}. \quad (16.23)$$

Распределение вероятностей стационарных состояний $p_n = |c_n|^2$ есть $p_n = 240\frac{(1-(-1)^n)^2}{\pi^6 n^6}$.

Найдем среднюю энергию $\langle E\rangle = \sum\limits_n p_n E_n$, где $E_n$ даются выражением (16.10):

$$\langle E\rangle = \frac{240}{\pi^6}\frac{\hbar^2\pi^2}{2md^2}\sum_n \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4} = \frac{480}{\pi^4}\frac{\hbar^2}{md^2}\sum_n \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Ряд в правой части суммируется (см. [5]): $\sum\limits_n \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

В итоге получаем, что средняя энергия равна

$$\langle E \rangle = \frac{10}{\pi^2} \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} = \frac{10}{\pi^2} E_1 .$$

**Ответ:** $p_n = |c_n|^2 = 240 \frac{(1-(-1)^n)^2}{\pi^6 n^6}$, $\langle E \rangle = \frac{10}{\pi^2} \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} = \frac{10}{\pi^2} E_1$.

**Пример 16.4.** Найти вероятность того, что электрон во втором возбужденном состоянии гармонического осциллятора находится в пределах классически допустимой области своего движения.

**Решение**

Согласно (16.6), вероятность нахождения электрона в классически доступной области равна

$$W_n = \int\limits_{-x_n}^{x_n} |\psi_n(x)|^2 \, dx ,$$

где $x_n$ – координата классической точки поворота, которая определяется условием $U(x) = E_n$, т. е. $0{,}5kx^2 = E_n$, откуда $x_n = \mp\sqrt{2E_n / k}$. Для второго возбужденного состояния осциллятора волновая функция имеет вид (16.20), тогда

$$W_2 = \int\limits_{-x_2}^{x_2} |\psi_2(x)|^2 \, dx = 2\lambda a_2^2 \int\limits_0^{z_2} (2z^2 - 1)^2 e^{-z^2} dz = I_1 + I_2 + I_3 .$$

Здесь $z_2 = x_2 / \lambda = \sqrt{5}$, $\lambda = \sqrt{\hbar / m\omega}$. Учитывая (П16.1)–(П16.3), получаем для $I_{1-3}$ следующие выражения:

$$I_1 = 8\lambda a_2^2 \int\limits_0^{z_2} z^4 e^{-z^2} dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( 3\sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(z_2) - (4z_2^3 + 6z_2) e^{-z_2^2} \right),$$

$$I_2 = -8\lambda a_2^2 \int_0^{z_2} z^2 e^{-z^2} dz = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(z_2) - 2z_2 e^{-z_2^2}\right),$$

$$I_3 = 2\lambda a_2^2 \int_0^{z_2} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\mathrm{erf}(z_2),$$

где $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2} dt$ – функция ошибок (П16.4), на рис. 16.2 приведен ее график.

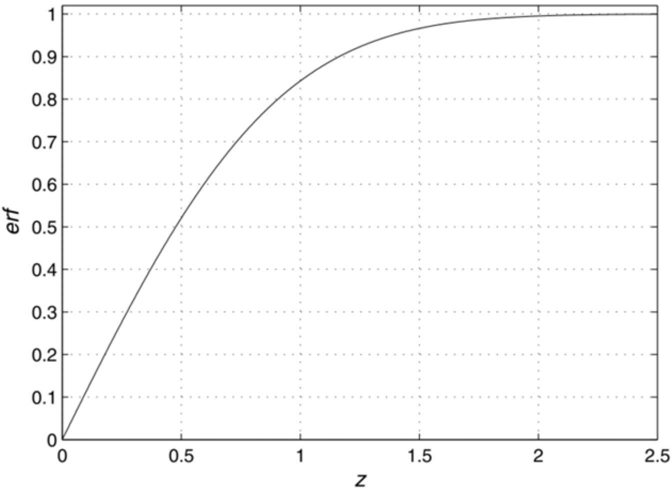



*Рис. 16.2.* Функция ошибок $\mathrm{erf}(z)$. Отдельные значения функции ошибок:

$\mathrm{erf}(1) = 0{,}8427$, $\mathrm{erf}(\sqrt{3}) = 0{,}9857$, $\mathrm{erf}(\sqrt{5}) = 0{,}9984$,

$\mathrm{erf}(\sqrt{7}) = 0{,}9998$

Подставляя численные значения исходных величин, получаем $W_2 \approx 0{,}905$ (см. рис. 16.3).

**Примечание.** Вычислим приближенно интеграл

$$W_2 = \int\limits_{-x_2}^{x_2} |\psi_2(x)|^2\, dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^{N} |\psi_2(x_i)|^2 = \frac{\Delta z}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{N} (2z_i^2 - 1)^2 e^{-z_i^2} ,$$

где $z_i = i\Delta z$ , $\Delta z = \Delta x / \lambda$ . Для $N = 500$ значение $W_2 \approx 0,904$ , а для $N = 1000$ значение $W_2 \approx 0,905$ .

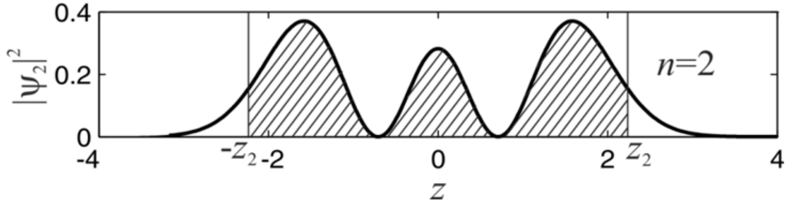



*Рис. 16.3.* Квадрат модуля стационарной $|\psi_2(z)|^2$ функции гармонического осциллятора. Штрихованная область между $[-z_2, z_2]$ определяет вероятность $W_2$ нахождения электрона в классически доступной области

**Ответ:** $W_2 \approx 0,905$ .

## Задачи для аудиторной работы

**А16.1.** Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Найти ширину ямы, если разность энергий между уровнями с $n_1 = 2$ и $n_2 = 3$ равна 0,3 эВ.

**А16.2.** Электрон находится в основном состоянии $n = 1$ в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими потенциальными стенками. При этом максимальное значение координатной плотности вероятности равно $\rho_{\max} = 10^9$ м$^{-1}$ . Найти ширину ямы $d$ и энергию частицы в данном состоянии.

**А16.3.** Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $d$ с бесконечно высокими потенциальными стенками. Модуль пространственной производной волновой функции $|d\psi / dx|$ у края ямы равен $\alpha$ . Найти энергию частицы в данном состоянии.

**А16.4**. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими потенциальными стенками. Найти энергетическую плотность уровней $dN / dE$, т. е. их число на единичный интервал энергии, в зависимости от $E$. Вычислить плотность уровней для $E = 1.0$ эВ и $d = 1.0$ см.

**А16.5.** Электрон находится в симметричной прямоугольной потенциальной яме (16.11) в основном состоянии. Найти энергию этого основного состояния, если на краях ямы значение модуля волновой функции вдвое меньше, чем в середине ямы. Принять, что $U_0 = 5$ эВ, $U_1 = 0$ эВ, $d = 2a = 2$ нм.

**А16.6**. Найти вероятность того, что квантовый гармонический осциллятор в основном состоянии ($n = 0$) находится в пределах классически допустимой области своего движения.

## Задание на дом

**В16.1.** Электрон находится в одномерном потенциальном ящике (потенциальная яма с бесконечно высокими вертикальными стенками) шириной 0,5 нм. Определить наименьшую разность энергетических уровней электрона в ящике. Ответ выразить в электронвольтах.

**В16.2.** Изобразить на графике вид первых трех собственных стационарных функций, описывающих состояние электрона в потенциальном ящике шириной *d*, а также изобразить квадрат модуля этих волновых функций. Установить соответствие между числом узлов волновой функции и квантовым числом – номером стационарного состояния.

**В16.3.** Электрон находится в потенциальном ящике. В каких точках плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях одинакова? Вычислить плотность вероятности для этих точек.

**В16.4.** Электрон находится в потенциальном ящике шириной $d$ в низшем энергетическом состоянии. Определить вероятность нахождения электрона в интервале $d / 4$, равноудаленном от стенок.

**В16.5.** Электрон находится в потенциальном ящике шириной $d$ в некотором стационарном состоянии. Получить выражение для среднего значения координаты $\langle x \rangle$ электрона.

**В16.6**. Найти вероятность того, что электрон в первом возбужденном состоянии гармонического осциллятора находится в пределах классически допустимой области своего движения.

## Приложение к практикуму 16

$$\int_0^y \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(y)\,; \tag{П16.1}$$

$$\int_0^y x^2 \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erf}(y) - \frac{1}{2}y\exp(-y^2)\,; \tag{П16.2}$$

$$\int_0^y x^4 \exp(-x^2)dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\mathrm{erf}(y) - \left(\frac{1}{2}y^3 + \frac{3y}{4}\right)\exp(-y^2)\,, \tag{П16.3}$$

где $\mathrm{erf}(y)$ – функция ошибок,

$$\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-t^2}dt\,. \tag{П16.4}$$

# ПРАКТИКУМ 17
# ОДНОМЕРНОЕ РАССЕЯНИЕ

*Одномерное рассеяние частицы* описывается волновыми функциями стационарных состояний *с непрерывным спектром энергии,* которые являются решениями одномерного стационарного уравнения Шрёдингера (16.2) (как части решения задачи (16.2)–(16.7)) *при соответствующих граничных условиях на бесконечности* $\psi(x \to \pm\infty)$.

1. *Рассеяние частицы, падающей слева на прямоугольную потенциальную ступеньку высоты* $U_0$

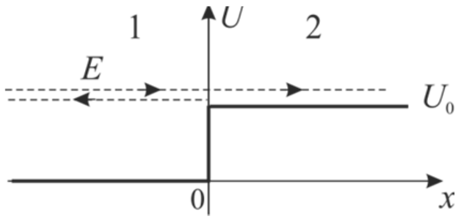



*Рис. 17.1.* Рассеяние на потенциальной ступеньке

А) *Случай* $E > U_0$ *(надбарьерное рассеяние)*

При $x < 0$ (т. е. и при $x \to -\infty$) волновая функция частицы равна суперпозиции *падающей* и *отраженной* плоских волн:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x)\,, \tag{17.1}$$

а в области $x > 0$ (т. е. и при $x \to +\infty$) имеется лишь уходящая вправо *прошедшая* плоская волна

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x)\,, \tag{17.2}$$

где $k_1 = \hbar^{-1}\sqrt{2mE}$ , $k_2 = \hbar^{-1}\sqrt{2m(E - U_0)}$ . Применяя граничные условия (16.7) при $x = d = 0$, выражаем амплитуды $B_1$ отраженной и $A_2$ прошедшей волн через амплитуду $A_1$ падающей волны:

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_1 , \; A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_1 . \tag{17.3}$$

Абсолютные величины *плотностей потоков вероятности* для падающей $j_{A1}$, отраженной $j_{B1}$ и прошедшей $j_{A2}$ волны равны:

$$j_{A1} = \frac{\hbar k_1}{m} |A_1|^2, \quad j_{B1} = \frac{\hbar k_1}{m} |B_1|^2, \quad j_{A2} = \frac{\hbar k_2}{m} |A_2|^2, \tag{17.4}$$

где $\hbar k_1/m$ – скорости падающей и отраженной, а $\hbar k_2/m$ – прошедшей волны.

*Коэффициентами отражения* $R$ и *прохождения* $T$ называют отношения плотностей потоков:

$$R = \frac{j_{B1}}{j_{A1}}, \qquad T = \frac{j_{A2}}{j_{A1}} . \tag{17.5}$$

Их сумма (полная вероятность рассеяния) равна единице:

$$R + T = 1 . \tag{17.6}$$

Из (17.3) и (17.4) следуют выражения *коэффициентов надбарьерного отражения* и *прохождения* частицы для *прямоугольной потенциальной ступеньки высотой* $U_0$ :

$$R = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2, \qquad T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} . \tag{17.7}$$

**Примечание.** Формулы (17.1)–(17.7) справедливы и при $U_0 < 0$ (отрицательная ступенька).

Б) *Случай* $E < U$ *(подбарьерное рассеяние)*

При $x < 0$ (т. е. и при $x \to -\infty$ ), как и в случае А, волновая функция частицы равна суперпозиции *падающей* и *отраженной* плоской волны:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x), \tag{17.8}$$

а в области $x > 0$ (т. е. и при $x \to +\infty$ ) имеется только экспоненциально затухающее вправо решение (*туннельное проникновение в область потенциальной ступеньки*):

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(-\kappa_2 x), \tag{17.9}$$

где $k_1 = \hbar^{-1}\sqrt{2mE}$ , $\kappa_2 = \hbar^{-1}\sqrt{2m(U_0 - E)}$ . Величина $l_{\text{eff}} = 0{,}5\kappa_2^{-1}$ называется *эффективной глубиной туннельного проникновения*.

$$B_1 = \frac{k_1 - i\kappa_2}{k_1 + i\kappa_2} A_1, \qquad A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + i\kappa_2} A_1. \tag{17.10}$$

В этом случае $R = 1$, $T = 0$ (так как $\psi_2(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ ).

2. *Рассеяние частицы, падающей слева на прямоугольный потенциальный барьер высотой* $U_0$ *и шириной* $d$ (рис. 17.2).

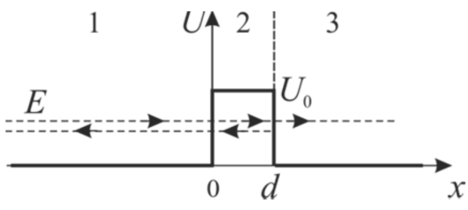



*Рис. 17.2*. Рассеяние на потенциальном барьере

*Прямоугольный потенциальный барьер выделяет три области* (рис. 17.3): $x < 0$, $0 < x < d$ и $d < x$. Слева при $x < 0$ (т. е. и при $x \to -\infty$ ) волновая функция частицы равна суперпозиции *падающей* и *отраженной* плоской волны (17.1):

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x), \tag{17.11}$$

где $k_1 = \hbar^{-1}\sqrt{2mE}$ , справа при $x > d$ (т. е. и при $x \to +\infty$ ) имеется лишь уходящая вправо *прошедшая* плоская волна типа (17.2):

$$\psi_3(x) = A_3 \exp(ik_3 x), \quad k_3 = k_1 = \hbar^{-1}\sqrt{2mE}, \qquad (17.12)$$

но в области внутри барьера волновая функция частицы равна суперпозиции двух частных решений:

А) *в случае* $E > U_0$ (*надбарьерного рассеяния с отражением*)

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x), \qquad (17.13)$$

где $k_2 = \hbar^{-1}\sqrt{2m(E - U_0)}$ ;

Б) *в случае* $E < U_0$ (*подбарьерного рассеяния с туннельным прохождением*)

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(-\kappa_2 x) + B_2 \exp(-\kappa_2 x), \qquad (17.14)$$

где $\kappa_2 = \hbar^{-1}\sqrt{2m(U_0 - E)}$ .

Применяя граничные условия (16.7) при $x = 0$ и при $x = d$ , можно выразить амплитуды $B_1$ отраженной и $A_3$ прошедшей волны (а также амплитуды $A_2$ и $B_2$) через амплитуду $A_1$ падающей волны, а затем найти *коэффициенты прохождения* и *отражения* частицы при рассеянии *на прямоугольном потенциальном барьере высотой* $U_0$ *и шириной* $d$ .

А) *В случае* $E > U_0$ надбарьерного прохождения с отражением

$$T = \left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 k_2 d\right)^{-1}, \quad R = 1 - T. \qquad (17.15)$$

Формула (17.15) справедлива и при $U_0 < 0$ (рассеяние на потенциальной яме глубиной $|U_0|$).

Б) *В случае* $E < U_0$ подбарьерного отражения с туннельным прохождением

$$T = \left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\kappa_2}{k_1} + \frac{k_1}{\kappa_2}\right)^2 \operatorname{sh}^2 \kappa_2 d\right)^{-1}, \quad R = 1 - T. \qquad (17.16)$$

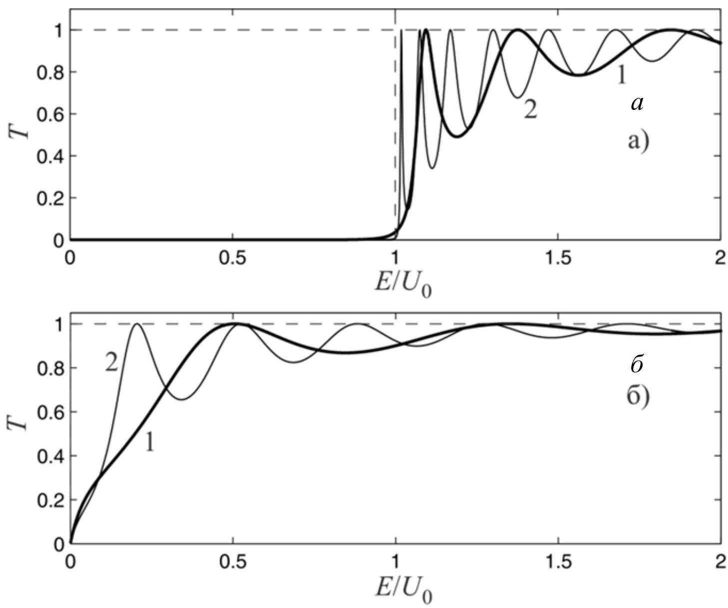



*Рис. 17.3.* Коэффициент прохождения частицы через прямоугольный потенциальный барьер (*а*) и потенциальную яму (*б*) в зависимости от энергии частицы:

*а* – линия *1* – $U_0 = 1$ эВ, $d = 20$ Å; линия *2* – $U_0 = 5$ эВ, $d = 20$ Å;
*б* – линия *1* – $U_0 = -1$ эВ, $d = 20$ Å; линия *2* – $U_0 = -5$ эВ, $d = 20$ Å

**Пример 17.1**. Электрон с энергией $E = 10$ эВ падает на потенциальную ступеньку высотой $U_0 = 6$ эВ. Чему равна вероятность того, что электрон отразится от барьера?

**Решение**

Вероятность отражения равна коэффициенту отражения $R$, который в данном случае дается выражением (17.7), где для низкого потенциального барьера $E > U_0$, волновые числа равны $k_1 = \hbar^{-1}\sqrt{2mE}$, $k_2 = \hbar^{-1}\sqrt{2m(E - U_0)}$. Таким образом,

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2E} - \sqrt{2(E - U_0)}}{\sqrt{2E} + \sqrt{2(E - U_0)}}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{(1 - U_0 / E)}}{1 + \sqrt{1 - U_0 / E)}}\right)^2.$$

Подставляя заданные значения $E$ и $U_0$, получаем $R = 0{,}0507$.

**Ответ:** $R = 0.0507$.

**Пример 17.2.** Ширина прямоугольной потенциальной ямы равна $d = 0{,}5$ нм, а глубина $U_0 = 1$ эВ. Найти коэффициент отражения электрона от потенциальной ямы при энергии падающего электрона $E_1 = 0{,}25$ эВ.

**Решение**

Воспользуемся формулой (17.15) для надбарьерного прохождения электрона, рассматривая яму как потенциальный барьер с отрицательной высотой:

$$T = \left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 k_2 d\right)^{-1},$$

где $k_1 = \hbar^{-1}\sqrt{2mE}$, $k_2 = \hbar^{-1}\sqrt{2m(E + U_0)}$. Подставляя численные значения исходных параметров задачи, получаем $T = 0{,}943$. Из условия (17.6) найдем коэффициент отражения $R = 1 - T = 0{,}057$ (рис. 17.4).

**Замечание.** Классическая частица при $E > U_0$ пролетела бы область потенциального барьера со 100 %-й вероятностью, соответственно коэффициент отражения был бы равен нулю.

**Ответ:** $R = 0{,}057$.

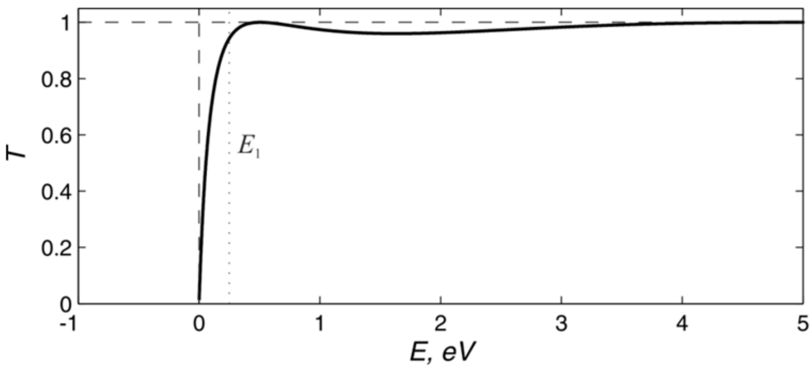



*Рис. 17.4.* Зависимость вероятности прохождения $T$ электрона над ямой от энергии электрона, $E_1 = 0{,}25$ эВ

**Пример 17.3.** Ширина прямоугольного потенциального барьера равна $d = 0{,}5$ нм, а высота $U_0 = 1$ эВ. Найти коэффициент отражения электрона от потенциального барьера при энергии падающего электрона $E_1 = 0{,}75$ эВ.

**Решение**

Воспользуемся формулой (17.16) для подбарьерного прохождения электрона:

$$T = \left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sinh^2 k_2 d\right)^{-1},$$

где $k_1 = \hbar^{-1}\sqrt{2mE}$, $k_2 = \hbar^{-1}\sqrt{2m(U_0 - E)}$. Подставляем численные значения исходных параметров задачи, получаем $T = 0{,}21$. Из (17.6) найдем коэффициент отражения $R = 1 - T = 0{,}79$ (рис. 17.5).

**Замечание 1.** В курсах физики часто приводят приближенную квазиклассическую формулу для подбарьерного прохождения

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_0^d \sqrt{2m(U(x) - E)}\,dx\right), \tag{17.17}$$

где $D_0$ считается величиной, приблизительно равной единице. Для прямоугольного потенциального барьера она дает

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}d\right). \tag{17.18}$$

В условиях нашей задачи имеем $D \approx 0,077$, этот результат отличается от точного результата формулы (17.6) в $T / D \approx 2,8$ раза, что говорит о неприменимости (17.17) к рассеянию квантовой частицы на прямоугольном барьере. Дело в том, что одним из условий квазиклассичности движения является требование гладкости потенциальной энергии как функции координат, но на границах прямоугольного барьера потенциальная энергия имеет разрыв.

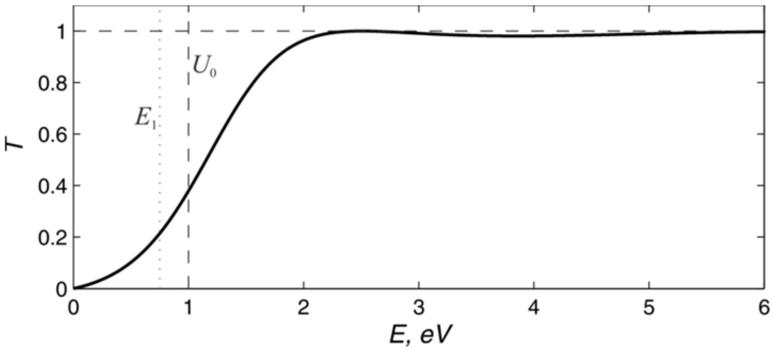



*Рис. 17.5.* Зависимость вероятности прохождения $T$ электрона через потенциальный барьер от энергии $E$ электрона, $E_1 = 0,75$ эВ

**Замечание 2.** Классическая частица со 100 %-й вероятностью отразилась бы от барьера при $E < U_0$ и пролетела область потенциального барьера при $E > U_0$, квантовая частица при $E < U_0$ туннелирует через потенциальный барьер, а при $E > U_0$ может отразиться от потенциального барьера.

**Ответ:** $R = 0,79$.

## Задачи для аудиторной работы

**А17.1.** На потенциальную ступеньку высотой 5 эВ падает электрон с дебройлевской длиной волны $\lambda_1 = 0,5$ нм. Определить длину волны де Бройля прошедшего электрона в области ступеньки.

**А17.2.** Моноэнергетический пучок электронов с энергией $E = 5$ эВ падает на потенциальную ступеньку. Определить высоту потенциальной ступеньки $U_0$, если известно, что отражается 10 % падающих электронов.

**А17.3.** Электрон с энергией 4,5 эВ падает на потенциальную ступеньку высотой 5 эВ. Определить эффективную глубину проникновения электрона в область барьера.

**А17.4.** Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной 0,4 нм. Высота потенциального барьера $U_0 = 5$ эВ. Найти коэффициент прозрачности барьера, если энергия электрона равна: а) $0,9U_0$; б) $1,1U_0$.

**А17.5.** Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной 0,5 нм. Высота потенциального барьера $U_0 = 5$ эВ. При какой минимальной энергии электрон проходит барьер без отражения?

## Задание на дом

**В17.1.** Электрон обладает энергией 6 эВ. Определить, во сколько раз изменяется его длина волны де Бройля $\lambda$, групповая $\upsilon_g$ и фазовая скорость $\upsilon$ при прохождении через потенциальную ступеньку высотой 5 эВ.

**В17.2.** Вычислить коэффициент прохождения электрона с энергией 10 эВ через потенциальный барьер высотой 9,95 эВ.

**В17.3.** Найти вероятность прохождения электрона через прямоугольный потенциальный барьер высотой $U$ при энергии $E$ = 4 эВ, если ширина барьера равна 0,25 нм. Высота потенциального барьера 5 эВ.

**В17.4.** Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной 0,5 нм. Высота потенциального барьера $U_0 = 2,5$ эВ. При какой минимальной энергии электрон проходит барьер без отражения?

**В17.5.** Ширина $d$ прямоугольного потенциальной ямы равна 0,5 нм, а глубина $U_0$ равна 1 эВ. Найти энергию проходящего через яму электрона $E_1$, при которой коэффициент отражения электрона от потенциальной ямы будет максимальным.

## ПРАКТИКУМ 18

# СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ. ЭЛЕКТРОН В АТОМЕ ВОДОРОДА И В ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМАХ

*Трехмерное стационарное уравнение Шрёдингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \qquad (18.1)$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа; $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия частицы.

*Волновая функция и энергия частицы* в стационарных состояниях внутри *потенциального ящика* в форме параллелепипеда *с ребрами длиной* $a$, $b$, $d$ и бесконечно высокими вертикальными потенциальными стенками $\left(\text{в декартовой системе координат } x, y, z \text{ оператор Лапласа имеет вид } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$:

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abd}} \sin k_{n_1} x \sin k_{n_2} y \sin k_{n_3} z\,; \qquad (18.2)$$

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_{n_1}^2 + k_{n_2}^2 + k_{n_3}^2\right) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{d^2}\right), \qquad (18.3)$$

где $k_{n_1} = \pi n_1 / a$, $k_{n_2} = \pi n_2 / b$, $k_{n_3} = \pi n_1 / d$, т. е. *стационарные состояния нумеруются наборами трех целых чисел* $n_1$, $n_2$, $n_3 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Для частицы *в центрально-симметричной потенциальной яме* $U(\mathbf{r}) = U(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$ – расстояние от силового центра, *в сферической системе координат* $r, \theta, \varphi$, в которой оператор Лапласа имеет вид $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, *стационарные состояния также нумеруются наборами трех целых чисел* $n, l, m_l$. Обычно их называют: $n$ *– главное квантовое число*, $l$ *– орбитальное квантовое число* и $m_l$ *– магнитное квантовое число*. *Волновые функции* этих стационарных состояний можно представить в виде произведений

$$\psi_{nlm_l}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm_l}(\theta,\varphi), \tag{18.4}$$

где радиальная часть $R_{nl}(r)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{nl}(r)}{dr}\right) + \left(\frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R_{nl}(r) = 0, \tag{18.5}$$

которое связано с радиальной частью оператора Лапласа и позволяет найти функции $R_{nl}(r)$ и собственные значения энергии стационарных состояний $E = E_{nlm_l}$, а угловая часть $Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm_l}(\theta,\varphi); \tag{18.6}$$

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta,\varphi) = \hbar m_l Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{18.7}$$

где $\hat{L}^2$ – оператор квадрата момента импульса (он пропорционален угловой части оператора Лапласа), а $\hat{L}_z$ – оператор проекции момента импульса на полярную ось $z$, они могут быть заданы выражениями

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right], \quad \hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{18.8}$$

Функции $Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$ называют *сферическими функциями*, их свойства таковы, что при каждом фиксированном значении $l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ возможны только $2l+1$ значений величины $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$.

*Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром в атоме водорода* $(Z = 1)$ *и в водородоподобных атомах* $(Z > 1)$

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}, \qquad (18.9)$$

где $Z$ – число протонов в ядре атома.

*Боровский радиус* (радиус первой боровской орбиты)

$$a_B = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2}, \qquad a_B = 0{,}528 \cdot 10^{-10}\ \text{м}. \qquad (18.10)$$

*Энергия электрона в основном состоянии атома водорода*

$$E_1 = -\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{me^4}{2\hbar^2} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_B}, \qquad E_1 \approx -13{,}6\ \text{эВ}. \qquad (18.11)$$

*Величину энергии* $|E_1| \approx 13{,}6$ эВ называют *ридбергом* и обозначают Ry.

*Энергии стационарных состояний* (в спектроскопии их называют *термами*) *в водородоподобных атомах*

$$E_n = \frac{Z^2}{n^2}E_1, \qquad (18.12)$$

где $n = 0,\ 1, 2, 3, \ldots$ – главное квантовое число.

*Радиус боровской электронной орбиты в n-м стационарном состоянии водородоподобного атома*

$$a_{Bn} = \frac{n^2}{Z}a_B \qquad (18.13)$$

по порядку величины *близок к наиболее вероятному и среднему расстоянию электрона в n-м стационарном состоянии от ядра атома.*

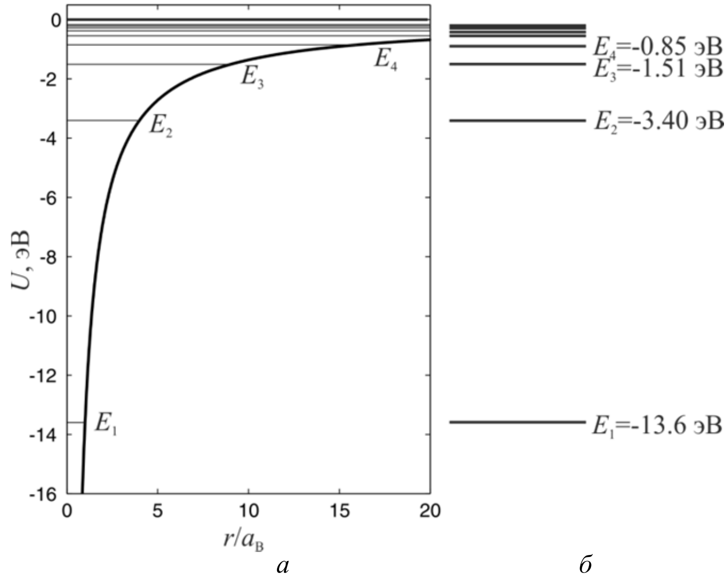



*Рис. 18.1.* Уровни энергии в кулоновской потенциальной яме атома водорода (*а*); термы (*б*)

*При переходе электрона* между двумя стационарными состояниями атома водорода с энергиями $E_{n_1}$ и $E_{n_2}$ *излучается или поглощается фотон частоты* $\omega = 2\pi\nu$, определяемой *правилом Бора–Ридберга*:

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2} = |E_1|\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \tag{18.14}$$

эта частота близка к резонансной частоте вынужденных колебаний электронной волновой функции при взаимодействии с полем электромагнитной волны.

*Квантовые числа электрона в стационарном состоянии в атоме водорода:*

1) *главное квантовое число* $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ нумерует *электронные оболочки* и задает *энергию* электрона

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2}; \tag{18.15}$$

2) *орбитальное квантовое число* $l$ может принимать $n$ значений для каждой $n$-й оболочки $l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, оно нумерует *подоболочки* $n\,l$ и задает *квадрат модуля момента импульса* электрона

$$\mathbf{L}^2 = \hbar^2 l(l+1)\,; \tag{18.16}$$

3) *магнитное (азимутальное) квантовое число* $m_l$ может принимать $2l+1$ значений для каждой $l$-й орбитали $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$, оно позволяет нумеровать *орбитали* (*облака стационарных состояний*) $n\,l\,m_l$ и задает *проекцию момента импульса* электрона на полярную ось $z$:

$$L_z = \hbar m_l\,, \tag{18.17}$$

а также связанную с ним проекцию магнитного момента

$$\mu_z = \gamma L_z = \mu_B m_l\,, \tag{18.18}$$

где $\gamma = e/2m$ – *магнитомеханическое* (*гиромагнитное*) *отношение*, а $\mu_B = \hbar\gamma = e\hbar/2m = 0{,}927\cdot 10^{-23}$ Дж/Тл – *магнетон Бора*;

3) *спиновое квантовое число* $s_z = \pm 1/2$ задает *проекцию спина* – собственного момента импульса электрона

$$S_z = \hbar s_z = \pm\hbar/2 \tag{18.19}$$

и входит в *полный набор квантовых чисел,* нумерующих состояния $n\,l\,m_l\,s_z$.

*Проекция спинового магнитного момента* электрона

$$\mu_{sz} = 2\gamma S_z = 2\mu_B s_z\,. \tag{18.20}$$

*Всего на* $n$-*й оболочке* может находиться до $2\sum\limits_{l=0}^{n-1}(2l+1) = 2n^2$ электронов.

*Оболочки*

$$
\begin{array}{rccccc}
n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & K & L & M & N & O \\
2n^2 = & 2 & 8 & 18 & 32 & 50
\end{array}
\qquad (18.21)
$$

*Подоболочки*

$$
\begin{array}{rcccccc}
l = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & s & p & d & f & g & h \\
2(2l+1) = & 2 & 6 & 10 & 14 & 18 & 22
\end{array}
\qquad (18.22)
$$

Примеры *радиальных и угловых частей волновых функций электрона* $\psi_{nlm_l}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$ *в низших по энергии стационарных состояниях атома водорода*:

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_B^{3/2}} e^{-r/a_B}\,; \qquad (18.23)$$

$$R_{20}(r) = \frac{2}{(2a_B)^{3/2}}\left(1 - \frac{r}{2a_B}\right) e^{-r/2a_B}\,; \qquad (18.24)$$

$$R_{21}(r) = \frac{2}{\sqrt{3}(2a_B)^{3/2}} \frac{r}{2a_B} e^{-e^{-r/2a_B}}\,; \qquad (18.25)$$

$$R_{30}(r) = \frac{2}{(3a_B)^{3/2}}\left(1 - 2\frac{r}{3a_B} + \frac{2}{3}\left(\frac{r}{3a_B}\right)^2\right) e^{-r/3a_B}\,; \qquad (18.26)$$

*s*-состояния: $\quad l = 0, m = 0 \quad Y_{00}(\theta,\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}\,; \qquad (18.27)$

*p*-состояния: $\quad l = 1, m = 0 \quad Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta\,; \qquad (18.28)$

$$l=1, m=+1 \quad Y_{1,1}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}; \tag{18.29}$$

$$l=1, m=-1 \quad Y_{1,-1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}. \tag{18.30}$$

*Вероятность нахождения* электрона стационарного состояния $\psi_{nlm_l}(\mathbf{r})$ *в элементе объема* $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ равна

$$dW = |\psi_{nlm_l}(\mathbf{r})|^2 \, dV = \left|\psi_{nlm_l}(r,\theta,\varphi)\right| r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi. \tag{18.31}$$

*Вероятность нахождения* такого электрона *в объеме* $V$ есть

$$W(V)=\int\limits_V |\psi_{nlm_l}(\mathbf{r})|^2 \, dV. \tag{18.32}$$

Для сферически симметричных *s-состояний вероятность нахождения электрона в шаровом слое* от $r$ до $r+dr$ равна

$$dW_{n00}(r) = |\psi_{n00}|^2 \, 4\pi r^2 dr, \tag{18.33}$$

а *плотность вероятности нахождения электрона в этом слое равна*

$$w_{n00}(r) \equiv dW(r)_{n00}(r)/dr = 4\pi r^2 |\psi_{n00}|^2. \tag{18.34}$$

В векторной модели вводят *орбитальные момент импульса*

$$L=\sqrt{\left|\mathbf{L}^2\right|}=\hbar\sqrt{l(l+1)}, \tag{18.35}$$

и *магнитный момент* электрона

$$\mu_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \tag{18.36}$$

а также *спиновые момент импульса*

$$L_s = \sqrt{\left|\mathbf{S}^2\right|}=\hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad s=1/2 \tag{18.37}$$

и *магнитный момент* электрона

$$\mu_s = 2\mu_B\sqrt{s(s+1)}\,. \qquad (18.38)$$

Квантовая теория атома водорода была разработана в 1926 году В. Паули и Э. Шрёдингером, она уточнила и дополнила результаты полуклассической теории атома водорода Н. Бора 1913 года, основанной на двух постулатах.

1. Электрон в атоме может находиться только в квантовых стационарных состояниях, каждому из которых отвечает определенная энергия. В стационарном состоянии атом не излучает электромагнитных волн. Энергия стационарного состояния может быть найдена из предположенного Н. Бором *квазиклассического условия квантования момента импульса электрона* $m\upsilon r = n\hbar$, если считать, что движение электрона происходит по круговой орбите под действием силы кулоновского притяжения к ядру $\dfrac{m\upsilon^2}{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Ze^2}{r^2}$ с энергией $E = \dfrac{m\upsilon^2}{2} - \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Ze^2}{r}$. Из системы трех последних уравнений легко получить выражения (18.10)–(18.13).

2. Излучение и поглощение электромагнитных волн атомом происходит при скачкообразном переходе электрона из одного стационарного состояния в другое, при этом частота волны $\omega = 2\pi\nu$ определяется соотношением (18.14).

**Пример 18.1.** Электрон находится в кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Сторона куба равна $l = 2$ Å. 1. Определить кратность вырождения уровня с энергией $E = 7\hbar^2\pi^2 / ml^2$. 2. Вычислить разность энергий между четвертым и третьим уровнем.

**Решение**

В модели кубической потенциальной ямы энергия стационарного состояния характеризуется квантовыми числами $n_1,\ n_2,\ n_3 = 0,\ 1,\ 2,...$ и равна (18.3),

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right).$$

1. Энергия $E = 7\hbar^2\pi^2 / ml^2$ достигается при $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 14$. Сразу видно, что $n_1, n_2, n_3 \le 3$ и последнее уравнение в целых числах решаются путем комбинаторного перебора всех возможностей. Решение достигается только при разных перестановках целых чисел: $(n_1, n_2, n_3) =$ = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3). Всего имеется шесть таких перестановок: $E_{1,2,3} = E_{2,3,1} = E_{3,1,2} = E_{1,3,2} = E_{3,2,1} = E_{2,1,3}$, следовательно, кратность вырождения уровня энергии равно 6.

2. Найдем энергии $E_{n_1,n_2,n_3}$ нижних стационарных состояний в порядке их возрастания: $E_{1,1,1} = 28{,}2$ эВ, $E_{1,1,2} = 56{,}5$ эВ, $E_{1,2,2} = 84{,}7$ эВ, $E_{1,1,3} = 103{,}5$ эВ, $E_{2,2,2} = 113{,}0$ эВ, $E_{1,2,3} = 131{,}8$ эВ. Тогда разность энергий между четвертым (1, 1, 3) и третьим (1, 2, 2) состоянием равна $\Delta E_{43} = E_{1,1,3} - E_{1,2,2} = 18{,}8$ эВ.

**Ответ:** 1. Кратность уровня равно 6; 2. $\Delta E_{43} = 18{,}8$ эВ.

**Пример 18.2.** Найти среднее расстояние $\langle r \rangle$ от ядра атома для электрона в состоянии $2s$.

**Решение**

В состоянии $2s$ имеем $n = 2$, $l = 0$. Среднее значение величины $F$ по определению равно

$$\langle F \rangle = \int_V F(r) \,|\psi(r)|^2 \, dV .$$

В случае $2s$-состояния среднее значение расстояния $r$ дается интегралом

$$\langle r \rangle_{200} = \int_V r \,|\psi_{200}(r)|^2 \, dV ,$$

полная волновая функция $\psi_{200}(r,\theta,\varphi) = R_{20}(r) Y_{00}(\theta,\varphi)$ сферически-симметрична и дается выражениями (18.24) и (18.27). Объем шарового слоя толщиной $dr$ равен $dV = 4\pi r^2 dr$, поэтому (см. (18.33)) имеем

$$\langle r \rangle_{200} = \frac{1}{8\pi a_0^3} \int_0^\infty r \left(1 - \frac{r}{2a_B}\right)^2 e^{-r/a_B}\, 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{2a_B^3} \int_0^\infty r^3 \left(1 - \frac{r}{2a_B}\right)^2 e^{-r/a_B} dr = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2a_B^3} \int_0^\infty r^3 e^{-r/a_B} dr = \frac{1}{2a_B^3} a_B^4 3! = 3a_B;$$

$$I_2 = -\frac{1}{2a_B^4} \int_0^\infty r^4 e^{-r/a_B} dr = -\frac{1}{2a_B^4} a_B^5 4! = -12a_B;$$

$$I_3 = \frac{1}{8a_B^5} \int_0^\infty r^5 e^{-r/a_B} dr = \frac{1}{8a_B^5} a_B^6 5! = 15a_B.$$

Эти интегралы берутся по частям (см. формулу (П18)): что дает $\langle r \rangle_{200} = 3a_B - 12a_B + 15a_B = 6a_B$.

**Ответ:** $\langle r \rangle_{200} = 6a_B$.

**Пример 18.3.** Электронное облако (орбиталь) принято графически изображать поверхностью, ограничивающей область, в которой вероятность обнаружения электрона составляет 0,9. Вычислить в атомных единицах радиус орбитали для 2*s*-состояния электрона в атоме водорода (атомная единица длины равна боровскому радиусу 1 а.е.д. = $a_B$). Волновая функция $\psi_{200}$ равна произведению выражений (18.24) и (18.27).

**Решение**

В 2*s*-состоянии электронное облако имеет сферическую форму. В соответствии с (18.32) вероятность обнаружить электрон 2*s*-состояния на расстояниях от ядра меньше $R$ равна

$$W_{200}(R) = \int_0^R |\psi_{200}(r)|^2 \, 4\pi r^2 dr. \tag{18.39}$$

Радиус 2*s*-облака определяется условием $W_{200}(R) = 0{,}9$. Полученное уравнение относительно радиуса сферической области $R$ содержит интеграл с переменным верхним пределом. Решение уравнения проведем графически. Для этого численно построим график функции $W_{200}(R)$ (18.39) и проведем горизонтальную линию при $W_{200}(R) = 0{,}9$. Точка пересечения горизонтальной линии с графиком $W_{200}(R)$, как показано на рис. 18.2, дает искомый ответ.

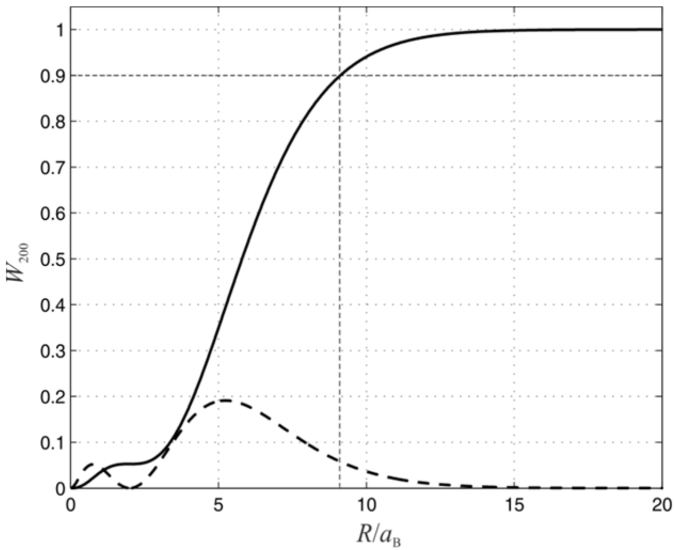



*Рис. 18.2.* Вероятность $W_{200}(R)$ обнаружения частицы в 2$s$-состоянии внутри сферы радиусом $R$ (сплошная линия) и плотность распределения вероятности $w_{200}(R)$ (18.34) (штриховая линия)

Из графика (сплошная линия) видно, что $W_{200}(R^*) = 0{,}9$ при $R^* = 9{,}13$ а.е.д.

**Ответ:** $R^* = 9{,}13 a_B$.

**Пример 18.4.** Электрон находится в состоянии $3s$. Вычислить вероятность его обнаружения внутри области, ограниченной сферой радиуса, равного $9a_B$, и найти радиус сферы, внутри которой вероятность обнаружения электрона составляет 0,9. Волновая функция $\psi_{300}$ равна произведению выражений (18.26) и (18.27).

**Решение**

Согласно принципам квантовой механики, вероятность обнаружения частицы в некоторой области $V$ равна

$$W(V) = \int_V |\psi(\mathbf{r})|^2 \, dV ,$$

в нашем случае с учетом сферической симметрии вероятность равна

$$W_{300}(r_3) = \int_0^{r_3} |\psi_{300}(r)|^2 \, 4\pi r^2 dr ,$$

где $r_3 = 9a_B$ – третья орбита электрона в модели атома Бора:

$$W_{300}(r_3) = \frac{4}{27} \int_0^{\rho_3} \left(1 - \frac{2\rho}{3} + \frac{2\rho^2}{27}\right)^2 e^{-2\rho/3} \rho^2 d\rho .$$

Этот интеграл можно взять методом интегрирования по частям, но можно провести численное интегрирование, например методом прямоугольников:

$$W_{300}(r_3) = \Delta\rho \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{27} \left(1 - \frac{2\rho_n}{3} + \frac{2\rho_n^2}{27}\right)^2 e^{-2\rho_n/3} \rho_n^2 ,$$

где $\rho_n = n\Delta\rho$, $\Delta\rho = 9 / N$. Результат суммирования дает: $W_{300}(r_3) \approx$ $\approx 0{,}135$. Таким образом, вероятность пребывания электрона внутри сферы с заданным радиусом равна 0,135 (точка 1, рис. 18.3).

Чтобы найти радиус сферы, вероятность нахождения электрона внутри которой будет не меньше 0,9, построим график $W_{300}(R)$ (сплошная линия), где $R$ – радиус этой сферической области, и проведем горизонтальную линию на уровне 0,9, что дает точку пересечения 2 на рис.18.3.

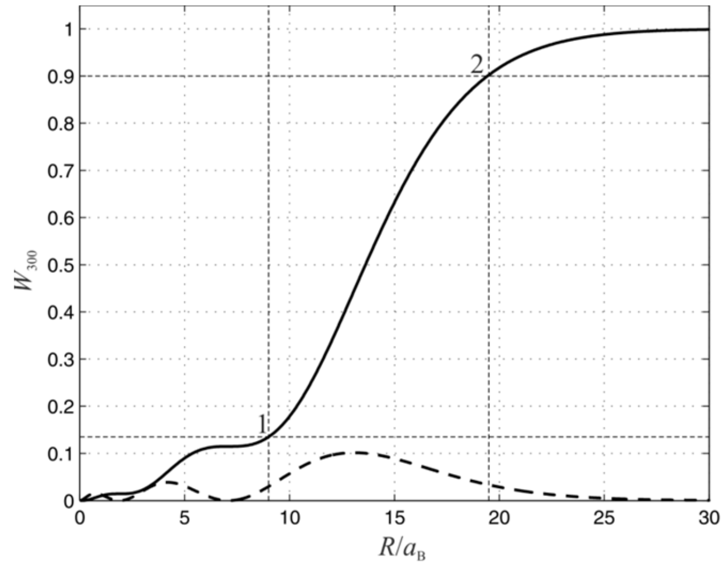



*Рис. 18.3*. Вероятность $W_{300}(R)$ обнаружения частицы в 3*s*-состоянии внутри сферы радиусом $R$ – сплошная линия, плотность распределения вероятности $w_{300}(R)$ – штриховая линия

Из графика (рис. 18.3) следует, что при радиусе сферы $R \approx 19{,}5 a_B$ электрон с вероятностью 0,9 будет находиться внутри нее.

**Ответ:** $W_{300}(r_3) \approx 0{,}135$ ; при $R \approx 19{,}5 a_B$ $W_{300} = 0{,}9$ .

**Пример 18.5.** Определить возможные значения проекции момента импульса $\mathbf{L}_z$ орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля, если электрон находится в $d$ состоянии.

**Решение**

Пусть направление магнитного поля совпадает с направлением оси $z$, тогда проекция орбитального момента импульса электрона задается (18.17). Орбитальное квантовое число электрона в $d$-состоянии равно согласно (18.22) $l = 2$, тогда возможные значения проекции момента импульса $\mathbf{L}_z$ орбитального движения электрона равны: $-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$, всего $2l+1=5$.

**Ответ:** $L_z = \{-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar\}$.

**Пример 18.6.** Вычислить полную энергию, орбитальный момент импульса и магнитный момент электрона, находящегося в $2p$-состоянии в атоме водорода.

**Решение**

Полная энергия электрона при $n=2$ равна согласно (18.12) $E_2 = -13,6/2^2 = -3,4$ эВ. Орбитальное квантовое число электрона в $p$-состоянии равно согласно (18.22) $l=1$, тогда орбитальный момент импульса равен $L_1 = \hbar\sqrt{l(l+1)} = \hbar\sqrt{2} = 1,49\cdot 10^{-34}$ Дж · с, а магнитный момент $\mu_1 = \mu_B\sqrt{l(l+1)} = \mu_B\sqrt{2} = 1,31\cdot 10^{-23}$ Дж/Тл.

**Ответ:** $E_2 = -3,4$ эВ, $L_1 = 1,49\cdot 10^{-34}$ Дж · с,
$\mu_1 = 1,31\cdot 10^{-23}$ Дж/Тл.

## Задачи для аудиторной работы

**А18.1.** Считая, что нуклоны в ядре находятся в трехмерном потенциальном ящике кубической формы с линейными размерами $l=10$ фм, оценить низший энергетический уровень нуклона в ядре атома.

**А18.2.** Найти среднее расстояние $\langle r\rangle$ от ядра для электрона в основном состоянии $1s$ атома водорода.

**А18.3.** Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии $1s$. Определить отношения вероятностей $W_1/W_2$ его пребывания в сферических слоях толщиной $\Delta r = 0,01a_B$ и радиусами $r_1 = 0,5a_B$ и $r_2 = 1,5a_B$.

**А18.4.** Вычислить момент импульса $L$ орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода: 1) в $1s$-состоянии, 2) $2p$-состоянии.

**А18.5.** Момент импульса $L$ орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода, равен $1,83\cdot 10^{-34}$ Дж · с. Определить магнитный момент электрона, обусловленный орбитальным движением электрона.

**А18.6.** Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии $1s$. Определить наиболее вероятное расстояние $r_W$ между электроном и ядром.

## Задание на дом

**В18.1.** Электрон находится в кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Сторона куба равна $l = 2$ Å. Определить кратность вырождения уровня с энергией $E = 11\hbar^2\pi^2 / 2ml^2$. Вычислить разность энергий между третьим и вторым уровнем.

**В18.2.** Вычислить радиус орбитали для $1s$-состояния электрона в атоме водорода, принимая, что электронное облако (орбиталь) занимает область, в которой вероятность обнаружения электрона составляет 0,9.

**В18.3.** Для электрона в $2s$-состоянии атома водорода определить: а) расстояние от ядра атома, на котором вероятность обнаружить электрон имеет максимум; б) расстояния от ядра, на которых вероятность нахождения электрона равна нулю.

**В18.4.** Атом водорода, находившийся первоначально в основном состоянии, поглотил квант света с энергией 10,2 эВ. Определить изменение момента импульса орбитального движения электрона. В возбужденном атоме электрон находится в $p$-состоянии.

**В18.5.** Определить возможные значения магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия возбуждения электрона равна 12,09 эВ.

## Приложение к практикуму 18

$$\int_0^\infty t^z e^{-\alpha t^n} dt = \frac{1}{n} \alpha^{-\frac{1+z}{n}} \Gamma\left(\frac{1+z}{n}\right), \qquad \text{(П18)}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$, $\Gamma(7/2) = 15\sqrt{\pi}/8$.

# ПРАКТИКУМ 19

# ЭЛЕКТРОНЫ В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФЕРМИ–ДИРАКА

В кристаллах электронные волны де Бройля одновременно с кулоновским притяжением к ядрам атомов испытывают *дифракцию на кристаллической решетке*. Поэтому *энергетический спектр* стационарных состояний электронов имеет *зонный характер. Разрешенные зоны* представляют собой энергетические полосы, в которые расщепляются атомные уровни энергии электронов. Они соответствуют энергиям (частотам де Бройля) и направлениям дифракционных максимумов электронных волн де Бройля (полосы пропускания трехмерной дифракционной решетки, образованной ионами кристалла). Между ними лежат *запрещенные зоны* (*энергетические щели*), т. е. энергетические полосы, которые соответствуют промежуткам между электронными атомными уровнями и дифракционным минимумом электронных волн де Бройля (полосы непропускания).

Многие свойства электронов в кристаллах хорошо описываются *моделью* идеального *ферми-газа*. В каждой разрешенной зоне *энергия* электрона $E = E_n(\mathbf{p})$ зависит от *квазиимпульса* электрона $\mathbf{p}$ (индекс $n$ – номер разрешенной зоны). При термодинамическом равновесии среднее число электронов $\left\langle N_{\mathbf{p}} \right\rangle \equiv f(E_n(\mathbf{p})) \le 1$, находящихся в квантовом состоянии с квазиимпульсом $\mathbf{p}$, энергией $E_n(\mathbf{p})$ и определенной проекцией спина, дается функцией *распределения Ферми–Дирака*

$$f(E_n(\mathbf{p})) = \frac{1}{\exp((E_n(\mathbf{p}) - E_F(T))/k_B T) + 1}, \qquad (19.1)$$

где $T$ – температура; $E_F(T)$ – энергия (уровень) Ферми; $k_B$ – постоянная Больцмана. График этой функции в зависимости от энергии электрона (рис. 19.1, *а*) называют *размытой фермиевской ступенькой*: при низких температурах функция распределения $f$ с ростом энергии резко убывает от единицы до нуля в узкой области энергий ширина которой порядка $k_BT$, причем $f(E_n(\mathbf{p}))=1/2$ при $E_n(\mathbf{p})=E_F(T)$. При абсолютном нуле температуры $T=0$ К *фермиевская ступенька становится неразмытой* (рис. 19.1, *б*):

$$f(E_n(\mathbf{p}))=\begin{cases}1, & E_n(\mathbf{p})<E_F(0),\\ 0, & E_n(\mathbf{p})>E_F(0),\end{cases} \tag{19.2}$$

т. е. при $T=0$ К энергия Ферми является граничной энергией между занятыми и свободными состояниями.

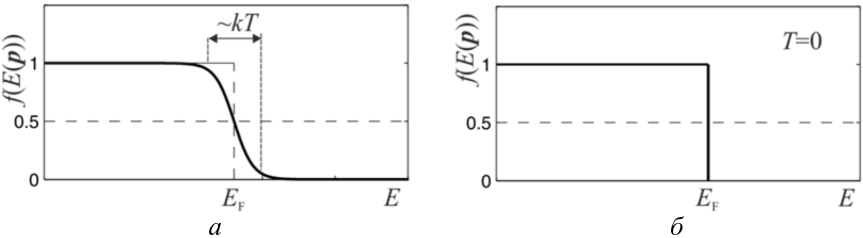



*Рис. 19.1.* Фермиевская функция распределения электронов:

*а* – $T>0$ К; *б* – $T=0$ К

При очень высокой температуре и малой концентрации электронов можно пренебречь единицей в знаменателе (19.1), и распределение Ферми–Дирака переходит в классическое распределение Максвелла–Больцмана

$$f(E_n(\mathbf{p}))=\exp\left(\frac{E_F(T)-E_n(\mathbf{p})}{k_BT}\right)\ll 1\,. \tag{19.3}$$

Электронный газ, подчиняющийся распределению Ферми–Дирака, называется *вырожденным*, а распределению Максвелла–Больцмана – *невырожденным*.

*Валентными зонами* называют верхние по энергии из полностью заполненных электронами зон при $T = 0$ К. *Зонами проводимости* называют нижние из частично или полностью свободных от электронов зон при $T = 0$ К.

*В металлах* электронный газ сильно вырожден, и уровень Ферми лежит в частично заполненных зонах проводимости. *У диэлектриков* между валентными зонами и зонами проводимости расположена очень широкая энергетическая щель $E_g >> k_B T$, внутри которой лежит уровень Ферми. *У полупроводников* запрещенная зона между валентными зонами и зонами проводимости настолько узкая $E_g > k_B T$, что за счет тепловой энергии $k_B T$ электроны могут возбуждаться из валентной зоны (где остаются *дырки проводимости*) в зону проводимости (становясь там *электронами проводимости*). Свойства полупроводников сильно зависят от концентрации примесей. В полупроводниках *n-типа* (электронных) преобладают *донорные* примеси, а в полупроводниках *p-типа* (дырочных) – *акцепторные* примеси.

В модели ферми-газа *свободных* электронов энергия электрона равна его кинетической энергии

$$E(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \tag{19.4}$$

Состояния электрона с энергией $E$ изображаются в **p**-пространстве точками сферической *изоэнергетической поверхности*

$$\mathbf{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 2mE. \tag{19.5}$$

*Статистические суммирования по номерам состояний заменяют интегрированием по объему* **p**-*пространства*:

$$\sum_{\mathbf{p}} \ldots \to \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \ldots d^3\mathbf{p}, \tag{19.6}$$

где $(2\pi\hbar)^3$ – объем фазового $\mathbf{r},\mathbf{p}$-пространства, приходящийся на одно квантовое состояние электрона. Удобно перейти к интегрированию по энергии электрона $E$. Для свободных электронов объем сферического слоя **p**-*пространства* $d^3\mathbf{p} = 4\pi p^2 dp$, а $p = \sqrt{2mE}$ и $dp = \sqrt{m/2E}dE$

из (19.5). *Число квантовых состояний с энергиями* от $E$ до $E+dE$ (*в сферическом слое)*

$$d\nu = 2\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}d^3\mathbf{p} = 2\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}4\pi p^2 dp = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}\cdot dE\,, \quad (19.7)$$

множитель 2 учитывает две возможные ориентации спина электрона.

*Энергетическая плотность состояний* равна числу квантовых состояний в единице объема на единичный интервал энергии $g(E) = \frac{1}{V}\frac{d\nu}{dE}$. Для газа свободных электронов

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}. \quad (19.8)$$

*Число электронов в квантовых состояниях с энергиями* от $E$ до $E+dE$

$$dN = f(E(\mathbf{p}))d\nu = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} f(E)\sqrt{E}\cdot dE\,, \quad (19.9)$$

где $f(E)$ – функция распределения Ферми–Дирака (19.1).

В частности, при $T = 0$ К

$$dN = \begin{cases} d\nu = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}dE, & E \le E_F(0), \\ 0, & E > E_F(0). \end{cases} \quad (19.10)$$

*Сферой Ферми*, или *ферми-сферой* (рис. 19.2), называется иэоэнергетическая поверхность с $E = E_F$. Из (19.2) очевидно, что при $T = 0$ К точки внутри ферми-сферы соответствуют занятым состояниям, а точки вне ее – свободным состояниям. *Импульсом Ферми* называют *радиус сферы Ферми* $p_F = \sqrt{2mE_F}$ (рис. 19.2), *скоростью Ферми* – величину $\upsilon_F = p_F / m$, объем внутри ферми-сферы

$$\Omega_F = \frac{4}{3}\pi p_F^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi (mE_F)^{3/2}. \tag{19.11}$$

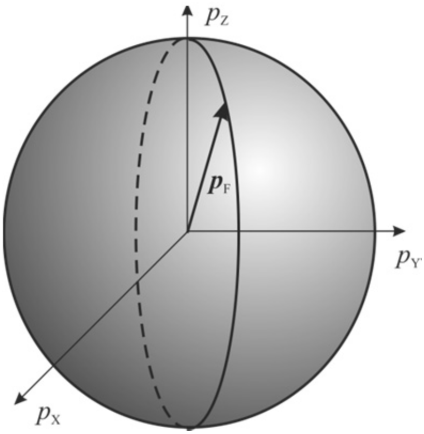



*Рис. 19.2.* Сфера Ферми ($T = 0$ К)

Если имеется $N$ свободных электронов, то при $T = 0$ К они занимают состояния внутри сферы Ферми

$$N = 2\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\Omega_F} d^3\mathbf{p} = 2\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\Omega_F = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3}p_F^3, \tag{19.12}$$

*и концентрация электронов* $n = N / V$ равна

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\Omega_F = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}, \tag{19.13}$$

а *радиус Ферми*

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3} \tag{19.14}$$

и *энергия Ферми*

$$E_F(0) = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}. \qquad (19.15)$$

*Температурой Ферми* (*температурой статистического вырождения*) называют величину $T_F = E_F(0)/k_B$.

Ферми-газ является невырожденным при $T \gg T_F$:

$$T_F = E_F(0)/k_B = \frac{\hbar^2}{2mk_B}(3\pi^2 n)^{2/3}. \qquad (19.16)$$

С ростом температуры уровень Ферми понижается:

$$E_F(T) \approx E_F(0)\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_B T}{E_F(0)}\right)^2\right) \quad \text{при} \quad T << T_F; \qquad (19.17)$$

$$E_F(T) \approx k_B T \ln\left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{E_F(0)}{k_B T}\right)^{3/2}\right) \quad \text{при} \quad T >> T_F. \qquad (19.18)$$

*Средняя энергия свободного электрона*

$$\langle E \rangle = \int\limits_{D_E} E dW(E), \qquad (19.19)$$

где $dW(E) = dN(E)/N$ – вероятность того, что электрон имеет энергию от $E$ до $E + dE$; $D_E$ – область интегрирования по всем возможным значениям энергии электрона:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F(0) \quad \text{при} \quad T = 0; \qquad (19.20)$$

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F(0)\left(1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2\right) \quad \text{при} \quad T_F \gg T. \qquad (19.21)$$

*Удельная проводимость металла*

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*}, \tag{19.22}$$

где $\tau$ – время свободного пробега электрона (время релаксации функции распределения к термодинамическому равновесию); $m^* = 1/(d^2E(p)/dp^2)$ – эффективная масса электрона.

*Удельное сопротивление* $\rho = 1/\sigma$.

*Удельная проводимость собственных полупроводников* $(n = p)$:

$$\sigma = en\mu_n + ep\mu_p = en(\mu_n + \mu_p); \tag{19.23}$$

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-E_g / 2k_BT). \tag{19.24}$$

*Подвижность носителей заряда*

$$\mu_n = \bar{\upsilon}_n E, \quad \mu_p = \bar{\upsilon}_p E. \tag{19.25}$$

Здесь $n$, $p$ – концентрация электронов и дырок; $\mu_{n,p}$ – подвижность электронов и дырок; $\bar{\upsilon}_{n,p}$ – дрейфовая скорость носителей заряда; $E$ – напряженность электрического поля; $E_g$ – ширина запрещенной зоны между валентной зоной и зоной проводимости.

*Эффект Холла. Напряжение на гранях прямоугольной металлической пластины шириной* $b$*, помещенной в магнитное поле*,

$$U_H = R_H Bjb, \tag{19.26}$$

где $R_H$ – постоянная Холла; $j$ – плотность тока, текущего вдоль пластины; $B$ – индукция магнитного поля, перпендикулярная плоскости пластины.

*Постоянная Холла для электронных проводников*

$$R_H = \frac{1}{en}, \tag{19.27}$$

где $e$ – заряд; $n$ – концентрация электронов проводимости.

**Пример 19.1.** Полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, определить: 1) уровень Ферми $E_F(0)$ при абсолютном нуле температуры; 2) скорость Ферми; 3) среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ свободных электронов при абсолютном нуле температуры; 4) температуру $T$, при которой средняя кинетическая энергия электронов классического электронного газа равнялась бы средней энергии свободных электронов в меди при абсолютном нуле температуры. Считать, что эффективная масса электрона проводимости в меди равна массе свободного электрона.

**Решение**

1. Уровень Ферми $E_F$ при $T = 0$ К дается формулой (19.15), в которой концентрация электронов $n = N/V = N_A \rho / \mu$, для меди [1]: масса моля $\mu = 0{,}0635$ кг/моль, плотность $\rho = 8930$ кг/м$^3$. Откуда $n = 8{,}5 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$ и энергия Ферми равна $E_F = 7{,}04$ эВ.

2. Скорость Ферми при $T = 0$ К выражается через импульс Ферми (19.14)

$$\upsilon_F = \frac{p_F}{m} = \frac{\hbar}{m}(3\pi^2 n)^{1/3} \approx 10^5 \text{ м/с.}$$

3. В модели свободных электронов кинетическая энергия равна полной энергии, а средняя энергия находится согласно (19.19) как

$$\langle E \rangle = \int\limits_0^{\infty} E dW(E), \tag{19.28}$$

где $dW(E)$ – вероятность нахождения электрона в состояниях с энергией в интервале от $E$ до $E + dE$,

$$dW(E) = dN(E) / N. \tag{19.29}$$

При $T = 0$ К величина $dN(E)$ дается выражением (19.10), а $N$ – выражением (19.12), тогда

$$dW(E) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{E^{1/2}}{E_F(0)^{3/2}} dE, & E \le E_F(0), \\ 0, & E > E_F(0). \end{cases} \tag{19.30}$$

В итоге получаем выражение (19.18)

$$\langle E\rangle=\frac{3}{2}\frac{1}{E_F(0)^{3/2}}\int\limits_0^{E_F(0)}E^{3/2}dE=\frac{3}{5}E_F(0)\,.$$

Для меди

$$\langle E\rangle=\frac{3}{5}E_F(0)=4,22 \text{ эВ.}$$

4. Средняя кинетическая энергия поступательного движения классических частиц равна

$$\bar{E}=\frac{3}{2}k_BT\,.$$

Приравнивая эту величину средней энергии электрона $\bar{E}=\langle E\rangle$ при $T=0$ К, находим

$$T=\frac{2}{3k_B}\langle E\rangle=3,27\cdot 10^4 \text{ К.}$$

**Ответ:** 1. $E_F(0)=7,04$ эВ. 2. $\upsilon_F\approx 10^5$ м/с. 3. $\langle E\rangle=4,22$ эВ.
4. $T=3,27\cdot 10^4$ К.

**Пример 19.2.** Показать, как при $T\gg T_F$ распределение Ферми–Дирака для газа свободных электронов переходит в распределение Максвелла по скоростям.

**Решение**

При $T>0$ число квантовых состояний электрона с абсолютным значением импульса от $p$ до $p+dp$ (в сферическом слое импульсного пространства) получается аналогично (19.9) умножением (19.7) на $f(E)$ – функцию распределения Ферми–Дирака:

$$dN=2\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}f(E(\mathbf{p}))d^3\mathbf{p}=2\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}f(E(p))4\pi p^2dp\,.$$

Классический электрон обладает скоростью $\upsilon = p/m$. Учитывая (19.1) и (19.4) $E = p^2/2m = m\upsilon^2/2$, получаем

$$dN(\upsilon) = \frac{m^3 V}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\upsilon^2 d\upsilon}{\exp((m\upsilon^2/2 - E_F(T))/k_B T) + 1}.$$

При $T \gg T_F$ величина $E_F(T)$ отрицательна и очень велика по абсолютной величине, тогда в знаменателе можно пренебречь единицей, так что

$$dN = \frac{m^3 V}{\pi^2 \hbar^3}\, e^{-\frac{E_F(T)}{k_B T} - \frac{m\upsilon^2}{2k_B T}} \upsilon^2 d\upsilon, \tag{19.31}$$

полное число частиц $N$ дается интегралом

$$N = \frac{m^3 V}{\pi^2 \hbar^3}\, e^{-\frac{E_F(T)}{k_B T}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{m\upsilon^2}{2k_B T}} \upsilon^2 d\upsilon.$$

Этот интеграл сводится к интегралу Пуассона и связан с нормировкой распределения Максвелла [2, 3] и (П18), что позволяет получить выражение (19.18) для $E_F(T)$ при $T \gg T_F$:

$$E_F(T) \approx k_B T \ln\left(\sqrt{2} \cdot n\hbar^3 \left(\frac{\pi}{mk_B T}\right)^{3/2}\right)$$

и записать результат (19.31) в виде функции распределения Максвелла [1–3]:

$$f_M(\upsilon) = \frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2k_B T}} \upsilon^2. \tag{19.32}$$

**Ответ:** выражается формулой (19.32).

**Пример 19.3.** Концентрация электронов проводимости в серебре равна $n = 5{,}8 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$. Найти среднюю дрейфовую скорость $\overline{\upsilon}_d$ электронов при наложении напряженности электрического поля вдоль проводника $E = 100$ В/м.

**Решение**

Плотность тока $j$ для униполярных проводников дается выражением $j = en\overline{\upsilon}_d$, а закон Ома в дифференциальной форме – выражением $j = \sigma E$, где удельная проводимость $\sigma = 1/\rho$ связана с удельным сопротивлением, которое для серебра равно $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом · м. Приравнивая правые части, получаем $\sigma E = en\overline{\upsilon}_d$, откуда

$$\overline{\upsilon}_d = E / en\rho .$$

Подставляя численные значения параметров, получаем $\overline{\upsilon}_d = 0{,}68$ м/с.

**Примечание.** Здесь следует отметить, что из-за сильной вырожденности ферми-газа электронов при протекании тока в металлах перенос заряда осуществляется сравнительно малой частью электронов проводимости, обладающих энергией, близкой к уровню Ферми, со значительно большей скоростью порядка скорости Ферми $\upsilon_F \approx 10^5$ м/с ($\upsilon_F >> \overline{\upsilon}_d$).

**Ответ:** $\overline{\upsilon}_d = 0{,}68$ м/с.

**Пример 19.4.** Найти минимальную энергию образования пары «электрон-дырка» в беспримесном полупроводнике, проводимость которого возрастает в $\eta = 5$ раз при увеличении температуры от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К.

**Решение**

В соответствии с соотношением (19.24) проводимость беспримесного полупроводника растет с температурой, поэтому

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp(-E_g / 2k_B T_1) \quad \text{при} \quad T = T_1;$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \exp(-E_g / 2k_B T_2) \quad \text{при} \quad T = T_2 .$$

Отношение этих проводимостей равно

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{\sigma_0\exp(-E_g/2k_BT_2)}{\sigma_0\exp(-E_g/2k_BT_1)}\rightarrow\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\exp\left(\frac{E_g}{2k_BT_1}-\frac{E_g}{2k_BT_2}\right),$$

или

$$\eta=\exp\left(\frac{E_g}{2k_B}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\right).$$

Отсюда найдем ширину запрещенной зоны:

$$E_g=\frac{2k_BT_2T_1\ln\eta}{T_2-T_1}.$$

Подставляя численные значения параметров, получаем $E_g =$ $= 5{,}3\cdot 10^{-20}$ Дж $= 0{,}33$ эВ.

**Ответ:** $E_g = 0{,}33$ эВ.

**Пример 19.5.** Какова концентрация носителей заряда особо чистого полупроводника – кремния – при температуре $T = 300$ К, если удельное сопротивление $\rho = 2{,}4\cdot 10^3$ Ом · м, а подвижности электронов $\mu_n = 0{,}14$ м$^2$/(В · с) и дырок $\mu_p = 0{,}048$ м$^2$/(В · с)?

**Решение**

Согласно (19.23) в данном случае концентрация носителей равна $n = p = \sigma/e(\mu_n+\mu_p) = 1/e\rho(\mu_n+\mu_p) = 1{,}38\cdot 10^{16} \approx 1{,}4\cdot 10^{16}$ м$^{-3}$.

**Ответ:** $n = p \approx 1{,}4\cdot 10^{16}$ м$^{-3}$.

**Пример 19.6.** Медная пластина длиной $l = 6$ см и шириной $b = 2$ см помещена в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно широкой грани. Между торцами пластины наблюдается разность потенциалов $U = 0{,}05$ мВ. Холловская разность потенциалов $U_H = 55$ нВ возникает на боковых гранях пластины при протекании тока плотностью $j = 0{,}5$ А/мм$^2$. Определить концентрацию $n$ и подвижность $\mu_n$ носителей заряда.

**Решение**

Согласно закону Ома для однородного участка проводника $U = RI$, где $I = jS$, а $R = \rho l / S$, тогда $U = j\rho l$ и $j = U / \rho l$. Холловская постоянная согласно (19.26) равна $R_H = U_H / Bjb$. Учитывая (19.27), получаем выражение для концентрации $n$ носителей заряда

$$n = Bjb / eU_H .$$

Подвижность $\mu_n$ носителей заряда (свободных электронов) вычислим по (19.25) с учетом $en = 1 / R_H$ и $1 / \rho = en\mu_n$, т. е.

$$\mu_n = R_H / \rho = R_H jl / U .$$

Подставляя в (19.36) численные значения исходных параметров, получаем $n = 1{,}1 \cdot 10^{29}$ м$^{-3}$ и $\mu_n = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м$^2$/(В$\cdot$с).

**Ответ:** $n = 1{,}1 \cdot 10^{29}$ м$^{-3}$ и $\mu_n = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м$^2$/(В$\cdot$с).

## Задачи для аудиторной работы

**А19.1.** При нулевой абсолютной температуре найти долю свободных электронов в металле, кинетические энергии которых превышают половину максимальной энергии $E_F(0)$.

**А19.2.** Найти число свободных электронов, приходящихся на один атом натрия при абсолютном нуле температуры, если уровень Ферми 3,07 эВ. Плотность натрия равна $\rho = 970$ кг/м$^3$, а молярная масса равна $\mu = 0{,}023$ кг/моль.

**А19.3.** При абсолютном нуле температуры оценить интервал (в электронвольтах) между соседними энергетическими уровнями свободных электронов вблизи уровня Ферми, если концентрация свободных электронов равна $2 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$ и объем металла составляет 1 см$^3$.

**А19.4.** Во сколько раз изменится при повышении температуры от 300 К до 310 К проводимость собственного полупроводника, ширина запрещенной зоны которого $E_g = 0{,}3$ эВ?

**А19.5.** Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление 0.48 Ом · м. Определить концентрацию носителей заряда, если подвижности электронов и дырок соответственно равны 0,36 и 0,16 м$^2$/(В · с).

## Задание на дом

**В19.1.** Оценить вероятность того, что электрон в металле займет энергетическое состояние, находящееся в интервалах $\Delta E = 0,05$ эВ ниже уровня Ферми и выше уровня Ферми, для двух температур: 1) 290 К и 2) 77 К.

**В19.2.** Определить, каково относительное увеличение средней энергии электронов в металле с $E_F = 5$ эВ при увеличении температуры от температуры от 0 К до комнатной $T_2 = 300$ К.

**В19.3.** Электроны в металле находятся при температуре 0 К. Определить относительное число свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 2 %.

**В19.4.** Во сколько раз изменится при повышении температуры от 280 до 330 К удельное сопротивление собственного полупроводника, ширина запрещенной зоны которого равна 1 эВ?

**В19.5.** Пластина из серебра шириной $b = 2$ см и толщиной $h = 0,6$ мм помещена в однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл перпендикулярно широкой грани. Вдоль пластины течет ток $I = 30$ А. Холловская разность потенциалов $U_H = 10$ мкВ возникает на боковых гранях. Определить постоянную Холла $R_H$ и концентрацию $n$ носителей заряда.

# ПРАКТИКУМ 20

# ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## УПРУГИЕ ВОЛНЫ В КРИСТАЛЛАХ. ФОНОНЫ ТЕПЛОЕМКОСТЬ

В идеальных кристаллах могут распространяться *упругие волны*. Монохроматические упругие волны в кристаллах характеризуются *частотой* $\omega$ и *квазиволновым вектором* $\mathbf{k}$, которые связаны законом дисперсии $\omega = \omega_n(\mathbf{k})$, где $n$ – целое число, называемое *номером ветви* спектра упругих волн. При этом смещение $l$-го атома в узле с радиусом-вектором $\mathbf{r}_l$ кристаллической решетки описывается бегущей волной

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega_n(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{r}_l)} \qquad (20.1)$$

амплитуды $\mathbf{u}_0$ (сравни с (9.1)). Количество ветвей спектра упругих волн равно $3s$, где $s$ – число атомов или ионов в элементарной ячейке кристалла (в молекуле, периодическим повторением которой образован кристалл).

Упругие волны разных ветвей спектра различаются *поляризацией*, т. е. направлением $\mathbf{u}_0$ колебательных движений атомов и ионов вблизи их положений равновесия в кристаллической решетке относительно направления распространения волны, указываемого вектором $\mathbf{k}$. В зависимости от структуры кристаллической решетки существуют упругие волны *продольной*, *поперечной* и *смешанной поляризации* (например, когда кристаллографические оси наклонены по отношению друг к другу).

В кристаллах, имеющих *постоянную решетки* (т. е. длину элементарной ячейки) в направлении распространения упругой волны, *равную* $a$, могут существовать только упругие волны с длиной волны $\lambda \ge \lambda_{\min} = 2a$, т. е. с $k \le k_{\max} = \pi / a$. Если длина кристаллической решетки в направлении распространения упругой волны равна $L = Na$ ($N$ – полное число элементарных ячеек в этом направлении), то в такой решетке могут устойчиво существовать только упругие волны с длиной волны $\lambda \le \lambda_{\max} = 2L$, т. е. с $k \ge k_{\min} = \pi / L = \pi / Na$. У кристалла *конечного размера*, состоящего из $N$ элементарных ячеек (молекул), каждая ветвь спектра упругих волн содержит дискретное число $N$ значений волнового вектора $\mathbf{k}$ ($k_l = l\pi / Na,\ l = 1, 2, ..., N$). Очевидно, что $k_{\min} \to 0$ и $\lambda_{\max} \to \infty$ при $N \to \infty$.

У каждого кристалла обязательно имеются три низкочастотные ветви $n = 1, 2, 3$, называемые *акустическими ветвями* и обладающие свойством

$$\omega_n(\mathbf{k}) \approx \upsilon_n k \to 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{k} \to 0, \tag{20.2}$$

т. е. при $\lambda = 2\pi/k \to \infty$, где $\upsilon_n$ – скорость звука акустической волны $n$-й ветви; $\lambda$ – длина волны. При приближении $k$ к максимально возможному значению $k_{\max} = \pi/a$ рост функции $\omega_n(\mathbf{k})$ становится более пологим и она достигает максимального значения $\omega_{n\max}(k_{\max})$, приближенно равного $\omega_{n\max} \approx \upsilon_n k_{\max} = \upsilon_n \pi / a$ (рис. 20.1). У простых кристаллов с одним атомом в элементарной ячейке $s = 1$ имеются только акустические ветви спектра упругих волн.

У кристаллов с $s \ge 2$ атомами в элементарной ячейке, кроме трех акустических, имеются еще $3s - 3$ ветвей спектра упругих волн, называемых *оптическими* ветвями. Оптические ветви по частоте лежат выше акустических (они соответствуют частотам внутримолекулярных колебаний атомов в инфракрасной области), зависимость $\omega = \omega_n(\mathbf{k})$ у них обычно более слабая, так что эту зависимость от $\mathbf{k}$ часто можно не учитывать, считать частоту оптической упругой волны постоянной, называемой *частотой Эйнштейна*: $\omega_{En} = \omega_n(\mathbf{k}) = \text{const}$ (рис. 20.1).

При квантовом описании поле упругих волн в кристалле квантуется подобно полю электромагнитных волн. Кванты упруговолнового поля в кристаллах (упруговолновые квантовые элементарные возбуждения) называются *фононами.* Это понятие аналогично понятию о *фотонах* – квантах поля электромагнитных волн (см. практикум 14).

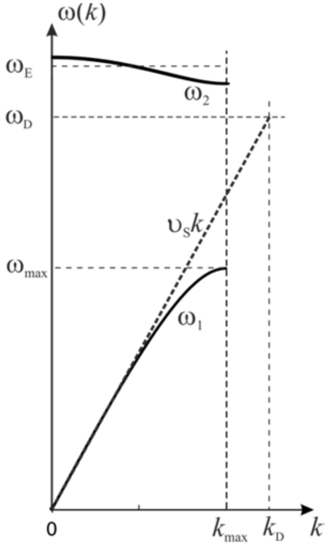



*Рис. 20.1*. Характерный вид зависимости $\omega(k)$ для акустической $\omega_1$ и оптической $\omega_2$ ветвей спектра упругих волн в кристалле вдоль одного кристаллографического направления. Наклонная штриховая прямая $\omega = \upsilon_S k$ – линейный закон дебаевской аппроксимации; $\upsilon_S$ – скорость звука в кристалле, $k_{\max} = \pi / a$

Каждой упругой волне (20.1) ставится в соответствие квантовый гармонический осциллятор частоты $\omega_n(\mathbf{k})$. Энергия стационарного состояния такого квантового гармонического осциллятора (см. (16.17)) равна

$$E(\omega_n(\mathbf{k}),\ n_{n\mathbf{k}}) = \hbar\omega_n(\mathbf{k})\left(n_{n\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right) = n_{n\mathbf{k}}\hbar\omega_n(\mathbf{k}) + \frac{\hbar\omega_n(\mathbf{k})}{2}, \quad (20.3)$$

где $n_{n\mathbf{k}} = 0, 1, 2, ...$ – номер стационарного состояния осциллятора. Первое слагаемое в правой части аналогично энергии идеального газа $n_{n\mathbf{k}}$ частиц, каждая из которых имеет энергию де Бройля $\hbar\omega_n(\mathbf{k})$, такие «частицы» называют *фононами*, а числа $n_{n\mathbf{k}}$ (числа заполнения квантовых состояний) дают количество одинаковых фононов с энергией де Бройля $\hbar\omega_n(\mathbf{k})$. Последнее слагаемое $\hbar\omega_n(\mathbf{k})/2$ называют *энергией нулевых колебаний*. Полная энергия упругих гармонических колебаний кристаллической решетки равна сумме $E(\omega_n(\mathbf{k}),\ n_{n\mathbf{k}})$ по всем ветвям спектра $n = 1, 2, ..., 3s$ и внутри каждой ветви по $N$ значениям вектора $\mathbf{k}$:

$$E = \sum_{n,\mathbf{k}} E(\omega_n(\mathbf{k}),\ n_{n\mathbf{k}}) = \sum_{n,\mathbf{k}} n_{n\mathbf{k}}\hbar\omega_n(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\sum_{n,\mathbf{k}} \hbar\omega_n(\mathbf{k}), \qquad (20.4)$$

первая сумма в правой части есть энергия фононов, а вторая сумма – энергия нулевых колебаний решетки.

Фононы (как и фотоны) являются *бозе-частицами*, в термодинамическом равновесии *среднее число фононов в квантовом состоянии* дается *распределением Планка*

$$\bar{n}_{n\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_n(\mathbf{k})/k_B T)-1}. \tag{20.5}$$

*Среднее значение энергии* (20.3) *гармонического осциллятора*

$$\bar{E}(\omega_n(\mathbf{k}),\ \bar{n}_{n\mathbf{k}}) = \hbar\omega_n(\mathbf{k})\left(\bar{n}_{n\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \hbar\omega_n(\mathbf{k})\left(\frac{1}{\exp(\hbar\omega_n(\mathbf{k})/k_B T)-1} + \frac{1}{2}\right), \tag{20.6}$$

а среднее значение энергии (20.4) дает *вклад* $U$ *упругих гармонических колебаний во внутреннюю энергию кристаллической решетки*

$$\Delta U = \bar{E} = \sum_{n,\mathbf{k}} \hbar\omega_n(\mathbf{k})\left(\bar{n}_{n\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sum_{n,\mathbf{k}} \hbar\omega_n(\mathbf{k})\left(\frac{1}{\exp(\hbar\omega_n(\mathbf{k})/k_B T)-1} + \frac{1}{2}\right). \tag{20.7}$$

Вклад упругих гармонических колебаний в *теплоемкость кристаллической решетки* равен $C = \partial\Delta U/\partial T$. Расчет величин $\Delta U$ *и* $C$ требует вычисления суммы (20.7).

*Теория теплоемкости твердых тел Эйнштейна* позволяет оценить *вклад оптической ветви спектра упругих волн*. *Приближенно с*читая, что $\omega_n(\mathbf{k}) = \omega_{En} = \mathrm{const}$, в сумме (20.7) опускаем индекс номера ветви $n$, выносим не зависящее от $\mathbf{k}$ выражение из под знака суммы, останется $\sum_{\mathbf{k}} 1 = N$ – число элементарных ячеек (молекул), образующих кристалл. Удобно ввести характеристическую *температуру Эйнштейна* $\theta_E$ соотношением $k_B\theta_E = \hbar\omega_E$. Для одного моля вещества

$N = N_{\text{А}}$ – число Авогадро, $k_B N_{\text{А}} = R$, вклад *одной* $j$-й оптической ветви в *молярную внутреннюю энергию кристалла*

$$U_{\mu j} = \frac{R\theta_E}{\exp(\theta_E / T) - 1} + \frac{1}{2} R\theta_E, \tag{20.8}$$

вклад одной $j$-й оптической ветви в *молярную теплоемкость кристалла*

$$C_{\mu j} = R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{\exp(\theta_E / T)}{(\exp(\theta_E / T) - 1)^2}. \tag{20.9}$$

Это дает при низких температурах $T \ll \theta_E$

$$C_{\mu j} = R\left(\frac{\theta_E}{T}\right) \exp(-\theta_E / T), \tag{20.10}$$

а при $T \to \infty$ (т. е. при $T \gg \theta_E$) – закон Дюлонга и Пти $C_{\mu j} = R$.

*Теория теплоемкости твердых тел Дебая* позволяет оценить *вклад акустической ветви спектра упругих волн. Приближенно* считая, что линейный закон дисперсии (20.2) $\omega_n(\mathbf{k}) = \upsilon_n k$ справедлив во всей акустической ветви, опускаем индекс номера ветви $n$, т. е. $\omega = \omega(\mathbf{k}) = \upsilon_S k$ и в (20.7) заменяем суммирование интегрированием по объему $\Omega_D = 4\pi k_D^3 / 3$ *сферы Дебая* в $\mathbf{k}$-пространстве (как в (19.6), (19.11)), а затем интегрированием по частоте

$$\sum\nolimits_{\mathbf{k}} \ldots \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int\limits_{\Omega_D} \ldots d^3\mathbf{k} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int\limits_0^{k_D} \ldots 4\pi k^2 dk =$$

$$= \frac{V}{(2\pi\upsilon_S)^3} \int\limits_0^{\omega_D} \ldots 4\pi\omega^2 d\omega, \tag{20.11}$$

где $V = Na^3$ – объем кристалла; $N$ – число молекул в кристалле; $a^3$ – объем элементарной ячейки кристалла; $k_D$ – *радиус сферы Дебая* (*волновое число Дебая*); $\omega_D = \upsilon_S k_D$ – *частота Дебая. Сфера Дебая* содержит все $N$ значений волнового вектора $\mathbf{k}$ акустической ветви, величины $\Omega_D$, $k_D$ и $\omega_D$ определяются из равенств

$$N = \sum\nolimits_{\mathbf{k}} 1 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int\limits_{\Omega_D} d^3\mathbf{k} = \frac{V}{(2\pi)^3} \Omega_D =$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4}{3} \pi k_D^3 = \frac{V}{(2\pi\upsilon)^3} \frac{4}{3} \pi \omega_D^3, \qquad (20.12)$$

что дает $k_D = (6\pi^2 N / V)^{1/3} = (6/\pi)^{1/3} \pi / a \approx k_{\max} = \pi / a$,

$$\omega_D = \upsilon_S k_D = \upsilon_S (6\pi^2 N / V)^{1/3} =$$

$$= (6/\pi)^{1/3} \upsilon_S \pi / a \approx \omega_{\max} = \upsilon_S \pi / a. \qquad (20.13)$$

Далее удобно ввести характеристическую *температуру Дебая* $\theta_D$ соотношением $k_B \theta_D = \hbar \omega_D$. Для одного моля вещества $N = N_\text{A}$ вклад *одной* $j$-й акустической ветви в *молярную внутреннюю энергию кристалла*

$$U_{\mu j} = 3R\theta_D \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^4 D(\theta_D / T) + \frac{3}{8} R\theta_D, \qquad (20.14)$$

где функция $D(y)$ определяется интегралом

$$D(y) = \int\limits_0^y \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \qquad (20.15)$$

$$D(\infty) = \int\limits_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}. \qquad (20.16)$$

График функции $D(y)$ изображен на рис. 20.2.

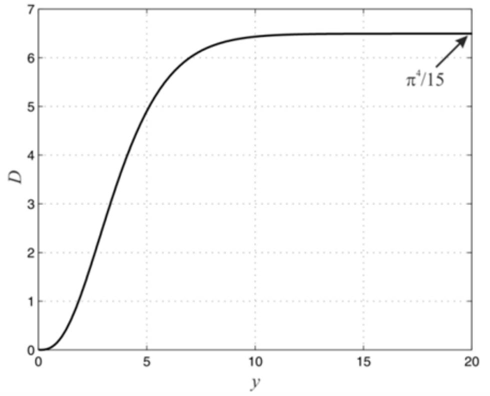



*Рис. 20.2.* Функция $D(y)$

Вклад *одной j*-й акустической ветви в *молярную теплоемкость кристалла*

$$C_{\mu j} = R\left(12\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 D(\theta_D / T) - \frac{3\theta_D / T}{\exp(\theta_D / T) - 1}\right), \qquad (20.17)$$

это выражение называют *интерполяционной формулой Дебая*.

Отсюда имеем при низких температурах $T \ll \theta_D$

$$C_{\mu j} = \frac{4}{5}\pi^4 R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3, \qquad (20.18)$$

а при $T \to \infty$ (т. е. при $T \gg \theta_D$) $C_{\mu j} = R$ – *закон Дюлонга и Пти*.

Формулы (20.10) и (20.18) показывают, что при $T \to 0$ теплоемкость стремится к нулю $(C \to 0)$ – основное следствие *3-го начала термодинамики.*

*Усредненная* по трем акустическим ветвям *скорость звука* $\overline{c}$ в твердом теле определяется из соотношения

$$\frac{3}{\overline{\upsilon}^3} = \frac{1}{\upsilon_l^3} + \frac{2}{\upsilon_S^3}, \qquad (20.19)$$

где $\upsilon_l$ – скорость продольной звуковой волны; $\upsilon_S$ – скорость поперечных звуковых волн.

**Пример 20.1.** Определить квазиимпульс фонона $p = \hbar k$, соответствующий частоте $\omega = 0{,}1\omega_D$, считая справедливым линейный закон дисперсии $\omega = \upsilon_S k$. Скорость звука в кристалле $\upsilon = 1380$ м/с, температура Дебая $\theta_D = 100$ К.

**Решение**

Частота звука пропорциональна волновому числу $\omega = \upsilon_S k$, тогда $k = \omega / \upsilon_S = 0{,}1\omega_D / \upsilon$. Но $\omega_D = k_B \theta_D / \hbar$, т. е. $p = \hbar k = 0{,}1\omega_D \hbar / \upsilon_S = 0{,}1 k_B \theta_D / \upsilon = 10^{-25}$ кг · м/с.

**Ответ:** $p = 10^{-25}$ кг · м/с.

**Пример 20.2.** Определить температуру Дебая для модели одномерного кристалла, образованного цепочкой одинаковых атомов массой $m$, связанных упругими силами (пружинками) жесткости $\gamma$ и совершающих колебания вдоль прямой линии, на которой они размещаются. Концентрация атомов (число атомов на единицу длины) $n_0 = 5{,}00 \cdot 10^9$ м$^{-1}$. Скорость акустических упругих волн в кристалле $c = 3000$ м/с.

**Решение**

На каждый атом цепочки с двух сторон действуют упругие силы растяжения и сжатия пружинок, определяемые смещением соседних атомов. Если $u_n$ – координата смещения $n$-го атома из положения равновесия, то уравнение второго закона Ньютона для $n$-го атома имеет вид

$$m\ddot{u}_n = -\gamma(u_n - u_{n+1}) - \gamma(u_n - u_{n-1}) . \qquad (20.20)$$

Этой системе уравнений удовлетворяет решение в виде волны, бегущей по узлам $x_n = na$ цепочки

$$u_n = A\exp(-i\omega t + ikx_n) , \qquad (20.21)$$

где $a$ – период решетки, равный расстоянию между положениями равновесия ближайших атомов цепочки. Подставляя (20.21) в (20.20), имеем

$$-m\omega^2 u_n = -\gamma(1 - \exp(ika))u_n - \gamma(1 - \exp(-ika))u_n .$$

Это уравнение может быть выполнено при

$$\omega^2 = 2\frac{\gamma}{m}(1-\cos(ka)) = 4\omega_0^2 \sin^2(ka/2)\text{, где } \omega_0 = \sqrt{\gamma/m}\,,$$

т. е. при значениях собственной частоты волны

$$\omega = 2\omega_0 \left|\sin(ka/2)\right|. \qquad (20.22)$$

Видно, что $\omega \to 0$ при $k \to 0$ – это есть закон дисперсии акустической волны. При $ka = 2\pi\lambda / a \ll 1$ он дается первым членом разложения синуса по малому аргументу

$$\omega = \omega_0 ak = \upsilon_S k\,, \qquad (20.23)$$

и скорость звука равна

$$\upsilon_S = a\omega_0 = a\sqrt{\gamma/m}\,. \qquad (20.24)$$

Максимальное значение $\omega_{max} = 2\omega_0 = 2\sqrt{\gamma/m}$, частота волны $\omega$ (20.22) имеет при $ka/2 = \pi/2$, т. е. при максимально возможном значении волнового числа $k_{max} = \pi/a$ ему соответствует минимальная длина волны, способная распространяться по цепочке $\lambda_{min} = 2\pi/k_{max} = 2a$.

Если рассматриваемая одномерная решетка состоит из $N$ атомов и имеет длину $L = Na$, то для нее аналогом трехмерной сферы Дебая является одномерная полоска на $k$-оси от $-k_D$ до $+k_D$ длиной $2k_D$, а аналогом (20.12) – выражение

$$N = \sum_{\mathbf{k}} 1 = \frac{L}{2\pi}\int_{-k_D}^{k_D} dk = \frac{L}{2\pi}2k_D = \frac{L}{\pi\upsilon_S}\omega_D\,,$$

что дает $k_D = \pi N / L = \pi / a = k_{max}$ и $\omega_D = \upsilon_S k_D = \upsilon_S \pi / a = \pi\omega_0$, т. е. $\omega_D > \omega_{max} = 2\omega_0$.

Температура Дебая $\theta_D$ равна $\theta_D = \hbar\omega_D / k_B$. Подставим $\omega_D$ и учтем, что концентрация атомов одномерной решетки равна $n_0 = N / L = N / Na = 1 / a$, тогда $\theta_D = \hbar\omega_D / k_B = \hbar\upsilon_S \pi / ak_B = 360$ К.

**Ответ:** $\theta_D = 360$ К.

**Пример 20.3.** В алюминии скорость поперечных упругих волн $\upsilon_s = 3130$ м/с, а скорость продольных волн $\upsilon_l = 6400$ м/с. Определить температуру Дебая $\theta_D$ алюминия. Плотность алюминия $\rho = 2700$ кг/м$^3$, а его молярная масса $\mu = 0{,}02698$ кг/моль.

**Решение**

Радиус сферы Дебая согласно (20.13) равен

$$k_D = (6\pi^2 n)^{1/3}, \tag{20.25}$$

а характеристическая температура Дебая

$$\theta_D = \hbar\omega_D / k_B. \tag{20.26}$$

Частота Дебая равна

$$\omega_D = \bar{\upsilon} k_D, \tag{20.27}$$

где $\bar{\upsilon}$ может быть определена из (20.19), тогда

$$\theta_D = \hbar\bar{\upsilon}(6\pi^2 n)^{1/3} / k_B. \tag{20.28}$$

Концентрацию атомов алюминия $n$ найдем из цепочки соотношений

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A} \to \frac{\rho}{\mu} = \frac{n}{N_A} \to n = \frac{\rho}{\mu} N_A. \tag{20.29}$$

Таким образом,

$$\theta_D = \hbar\bar{\upsilon}\left(6\pi^2 \rho N_A / \mu\right)^{1/3} \Big/ k_B = 410 \text{ К}.$$

**Ответ:** $\theta_D = 410$ К.

**Пример 20.4.** Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, определить изменение молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от абсолютного нуля $T = 0$ К до $T = 0{,}1\theta_D$. Характеристическую температуру принять равной $\theta_D = 300$ К.

**Решение**

Примем, что вклады трех акустических ветвей приблизительно одинаковы, тогда $U_\mu \approx 3U_{\mu j}$. Начальная температура $T_1 = 0$ К, конечная температура $T_2 = 30$ К, изменение молярной внутренней энергии согласно (20.14) равно

$$\Delta U_\mu = U_{\mu 2} - U_{\mu 1} = 9R\theta_D \left( \left( \frac{T_2}{\theta_D} \right)^4 D(\eta_2) - \left( \frac{T_1}{\theta_D} \right)^4 D(\eta_1) \right), \quad (20.30)$$

где $\eta_1 = \theta_D / T_1$, $\eta_2 = \theta_D / T_2$, а функция $D(y)$ задана (20.15).

При $\eta_1 = \infty$ согласно (20.16) имеем $D(\infty) = \pi^4 / 15$, а при $\eta_2 = 10$ значение функции $D(y)$ найдем графически из рис. 20.2, оно равно $D(10) = 6{,}5$. Тогда из (20.30) получаем $\Delta U_\mu = 9R\theta_D 10^{-4} 6{,}5 \approx$ $\approx 14{,}6$ Дж/моль.

**Ответ:** $\Delta U_\mu \approx 14{,}6$ Дж.

**Пример 20.5.** С помощью квантовой теории теплоемкости Эйнштейна определить изменение вклада одной оптической ветви в молярную внутреннюю энергию кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2$ К от температуры $T_1 = \theta_E / 2$, если $\Delta T \ll \theta_E$.

**Решение**

Вклад одной оптической ветви колебаний кристалла в молярную внутреннюю энергию согласно (20.8) равен

$$U_{\mu j} = \frac{R\theta_E}{\exp(\theta_E / T) - 1} + \frac{1}{2} R\theta_E .$$

Учитывая, что $\Delta T \ll T_1$, искомое изменение молярной внутренней энергии кристалла можно приближенно представить выражением

$$\Delta U_{\mu j} = \left( \frac{dU_{\mu j}}{dT} \right)_{T_1} \Delta T = C_{\mu j} \Delta T .$$

Тогда с учетом (20.9) получаем формулу

$$\Delta U_{\mu j} = R \left( \frac{\theta_E}{T_1} \right)^2 \frac{\exp(\theta_E / T_1)}{(\exp(\theta_E / T_1) - 1)^2} \Delta T .$$

Подставляя значения исходных величин, получим, что изменение молярной внутренней энергии кристалла при нагревании на 2 К равно $\Delta U_{\mu j} \approx 12$ Дж.

**Ответ:** $\Delta U_{\mu j} \approx 12$ Дж.

**Пример 20.6.** Путем применения квантовой теории теплоемкости Дебая определить изменение молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2$ К от температуры $T_1 = \theta_D / 2$, считая что $\Delta T \ll T_1$.

**Решение**

Примем, что вклады трех акустических ветвей колебаний приблизительно одинаковы, тогда молярная внутренняя энергия равна

$$U_\mu \approx 3U_{\mu j} = 9R\theta_D \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^4 D(\theta_D / T) + \frac{9}{8} R\theta_D .$$

Так как $\Delta T \ll T_1$, малое приращение молярной внутренней энергии кристалла можно представить приближенным выражением

$$\Delta U_\mu = \left( \frac{dU_\mu}{dT} \right)_{T_1} \Delta T = C_\mu \Delta T ,$$

где $C_\mu \approx 3C_{\mu j}$. С учетом (20.17) получаем формулу

$$\Delta U_\mu = 3R\left(12\left(\frac{T_1}{\theta_D}\right)^3 D(\theta_D / T_1) - \frac{3\theta_D / T_1}{\exp(\theta_D / T_1) - 1}\right)\Delta T .$$

Подставим в эту формулу значения заданных величин, получим, что изменение молярной внутренней энергии кристалла при нагревании на $\Delta T = 2$ К равно $\Delta U_\mu = 40,2$ Дж.

**Ответ:** $\Delta U_\mu \approx 40,2$ Дж.

**Пример 20.7.** По квантовой теории теплоемкости Дебая определить отношение теплоемкостей образцов бериллия и меди одинакового объема при $T = 400$ К. Плотности бериллия и меди $\rho_{\text{Be}} = 1850$ кг/м$^3$ и $\rho_{\text{Cu}} = 8960$ кг/м$^3$, молярные массы $\mu_{\text{Be}} = 0,009012$ кг/моль и $\mu_{\text{Cu}} = 0,06355$ кг/моль, температуры Дебая $\theta_{D\text{Be}} = 1481$ К и $\theta_{D\text{Cu}} = 347$ К.

**Решение**

Теплоемкость образца заданного объема можно вычислить с помощью (20.17). Считаем, что вклады трех акустических ветвей колебаний приблизительно одинаковы, тогда теплоемкость образца равна

$$C = \frac{\rho V}{\mu} 3C_{\mu j},$$

а отношение теплоемкостей бериллия и меди есть

$$\frac{C_{\text{Be}}}{C_{\text{Cu}}} = \frac{\rho_{\text{Be}}}{\rho_{\text{Cu}}} \frac{\mu_{\text{Cu}}}{\mu_{\text{Be}}} \frac{12\eta_{\text{Be}}^{-3} D(\eta_{\text{Be}}) - 3\eta_{\text{Be}} / (\exp(\eta_{\text{Be}}) - 1)}{12\eta_{\text{Cu}}^{-3} D(\eta_{\text{Cu}}) - 3\eta_{\text{Cu}} / (\exp(\eta_{\text{Cu}}) - 1)},$$

где $\eta_{\text{Be}} = \theta_{\text{Be}} / T = 3,70$, $\eta_{\text{Cu}} = \theta_{\text{Cu}} / T = 0,868$. По рис. 20.2 находим, что $D(\eta_{\text{Be}}) \approx 3,51$, а $D(\eta_{\text{Cu}}) \approx 0,155$.

Подставляем в полученную формулу значения заданных величин, получаем, что отношение теплоемкостей по модели Дебая равно $C_{\text{Be}} / C_{\text{Cu}} \approx 1,5$.

**Ответ:** $C_{\text{Be}} / C_{\text{Cu}} \approx 1,5$.

## Задачи для аудиторной работы

**А20.1.** Период решетки одномерного кристалла равен 0,3 нм. Определить максимальную энергию фононов, распространяющихся вдоль этой цепочки атомов. Скорость звука в кристалле равна 5 км/с.

**А20.2.** Оценить частоту Дебая в кристалле меди, имеющем кубическую решетку с постоянной $a = 3{,}6$ Å. Модуль упругости Юнга равен $E = 130$ ГПа, плотность $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8960$ кг/м$^3$.

**А20.3.** Определить максимальную частоту собственных колебаний в кристалле золота по теории Дебая. Характеристическая температура Дебая $\theta_D = 180$ К.

**А20.4.** Скорость поперечных упругих волн в серебре $\upsilon_S = 1590$ м/с, продольных волн $\upsilon_l = 3600$ м/с, концентрация атомов серебра $n = 5{,}86 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$. Определить температуру Дебая $\theta_D$ для серебра.

**А20.5.** Найти отношение изменения внутренней энергии кристалла при его нагревании от абсолютного нуля $T = 0$ К до $T = 0{,}1\theta_D$ к энергии нулевых колебаний. **Указание:** значение интеграла (20.15) определить по графику рис. 20.2.

**А20.6.** При нагревании серебра массой 10 г от 10 до 20 К было подведено 0,71 Дж теплоты. Определить характеристическую температуру Дебая серебра. Считать $T \ll \theta_D$ и $\mu = 0{,}108$ кг/моль.

## Задание на дом

**В20.1.** Скорость поперечных упругих волн в бериллии $\upsilon_S = 8830$ м/с, продольных волн $\upsilon_l = 12\,550$ м/с, концентрация атомов бериллия $n = 1{,}23 \cdot 10^{29}$ м$^{-3}$. Определить температуру Дебая $\theta_D$ для бериллия.

**В20.2.** Какое количество теплоты требуется для нагревания двух молей каменной соли от 10 до 50 К? Характеристическая температура $\theta_D$ для NaCl равна 281 К.

**В20.3.** Вычислить максимальную частоту Дебая, если известно, что молярная теплоемкость серебра при температуре 20 К равна 1,7 Дж/(моль · К).

**В20.4.** В кристалле поваренной соли NaCl при температуре $T = 10$ К теплоемкость единицы объема равно $C = 3{,}2 \cdot 10^3$ Дж/К · м$^3$.

Оценить его дебаевскую температуру и усредненную скорость звука. Постоянная решетки $a = 5,64$ Å.

**В20.5.** Характеристическая температура Дебая для вольфрама равна 310 К. Определить длину волны фононов, соответствующих частоте $0,1\nu_{max}$. Вычислить усредненную скорость звука в вольфраме. Постоянная решетки вольфрама равна 3,16 Å.

# ПРАКТИКУМ 21
# ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ. РАДИОАКТИВНОСТЬ

*Масса протона*

$$m_p = 1,0072764668129 \text{ а.е.м.} = 938,27204621 \text{ МэВ} =$$
$$= 1,672622 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

*Масса нейтрона*

$$m_n = 1,0086649160043 \text{ а.е.м.} = 939,56537921 \text{ МэВ} =$$
$$= 1,674927 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Атомная единица массы

$$1 \text{ а.е.м.} = m_0 = 1,660540210 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 931,4940954 \text{ МэВ/с}^2.$$

*Обозначение ядра атома* $X$, содержащего $A$ нуклонов, в том числе $Z$ протонов

$${}_Z^A X, \text{ или } {}_Z X^A, \text{ или } {}^A X.$$

*Изотопами* называются ядра с одинаковыми зарядовыми числами $Z$, но разными массовыми числами $A$.

## Изотопы атома водорода

| | | $m$, а.е.м. | $m$, МэВ | $m$, $10^{-27}$, кг |
|---|---|---|---|---|
| $^1$H | Протий | 1,0078250320710 | 938,78306657 | 1,6735339904 |
| $^2$H | Дейтерий | 2,014101777484 | 1876,1239133 | 3,3444969885 |
| $^3$H | Тритий | 3,016049277725 | 2809,4320936 | 5,0082711010 |

*Оценка радиуса ядра*

$$R \approx R_0 \sqrt{A}\,, \tag{21.1}$$

где $R_0 \approx 1{,}3 \cdot 10^{-15}$ м.

Плотность ядерного вещества $\sim 10^{17}$ кг/м$^3$.

*Дефект массы ядра*

$$\Delta m = (Zm_p + (A - Z)m_n) - m \tag{21.2}$$

– это разность между суммой масс свободных нейтронов, протонов и массой образованного из них ядра.

*Энергия связи ядра*

$$E_s = \Delta mc^2 = (Zm_p + (A - Z)m_n - m)c^2\,. \tag{21.3}$$

*Удельная энергия связи*

$$\Delta E_s = E_s \,/\, A\,. \tag{21.4}$$

*Закон радиоактивного распада ядер*

$$N = N_0 e^{-\lambda t}\,, \tag{21.5}$$

где $N_0$ – число ядер в данном объеме вещества в момент времени $t = 0$; $N$ – число ядер в том же объеме в момент времени $t$; $\lambda$ – постоянная распада, имеющая смысл вероятности распада за одну секунду.

*Число ядер $dN$, распадающихся за время $dt$* в момент времени $t$, пропорционально числу $N$ не распавшихся к этому моменту ядер:

$$dN = -\lambda N dt\,.$$

*Период полураспада* – время, за которое исходное число ядер уменьшается вдвое:

$$T_{1/2} = \ln 2 \,/\, \lambda\,. \tag{21.6}$$

*Среднее время жизни ядра* $\tau$ – время, за которое исходное число ядер уменьшается в $e$ раз:

$$\tau = 1/\lambda\,. \tag{21.7}$$

*Активностью* $A$ нуклида в радиоактивном источнике называет число распадов ядер в одну секунду:

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N\,. \tag{21.8}$$

*Единица измерения активности* – беккерель, 1 Бк = 1 распад/с, 1 Ки (кюри) = 37 ГБк.

*Правило смещения*

При радиоактивном распаде выполняется закон сохранения электрических зарядов и закон сохранения массовых чисел:

$\alpha$-распад – ${}^{A}_{Z}X \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$;

$\beta^{-}$-распад – ${}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$;

$\beta^{+}$-распад – ${}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{1}\tilde{\mathrm{e}}$.

*Ядерные реакции* – превращение атомных ядер при взаимодействии с элементарными частицами или друг с другом

$$X + a \to Y + b \quad \text{или} \quad X(a,b)Y\,,$$

где $X$, $Y$ – исходные и конечные ядра; $a$, $b$ – бомбардирующая или испускаемая частицы. В ходе ядерной реакции выполняются законы сохранения:

1) заряда,
2) массовых чисел,
3) энергии,
4) импульса,
5) момента импульса.

Ядерные реакции проходят с выделением энергии $Q > 0$ (*экзотермические реакции*) или с поглощением энергии $Q < 0$ (*эндотермические реакции*):

$$Q = \left(\sum m' - \sum m''\right)c^2\,, \text{ или } Q = \sum E''_s - \sum E'_s\,, \tag{21.9}$$

где $\sum m'$, $\sum m''$ – суммы масс ядер и $\sum E_s', \sum E_s''$ – суммы энергий связи ядер до и после реакции соответственно.

*Коэффициент размножения нейтронов в реакциях деления*

$$K = \frac{N_{n2}}{N_{n1}}, \tag{21.10}$$

где $N_{n1}$ – число нейтронов до реакции; $N_{n2}$ – число нейтронов после реакции.

При $K > 1$ – затухающая реакция, при $K = 1$ – самоподдерживающая реакция, при $K > 1$ – развивающаяся реакция.

**Пример 21.1.** Найти энергию связи нейтрона в ядре изотопа кислорода ${}_Z^A X$.

**Решение**

*Энергией связи* частицы в ядре называется минимальная энергия, которую надо приложить, чтобы удалить частицу из ядра без сообщения ей кинетической энергии. Реакция удаления нейтрона из ядра

$${}_8^{17}\mathrm{O} \to {}_8^{16}\mathrm{O} + {}_0^1 n.$$

Энергию связи нейтрона с ядром $E_s = \Delta E$ определяет дефект массы $\Delta m = m\left({}_8^{16}\mathrm{O}\right) + m\left({}_0^1 n\right) - m\left({}_8^{17}\mathrm{O}\right)$. Таким образом,

$$E_s = \Delta m c^2 = \left(\tilde{m}\left({}_8^{16}\mathrm{O}\right) + \tilde{m}\left({}_0^1 n\right) - \tilde{m}\left({}_8^{17}\mathrm{O}\right)\right) m_0 c^2.$$

Здесь $m_0 c^2 = 931$ МэВ, а относительные массы ядер приведены в таблице: $\tilde{m}\left({}_8^{16}\mathrm{O}\right) = 15{,}99491$ а.е.м.; $\tilde{m}\left({}_8^{17}\mathrm{O}\right) = 16{,}99913$ а.е.м.; $\tilde{m}\left({}_0^1 n\right) = 1{,}00867$ а.е.м. (знак «тильда» означает, что масса в единицах атомной массы $m_0$). Подставляя эти значения в выражение для энергии связи, получаем $\Delta E$ = 4,14 МэВ

**Ответ:** $\Delta E$ = 4,14 МэВ.

**Пример 21.2.** *Пример реакции деления ядра.* Деление ядра изотопа урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. При столкновении с нейтроном ядро урана делится на ядро атома ксенона Xe и ядро атома стронция Sr с образованием пары свободных нейтронов:

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{139}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{95}_{38}\mathrm{Sr} + 2{}^{1}_{0}n \, . $$

Удельные энергии связи Xe, Sr и U равны 8,32 МэВ, 8,56 МэВ и 7,59 МэВ соответственно. Найти энергию *Q*, выделяемую при делении ядра урана.

**Решение**

Энергию *Q*, выделяемую при делении ядра урана, находим из уравнения энергетического баланса (21.9)

$$ Q = E_{s,\mathrm{Xe}} + E_{s,\mathrm{Sr}} - E_{s,\mathrm{U}} \, , $$

где $E_{s,\mathrm{Xe}} + E_{s,\mathrm{Sr}} = 8{,}32 \cdot 139 + 8{,}56 \cdot 95 = 1967{,}7$ МэВ;

$E_{s,\mathrm{U}} = 7{,}59 \cdot 235 \approx 1783{,}9$ МэВ;

$Q = 1967{,}7 - 1783{,}9 = 183{,}8$ МэВ,

таким образом, $Q / A \approx 0{,}79$ МэВ.

**Примечание:** энергию *Q* также можно найти, если известны массы изотопов. Из таблицы находим $\tilde{m}_{\mathrm{Xe}} = 138{,}918795$ а.е.м., $\tilde{m}_{\mathrm{Sr}} = 94{,}919359$ а.е.м., $\tilde{m}_{\mathrm{U}} = 235{,}043923$ а.е.м., $\tilde{m}_{n} = 1{,}008665$ а.е.м. Используя (21.9)

$$ Q = (\tilde{m}_U + \tilde{m}_n - \tilde{m}_{Xe} - \tilde{m}_{Sr} - 2\tilde{m}_n) m_0 c^2 \, , $$

получаем

$$ Q = (235{,}043923 - 138{,}918795 - 94{,}919359) \cdot 931{,}5 = 183{,}6 \text{ МэВ} $$

Видим практическое совпадение с предыдущим результатом.

**Ответ:** $Q \approx 184$ МэВ.

**Пример 21.3.** Определить энергию, выделяющуюся при образовании двух альфа-частиц в результате синтеза ядер дейтерия и изотопа лития ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$. Удельные энергии связи ядер ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ и ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ равны $\Delta E_1 = 1{,}11$, $\Delta E_2 = 7{,}08$ и $\Delta E_3 = 5{,}33$ МэВ соответственно.

**Решение**

Согласно (21.9) запишем выражение для выделяющейся энергии

$$Q = (\tilde{m}_1 + \tilde{m}_3 - 2\tilde{m}_2)m_0c^2, \tag{21.11}$$

где согласно (21.3) и (21.4) можно записать:

$$A_1\Delta E_1 = (\tilde{m}_p + \tilde{m}_n - \tilde{m}_1)m_0c^2;$$

$$A_2\Delta E_2 = (2\tilde{m}_p + 2\tilde{m}_n - \tilde{m}_2)m_0c^2;$$

$$A_3\Delta E_3 = (3\tilde{m}_p + 3\tilde{m}_n - \tilde{m}_3)m_0c^2,$$

здесь $\tilde{m}_p$ – масса протона; $\tilde{m}_n$ – масса нейтрона; $\tilde{m}_1$ – масса дейтерия; $\tilde{m}_2$ – масса альфа-частицы; $\tilde{m}_3$ – масса изотопа лития в единицах а.е.м.; $A_{1,2,3}$ – соответствующие массовые числа. Выражаем из последних формул массы, получаем

$$\tilde{m}_1 = \tilde{m}_p + \tilde{m}_n - A_1\Delta E_1 / m_0c^2;$$

$$\tilde{m}_2 = 2\tilde{m}_p + 2\tilde{m}_n - A_2\Delta E_2 / m_0c^2;$$

$$\tilde{m}_3 = 3\tilde{m}_p + 3\tilde{m}_n - A_3\Delta E_3 / m_0c^2.$$

Подставляя полученные выражения для масс в (21.11), имеем $Q = -A_1\Delta E_1 - A_3\Delta E_3 + 2A_2\Delta E_2 = -2\Delta E_1 - 6\Delta E_3 + 8\Delta E_2 = 22{,}4$ МэВ.

**Ответ:** $Q = 22{,}4$ МэВ.

**Пример 21.4.** Найти постоянную распада и время жизни радиоактивного кобальта ${}^{55}\mathrm{Co}$, если его активность уменьшается на 4,0 % за $t_1 = 60$ мин.

**Решение**

Относительное изменение активности запишем в виде отношения

$$\frac{\Delta A(t)}{A(t)} = \frac{A(t) - A(t_1 + t)}{A(t)} = \eta,$$

где $\eta = 0,04$. Учитывая (21.8), (21.5), получаем

$$\eta = \frac{\lambda N_0 \exp(-\lambda t) - \lambda N_0 \exp(-\lambda(t_1 + t))}{\lambda N_0 \exp(-\lambda t)} = 1 - \exp(-\lambda t_1),$$

откуда $\lambda = -\ln(1-\eta)/t_1$. Подставляя численные значения параметров, получаем $\lambda = 1{,}13 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$. Время жизни изотопа $\tau = 1/\lambda = 8{,}8 \cdot 10^4$ с = = 24,5 суток. Период полураспада $T_{1/2} = \ln 2/\lambda = 17$ ч.

**Ответ:** $\lambda = 1{,}13 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, $\tau = 24{,}5$ суток.

## Задачи для аудиторной работы

**А21.1.** Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы оторвать один нейтрон от ядра азота ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$?

**А21.2.** Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы разделить на отдельные нуклоны ядра ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ и ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$? Почему для ядра бериллия эта энергия меньше, чем для ядра лития?

**А21.3.** Вычислить энергию, необходимую для разделения ядра неона ${}^{20}\mathrm{Ne}$ на две альфа-частицы и ядро ${}^{12}\mathrm{C}$, если удельные энергии связи в ядрах ${}^{20}\mathrm{Ne}$, ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ и ${}^{12}\mathrm{C}$ соответственно равны 8,03 МэВ, 7,07 МэВ и 7,68 МэВ.

**А21.4.** Определить число радиоактивных ядер в свежеприготовленном препарате ${}^{82}\mathrm{Br}$, если известно, что через сутки его активность становится равной $A$ = 7,4 ГБк. Период полураспада $T_{1/2} = 35{,}3$ ч.

**А21.5.** Сколько $\beta$-частиц испускает за один час $10^{-6}$ кг радиоактивного ${}^{24}\mathrm{Na}$, период полураспада которого 15 ч?

**А21.6.** В калориметр с теплоемкостью 4,19 Дж/К поместили препарат полония с активностью 740 МБк. Вследствие альфа-распада температура калориметра стала увеличиваться со скоростью 0,54 К/час. Определить энергию $E$ альфа-частицы.

## Задание на дом

**В21.1.** Определить энергию, которая выделится при образовании из протонов и нейтронов ядер гелия ${}_2^4\mathrm{He}$ массой один грамм.

**В21.2.** Найти минимальную энергию $E$, необходимую для удаления одного протона из ядра азота ${}_7^{14}\mathrm{N}$.

**В21.3.** При ядерной реакции ${}^9\mathrm{Be}(\alpha, n){}^{12}\mathrm{C}$ освобождается энергия $Q = 5,70$ МэВ. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер бериллия и гелия и принимая их импульсы равными нулю, определить кинетические энергии продуктов реакции.

**В21.4.** Счетчик Гейгера, установленный вблизи препарата радиоактивного изотопа серебра, регистрирует поток β-частиц. При первом измерении поток $\Phi_1$ был равен 87 $\mathrm{c}^{-1}$, а по истечении времени $t = 1$ суток поток $\Phi_2$ оказался равен 22 $\mathrm{c}^{-1}$. Определить период полураспада изотопа.

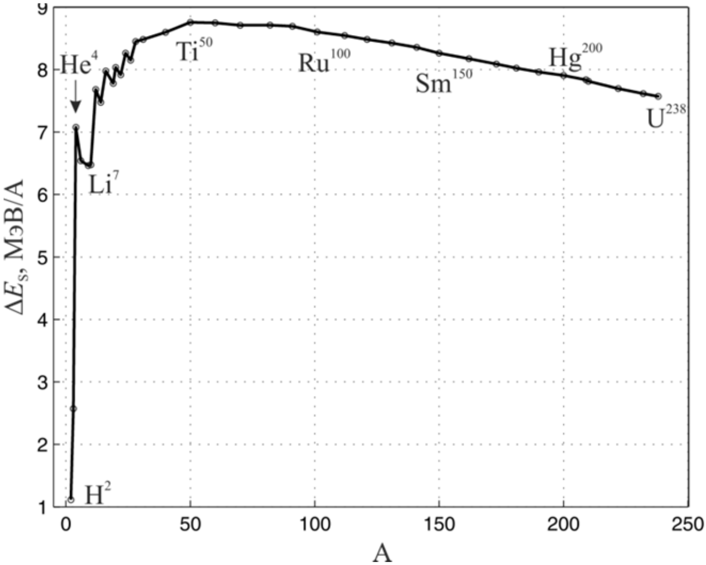
**В21.5.** Определить активность фосфора ${}^{32}\mathrm{P}$ массой один миллиграмм.

# Приложение к практикуму 21

## Масса, энергия связи и период полураспада некоторых изотопов

| | $m$, а.е.м. | $E_S$, МэВ | $T_{1/2}$ | | $m$, а.е.м. | $E_S$, МэВ | $T_{1/2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $^{1}_{1}H$ | 1.007825 | | | $^{15}_{7}N$ | 15.00011 | 115.494 | |
| $^{2}_{1}H$ | 2.014102 | 2.2245 | | $^{16}_{8}O$ | 15.99491 | 127.620 | |
| $^{3}_{1}H$ | 3.016049 | 8.4819 | 12.33 г | $^{17}_{8}O$ | 16.99913 | 131.763 | |
| $^{3}_{2}He$ | 3.016029 | 7.7181 | | $^{20}_{10}Ne$ | 19.992434 | 160.646 | |
| $^{4}_{2}He$ | 4.002603 | 28.2961 | | $^{23}_{11}Na$ | 22.989768 | 186.565 | |
| $^{6}_{3}Li$ | 6.015122 | 31.993 | | $^{24}_{11}Na$ | 23.990963 | 193.526 | 14.96 ч |
| $^{7}_{3}Li$ | 7.016003 | 39.245 | | $^{32}_{15}P$ | 31.973907 | 270.852 | 14.28 д |
| $^{7}_{4}Be$ | 7.01693 | 37.601 | 53.3 д | $^{82}_{35}Br$ | 81.916805 | 711.97 | 35.31 ч |
| $^{9}_{4}Be$ | 9.01219 | 58.163 | | $^{95}_{38}Sr$ | 94.919359 | 812.5 | |
| $^{10}_{4}Be$ | 10.01354 | 64.978 | 1.6 Мг | $^{108}_{47}Ag$ | 107.905954 | 922.55 | 2.39 м |
| $^{9}_{5}B$ | 9.01333 | 56.312 | 0.85ас | $^{110}_{47}Ag$ | 109.906111 | 938.55 | 24.6 с |
| $^{10}_{5}B$ | 10.01294 | 64.750 | | $^{139}_{54}Xe$ | 138.918795 | 1156.6 | 39.68 с |
| $^{11}_{5}B$ | 11.00931 | 76.206 | | $^{208}_{84}Po$ | 207.981231 | 1630.61 | 2.90 г |
| $^{10}_{6}C$ | 10.00168 | 60.360 | 19.3с | $^{210}_{84}Po$ | 209.982857 | 1645.23 | 134.4 д |
| $^{12}_{6}C$ | 12.00000 | 92.163 | | $^{220}_{86}Rn$ | 220.011384 | 1697.81 | 55.6 с |
| $^{13}_{6}C$ | 13.00335 | 97.109 | | $^{222}_{86}Rn$ | 222.017571 | 1708.24 | 3.8235д |
| $^{14}_{6}C$ | 14.00324 | 105.286 | 5730г | $^{225}_{88}Ra$ | 225.023605 | 1725.30 | 14.9 д |
| $^{13}_{7}N$ | 13.00574 | 94.106 | 9.97м | $^{235}_{92}U$ | 235.043923 | 1783.90 | 704Мг |
| $^{14}_{7}N$ | 14.00307 | 104.659 | | $^{238}_{92}U$ | 238.050783 | 1801.73 | 4.47Гг |

**Примечание:** ас – аттосекунда; с – секунда; м – минута; ч – час; д – сутки; г – год; Мг – $10^6$ лет; Гг – $10^9$ лет.




Зависимость удельной энергии связи ядра от массового числа

# ОТВЕТЫ

**А1.1.** $B \approx 1.57 \cdot 10^{-6}$ Тл. **А1.2.** $B \approx 2.4 \cdot 10^{-5}$ Тл. **А1.3.** а) $B \approx 6.28$ мкТл, б) $B \approx 2.22$ мкТл. **А1.4**. $B \approx 5.4$ мкТл. **А1.5**. $B \approx 6.28$ мкТл.

**В1.1.** $I \approx 21.5$ А. **В1.2.** $B \approx 2.1 \cdot 10^{-5}$ Тл. **В1.3.** $B \approx 0.35$ мТл. **В1.4.** $B \approx 23.4$ мкТл. **В1.5.** $B \approx 7.0$ мкТл.

**А2.1.** 1. а) $\upsilon \approx 5.93 \cdot 10^6$ м/с; б) $\upsilon \approx 5.93 \cdot 10^6$ м/с; 2. а) $\upsilon \approx 1.88 \cdot 10^8$ м/с; б) $\upsilon \approx 1.64 \cdot 10^8$ м/с. **А2.2.** $\Delta p = -8 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с. **А2.3.** $m_2 = 27$ аем. **А2.4.** $\varphi = 30°$. **А21.5**. $F = -6.4 \cdot 10^{-14}$ Н.

**В2.1.** $\Delta L = 0.5 \upsilon_0 q E t^2 \sin\alpha$, $\Delta L = 1.7 \cdot 10^{-29}$ кг·м²/с. **В2.2**. $\Delta E_K = 1.6 \cdot 10^{-16}$ Дж. **В2.3**. $R \approx 1.4$ м. **В2.4**. $R \approx 0.39$ мм, $h \approx 1.4$ мм.

**А3.1.** $F = 1$ кН/м. **А3.2.** $F = 0.125$ Н/м. **А3.3.** $C \approx 0.628$ мкТл · м. **А3.4.** $B = 0$ Тл, $B = 0.2$ мТл. **А3.5.** $\Phi = 50$ мкВб. **А3.6.** $j = (\alpha + 1) \times \beta r^{\alpha-1} / \mu_0$, $j = 47.7$ А/м².

**В3.1.** $\alpha = \pi / 6$. **В3.2.** $I \approx 7.1$ А. **В3.3.** а) $F_{1,2,3} = 34.6$ мН, б) $F_{1,2} = 20.0$ мН, $F_3 = 34.6$ мН, причем $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = 0$. **В3.4.** а) $B = 15.7$ нТл, б) $B \approx 2.1$ нТл. **В3.5.** $\delta\Phi = |\Phi_1 - \Phi_2| / \Phi_1 = 0.0033$.

**А4.1.** $p_m = 0.05$ А·м². **А4.2.** а) $p_m = 0.5$ нА·м², б) $p_m / L = 0.5$ мкКл/кг. **А4.3.** $M = 62.8$ мкН · м, $A = 10.6$ мкДж. **А4.4.** $I = 0.055$ А**. А4.5.** $B \approx 1.38$ Тл, $\mu = 690$. **А4.6.** $I \approx 4.3$ А. Указания: воспользоваться табл. 4.1.

**В4.1.** $R = 2.4$ см, $I = 3$ А. **В4.2.** $p_m = 10^{-8}$ А·м², $p_m / L = 10^{-6}$ Кл/кг. **В4.3.** $p_m = 12$ А·м², $M \approx 0.1$ Н·м**. В4.4.** $p_m = 25$ А·м². **В4.5.** $B \approx 1.39$ Тл, $\mu \approx 670$.

**А5.1.** $V = 0.2$ В. **А5.2.** $N = 79$ Вт. **А5.3.** $q = 0.01$ Кл. **А5.4.** $\langle\varepsilon\rangle = 0.001$ В. **А5.5.** $N = 900$. **А5.6.** $L_{21} = 0.02$ Гн.

**В5.1.** $\langle\varepsilon\rangle = 0.16$ В. **В5.2.** $\varepsilon = -1$ В. **В5.3.** $Q = 3.14$ мкКл. **В5.4.** $\langle\varepsilon\rangle = 0.15$ В. **В5.5.** $N = 1013$. **В5.6.** $\Phi = 3$ мВб, $\Psi = 3$ Вб. **В5.7.** $L = n^2VB / H$, $L_2 / L_1 = 0.15$.

**А6.1.** $U_1 = 4.14$ В, $I_1 = 2.07$ А; $U_2 = 1.43$ В, $I_2 = 0.71$ А. **А6.2.** $U_C = \varepsilon(1 - e^{-\alpha t})$, $\alpha = 1 / R_2C$, $I_2(t_1) \approx 0.18$ А, $I_2(t_2) \approx 0.021$ А. **А6.3.** $t_1 = 0.58$ с, $t_2 = 1.16$ с. **А6.4.** $t = 145$ мс. **А6.5.** $I = \varepsilon(1 - \exp(-\alpha t) / R_2$, $\alpha = R_1R_2 / L(R_1 + R_2)$, $I_1 = 0.016$ А, $I_2 = 0.032$ А.

**В6.1.** $I_1 \approx 0.81$ А, $I_2 = 0.11$ А. **В6.2.** $t = 0.23$ с. **В6.3.** $t = 0.69$ с. **В6.4.** $t \approx 0.26$ с. **В6.5.** $I_1(0) \approx 0.13$ А, $I_1(t_1) = 0.11$ мА.

**А7.1.** $T = 1.05$ мкс. **А7.2.** $U_C = 316$ В. **А7.3.** $\nu = 1.4$ кГц; $I_m = 8.05$ А. **А7.4.** $\lambda = 126$ м, $\nu = 2.4$ МГц. **А7.5.** $T / 8$, $Q_m / \sqrt{2}$. **А7.6.** $\tilde{\lambda} = 0.22$.

**В7.1.** $\omega_0 = 3.16 \cdot 10^4$ с$^{-1}$, $\nu_0 = 5.03 \cdot 10^3$ Гц. **В7.2.** $I_m = 1$ А. **В7.3.** $C = 50.7$ пФ. **В7.4.** 1) $I = -I_m \sin(\omega_0 t)$, где $I_m = 0.217$ А, $\omega_0 = 4.612 \cdot 10^4$ с$^{-1}$; 2) $\varepsilon_1 = -U_m \cos(\omega_0 t_1) = 7.07$ В, где $\omega_0 t_1 = \pi / 4$. **В7.5.** $W_B / W_E = 3$. **В7.6.** $t = 14.8$ мкс. **В7.7.** $R = 27.7$ Ом.

**А8.1.** $P = 72$ Вт. **А8.2.** $U_C / \varepsilon = 0.73$, $U_R / \varepsilon = 0.69$. **А8.3.** $U_R = 98$ В. **А8.4.** $Q = 20$. **А8.5.** $\langle P\rangle \approx 0.20$ мВт.

**В8.1.** $I_e = 3.29$ А, $\varphi = 13.6^\circ$, $P = 704$ Вт. **В8.2.** $|Z| = 4.37$ кОм. **В8.3.** 1) $I_e = 0.071$ А; 2). $\varphi = -63.4°$; 3) $P_e = 4$ Вт. **В8.4.** $\varphi = -88°$. **В8.5.** $P_L \approx 23.2$ Вт.

**А9.1.** 5.88 см. **А9.2.** $\upsilon_2 = 1450$ м/с. **А9.3.** 1) $\lambda = 5$ см, 2) $\lambda = 10$ см. **А9.4.** $L_2 = 35.5$ дБ. **А9.5.** $W = 23.7$ мкДж. **А9.6.** 1) $\nu = 372$ Гц, 2) $\nu = 330$ Гц.

**B9.1.** $u(x_1,t_1) = -1.29$ см. **B9.2.** а) $\upsilon \approx 331$ м/с; б) $\upsilon \approx 360$ м/с. **B9.3.** а) $\nu = 144$ Гц; б) $\nu = 72$ Гц. **B9.4.** 1) $\nu_1 = 332$ Гц; 2 $\nu_2 = 274$ Гц. **B9.5.** $\langle w_u \rangle \approx 3.02$ мДж/м$^3$**.** **B9.6.** а) $L_2 = 63$ дБ; б) $L_{10} = 70$ дБ.

**A10.1.** $\Delta\lambda = -50$ м. **A10.2.** а) $H = -0.30$ А/м, $H = 0.18$ А/м)**.** **A10.3.** $\boldsymbol{H} = 0.0375\boldsymbol{k}\cos\omega t$ А/м**,** $\boldsymbol{S} = 0.375\boldsymbol{i}\cos^2\omega t$ Вт/м$^2$. **A10.4.** а) $\langle p_S \rangle =$ $= 5.2\cdot 10^{-18}$ кг/м$^2$с; б) $p = 3.14\cdot 10^{-9}$ Па**.** **A10.5.** $W \approx 8\cdot 10^{-11}$ Дж**.**

**B10.1.** а) $E_m = 18.8$ В/м; б) $\langle w \rangle = 1.57$ нДж/м$^3$; в) $I \approx 0.47$ Вт/м$^2$. **B10.2.** $H = 46$ мА/м, $\upsilon = 1.73\cdot 10^8$ м/с. **B10.3.** $I = 3\cdot 10^3$ Вт/м$^2$**.** **B10.4.** $\varepsilon \approx 1.78$**.** **B10.5.** $W = 1$ мДж.

**A11.1.** а) $i \approx 0.067$ рад; б) $i \approx 0.095$ рад**.** **A11.2.** $L = 2$ м**.** **A11.3.** $d_{\min} = 2.50\times 10^{-7}$ м**.** **A11.4.** $\alpha = 5.0\cdot 10^{-5}$ рад**.** **A11.5.** $d = 72$ мкм**.** **A11.6.** $\Delta x = 27.3$ мкм**.**

**B11.1. MAX:** $\lambda_3 = 0.600$ мкм, $\lambda_4 = 0.450$ мкм. **MIN:** $\lambda_2 = 0.720$ мкм, $\lambda_3 = 0.514$ мкм, $\lambda_4 = 0.400$ мкм**.** **B11.2.** $L = 2.909$ м**.** **B11.3.** $d = 0.106$ мкм**.** **B11.4.** $\lambda = 0.541$ мкм. **B11.5.** $\Delta n = 1.24\cdot 10^{-4}$**.**

**A12.1.** $r_6 = 3.67$ мм**.** **A12.2.** $(r)_1 = 1.4$ м, $(r)_2 = 0.7$ м, $(r)_3 = 0.47$ м**.** **A12.3.** $\theta_4 = 0.048$ рад $\approx 2^{\circ}45'$**.** **A12.4.** $\Delta x_2 = 4$ мм**.** **A12.5.** $N_d = 103$ штрих/мм**.** **A12.6.** $R = 290$, $N = 145$**.**

**B12.1.** $m = 8$ (восемь зон Френеля), темное пятно**.** **B12.2.** $b = 2$ м. **B12.3.** $\lambda = 0.579$ мкм**.** **B12.4.** $m = [R / N] = [2.53] = 2$**.** **B12.5.** $R = 2.91\cdot 10^4$**.**

**A13.1.** $\alpha = 37^{\circ}$**.** **A13.2.** $I_0 / I_2 = 3.3$**.** **A13.3.** $I_{\max} / I_{\min} = 3$**.** **A13.4.** $c =$ $= 210$ кг/м$^3$**.** **A13.5.** $\rho = 0.043$**.** **A13.6.** $\rho = 0.021$**.**

**B13.1.** $i_B = 0.5985$ рад $\approx 34.31°$**.** **B13.2.** Уменьшится в 2 раза. **B13.3.** $\alpha =$ $= 1.077$ рад $\approx 61.7°$. **B13.4.** $I'' / I' = 0.813$. **B13.5.** $\rho = 398$ кг/м$^3$ (обратите внимание на размерность коэффициента удельного вращения сахара)**.** **B13.6.** Рис. А1.

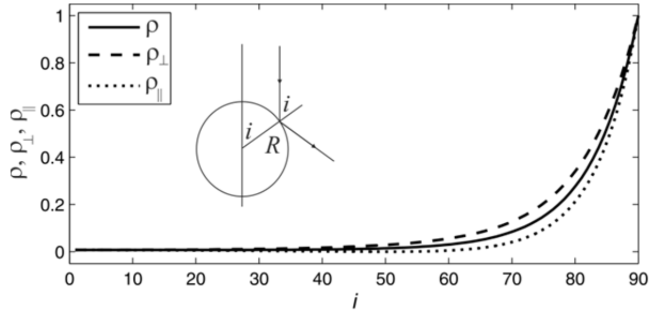



*Рис. А1.* К задаче **B13.6.** Зависимость коэффициентов отражения света от угла падения $i$. Координаты точки падения вычисляются по формулам $x = R\sin i$, $y = R\cos i$

**A14.1.** $W = 5.6$ кДж. **A14.2.** $\lambda_{max} = 0.55$ мкм. **A14.3.** $\eta = 0.43$. **A14.4.** 1) $\varepsilon_1 = 4.1$ эВ, $\varepsilon_1 < A$, не будет наблюдаться фотоэффект; 2) $\varepsilon_2 = 6.2$ эВ, $\varepsilon_2 > A$, будет наблюдаться фотоэффект. **A14.5.** $\varphi = 120°$. **A14.6.** $n = 10^{12}$ м$^{-3}$. **A14.7.** $F = 10^{-10}$ Н.

**B14.1.** $T = 1100$ К. **B14.2.** $R^*_{T_2} / R^*_{T_1} = 81$, $(r^*_{\lambda,T_2})_{max} / (r^*_{\lambda,T_1})_{max} = 243$. **B14.3.** $U = U = 0.39$ В. **B14.4.** $p = 10^{-7}$ кг·м/с. **B14.5.** $N_{ph} \approx 3.8\cdot 10^{18}$. **B14.6.** $\varepsilon'_{ph} = 0.224$ МэВ, $E_K = 0.176$ МэВ.

**A15.1.** $\lambda \approx 1.04$ нм. **A15.2.** $E \approx 450$ эВ. **A15.3.** $E_K = 0.212$ МэВ. **A15.4.** $\Delta\upsilon / \upsilon \geq 5\cdot 10^{-5}$. **A15.5.** Диаметр пятна электронного пучка на экране равен 0.73 мм.

**B15.1.** $U \approx 151$ В. **B15.2.** $\Delta x_1 \approx 0.73$ мм. **B15.3.** $\Delta x / \lambda \geq 100$. **B15.4.** $d \approx$ $\approx 2\hbar / \sqrt{2m_p E_K} = 2.87 \approx 3$ фм, с учетом связи кинетической энергии с импульсом $pc = \sqrt{E_K(E_K + mc^2)}$, $d \approx 2\hbar c / \sqrt{E_K(E_K + m_p c^2)} \approx 4.0$ фм. **B15.5.** 1) $\Delta E = 0$; 2) $\Delta E = 6.6\cdot 10^{-8}$ эВ.

**A16.1.** $d = 2.5$ нм. **A16.2.** $d = 2/\rho_{max} = 2$ нм, $E = (\pi\hbar\rho_{max})^2 / 8m \approx$ $\approx 0.094$ эВ. **A16.3.** $E = \hbar^2\alpha^2 d / 4m$. **A16.4.** $dN / dE = (d / \pi\hbar)\sqrt{m / 2E} \approx$

$\approx 0.8 \cdot 10^7$ эВ$^{-1}$. **А16.5.** $E_1 = 0.234$ эВ. **16.6.** $W_0 = 0.843$ (воспользуйтесь рис. 16.2).

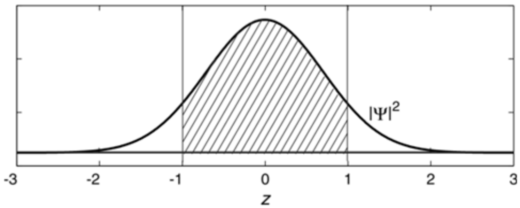



*Рис. А2.* К задаче А16.5

**В16.1.** $\Delta E_{12} = 4.5$ эВ. **В16.2.** см. рис.А.2, число узлов волновой функции *n*-го стационарного состояния равно $n-1$. **В16.3.** $x_1 = d/3$, $x_2 = 2d/3$, $|\psi_{1,2}(x_1)|^2 = |\psi_{1,2}(x_2)|^2 = 1.5/d$. **В16.4.** $W_1(x_1, x_2) = 0.475$, где $x_1 = 3d/8$, $x_2 = 5d/8$. **В16.5.** **Указание:** $\int x(\sin x)^2 dx = = 0.25(x^2 - x\sin 2x + (\sin x)^2)$. $\langle x \rangle_n = d/2$. **В16.6.** **Указание:** воспользуйтесь (А16.2). $W_1 \approx 0.888$.

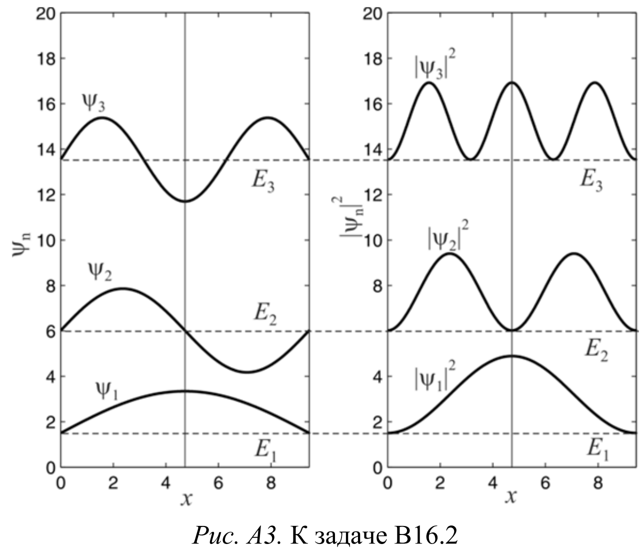



*Рис. А3.* К задаче В16.2

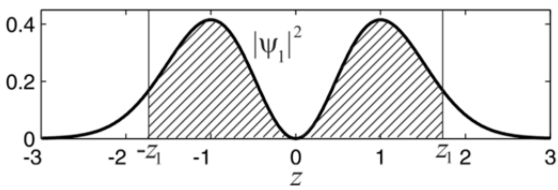



*Рис. А4*. К задаче В16.6

**А17.1.** $\lambda_2 = 1.2$ нм. **А17.2.** $U_0 = 3.65$ эВ. **А17.3.** $l_{eff} \approx 0.14$ нм. **А17.4.** $T \approx 0.082$. **А17.5.** $E_1 \approx 6.5$ эВ, $T(E_1) = 1$.

**В17.1.** $\lambda_2 / \lambda_1 \approx 2.45$, $\upsilon_2 / \upsilon_1 \approx 0.41$, $\upsilon_{g2} / \upsilon_{g1} \approx 0.41$. **В17.2.** $T \approx$ $\approx 0.247$. **В17.3.** $T \approx 0.66$. **В17.4.** $E_1 \approx 4.0$ эВ, $T(E_1) = 1$. **В17.5.** $E_1 \approx 1.63$ эВ, $R(E_1) = 0.04$.

**А18.1.** $E_{1,1,1} = 6.1$ МэВ. **А18.2.** $\langle r \rangle = 3a_B / 2$. **А18.3.** $\dfrac{W_{100}(r_1)}{W_{100}(r_2)} \approx$ $\approx 0.82$. **А18.4.** 1) $L = 0$, 2) $L = \sqrt{2}\hbar$). **А18.5.** $\mu = 1.61 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл. **А18.6.** $r_w = a_B$.

**В18.1.** Кратность вырождения равна 3**:** $E_{1,1,3}, E_{1,3,1}, E_{3,1,1}$; $\Delta E_{32} = 28.2$ эВ. **В18.2.** $r_{0.9} = 2.66a_B = 1.4$ **Å. В18.3.** При $r_1 = 0.77a_B$ – первый максимум, при $r_2 = 5.24a_B$ – второй максимум, при $r_3 = 2a_B$ $W_{200}(r_3) = 0$ (см. рис.18.2). **В18.4.** $\Delta L = \hbar\sqrt{2}$ **. В18.5.** $\mu_0 = 0$**,** $\mu_1 = \sqrt{2}\mu_B$**,** $\mu_2 = \sqrt{6}\mu_B$.

**А19.1.** $W \approx 0.65$. **А19.2.** $p = 0.96$. **А19.3.** $\Delta E = 9 \times 10^{-23}$ эВ. **А19.4.** $\sigma_2 / \sigma_1 = 1.45$. **А19.5.** $n = 2.5 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.

**В19.1.** Для температуры $T_1 = 290$ К $W_1 = 0.881$, $W_2 = 0.119$, для температуры $T_2 = 77$ К, $W_3 = 0.999$, $W_4 = 5.37 \cdot 10^{-4}$. **В19.2.** $\dfrac{(\langle E \rangle - \langle E_0 \rangle)}{\langle E_0 \rangle} =$ $= 1.1 \cdot 10^{-4}$. **В19.3.** $W = 0.030$. **В19.4.** $\rho_2 / \rho_1 = 1.9 \cdot 10^{-3}$. **В19.5.** $R_H =$ $= 2 \cdot 10^{-10}$ м$^3$/Кл, $n = 3.1 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$.

**A20.1.** $\varepsilon_{\max} = 5.5 \cdot 10^{-21}$ Дж $= 0.034$ эВ. **A20.2.** $\omega = 2 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $v = 3$ ТГц. **A20.3.** $v_D = 3.77$ ТГц. **A20.4.** $\theta_D = 208$ К. **A20.5.** $\dfrac{(U_\mu - U_{\mu 0})}{U_{\mu 0}} = 0.0052$. **A20.6.** $\theta_D = 212$ К.

**B20.1.** $\theta_D = 1420$ К. **B20.2.** $Q = 273$ Дж. **B20.3.** $\omega_D = 2.73 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, $v_D = 4.36$ ТГц. **B20.4.** $\theta_D \approx 280$ К, $\overline{c} \approx 3300$ м/с. **B20.5.** $\lambda = 6.3$ нм, $\overline{c} \approx 4080$ м/с.

**A21.1.** $E_s \approx 10.6$ МэВ. **A21.2.** $E_{s,\mathrm{Li}} = 37.7$ МэВ, $E_{s,\mathrm{Be}} = 35.6$ МэВ, для ядра изотопа ${}_4^7\mathrm{Be}$ энергия связи меньше, поскольку число нейтронов в ядре Be меньше чем в ядре ${}_3^7\mathrm{Li}$, а $m_p < m_n$. **A21.3.** $Q = -11.9$ МэВ. **A21.4.** $N_0 = 2.2 \cdot 10^{15}$. **A21.5.** $\Delta N = 1.2 \cdot 10^{18}$. **A21.6.** $E = 5.3$ МэВ.

**B21.1.** $Q = 6.8 \cdot 10^{11}$ Дж. **B21.2.** $E = 7.55$ МэВ. **B21.3.** $E_C = 0.44$ МэВ, $E_n = 5.26$ МэВ. **B21.4.** $T_{1/2} = 12$ ч. **B21.5.** $A = 1.06 \cdot 10^{13}$ Бк.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. – Изд. 5-е. – М.: Высшая школа, 1988.
2. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 432 с.
3. *Савельев И.В.* Сборник вопросов и задач по общей физике. – СПб: Лань, 2005. – 288 с.
4. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. Т. 3. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 768 с.
6. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. – М.: Наука, 1973. – 704 с.
7. *Штыгашев А.А., Пейсахович Ю.Г.* Задачи по физике. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 160 с.
8. *Киселев Д.Ф., Жукарев А.С., Иванов С.А., Киров С.А., Лукашева Е.В.* Электричество и магнетизм. Методика решения задач. – М.: Издательство МГУ, 2010. – 332 с.
9. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
10. *Пейсахович Ю.Г., Штыгашев А.А.* Одномерная квантовая механика. Новосибирск: НГТУ, 2007. – 476 с.
11. *Кухлинг Х.* Справочник по физике. – М.: Мир, 1982. – 520 с.
12. Физические величины: Справочник / под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ