Министерство образования Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.В. ДАВЫДКОВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ИДО

Часть II

Электростатика. Магнетизм. Колебания и волны

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2005

УДК 53(075.8)
Д 138

Рецензенты: *А.А. Харьков, канд*. физ.-мат. наук, доц.
А.В. Баранов, канд. физ.-мат. наук, доц.

Работа подготовлена на кафедре общей физики

Давыдков В.В.

Д 138 Курс общей физики для студентов ИДО: Учеб. пособие: 2-е изд., испр. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. Ч. II. – 158 с.

ISBN 5-7782-0538-4

В пособии изложен теоретический материал по электростатике и магнетизму, колебаниям и волнам. Учебное пособие соответствует программе изучения курса общей физики, рассчитанной на три учебных семестра.

Курс лекций по общей физике предназначен для студентов института дистанционного образования, изучающих вторую часть курса физики.

УДК 53 (075.8)

ISBN 5-7782-0538-4

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатика – раздел физики, изучающий взаимодействие неподвижных зарядов.

1.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ. СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ

Явления, связанные с электрическими зарядами, известны людям с древних времён. Достоверно известно, что ещё в VI в. до нашей эры греческий учёный Фалес Милетский открыл эффект электризации янтаря*. Потёртый тканью янтарь притягивал к себе лёгкие предметы.

Однако изучение свойств зарядов началось лишь в XVII в. В 1672 г. немецкий учёный Герике описал устройство созданной им «электрической машины», позволяющей получать довольно большие заряды. В этой же работе он сообщил об открытом им явлении – лёгкие тела могут не только притягиваться наэлектризованным телом, но и отталкиваться.

В 1734 г. французский учёный Дюфе открыл существование двух видов электрических зарядов – положительных и отрицательных. Он же установил, что одноимённые заряды отталкиваются, а разноимённые – притягиваются.

Петербургский академик Франц Эпинус в середине XVIII в. открыл закон сохранения электрического заряда: алгебраическая сумма зарядов замкнутой** системы тел ни при каких условиях не изменяется.

Более поздние эксперименты позволили обнаружить и другие свойства зарядов:

– электрический заряд релятивистски инвариантен, т. е. его величина не зависит от скорости движения заряда;

---

* Янтарь по-гречески – «электрон», отсюда и произошло слово **электричество.**

** Под замкнутой здесь понимается система, не обменивающаяся зарядами с внешними телами.

– наименьшим электрическим зарядом (элементарным зарядом) обладают электроны и протоны; заряд электрона считают отрицательным, протона – положительным; модули заряда электрона и протона **точно** равны между собой.

Количество электронов и протонов в неионизированном атоме одинаково, поэтому суммарный заряд такого атома всегда равен нулю. Следовательно, и суммарный заряд всех атомов вещества равен нулю.

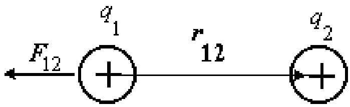
Для того чтобы наэлектризовать вещество, необходимо сообщить ему (или удалить) некоторое количество элементарных зарядов одного знака (например, электронов). Этим обусловлено ещё одно свойство зарядов:

– электрический заряд дискретен, т. е. заряд тел изменяется неделимыми порциями, равными элементарному заряду: $q = nq_e$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ – целое число, q_e – элементарный заряд.

Заряд электрона равен $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд протона $+1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Заряд элементарных частиц является их неотъемлемым свойством (так же как, например, инертность).

1.2. ЗАКОН КУЛОНА



Шарль Кулон в XVIII в. занимался изучением взаимодействия электрических зарядов.

В качестве зарядов он использовал наэлектризованные шарики, размеры которых были малы по сравнению с расстоянием между ними. Такие заряды называются точечными.

В результате серии экспериментов он обнаружил, что **сила электростатического взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорциональна произведению величин зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами и направлена вдоль прямой, соединяющей точечные заряды**

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12},$$

где $\boldsymbol{F}_{12}$ – сила, действующая на первый заряд со стороны второго; q_1, q_2 – величины первого и второго зарядов; r_{12} – расстояние между зарядами; $\boldsymbol{r}_{12}$ – вектор, соединяющий первый заряд со вторым; модуль этого вектора равен расстоянию между точечными зарядами r_{12}; ε_o – электрическая постоянная; ε_o = = $8.85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2)*; ε – диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся заряды.

Закон Кулона записан в форме, соответствующей международной системе единиц СИ. Это значит, что величина зарядов измеряется в кулонах (обозначается Кл), расстояние – в метрах, а сила – в ньютонах.

1.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЁННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В соответствии с законом Кулона, электрические заряды действуют друг на друга при любом расстоянии между ними.

Это объясняется тем, что каждый заряд создаёт вокруг себя электрическое поле. Любой другой заряд, помещённый в электрическое поле, взаимодействует с ним, вследствие чего на заряд действует кулоновская сила.

Величина кулоновской силы, действующей на заряд, зависит от электрического поля. Чем сильнее поле, тем больше сила.

Но как количественно охарактеризовать электрическое поле?

Ввести такую характеристику можно следующим образом.

Пусть в некоторую точку электрического поля мы поочерёдно помещаем разные заряды и измеряем силу, действующую на них:

$\boldsymbol{F}_1$	$\boldsymbol{F}_2$	$\boldsymbol{F}_3\ldots$	$\boldsymbol{F}_n$
q_1	q_2	$q_3\ldots$	q_n.

Здесь $\boldsymbol{F}_1$ – сила, действовавшая на заряд q_1, помещённый в интересующую нас точку поля, $\boldsymbol{F}_2$ – сила, действовавшая на заряд q_2, и т. д.

Поскольку заряды разные, то и силы будут различны по величине. Но оказывается, что отношение силы, действующей на данный заряд, к его величине не зависит от величины этого заряда

---

* Размерность электрической постоянной часто записывают в ином виде: Кл^2/(Н·м^2) = Ф/м; здесь *Ф* – размерность электрической емкости (читается – «фарада»).

$$\frac{\boldsymbol{F}_1}{q_1} = \frac{\boldsymbol{F}_2}{q_2} = \ldots = \frac{\boldsymbol{F}_n}{q_n} = \boldsymbol{E} .$$

Величина $\boldsymbol{E}$, равная отношению силы, действующей на заряд, помещённый в заданную точку электрического поля (пробный заряд), к величине этого заряда называется **напряжённостью**

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q} .$$

Можно также сказать, что напряжённость численно равна силе, действующей на единичный положительный пробный заряд.

Напряжённость является векторной величиной. Направление вектора напряжённости совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд.

Если в качестве пробного используется отрицательный заряд, то вектор напряжённости будет противоположен направлению силы, действующей на отрицательный пробный заряд.

Размерность напряжённости, как это видно из определения,

[E] = Н/Кл = В/м*.

Напряжённость является силовой характеристикой электрического поля**, поскольку определяет силу, действующую на заряд, помещённый в данную точку электрического поля.

Следует обратить внимание на одну важную деталь.

Пробный заряд должен быть малым по величине. Но можно ли считать малым заряд, например в 0,1 Кл? Или 0,01 Кл?

Критерием малости пробного заряда является влияние этого заряда на заряды, создающие исследуемое электрическое поле.

Пробный заряд мал, если его появление в электрическом поле не вызывает изменения положения зарядов, создающих электрическое поле.

Найдём напряжённость поля, созданного точечным зарядом q. Для этого на расстоянии r от заряда q поместим пробный заряд q_o. Тогда сила, действующая на пробный заряд, в соответствии с законом Кулона равна

* Размерность В/м будет получена позже.

** В этом заключается физический смысл напряженности.

$$\boldsymbol{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \cdot \frac{qq_0}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Отсюда напряжённость поля точечного заряда q равна

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_o} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r^3} r.$$

Таким образом, напряжённость поля, созданного точечным зарядом q в интересующей нас точке, прямо пропорциональна величине заряда, создающего поле, и обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда до интересующей нас точки.

Полученное выражение позволяет рассчитать напряжённость электрического поля, созданного точечным зарядом, в любой его точке.

Зная напряжённость электрического поля в нужной точке, легко рассчитать силу, которая будет действовать на заряд, помещённый в эту точку

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{E}$ – напряжённость электрического поля в точке расположения заряда q.

1.4. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Закон Кулона описывает взаимодействие двух точечных зарядов. Однако взаимодействовать одновременно могут и три, и более зарядов. Как описать взаимодействие в этом случае?

Экспериментально доказано, что взаимодействие двух точечных зарядов не зависит от наличия третьего заряда. Отсюда следует, что если необходимо найти силу $\boldsymbol{F}$, действующую на заряд q со стороны зарядов q_1, q_2, q_3 ...q_n, достаточно рассчитать силу $\boldsymbol{F}_1$, действующую на заряд q со стороны заряда q_1, $\boldsymbol{F}_2$ – со стороны заряда q_2, и т. д., а затем найти их равнодействующую

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F}_3 + ... + \boldsymbol{F_n} = \sum_{\text{в}}^{n} \boldsymbol{F}_i\ .$$

Другими словами – результат взаимодействия заряда с несколькими другими зарядами является результатом наложения (суперпозиции) взаимодействий заряда q с каждым из зарядов q_1, … q_n в отдельности.

Поэтому **сила, действующая на заряд со стороны нескольких других зарядов, равна векторной сумме всех сил,**

действующих на интересующий нас заряд со стороны каждого из окружающих его зарядов в отдельности.

Это выражение представляет собой одну из возможных формулировок принципа суперпозиции.

Выражение для расчёта силы $\boldsymbol{F}$ можно записать в следующем виде:

$$q\boldsymbol{E} = q\boldsymbol{E}_1 + q\boldsymbol{E}_2 + q\boldsymbol{E}_3 + \ldots + q\boldsymbol{E}_n =$$
$$= q(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \ldots + \boldsymbol{E}_n) = q\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i ,$$

где $\boldsymbol{E}_1$ – напряжённость поля, созданного зарядом q_1 в точке расположения заряда q, $\boldsymbol{E}_2$ – напряжённость поля, созданного там же вторым зарядом, $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ – напряжённость поля, созданного i – м зарядом в точке расположения заряда q.

Сокращая q, получаем

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \ldots + \boldsymbol{E}_n = \sum_i \boldsymbol{E}_i .$$

Таким образом, **напряжённость поля, созданного несколькими зарядами в интересующей нас точке, равна векторной сумме напряжённостей, созданных каждым из зарядов в этой точке.**

Данное выражение представляет собой принцип суперпозиции для вектора напряжённости электрического поля.

В ряде случаев поле создаётся не точечными, а так называемыми распределёнными зарядами. Например, поле, созданное заряженной нитью.

В таких ситуациях распределённый заряд делят на малые порции dq_i, после чего рассчитывают напряжённость поля, используя принцип суперпозиции: $\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i = \Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq_i}{r_i^3} \boldsymbol{r}_i$, где $\boldsymbol{r}_i$ – вектор, соединяющий заряд dq_i с нужной точкой поля, r_i – модуль вектора $\boldsymbol{r}_i$.

Учитывая, что dq_i является малой величиной, суммирование целесообразно заменить интегрированием

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \boldsymbol{r} .$$

Величина dq может быть выражена следующим образом:

– если заряд распределён по линии, то $dq = \tau dl$, где τ – линейная плотность заряда (это заряд единицы длины заряженной нити: $\tau = \dfrac{dq}{dl}$);

– если заряд распределён по поверхности, то $dq = \sigma ds$, где σ – поверхностная плотность заряда (это заряд единицы площади заряженной поверхности: $\sigma = \dfrac{dq}{ds}$);

– если заряд распределён по объёму, то $dq = \rho dV$, где ρ – объёмная плотность заряда (это заряд единицы объёма заряженного тела: $\rho = \dfrac{dq}{dV}$).

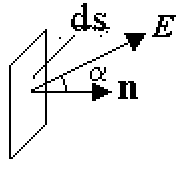
Важно отметить, что принцип суперпозиции полей справедлив для сред, свойства которых не зависят от величины напряжённости электрического поля. Например, в вакууме поле, созданное несколькими зарядами, равно сумме полей, созданных каждым из зарядов в отдельности. Для сегнетоэлектриков это утверждение неверно, так как их электрические свойства очень сильно зависят от напряжённости поля в сегнетоэлектрике.

Для большинства сред (газы, аморфные вещества, ряд кристаллических веществ) в слабых электрических полях принцип суперпозиции справедлив.

1.5. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЁННОСТИ

В ряде разделов курса общей физики рассматриваются векторные поля (например, электростатическое поле, магнитное поле).

В описании таких полей часто используют понятие потока вектора через некоторую поверхность. Рассмотрим это понятие.



Пусть в некоторой области пространства существует электрическое поле. Выберем в этом поле элементарную площадку ds. Пусть нормаль к этой площадке $\boldsymbol{n}$ образует угол α с вектором напряжённости электрического поля (модуль вектора $n = 1$).

Потоком вектора напряжённости электрического поля через эту площадку называется величина, равная

$$d\Phi = \boldsymbol{En}ds = \boldsymbol{E}d\boldsymbol{s} = E\cos\alpha ds ,$$

где $d\Phi$ – элементарный поток вектора напряжённости, $\boldsymbol{E}$ – вектор напряжённости поля в пределах бесконечно малой площадки площадью $d\boldsymbol{s}$.

Произведение $\boldsymbol{En}$ является скалярным, поэтому поток вектора напряжённости является скалярной величиной.

Иногда произведение $\boldsymbol{n}ds$ заменяют на вектор $d\boldsymbol{s}$, который направлен перпендикулярно плоскости площадки; модуль вектора ds равен площади элементарной площадки.

Поток напряжённости через конечную площадь s равен

$$\Phi = \int_s \boldsymbol{En}ds .$$

В зависимости от величины угла между нормалью к площадке и вектором $\boldsymbol{E}$ поток может быть положительным и отрицательным. Если угол между векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{n}$ острый, то поток положителен, если тупой – отрицателен.

Обратите внимание на то, что направление вектора $\boldsymbol{n}$ выбирается перед решением задачи произвольно (перпендикуляр к поверхности можно направить в две взаимно противоположные стороны). Поэтому знак потока вектора напряжённости определяется выбором направления вектора $\boldsymbol{n}$.

Если поверхность замкнутая, поток вектора напряжённости равен

$$\Phi = \oint_s \boldsymbol{En}ds ,$$

т. е. интеграл берётся по замкнутой поверхности s.

В этом случае принято направлять вектор $\boldsymbol{n}$ наружу от поверхности. При этом поток через замкнутую поверхность положителен, если суммарный заряд, охваченный замкнутой поверхностью, положителен.

Размерность потока вектора напряжённости [Ф]=В·м=Н·м^2/Кл.

1.6. ТЕОРЕМА ГАУССА

Теорема Гаусса – основная теорема электростатики. Она устанавливает связь между потоком вектора напряжённости через замкнутую поверхность и суммарным зарядом, охваченным этой поверхностью.

Рассмотрим эту теорему.

Пусть электрическое поле создано положительным точечным зарядом q.

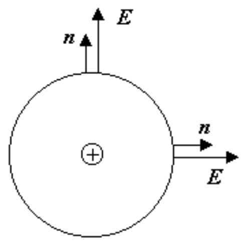
Найдём поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность, охватывающую этот заряд.

В качестве поверхности выберем сферу радиуса r, центр которой совпадает с зарядом q.

Будем считать, что векторы $\boldsymbol{n}$ во всех точках замкнутой поверхности направлены от центра сферы.

Поскольку заряд, создающий поле, положителен и расположен в центре сферы, постольку угол между вектором $\boldsymbol{E}$ и вектором $\boldsymbol{n}$ во всех точках поверхности равен нулю.

Поэтому поток вектора напряжённости через элементарную поверхность ds будет равен $\boldsymbol{E}\boldsymbol{n}ds = E\cos\alpha ds = E\cos 0 ds = Eds$.



Другими словами, в рассматриваемой ситуации скалярное произведение вектора напряжённости электростатического поля на вектор элементарной поверхности равен произведению модулей этих векторов.

Напряжённость поля, созданного точечным зарядом, равна $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\dfrac{q}{r^2}$.

Поскольку заряд расположен в центре сферической поверхности, расстояние от заряда до поверхности во всех её точках одинаково и равно r. Следовательно, модуль вектора напряжённости во всех точках сферической поверхности одинаков: E = const.

Константу можно вынести за знак интеграла, поэтому поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность в данном случае равен $\oint_s Eds = E\oint_s ds$.

Интеграл от элементарных площадей поверхности s, взятый по всей поверхности, равен площади этой поверхности s. В данном случае поверхность является сферой, площадь которой $s = 4\pi r^2$.

Таким образом, поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность в данном случае равен $\oint_s \boldsymbol{E}d\mathbf{s} = E4\pi r^2$.

Подставив выражение для расчёта напряжённости, получаем

$$\oint_s \boldsymbol{E} d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Можно показать, что поток вектора напряжённости поля точечного заряда через замкнутую поверхность будет равен $\frac{q}{\varepsilon_0}$ и в том случае, когда заряд находится не в центре сферической поверхности.

Более того, поток будет таким же, даже если поверхность будет иметь любую форму.

Если поверхность охватывает несколько зарядов q_i, поток каждого из зарядов через замкнутую поверхность будет равен $\oint_s \boldsymbol{E}_i d\mathbf{s} = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$. Суммарный поток, созданный всеми зарядами, будет равен $\sum_i \oint_s \mathbf{E}_i d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}$.

Меняя последовательность суммирования и интегрирования и учитывая, что в соответствии с принципом суперпозиции $\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i$, получаем $\oint_s \sum_i \boldsymbol{E}_i d\mathbf{s} = \oint_s \boldsymbol{E} d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}$, где $\boldsymbol{E}$ – вектор напряжённости поля, созданного всеми зарядами, охваченными замкнутой поверхностью.

Итак, проведённый анализ позволил получить следующее соотношение:

$$\oint_s \boldsymbol{E} d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}.$$

Это соотношение имеет универсальный характер и называется теоремой Гаусса: **поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность равен отношению суммы зарядов, охваченных этой поверхностью, к электрической постоянной.**

Обратите внимание: в выражении теоремы Гаусса отсутствуют характеристики положения зарядов q_i.

Это означает, что поток вектора напряжённости не зависит от того, как расположены заряды, охваченные замкнутой поверхностью. Более того, поток вектора напряжённости не изменится, если изменится взаимное расположение зарядов, охваченных поверхностью.

Практическое значение теоремы Гаусса заключается в том, что с её помощью значительно упрощается расчёт полей, созданных симметричными распределениями зарядов. В этом случае можно выбрать поверхность такой формы, что $\oint\limits_S \boldsymbol{E} d\mathbf{s} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{S}_{\perp}$, где $\boldsymbol{S}_{\perp}$ – площадь части замкнутой поверхности, пронизываемой электрическим полем.

1.7. ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННОСТИ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ГАУССА

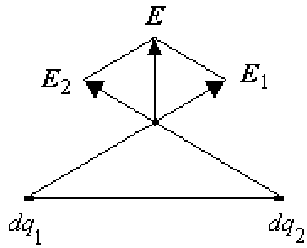
Рассмотрим несколько примеров расчёта электростатических полей с помощью теоремы Гаусса.

1.7.1. Поле бесконечной равномерно заряженной прямолинейной нити

Рассмотрим равномерно заряженную бесконечно длинную нить. Линейная плотность заряда равна τ.

Заряд, равномерно распределённый по нити, обладает симметрией – он симметричен относительно оси.

Нить имеет бесконечную длину, поэтому любому элементарному заряду dq_1 можно сопоставить другой элементарный заряд dq_2, расположенный симметрично относительно некоторой точки в электростатическом поле.



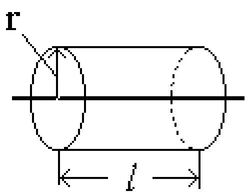
Поскольку расстояние от элементарных зарядов до этой точки одинаково, модули напряжённостей $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ одинаковы. Поэтому результирующая напряжённость $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ направлена перпендикулярно нити (см. рисунок).

Очевидно, что и в других точках, расположенных на таком же расстоянии от нити, напря-жённость будет иметь такую же величину и направление.

Элементарные заряды и точка в поле были выбраны случайно, поэтому вывод справедлив как для всех остальных элементарных зарядов, так и для всех точек поля.

Это означает, что электрическое поле, созданное заряженной нитью, симметрично относительно оси нити. Другими словами – симметрия поля тождественна симметрии заряда, создающего поле.

Таким образом, векторы напряжённости во всех точках окружающего пространства перпендикулярны нити и модули напряжённости на одинаковых расстояниях от нити одинаковы.



Расчёт напряжённости поля с помощью теоремы Гаусса следует начинать с получения выражения для потока вектора ***E***.

В свою очередь, выражение для потока следует начинать с выбора формы замкнутой поверхности и её положения относительно источника поля.

Расчёт потока будет максимально прост, если выбрать такую поверхность, симметрия которой идентична симметрии создающего поле заряда.

В данном случае удобно пользоваться замкнутой поверхностью с осевой симметрией.

Такой поверхностью является цилиндр, ось которого совпадает с нитью. Пусть высота цилиндра равна l, а радиус основания – r.

Поток вектора напряжённости поля, созданного нитью, складывается из потока через торцевые поверхности цилиндра и потока через боковую поверхность.

Поток через торцевые поверхности равен нулю, так как векторы напряжённости перпендикулярны нити и, соответственно угол между векторами ***E*** и ***n*** равен $90^{0,}$

$$\int\limits_{S_{торц}} E\cos 90^{0}\, ds = 0 .$$

Поток через боковую поверхность

$$\Phi = \int\limits_{S_{бок}} E\cos 0^{0}\, ds = \int\limits_{S_{бок}} E ds .$$

Поскольку все точки боковой поверхности расположены на одинаковых расстояниях от нити, модули напряжённости во всех точках боковой поверхности цилиндра одинаковы, т. е.

$$\varPhi = E \int\limits_{S_{\text{бок}}} ds = E \cdot 2\pi r \cdot l \, .$$

Таков вид выражения для потока вектора рассчитываемой напряжённости.

Следующий этап вычисления напряжённости электростатического поля – расчёт суммарного заряда, охваченного замкнутой поверхностью.

Заряд, охваченный поверхностью *s*, можно найти так:

$$q = \int\limits_{l} \tau dl = \tau \int\limits_{l} dl = \tau l \, .$$

Тогда, по теореме Гаусса,

$$\varPhi = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

или

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_o} \, .$$

Отсюда

$$E = \frac{\tau}{2\pi r \varepsilon_o} \, .$$

Таким образом, напряжённость электрического поля, созданного равномерно заряженной нитью, прямо пропорциональна линейной плотности заряда нити и обратно пропорциональна расстоянию от нити до интересующей нас точки.

Обратите внимание – напряжённость обратно пропорциональна первой степени расстояния от нити (напряжённость поля точечного заряда обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда).

1.7.2. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

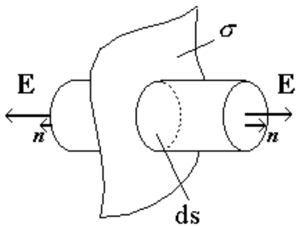
Пусть имеется бесконечная равномерно заряженная плоскость. Поверхностная плотность заряда равна σ.

Из симметрии системы следует, что поле должно быть симметричным относительно плоскости (это можно доказать примерно так же, как в предыдущем примере). Следовательно, вектор $\boldsymbol{E}$ везде перпендикулярен плоскости и в одинаково удалённых от плоскости точках модули вектора $\boldsymbol{E}$ одинаковы.

В этом случае в качестве поверхности интегрирования целесообразно выбрать цилиндр, ориентированный так, как показано на рисунке.

Поток вектора ***E*** и здесь складывается из потока через боковую поверхность цилиндра и потока через торцы цилиндра:

$\Phi = \Phi_{бок} + 2\Phi_{торц}$.



Поток вектора напряжённости через боковую поверхность равен нулю, так как в силу симметрии поля вектор напряжённости должен быть параллелен боковой поверхности и

$$\Phi_{бок} = E\cos 90^{o} s_{бок} = 0 .$$

Поток вектора напряжённости через торцевые поверхности $\Phi_{торц} = E\pi r^2$, где r – радиус основания цилиндра.

Полный поток через оба торца цилиндра $\Phi = 2E\pi r^2$.

Суммарный заряд, охваченный поверхностью цилиндра, равен

$$q = \int_s \sigma ds = \sigma \int_s ds = \sigma s = \sigma\pi r^2 .$$

Отсюда $2E\pi r^2 = \sigma\pi r^2 \dfrac{1}{\varepsilon_o}$ и $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$.

Полученное выражение показывает, что напряжённость поля, созданного бесконечной равномерно заряженной плоскостью, прямо пропорциональна поверхностной плотности заряда и не зависит от расстояния.

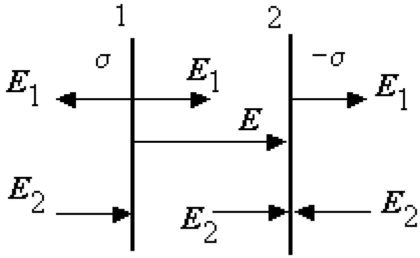
Обратите внимание: в этом случае напряжённость электрического поля на любых расстояниях от плоскости одинакова!

1.7.3. Поле двух параллельных равномерно заряженных плоскостей с одинаковым по величине и противоположным по знаку зарядом

Пусть имеются две параллельные плоскости, заряды которых одинаковы по величине и противоположны по знаку. Поверхностные плоскости зарядов соответственно равны σ и -σ.

Напряжённость поля, созданного двумя плоскостями, в соответствии с принципом суперпозиции может быть найдена как векторная сумма напряжённостей, созданных каждой плоскостью в отдельности, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$.

Напряжённости полей, созданных каждой из плоскостей, во всех точках пространства одинаковы по величине и противоположны по направлению (так как заряды плоскостей одинаковы по величине и противоположны по знаку).



Это означает, что напряжённость поля между пластинами равна удвоенной напряжённости поля, созданного одной пластиной, $\boldsymbol{E} = 2\boldsymbol{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Напряжённость поля вне пластин равна нулю.

1.7.4. Поле равномерно заряженной сферы

Пусть имеется сфера радиуса $r_о$, по которой равномерно распределён заряд q.

Из симметрии системы следует, что поле должно быть симметрично относительно центра заряженной сферы. Следовательно, вектор $\boldsymbol{E}$ во всех точках пространства направлен параллельно радиальным прямым и на равных расстояниях от центра сферы модули E одинаковы.

В этом случае в качестве поверхности интегрирования целесообразно выбрать сферическую поверхность, центр которой совпадает с центром заряженной сферы.

Пусть радиус сферической поверхности меньше, чем радиус заряженной сферы. В этом случае суммарный заряд, охваченный поверхностью, равен нулю (так как внутри сферы зарядов нет, все заряды расположены на её поверхности).

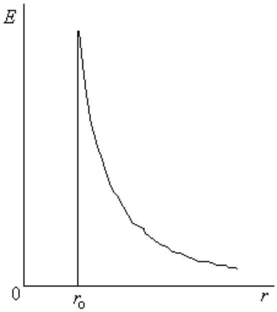
Это означает, что внутри заряженной сферы поток вектора напряжённости через поверхность, радиус которой $r_о > r > 0$, равен нулю.

Площадь поверхности отлична от нуля, поэтому поток может быть равен нулю лишь в том случае, если напряжённость поля внутри сферы равна нулю.

Следовательно, напряжённость электрического поля внутри заряженной сферы равна нулю $\boldsymbol{E}(r_0 \geq r > 0) = 0$.

Пусть радиус поверхности интегрирования больше радиуса заряженной сферы. В этом случае суммарный заряд, охваченный поверхностью, равен заряду сферы q.

Если единичный вектор $\boldsymbol{n}$ направлен наружу от поверхности, то угол между $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{E}$ во всех точках равен нулю (или 180°, если заряд сферы отрицательный).



Отсюда следует, что $\oint\limits_S \boldsymbol{En}ds = \oint\limits_S Eds$.

Поскольку модуль вектора $\boldsymbol{E}$ во всех точках выбранной поверхности одинаков и площадь сферы равна $4\pi r^2$, постольку поток вектора напряжённости электрического поля

$$\oint\limits_S Eds = E\oint\limits_S ds = \boldsymbol{E}4\pi r^2 .$$

В соответствием с теоремой Гаусса поток вектора $\boldsymbol{E}$ пропорционален сумме зарядов, охваченных поверхностью:

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Следовательно, напряжённость электрического поля, созданного заряженной сферой снаружи от неё, равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Обратите внимание на то, что поле вне заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда q (см. разд. 1.3).

1.8. РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ

Если заряд движется в электростатическом поле, то кулоновская сила совершает работу.

Найдём величину работы, совершаемой при перемещении заряда в электростатическом поле.

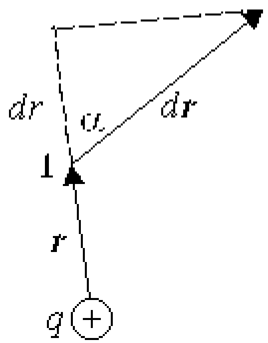
Допустим, что заряд q_o перемещается на $\boldsymbol{dr}$ из точки 1 в электрическом поле точечного заряда q.

При этом совершается элементарная работа, равная $\delta A = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$.

Учитывая, что кулоновская сила $\boldsymbol{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq_0}{r^3}\boldsymbol{r}$, получаем

$\delta A = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq_0}{r^3}\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}$.

Из рисунка видно, что $\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r} = rdr$. Поэтому



$$\delta A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^3}rdr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dr\ .$$

На конечном перемещении из точки 1 в точку 2 работа электростатических сил

$$A_{12} = \int \delta A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{qq_0}{r^2}dr = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Таким образом, работа по перемещению заряда в электростатическом поле зависит от величины заряда (зарядов), создающего поле, величины перемещаемого заряда и его начального и конечного положений.

Обратите внимание на то, что в выражении для расчёта работы отсутствует информация о промежуточных положениях заряда q_o. Следовательно, работа в электростатическом поле не зависит от формы траектории.

В соответствии с данным в механике определением, такое поле является консервативным, т. е. **электростатическое поле консервативно.**

Как известно, в консервативном поле работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии и не зависит от формы траектории

$$A = U_1 - U_2 = -\Delta U,$$

где U_1 и U_2 – потенциальная энергия заряда в начальной и конечной точках траектории соответственно; ΔU – приращение потенциальной энергии. Следовательно, **работа кулоновских сил при перемещении заряда в электростатическом поле равна убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда, не зависит от формы траектории, по которой перемещался заряд, а зависит лишь от начального и конечного положений заряда.**

Как уже отмечалось выше, работа, производимая силами поля, совершается за счёт убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда, т. е.

$$A_{12} = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = U_1 - U_2 .$$

Последнее выражение позволяет найти выражение для расчёта потенциальной энергии заряда в электростатическом поле.

1.9. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЁННОСТИ

Если начальная и конечная точки траектории заряда совпадают, то его потенциальная энергия в начальной и конечной точках траектории одинакова. Следовательно, и работа по перемещению заряда по замкнутому контуру будет равна нулю

$$A = \oint_L \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = 0 .$$

Сила, действующая на заряд в электрическом поле напряжённостью $\boldsymbol{E}$, равна $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$.

Это означает, что $\oint_L q\boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} = 0$.

Поскольку q = const, заряд можно вынести за знак интеграла.

Значение заряда отлично от нуля, поэтому нулю должен равняться интеграл $\oint_L \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} = 0$.

В математике интеграл по замкнутому контуру от скалярного произведения вектора на бесконечно малый элемент этого контура принято называть **циркуляцией**.

Следовательно, циркуляция вектора $\boldsymbol{E}$ в электрическом поле, созданном неподвижными зарядами, всегда равна нулю

$$\oint_L \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = 0 ;$$

(здесь вместо ***dr*** используется обозначение ***dl***, так как математики при расчёте циркуляции традиционно используют это обозначение).

1.10. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Из сравнения выражений

$A_{12} = -(U_2 - U_1)$ и $A_{12} = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$, полученных в разд.1.8, видно, что потенциальная энергия заряда q_o, находящегося в поле, созданном точечным зарядом q, равна

$$U = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_o r},$$

где r – расстояние между зарядами.

Важно напомнить, что значение потенциальной энергии зависит от выбора точки отсчёта. В электростатике в качестве точки отсчёта выбирают бесконечно удалённую точку. Потенциальная энергия заряда в такой точке считается равной нулю. В то же время разность потенциальных энергий не зависит от выбора точки отсчёта и имеет абсолютное значение.

Из последнего выражения видно, что потенциальная энергия заряда в электростатическом поле зависит от величины зарядов и расстояния между ними. Но если мы разделим потенциальную энергию пробного заряда q_0 на его величину, то результат будет зависеть лишь от величины заряда, создающего поле, и расстояния r

$$\frac{U}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}.$$

Следовательно, величина отношения U/q_0 является характеристикой электростатического поля. Эту характеристику называют потенциалом электростатического поля и обозначают φ

$$\varphi = \frac{U}{q_0},$$

где U – потенциальная энергия заряда q_0, находящегося в электростатическом поле, созданном другим зарядом (или зарядами).

Потенциал является скалярной величиной.

Размерность потенциала [φ] = В = Дж/Кл (вольт).

Потенциал является энергетической характеристикой электростатического поля, поскольку определяет энергию заряда q, обусловленную его взаимодействием с электрическим полем: $U = q\varphi$ (обратите внимание: здесь q – величина заряда, помещённого в электрическое поле, созданное другим зарядом или зарядами).

Используя потенциал, можно найти работу по перемещению заряда q из одной точки в другую как

$$A_{12} = -q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Возвращаясь к полученному ранее выражению для расчёта потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов, мы можем записать выражение для расчёта потенциала точки в поле, созданном точечным зарядом q

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r}.$$

Значение потенциала в данной точке как и значение потенциальной энергии зависит от выбора точки отсчёта. Обычно полагают, что нулю равен потенциал точки, находящейся бесконечно далеко от заряда, создающего поле.

Разность потенциалов, как и разность значений потенциальных энергий, от выбора точки отсчёта не зависит, а полностью определяется взаимным расположением интересующих нас точек в электрическом поле.

1.11. СВЯЗЬ НАПРЯЖЁННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА

В механике показано, что в консервативных полях выполняется соотношение

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}U.$$

Поскольку в электростатическом поле $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$, а $U = q\varphi$, то

$$q\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, q\varphi = -q\cdot\mathrm{grad}\varphi$$

или

$$\boldsymbol{E} = -grad\varphi.$$

В декартовых координатах это выражение имеет вид

$$\boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Кстати, именно из этого выражения получена размерность напряженности [E] = В/м.

Знак «минус» в рассматриваемом выражении говорит о том, что вектор напряжённости всегда направлен в сторону максимально быстрого уменьшения потенциала.

Полученная связь между напряжённостью и потенциалом позволяет выявить ещё одну важную особенность электростатического поля.

Если поле создано несколькими неподвижными зарядами, то напряжённость поля в любой точке равна векторной сумме напряжённостей, созданных каждым из зарядов в данной точке.

Следовательно, можно записать следующее соотношение:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2} + \ldots + \boldsymbol{E_n} = -\left(\mathrm{grad}\varphi_1 + \mathrm{grad}\varphi_2 + \ldots + \mathrm{grad}\varphi_n\right)$$

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n\right) = -\mathrm{grad}\varphi$$

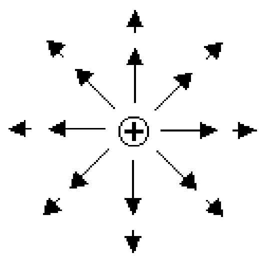
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

Таким образом, **потенциал любой точки поля, созданного несколькими зарядами, равен алгебраической сумме потенциалов, созданных каждым зарядом в данной точке.**

Это означает, что потенциал, как и напряжённость, подчиняется принципу суперпозиции.

1.12. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. СИЛОВЫЕ ЛИНИИ. ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Электрическое поле можно представить в графической форме. Для этого можно измерить или рассчитать напряжённости электрического поля в различных точках и изобразить эти векторы напряжённости. Полученное изображение будет содержать информацию о величине и направлении напряжённости электрического поля в различных точках.



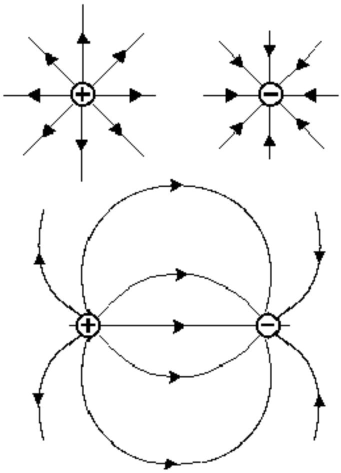
На рисунке показан пример изображения электрического поля точечного положительного заряда (рисунок выполнен без соблюдения масштаба).

Однако такой способ представления полей в графической форме не совсем удобен. Гораздо удобнее изображать электрическое поле с помощью силовых линий.

Силовая линия – это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором напряжённости поля в этой точке.

Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Соответственно силовые линии направлены от положительных зарядов к отрицательным.

Силовые линии принято изображать так, чтобы их густота была больше там, где больше напряжённость электростатического поля.



Таким образом, если известна картина силовых линий электрического поля, то можно судить о величине и направлении напряжённости поля в различных точках.

Важно отметить, что силовые линии не могут пересекаться. Это видно из следующего.

Направление напряжённости совпадает с направлением касательной к силовой линии, проходящей через эту точку.

Если силовая линия, проходящая через эту точку, пересекается другой силовой линией, то касательные к этим линиям имеют разные направления.

Поскольку напряжённость в любой точке имеет определённое направление, постольку невозможно и пересечение двух силовых линий.

Наряду с силовыми линиями для графического представления электростатических полей используют **эквипотенциальные поверхности, т. е. поверхности, все точки которых имеют одинаковый потенциал.**

Пересечение эквипотенциальной поверхности с плоскостью листа даёт эквипотенциальную линию.

Если построить картину эквипотенциальных линий, в которой разность потенциалов между соседними эквипотенциалями одинакова для всей картины, можно получить наглядное представление о электростатическом поле.

Знание картины эквипотенциальных линий позволяет построить и картину силовых линий. Это видно из следующего.

Если какой-либо заряд перемещается по эквипотенциальной поверхности, то работа электростатических сил равна нулю

$$A = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

так как на эквипотенциальной поверхности $\varphi_1 = \varphi_2$.

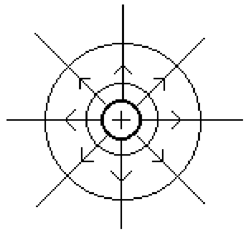
С другой стороны, работа кулоновских сил равна

$$A = \int \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = \int Edr \cdot \cos\alpha,$$

и если заряд перемещается вдоль эквипотенциали, то она равна нулю:

$$A = \int Edr \cdot \cos\alpha = 0;$$

но это означает, что нулю равен косинус угла между векторами напряжённости и элементарного перемещения. Следовательно, угол между ними должен быть равен 90°.



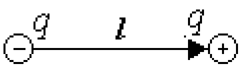
Поскольку перемещение, по условию, совершается вдоль эквипотенциальной поверхности, то и угол между силовой линией, пересекающей эквипотенциальную поверхность, и поверхностью – прямой.

Отсюда следует важное свойство эквипотенциальной поверхности: эквипотенциальная поверхность всегда перпендикулярна пересекающим её силовым линиям электростатического поля.

Таким образом, построив линию, перпендикулярную всем пересекаемым эквипотенциалям, мы получим силовую линию.

Густота полученных таким образом силовых линий будет выше там, где гуще расположены эквипотенциали. Следовательно, по густоте эквипотенциалей можно судить о напряжённости поля – чем гуще эквипотенциали, тем выше напряжённость поля.

1.13. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ. ДИПОЛЬ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ



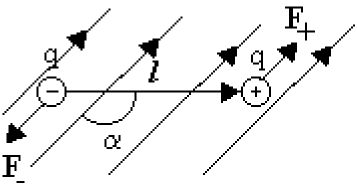
Электрический диполь – это система из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов, находящихся на расстоянии ***l*** друг от друга.

Основной характеристикой диполя является дипольный момент, который по определению равен

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l},$$

где $\boldsymbol{p}$ – дипольный момент, q – величина зарядов диполя, $\boldsymbol{l}$ – плечо диполя (вектор, соединяющий заряды и направленный от отрицательного заряда к положительному). Размерность дипольного электрического момента $[p]$ = Кл·м.

Как следует из определения, дипольный момент есть векторная величина, прямо пропорциональная величине зарядов диполя и расстоянию между ними. Дипольный момент направлен так же, как и плечо диполя – от отрицательного заряда к положительному.



Если поместить диполь в однородное электрическое поле напряжённостью $\boldsymbol{E}$, то на заряды диполя действуют одинаковые по величине и противоположные по направлению силы $|\boldsymbol{F}_+| = |\boldsymbol{F}_-| = q\boldsymbol{E}$.

Равнодействующая этих сил равна нулю, поэтому диполь не будет двигаться поступательно. Но эти силы создают момент пары сил, который стремится повернуть диполь так, чтобы дипольный момент был параллелен силовым линиям.

Величина момента пары сил, действующего на диполь, равна

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{l}, \boldsymbol{F}] = [\boldsymbol{l}, q\boldsymbol{E}] = [q\boldsymbol{l}, \boldsymbol{E}] = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{E}],$$

где $\boldsymbol{p}$ –дипольный момент.

1.14. ДИЭЛЕКТРИКИ. ТИПЫ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Диэлектриками принято называть вещества, не проводящие электрический ток.

В молекулах диэлектрика, как и в молекулах других веществ, суммарный положительный заряд ядер всех атомов, образующих молекулу, равен суммарному отрицательному заряду всех электронов.

В общем случае заряд всех ядер молекулы можно заменить одним точечным положительным зарядом. Величина этого заряда равна сумме зарядов ядер всех атомов молекулы, а положение совпадает с положением центра “тяжести” положительных зарядов молекулы.

В свою очередь, суммарный отрицательный заряд электронов молекулы можно заменить одним точечным отрицательным зарядом, расположенном в центре «тяжести» зарядов электронов.

Если центры «тяжести» положительным и отрицательных зарядов находятся на расстоянии l друг от друга, то молекулу можно считать диполем с плечом $\boldsymbol{l}$.

В некоторых диэлектриках молекулы симметричны (например, H_2, O_2, N_2). У таких молекул центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают.

В диэлектриках второго типа молекулы состоят из противоположных по знаку ионов (например, $NaCl$, KCl, KBr). В отсутствие внешнего электрического поля центры “тяжести” положительных и отрицательных зарядов ионных молекул в кристалле диэлектрика совпадают.

В отсутствие внешнего электрического поля молекулы диэлектриков первого и второго типа не обладают собственным дипольным моментом, они неполярны. Поэтому диэлектрики, состоящие из таких молекул, называют **неполярными**.

В диэлектриках, состоящих из несимметричных молекул (например, NH_3, CO, H_2O), центры “тяжести” отрицательных и положительных зарядов не совпадают. Следовательно, такие молекулы обладают собственным дипольным моментом. Поэтому их называют **полярными**.

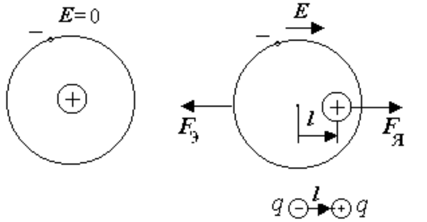
Несмотря на наличие дипольных моментов у всех молекул такого диэлектрика, диэлектрик в целом в отсутствие внешнего электрического поля дипольным моментом не обладает, так как вследствие теплового движения полярные молекулы ориентированы хаотично и их суммарный дипольный момент равен нулю.

1.15. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

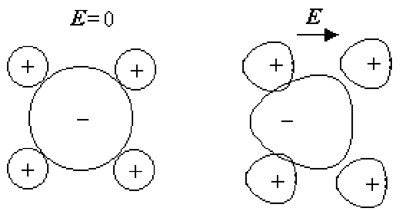
При внесении диэлектрика любого типа в электрическое поле происходит его **поляризация**, т. е. в нём возникает отличный от нуля дипольный электрический момент. Механизм поляризации в каждой группе диэлектриков имеет особенности. Рассмотрим его подробнее.

Начнём с рассмотрения неполярных диэлектриков.

При внесении такого вещества во внешнее электрическое поле под действием кулоновских сил центры "тяжести" положительных и отрицательных зарядов молекулы смещаются в противоположных направениях.

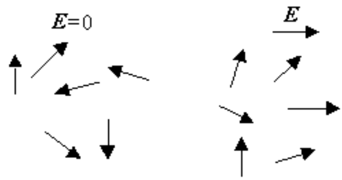


В результате центры "тяжести" положительного и отрицательного зарядов оказываются на некотором расстоянии l друг от друга (см. рисунок). Молекула неполярного диэлектрика становится диполем с плечом ***l*,** направленным параллельно вектору напряжённости электрического поля.



Подобным образом ведут себя и диэлектрики второго типа: под действием кулоновских сил положительные и отрицательные ионы смещаются, что приводит к возникновению дипольных моментов.

В полярных диэлектриках внешнее поле вызывает ориентацию молекул – молекулы ориентируются по полю. Сумма дипольных моментов молекул станет отличной от нуля. Естественно, что хаотическое (тепловое) движение молекул противодействует упорядочиванию ориентации молекул. Поэтому при данной температуре степень ориентации будет тем выше, чем сильнее электрическое поле.



Из сказанного следует, что степень поляризации любого диэлектрика может быть различной. Следовательно, необходима количественная мера степени поляризации диэлектрика. В качестве такой меры используется **поляризованность** диэлектрика – дипольный момент единицы объёма диэлектрика. Это величина, равная векторной сумме дипольных моментов молекул в единице объёма вещества:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum \boldsymbol{p}}{\Delta V}.$$

Размерность вектора поляризованности

$$[P] = \frac{[p]}{[V]} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Поляризованность в диэлектриках всех типов зависит от напряжённости электрического поля. Чем больше напряжённость электрического поля, тем выше поляризованность диэлектрика. В аналитической форме эта связь имеет вид

$$\boldsymbol{P} = \kappa\varepsilon_o \boldsymbol{E},$$

где κ (каппа) – диэлектрическая восприимчивость. Диэлектрическая восприимчивость является безразмерной величиной.

Учитывая, что дипольный момент поляризованной неполярной молекулы всегда направлен по полю, мы вправе утверждать, что изменение температуры не влияет на степень поляризации молекулы. Следовательно, и поляризованность, и диэлектрическая восприимчивость неполярного диэлектрика не зависят от температуры.

Полярные диэлектрики ведут себя иначе. В них упорядочивающему действию внешнего электрического поля противодействует хаотическое тепловое движение молекул, стремящееся разориентировать дипольные моменты молекул. Поэтому при каждой температуре будет устанавливаться некоторая равновесная упорядоченность дипольных моментов. Следовательно, поляризованность и диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков зависят от температуры. Чем выше температура, тем ниже поляризованность $\boldsymbol{P}$ и диэлектрическая восприимчивость κ.

Следует отметить ещё одну важную особенность диэлектрической восприимчивости κ.

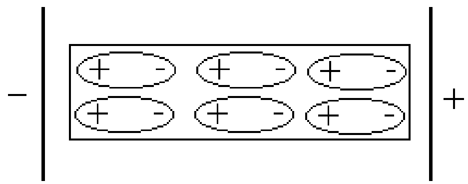
В изотропных средах, свойства которых не зависят от направления, κ является скаляром. Поэтому в изотропных диэлектриках направление вектора $\boldsymbol{P}$ всегда параллельно направлению $\boldsymbol{E}$.

В анизотропных диэлектриках диэлектрическая восприимчивость, измеренная для направления, параллельного оси x, не равна значению κ, измеренному для параллельного оси y направления. Поэтому в анизотропных диэлектриках направление вектора $\boldsymbol{P}$ в общем случае не параллельно направлению $\boldsymbol{E}$.

1.16. ПОЛЕ В ОДНОРОДНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Необходимо отметить ещё одну важную особенность процесса поляризации.

Под действием внешнего поля положительные и отрицательные заряды в диэлектрике смещаются. В результате молекулы диэлектрика ориентированы примерно так, как показано на рисунке.



Внутри диэлектрика рядом с положительным зарядом диполя располагается отрицательный заряд соседней молекулы.

Поскольку молекулы одинаковые, то сумма этих зарядов равна нулю. Другими словами – заряды диполей внутри диэлектрика взаимно компенсируются.

Из рисунка видно, что на поверхности диэлектрика такая компенсация отсутствует – снаружи нет диполей, способных вызвать компенсацию. Поэтому на противоположных поверхностях диэлектрика во внешнем электрическом поле возникают нескомпенсированные заряды.

Молекулы твёрдого вещества не могут свободно изменять своё положение. Следовательно, нескомпенсированные заряды диполей не могут перемещаться внутри объёма или по поверхности диэлектрика. Поэтому их называют связанными.

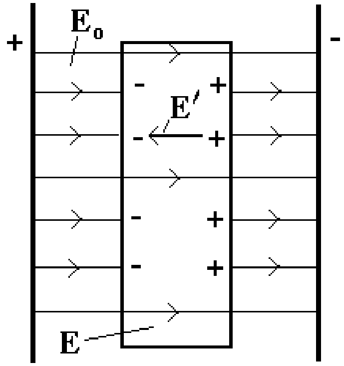
Связанные заряды, так же как и любые заряды, создают электрическое поле.

Это дополнительное электрическое поле всегда направлено против внешнего поля (это видно из рисунка). Поэтому электрическое поле внутри диэлектрика всегда слабее, чем вне его:

$$E = E_o - E',$$

где E – напряжённость электрического поля внутри диэлектрика, E' – напряжённость поля связанных зарядов, E_o – напряжённость поля, созданного внешними зарядами.

В соответствии с теоремой Гаусса, напряжённость поля связанных зарядов внутри диэлектрика*



$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_o},$$

где σ' – поверхностная плотность связанных зарядов.

Поверхностную плотность связанных зарядов σ' можно найти из следующих соображений.

В соответствии с определением поляризованности диэлектрика $\boldsymbol{P}$ полный дипольный электрический момент пластины

$$\Sigma p = P \cdot V.$$

Объём прямоугольной пластины $V = S \cdot d$ (d – толщина пластины), поэтому

$$\Sigma p = P \cdot S \cdot d.$$

С другой стороны, полный дипольный электрический момент пластины

$$\Sigma p = qd,$$

где q – полный связанный заряд боковой грани пластины, величина которого $q = S\sigma'$. Поэтому

$$\Sigma p = S\sigma' d,$$

и это означает, что

$$P = \sigma',$$

т. е. поляризованность диэлектрика оказывается равной поверхностной плотности связанных зарядов.

Ранее было получено, что поляризованность $P = \kappa\varepsilon_o E$, следовательно, теперь можно записать

$$\sigma' = \kappa\varepsilon_o E.$$

---

* Это поле, созданное двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями.

Учитывая, что $E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_o}$, для величины напряженности электрического поля внутри диэлектрика получаем

$$E = E_о - \kappa E,$$

$$E = \frac{E_о}{1+\kappa} = \frac{E_о}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = 1 + \kappa$ – **диэлектрическая проницаемость вещест**ва.

Диэлектрическая проницаемость является безразмерной величиной и показывает, во сколько раз электрическое поле внутри диэлектрика слабее внешнего.

В изотропных средах диэлектрическая проницаемость является скалярной величиной.

1.17. ВЕКТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

Уменьшение напряжённости электрического поля на поверхности диэлектрика происходит скачком (поскольку именно на поверхности расположены связанные заряды), что вызывает некоторые сложности при расчётах электрических полей в веществе.

Например, если пространство заполнено несколькими слоями разных диэлектриков, то даже в самой простой ситуации расчёт будет довольно сложным, так как из-за связанных зарядов в каждом слое будет своя напряжённость электрического поля.

Поэтому необходима такая характеристика электрического поля, которая не зависит от связанных зарядов. Чтобы получить такую характеристику, поступим следующим образом.

Как уже отмечалось, напряжённость поля внутри диэлектрика $E = E_о - E'$, где E' – напряжённость поля связанных зарядов, равная $\sigma'/\varepsilon_о$.

Напряжённость внешнего электрического поля, созданного свободными зарядами двух параллельных бесконечных проводящих плоскостей, можно выразить как $E = \sigma_{своб}/\varepsilon_о$.

Тогда напряжённость электрического поля внутри диэлектрика

$$E = \frac{\sigma_{своб}}{\varepsilon_о} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_о}.$$

Поскольку $\sigma' = P$,

$$E = \frac{\sigma_{своб}}{\varepsilon_o} - \frac{P}{\varepsilon_o}.$$

Тогда

$$E + \frac{P}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma_{своб}}{\varepsilon_o}$$

или

$$\varepsilon_o E + P = \sigma_{своб}.$$

Таким образом, величина $\varepsilon_o E + P$ не зависит от наличия связанных зарядов. Эту величину называют **электрическим смещением.**

Определение электрического смещения можно записать в векторной форме

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

или, поскольку $P = \kappa\varepsilon_o E$,

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E}\left(1+\kappa\right) = \varepsilon_o \varepsilon \boldsymbol{E}\ .$$

Вектор электрического смещения в изотропных диэлектриках совпадает по направлению с вектором напряжённости электрического поля внутри диэлектрика, так как в изотропных диэлектриках диэлектрическая проницаемость ε является скалярной величиной*.

Размерность вектора электрического смещения $[D]$ = Кл/м^2.

Электрическое смещение является вспомогательной характеристикой электрического поля, зависящей только от свободных зарядов.

Таким образом, получена характеристика электрического поля, не зависящая от связанных зарядов. Использование такой характеристики даёт очевидные преимущества. Действительно, используя электрическое смещение, можно рассчитать электрическое поле (значение вектора $\boldsymbol{D}$) как внутри диэлектрика, так и вне его, учитывая только свободные заряды. После этого легко найти напряжённость электрического поля в любой точке,

---

* В анизотропных диэлектриках диэлектрическая проницаемость является тензорной величиной и, в общем случае, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ по направлению не совпадают.

просто поделив значение $\boldsymbol{D}$ в этой точке на значение диэлектрической проницаемости ε в этой точке и на электрическую постоянную ε_o.

Рассчитывать электрическое поле в пространстве с диэлектриком можно с помощью теоремы Гаусса. Применительно к электрическому смещению она в любой среде имеет вид

$$\oint_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{s} = \sum q_{своб}$$

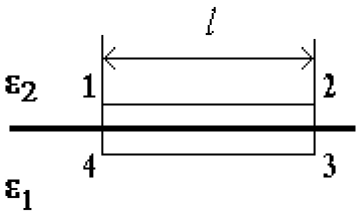
и может быть прочитана следующим образом: **поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, охваченных этой поверхностью** *. Знать, каковы по величине связанные заряды и как они распределены в пространстве, в этом случае не нужно.

1.18. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Рассмотрим границу раздела двух изотропных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$).

Пусть на границе раздела свободные заряды отсутствуют.

Оба диэлектрика находятся в однородном электрическом поле напряжённостью $\boldsymbol{E}$. Напряжённость электрического поля в одном из диэлектриков будет равна $\boldsymbol{E}_1$, во втором – $\boldsymbol{E}_2$.



Выберем некоторый контур, охватывающий границу раздела двух сред.

Поскольку электрическое поле консервативно, работа кулоновских сил на замкнутом контуре A_l равна нулю

$$A_l = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = 0.$$

На участках 12 и 34 рассматриваемого контура работа

$$A_{12} = q\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{l}_{12} = qE_{1\tau}\, l_{12}$$

$$A_{34} = q\boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{l}_{34} = -qE_{2\tau}\, l_{34}.$$

---

* В случае использования вектора напряженности теорема Гаусса имеет вид $\oint \boldsymbol{E} ds = (\sum q_{своб} + \sum q_{свод})\varepsilon_o$.

В этих выражениях $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ – проекции векторов $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ на ось, параллельную границе раздела двух диэлектриков.

Пусть $l_{23} = l_{41} \to 0$. Тогда работа кулоновских сил на этих участках будет равна нулю.

Тогда работа кулоновских сил на всей длине контура

$$A_l = A_{12} + A_{34} = 0$$

и

$$A_{12} = -A_{34}.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$qE_{1\tau}l_{12} = qE_{2\tau}l_{34}.$$

Сократив одинаковые множители, получаем

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

Таким образом, компонента вектора напряжённости, параллельная границе раздела двух сред (тангенциальная компонента), с обеих сторон от границы одинакова.

Вектор электрического смещения $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{E}$. Следовательно,

$$D_{1\tau} = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_{1\tau},$$

$$D_{2\tau} = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_{2\tau},$$

А это, в свою очередь, означает, что

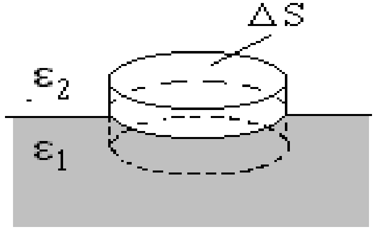
$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}$$

или

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Другими словами – тангенциальная компонента вектора ($\boldsymbol{D}_\tau$) на границе раздела скачкообразно изменяется в соответствии с последним соотношением.

Теперь рассмотрим поведение компонент векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$, перпендикулярных границе раздела двух диэлектриков. Для этого воспользуемся теоремой Гаусса. В качестве поверхности интегрирования выберем цилиндр бесконечно малой высоты, основания которого параллельны границе раздела двух диэлектриков.



В соответствии с теоремой Гаусса, считая электрическое поле однородным, мы вправе записать*:

$$D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = 0$$

и

$$D_{2n} = D_{1n}\,.$$

Отсюда следует, что

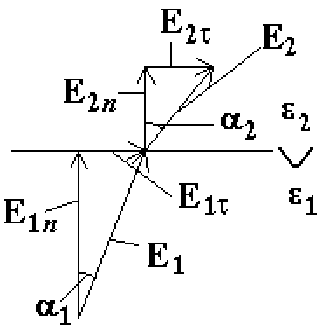
$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,.$$

Таким образом, на границе раздела скачком изменяется нормальная составляющая вектора напряжённости и не изменяется нормальная составляющая вектора электрического смещения.

Вследствие этого силовые линии на границе раздела двух диэлектриков изменяют направление**. Действительно,

$$E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$



Из рисунка видно, что $\frac{E_\tau}{E_n} = \operatorname{tg}\alpha$. Выражая тангенс угла наклона силовых линий в каждом из диэлектриков, получим:

$$\frac{E_{1\tau}}{E_{1n}} = \operatorname{tg}\alpha_1, \quad \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = \operatorname{tg}\alpha_2,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} \cdot \frac{E_{1n}}{E_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,.$$

Таким образом, в среде с бóль-шей диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$) силовые линии увеличивают наклон (см. рисунок)

---

* Мы не будем здесь подробно описывать математические преобразования: они просты и практически одинаковы с рассмотренными перед этим.

** Если силовые линии перпендикулярны границе раздела, то их направление не изменяется.

1.19. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Проводники – это вещества, способные проводить электрический ток.

Существование проводимости в проводниках обусловлено наличием в них так называемых свободных зарядов, т. е. зарядов, способных перемещаться внутри проводника.

Свободными зарядами могут быть электроны (в металлах, полупроводниках), ионы (в растворах солей, кислот и т. п.), электроны и ионы (в ионизированных газах). Все проводники во внешнем электрическом поле ведут себя практически одинаково.

Рассмотрим наиболее важные особенности поведения проводников во внешнем электрическом поле.

Допустим, что в рассматриваемом проводнике имеются свободные носители заряда одного знака (например, электроны).

Свободные заряды в проводнике могут перемещаться, следовательно, при помещении проводника в электрическое поле они начнут двигаться в направлении действия кулоновской силы.

Дошедшие до поверхности проводника заряды не могут выйти наружу. Поэтому заряды начнут скапливаться у поверхности проводника.

На противоположной поверхности возникнет недостаток свободных носителей, что вызовет появление заряда противоположного знака.

Вследствие этого внутри проводника возникнет собственное электрическое поле, направленное противоположно внешнему.

Пока собственное поле слабее внешнего, свободные носители будут двигаться в прежнем направлении и скапливаться на поверхности. Собственное поле при этом будет расти.

Так будет до тех пор, пока собственное поле не станет равно внешнему. Суммарное поле внутри проводника при этом станет равно нулю.

Полученный вывод имеет общий характер. **Электрическое поле внутри любого проводника, находящегося во внешнем электрическом поле, всегда равно нулю**

$$\boldsymbol{E} = 0.$$

Поскольку $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\varphi = 0$, постольку потенциал проводника во всех точках одинаков:

$$\varphi = \mathrm{const}.$$

В частности это означает, что **поверхность проводника в электростатическом поле является эквипотенциальной.**

Поскольку поверхность проводника эквипотенциальна, силовые линии поля вне проводника перпендикулярны поверхности проводника (так как силовые линии и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны).

Если проводник зарядить, то **избыточный заряд распределится по поверхности проводника.** Если бы это было не так, то поле внутри проводника не могло бы быть равно нулю.

Этот вывод можно получить и аналитически с помощью теоремы Гаусса: $\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{s} = \sum q_i / \varepsilon_o$.

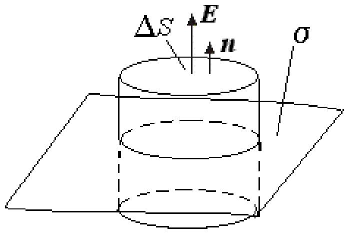
Поскольку напряжённость поля внутри проводника везде равна нулю, постольку и $\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{s} = 0$. Отсюда $\sum q_i = 0$, т. е. избыточных (не скомпенсированных) зарядов внутри проводника нет.

Избыточный заряд на проводнике находится в равновесии: заряд перераспределяется до тех пор, пока поле внутри проводника не станет равным нулю. Как только поле внутри проводника станет равно нулю, перераспределение, т. е. направленное движение свободных зарядов, прекратится.

Рассчитаем напряжённость электрического поля вблизи от поверхности заряженного проводника.

Пусть поверхностная плотность заряда проводника равна σ.

В соответствии с теоремой Гаусса, поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность пропорционален заряду, охваченному этой поверхностью.



Выберем в качестве поверхности цилиндр, основания которого параллельны поверхности проводника.

Поток через боковую стенку цилиндра будет равен нулю, так как поле вне проводника перпендикулярно его поверхности.

Поэтому поток через поверхность цилиндра будет равен потоку через верхнее основание площадью ΔS (так как внутри проводника поля нет): $E\Delta S$.

Заряд, охваченный такой поверхностью, равен $\sigma\Delta S$.

Тогда, в соответствии с теоремой Гаусса,

$$E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0},$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Таким образом, напряжённость поля вблизи поверхности проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности заряда в данной точке поверхности проводника. Конечно, это не означает, что поле вне проводника не зависит от зарядов, расположенных на отдалённых точках поверхности проводника, – просто плотность зарядов в данной точке зависит от того, как распределён заряд по всей поверхности.

1.20. ЗАМКНУТЫЕ ПРОВОДЯЩИЕ ОБОЛОЧКИ

Как уже установлено, внутри заряженного проводника избыточные заряды и электрическое поле отсутствуют. Но это означает, что для равновесного распределения зарядов на поверхности проводника не имеет никакого значения наличие вещества внутри этого проводника, т. е. полость внутри проводника, во-первых, не повлияет на распределение зарядов на поверхности проводника, и, во-вторых, поля внутри этой полости не будет.

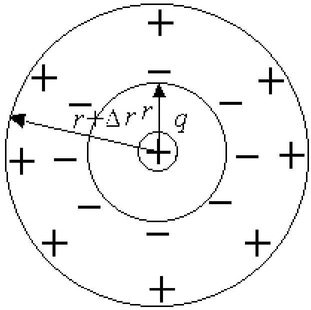
Отсюда следует, что в объёме, окружённом заряженной замкнутой проводящей оболочкой, поле всегда равно нулю.

Поле внутри полости равно нулю и тогда, когда оно создано не избыточным зарядом на поверхности полости, а внешним источником. В этом случае полость называют **экраном,** так как она может избавить от влияния электрических полей на тела (приборы), находящиеся внутри полости. Такие экраны широко применяются и в науке, и в технике.

Если внутрь незаряженной сферической полости радиуса r, поместить заряд q, картина изменится. Проведём анализ этой ситуации с помощью теоремы Гаусса.

В качестве поверхности интегрирования выберем сферу радиусом $R < r$, центр которой совпадает с центром полости.

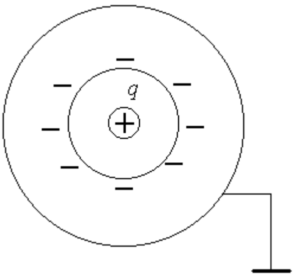
Поток вектора напряжённости через эту поверхность не равен нулю, так как отличен от нуля заряд q, находящийся внутри полости. Другим словами – в этом случае поле внутри оболочки не равно нулю.



Внутри стенок проводящей оболочки электрическое поле должно быть равно нулю. Следовательно, поток вектора напряжённости через поверхность, проходящую внутри стенок проводящей оболочки ($r + dr > R > r$), тоже должен быть равен нулю. Но это означает, что на внутренней поверхности оболочки должен быть распределён заряд, величина которого равна q, а знак противоположен знаку заряда, находящегося внутри полости.

В то же время, поскольку заряд оболочки, по условию, равен нулю, на внешней поверхности оболочки должен быть распределён заряд, величина и знак которого совпадают с зарядом q, находящимся внутри полости.

Вне оболочки ($R > r + dr$) поток вектора напряжённости не равен нулю, так как не равен нулю заряд внутри оболочки.



Таким образом, поле в этой ситуации существует внутри полости и вне оболочки. Если заряд, находящийся внутри оболочки точечный, то это поле точечного заряда.

Обратите внимание: если оболочку с находящимся внутри зарядом заземлить, то избыточный заряд с внешней поверхности оболочки стечёт, и поле вне оболочки станет равно нулю.

1.21. ЭЛЕКТРОЁМКОСТЬ УЕДИНЁННОГО ПРОВОДНИКА

Как было показано в разд. 1.14, заряженный проводник эквипотенциален, а избыточный заряд определённым образом распределён по его поверхности.

Характер распределения заряда по поверхности проводника зависит от формы проводника*.

Если сообщить проводнику дополнительный заряд, то он распределится по его поверхности подобно первой порции заряда, поскольку форма проводника, по условию, не изменяется.

Но это означает, что при увеличении заряда уединённого проводника в n раз во столько же раз увеличится и напряжённость поля, созданного проводником.

Это, в свою очередь, означает, что в n раз возрастёт и работа, необходимая для перемещения пробного заряда из бесконечности к проводнику, т. е. его (проводника) потенциал.

Следовательно, заряд проводника и его потенциал прямо пропорциональны друг другу.

Отношение заряда проводника к его потенциалу называется **электроёмкостью** (или просто **ёмкостью**) уединённого проводника:

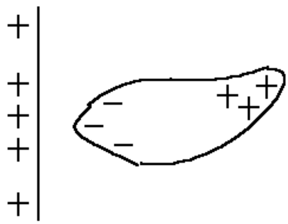
$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Размерность электроёмкости $[C]$ = Кл/В = Ф (фарада).

Следует заметить, что на практике используются меньшие величины единицы ёмкости. Это микрофарада (мкФ), равная $1 \cdot 10^{-6}$Ф, и пикофарада (пФ), равная $1 \cdot 10^{-12}$Ф и др.

Важно отметить, что ёмкость проводника зависит от окружающих его тел.

Это объясняется тем, что окружающие тела значительно влияют на поле, созданное проводником, за счёт индуцированных в окружающих телах зарядов. Например, при приближении к положительно заряженной плоскости другого проводника на нём происходит перераспределение зарядов: на ближайшей к заряженной плоскости поверхности скапливаются отрицательные заряды, на удалённой – положительные. Эти заряды создают электрическое поле, которое в свою очередь влияет на распределение зарядов на плоскости.



---

* Если вокруг данного проводника имеются другие тела, то это повлияет на распределение заряда по поверхности проводника; но в данном случае рассматривается **уединенный** проводник.

Поскольку отрицательные заряды в данном случае расположены к плоскости ближе, их влияние сильнее и потенциал плоскости понизится. Это означает, что ёмкость плоскости растёт.

Полученный вывод является общим: электрическая ёмкость проводника, окружённого другими проводниками, всегда больше ёмкости такого же уединённого проводника.

1.22. КОНДЕНСАТОРЫ

Если взять систему из двух проводников*, имеющих одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды, то мы получим **конденсатор** – устройство, ёмкость которого намного больше ёмкости уединённого проводника и не зависит от ёмкости окружающих тел**.

Основной характеристикой конденсатора является его ёмкость C, определяемая выражением $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$, где q – заряд обкладки конденсатора, $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

В данном случае разность потенциалов между обкладками конденсатора равна напряжению на конденсаторе $\varphi_1 - \varphi_2 = U$. Поэтому определение ёмкости конденсатора можно записать в таком виде: $C = \dfrac{q}{U}$.

Ёмкость конденсатора зависит от площади обкладок конденсатора, формы обкладок, расстояния между ними, диэлектрической проницаемости вещества, заполняющего пространство между обкладками конденсатора.

Рассмотрим в качестве примера плоский конденсатор. Это устройство из двух проводящих плоскостей, параллельных друг другу и разделённых слоем диэлектрика.

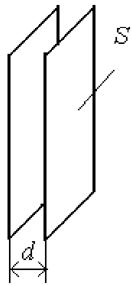
Если размеры пластин достаточно велики по сравнению с расстоянием d между ними, то заряд распределён по поверхности пластин равномерно с плотностью $\sigma = q/S$.

---

* Такие проводники принято называть **обкладками**.

** Емкость конденсатора не зависит от окружающих тел, поскольку практически все поле сосредоточено между его обкладками.

Одна пластина создаёт поле напряжённостью $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o\varepsilon}$; в соответствии с принципом суперпозиции поле между пластинами $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o\varepsilon}$, вне пластин $E = 0$.



Поскольку $\dfrac{d\varphi}{dx} = -E = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_o\varepsilon}$, то

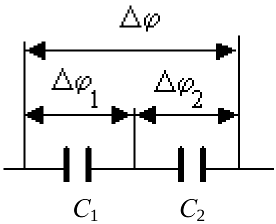
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int \frac{\sigma}{\varepsilon_o\varepsilon} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_o\varepsilon} d = \frac{qd}{\varepsilon_o\varepsilon S}.$$

Отсюда ёмкость плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_o\varepsilon S}{d}.$$

1.23. СОЕДИНЕНИЕ КОНДЕНСАТОРОВ

В практической деятельности часто используются соединения нескольких конденсаторов. Два основных способа соединения конденсаторов – параллельное и последовательное. Рассмотрим эти способы и рассчитаем суммарную ёмкость всех соединённых конденсаторов.



Последовательное соединение. Последовательным называют соединение конденсаторов, показанное на рисунке.

Если соединённые таким образом конденсаторы подключить к батарее, то левая обкладка C_1 получит от батареи заряд q, а правая обкладка C_2 – такой же по величине и противоположный по знаку заряд $-q$.

Внутренние обкладки конденсаторов C_1 и C_2 заряда от батареи не получают. Но если левая обкладка C_1 заряжена положительно, то на правую перетечёт такой же заряд противоположного знака с левой обкладки C_2. Поэтому все обкладки конденсаторов будут иметь одинаковые по величине заряды q.

При таком соединении суммарная разность потенциалов на всех конденсаторах равна сумме разностей потенциалов на них $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$.

Суммарную разность потенциалов $\Delta\varphi$ можно выразить через заряд и суммарную ёмкость конденсаторов C: $\Delta\varphi = \dfrac{q}{C}$.

Разность потенциалов между обкладками каждого из конденсаторов можно выразить аналогичным образом: $\Delta\varphi_1 = \dfrac{q}{C_1}$, $\Delta\varphi_2 = \dfrac{q}{C_2}$.

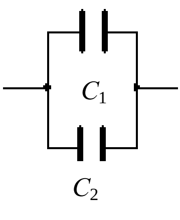
Заменяя разности потенциалов на приведённые выражения, получаем

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

и, сокращая заряд, получаем выражение для суммарной ёмкости последовательно соединённых конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Таким образом, величина, обратная суммарной ёмкости конденсаторов, равна сумме обратных каждой из ёмкостей величин. Очевидно, что если соединены не два, а несколько конденсаторов, в сумме будет столько членов, сколько соединено конденсаторов.



Параллельное соединение. Параллельным называют показанное на рисунке соединение конденсаторов.

При таком соединении разность потенциалов между обкладками всех конденсаторов одинакова.

Заряд на обкладках первого конденсатора $q_1 = C_1\Delta\varphi$, заряд на обкладках второго – $q_2 = C_2\Delta\varphi$.

Суммарный заряд на всех конденсаторах $q = q_1+q_2$ можно выразить через суммарную ёмкость соединённых конденсаторов: $q = C\Delta\varphi$.

Это означает, что $C\Delta\varphi = C_1\Delta\varphi + C_2\Delta\varphi$ и суммарная ёмкость конденсаторов, соединённых параллельно, равна сумме ёмкостей всех соединённых конденсаторов:

$$C = C_1 + C_2.$$

1.24. ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Для того чтобы сообщить любому заряженному проводнику дополнительный заряд, необходимо совершить работу

$$\delta A' = \varphi dq = C\varphi d\varphi$$

(здесь предполагается, что потенциал бесконечно удалённой точки равен нулю).

Работа, необходимая для того, чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до потенциала φ

$$A = C\int_{o}^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2} .$$

Поскольку эта работа идёт на увеличение энергии заряженного проводника, его энергия равна

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} .$$

Для конденсатора элементарная работа

$$\delta A = \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) dq = \frac{qdq}{C} ,$$

работа, необходимая для заряда конденсатора от нулевого потенциала до потенциала φ,

$$A = \int_{o}^{q} \frac{qdq}{C} = \frac{q^2}{2C} ;$$

а энергия конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)^2 C}{2} = \frac{1}{2} q_1\varphi_1 - \frac{1}{2}\left(-q_2\right)\varphi_2 = \frac{1}{2} q_1\varphi_1 + \frac{1}{2} q_2\varphi_2 .$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$W = \frac{1}{2}\left(q\varphi_1 + q\varphi_2\right)$$

(так как заряд второй пластины $q_2 = -q_1$).

Подобное выражение применимо и к системе из n заряженных проводников. Энергия такой системы

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i .$$

1.25. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Вернёмся к выражению электрической энергии, запасённой в конденсаторе:

$$W = \frac{C\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)^2}{2}.$$

Для плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_o \varepsilon S}{d}$. Поэтому его энергия

$$W = \frac{\varepsilon_o \varepsilon S\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)^2}{2d} = \frac{\varepsilon_o \varepsilon}{2}\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}\right)^2 Sd$$

и

$$W = \frac{\varepsilon_o \varepsilon}{2} E^2 V = \frac{1}{2} EDV .$$

В последние два выражения для расчёта энергии не входят характеристики проводников (S и d); в них энергия выражается через характеристики электрического поля. Это позволяет трактовать W как энергию электрического поля. Мы можем говорить, что это энергия электрического поля. И эта энергия распределена в пространстве с объёмной плотностью

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_o \varepsilon}{2} E^2 = \frac{ED}{2} .$$

Используя последнее выражение, можно найти энергию, запасённую в однородном электрическом поле, занимающем объём V

$$W = \omega V.$$

Если электрическое поле неоднородно, то

$$W = \int_V \omega dV ,$$

т. е. энергия поля в объёме V равна интегралу от объёмной плотности электрического поля, взятому по объёму V.

1. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов.

Для того чтобы свободные заряды двигались в среде упорядоченно, необходимо либо наличие электрического поля, либо какое-либо поле неэлектростатических сил.

Если свободные заряды движутся упорядоченно в электрическом поле, то причиной, вызывающей электрический ток, являются кулоновские силы.

Если же свободные заряды движутся упорядоченно без электрического поля, то причиной, вызывающей электрический ток, являются силы, называемые **сторонними** (например, магнитные силы в генераторе электрического тока). Причём, если электрическое поле характеризуют напряжённостью $\boldsymbol{E}$, то поле сторонних сил – так называемой **напряженностью поля сторонних сил $\boldsymbol{E}^*$.**

Количественной характеристикой электрического тока является сила тока I. Это величина, равная отношению заряда dq, переносимого через поверхность за время dt, ко времени dt

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Сила тока, как это видно из определения, – скалярная величина.

В системе СИ единицей измерения силы тока является ампер [I] = Кл/с = А.

Электрический ток может быть обусловлен направленным движением как положительных, так и отрицательных зарядов. Причём, если ток создаётся одновременным движением положительных зарядов dq^+ (они движутся по полю) и отрицательных зарядов dq^- (они движутся против электрического поля), то

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt}.$$

Электрический ток имеет направление. Это – условная характеристика.

Направлением тока принято считать направление движения положительных зарядов (если ток создают отрицательные заряды, то направление тока противо-положно направлению их движения).

В общем случае величина отношения dq/dt может меняться со временем; если же dq/dt = const то ток называют постоянным *и* тогда можно считать $I = q$ /t.

Величина отношения $dq\ /\ dt$ может зависеть не только от времени, но и от координаты: в разных точках сечения проводника оно может быть разным. Поэтому для характеристики электрического тока используют дифференциальную характеристику, именуемую **плотность тока *j***:

$$\boldsymbol{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \cdot \boldsymbol{n},$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, параллельный скорости направленного движения положительных зарядов; $dS_{\perp}$ – площадь элементарной поверхности, перпендикулярной скорости направленного движения зарядов.

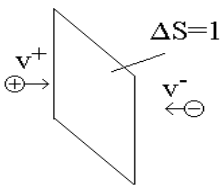
Размерность плотности тока $[j]$ = А/м^2.

Сила тока и плотность тока связаны между собой:

$$I = \int_S \boldsymbol{jn}dS = \int_S \boldsymbol{j}d\boldsymbol{S}\ .$$

Последнее выражение можно прочесть и так: сила тока через поверхность S равна потоку вектора плотности тока j через эту поверхность.

Протекание электрического тока не вызывает накопления заряда в проводнике. Это означает, что если в некоторый объём проводника вошёл заряд dq, то такой же заряд должен выйти из этого объёма.



В математической форме последнее утверждение имеет следующий вид:

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = 0\ .$$

Найдём связь плотности тока со средней скоростью упорядоченного движения зарядов в проводнике. Для этого выберем единичную поверхность, перпендикулярную скорости упорядоченного движения зарядов. За единицу времени через неё пройдёт $n^{+}\cdot\boldsymbol{v}$ положительных зарядов и $n \cdot \boldsymbol{v}$ отрицательных зарядов (здесь n^{+}, n^{-} – концентрации положительных и отрицательных зарядов соответственно, $\boldsymbol{v}^{+}$, $\boldsymbol{v}^{-}$ – скорости направленного движения зарядов). Тогда плотность тока

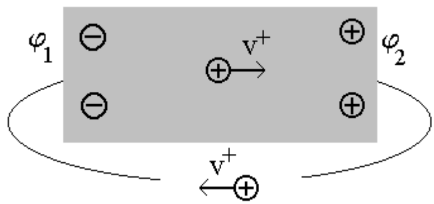
$$\boldsymbol{j} = e^{+} \cdot n^{+} \cdot \boldsymbol{v}^{+} + e^{-} \cdot n^{-} \cdot \boldsymbol{v}^{-}.$$

В отсутствие электрического поля свободные носители заряда движутся хаотически. Это движение не даёт вклада в $\boldsymbol{j}$, так как средняя скорость хаотического движения равна нулю.

2.1. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

Если в проводнике создать электрическое поле, свободные заряды начнут двигаться упорядоченно, т. е. возникнет электрический ток.

Однако этот ток очень быстро прекратится, так как свободные заряды перераспределятся так, что поле внутри проводника станет равно нулю и причина, вызвавшая направленное движение зарядов, исчезнет (см. разд. 1.19).



Для того чтобы ток не прекращался, необходимо переносить избыточные заряды с одного конца проводника на противоположный. Тогда электрическое поле внутри проводника будет существовать непрерывно и направленное движение зарядов не будет прекращаться.

Другими словами – для того чтобы в цепи непрерывно существовал электрический ток, в части электрической цепи свободные носители должны двигаться по электрическому полю, а в другой части – против.

Естественно, электрическое поле не может заставить положительные заряды двигаться против кулоновских сил. Следовательно, в части цепи должны действовать силы, заставляющие положительные заряды двигаться от “минуса” к “плюсу”. Такие силы неэлектростатического происхождения принято называть **сторонними**.

Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называют источником ЭДС (электродвижущей силы).

На практике используются различные виды источников ЭДС. Это электрические генераторы, гальванические элементы (батарейки), аккумуляторы и т. д.

Источник электродвижущей силы характеризуется величиной ЭДС:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q},$$

где $A_{\text{ст}}$ – работа сторонних сил по перемещению заряда q; q – заряд, перемещённый сторонними силами.

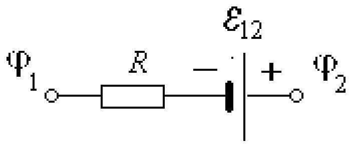
Размерность ЭДС [ε] = Дж/Кл = В (вольт).

Работу сторонних сил по перемещению заряда q внутри источника эдс можно вычислить следующим образом:

$$A_{\text{ст}} = A_{21} = \int_2^1 \boldsymbol{F}_{\text{стор}} d\boldsymbol{l} = \int_2^1 q\boldsymbol{E}^* d\boldsymbol{l} = q\int_2^1 \boldsymbol{E}^* d\boldsymbol{l}.$$

Отсюда величина эдс

$$\varepsilon = \int_2^1 \boldsymbol{E}^* d\boldsymbol{l}.$$



Если электрическая цепь замкнута, то эдс равна

$$\varepsilon = \oint_L \boldsymbol{E}^* d\boldsymbol{l}.$$

Работа по перемещению заряда на участке цепи, содержащем источник ЭДС, может быть найдена как

$$A_{12} = q\int_1^2 \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} + q\int_1^2 \boldsymbol{E}^* d\boldsymbol{l}.$$

Учитывая связь напряжённости и потенциала, а также определение ЭДС, получаем

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}.$$

Величина, равная работе электростатических и сторонних сил по перемещению единичного заряда в электрической цепи, называется напряжением:

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}.$$

Обратите внимание: напряжение на участке цепи и разность потенциалов на его концах различны по величине.

Напряжение и разность потенциалов не одно и то же!

Следует отметить, что участок цепи, содержащий источник ЭДС, называют **неоднородным**. Участок, не содержащий источника ЭДС, называют **однородным**.

Поскольку однородный участок не содержит ЭДС, постольку $U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)$, т. е. напряжение на однородном участке цепи равно разности потенциалов на его концах.

2.2. ЗАКОН ОМА

Георг Ом, экспериментируя с цепями постоянного тока, обнаружил, что сила тока в участке электрической цепи определяется следующим соотношением:

$$I = \frac{U}{R},$$

где I – сила тока в цепи, U – напряжение на концах цепи, R – сопротивление цепи.

Это выражение принято называть **законом Ома для участка цепи.**

Сопротивление цепи есть коэффициент, связывающий напряжение в цепи и силу тока, возникающего в цепи за счёт напряжения U.

Поскольку размерности силы тока и напряжения не совпадают, R является размерным коэффициентом. Размерность сопротивления можно получить из закона Ома: $[R] = [U]/[I] =$ $=$ В/А = Ом.

Величина сопротивления цепи при постоянной температуре зависит от размеров и формы проводников цепи, от материала, из которого проводники изготовлены. Увеличение температуры у большинства проводников вызывает возрастание сопротивления.

Для однородного по составу проводника постоянной длины и сечения сопротивление $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление проводника*; l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения проводника.

Закон Ома для участка цепи может быть записан в дифференциальной форме

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{E} = \sigma\boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{j}$ – плотность тока в проводнике; ρ – удельное сопротивление проводника; σ – удельная электрическая проводимость проводника; $\boldsymbol{E}$ – напряжённость электрического поля в проводнике.

Если участок цепи неоднороден, то кроме электростатических сил на свободные заряды действуют и сторонние, тогда

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} + \sigma\boldsymbol{E}^*.$$

Это выражение представляет собой **закон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи.**

В интегральной форме это выглядит так:

$$I = \int \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = \sigma\left(\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_1^2 \boldsymbol{E}^*\cdot d\boldsymbol{S}\right) = \frac{1}{R}\left(\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}\right)$$

и

$$IR = \left(\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}\right)$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов на концах участка цепи.

Последнее выражение представляет собой закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме.

Если неоднородная цепь замкнута, то $\varphi_1 = \varphi_2$ (так как концы участка цепи соединены между собой) и закон Ома принимает следующий вид:

$$I = \frac{\varepsilon}{R},$$

где R – суммарное сопротивление однородного участка цепи и внутреннего сопротивления источника ЭДС.

Это выражение представляет собой закон Ома для замкнутой цепи.

---

* Удельное сопротивление зависит от материала проводника; размерность удельного сопротивления – Ом·м.

2.3. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА. ЗАКОН ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА

Рассмотрим участок цепи, напряжение на концах которой равно U.

В рассматриваемой цепи будет протекать электрический ток, сила которого, в соответствии с законом Ома, равна U/R.

По определению (см. разд. 2.1), напряжение равно работе электростатических и сторонних сил по перемещению единичного заряда в электрической цепи. Следовательно, при протекании тока кулоновские и сторонние силы, действующие на заряды в рассматриваемом участке, совершат работу

$$A = qU \ .$$

Эту работу называют работой электрического тока.

Если ток постоянный, то $q = It$, где I – сила тока, t – время, в течение которого в проводнике течёт ток. В этом случае работа тока может быть рассчитана по формуле

$$A = UIt \ .$$

Поскольку $U = IR$, постольку работа тока

$$A = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t \ .$$

Таким образом, работа тока может быть рассчитана с помощью нескольких формул. Какое именно выражение следует использовать в конкретной задаче, определяется её условием. Например, если в условии дана сила тока и разность потенциалов на концах однородного участка цепи, то $A = I\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)t$, если же известны сила тока и сопротивление цепи, то $A = I^2 Rt$.

Мощность есть работа, совершённая за единицу времени: $P = \dfrac{A}{t}$. Поэтому мощность тока можно рассчитать по следующим формулам:

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R} \ .$$

Если проводник с током неподвижен и ток не вызывает химических реакций, то вся работа идёт на увеличение внутренней энергии проводника, т. е. на его нагрев.

Другими словами – при протекании тока в проводнике выделяется тепло

$$Q = UIt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t .$$

В 1841 г. англичанин Джеймс П. Джоуль и независимо от него в 1842 г. русский физик Эмилий Христианович Ленц, обобщая результаты своих экспериментов, получили именно такое выражение для расчета количества тепла, выделяемого проводником при протекании в нём тока. Поэтому последнее выражение принято называть **законом Джоуля–Ленца**.

Если сила тока изменяется с течением времени, то количество тепла, выделяющееся в цепи, можно рассчитать с помощью следующих выражений:

$$Q = \int_0^t UIdt = \int_0^t I^2Rdt = \int_0^t \frac{U^2}{R}dt .$$

Закон Джоуля–Ленца может быть записан и в дифференциальной форме:

$$\varpi = \rho j^2 = jE = \sigma E^2 ,$$

где ϖ – удельная тепловая мощность тока (это количество тепла, выделяющееся за единицу времени в единице объёма проводника).

3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

3.1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ИСТОЧНИК МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ХАРАКТЕРИСТИКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В начале XIX в. физики полагали, что магнитное поле создаётся постоянными магнитами природного происхождения. Но было также известно, что иногда после удара молнии металлические предметы намагничивались. Это наводило на мысль о том, что магнетизм и электрический ток (молния) каким-то образом связаны между собой.

Зимой 1819 г. Ганс Христиан Эрстед заметил, что магнитная стрелка, висящая параллельно проводнику, отклоняется при включении тока.

При изменении направления тока на противоположное стрелка отклонялась в противоположном направлении.

Так было обнаружено, что магнитное поле создаётся электрическим током.

Другими словами – магнитное поле создаётся зарядами, которые упорядоченно движутся относительно наблюдателя.

Обратите внимание на важную деталь: для наблюдателя, относительно которого заряженные частицы движутся упорядоченно, существует магнитное поле, созданное этими зарядами.

Но для наблюдателя, который движется вместе с этими же заряженными частицами, магнитного поля нет! Для этого наблюдателя существует только электростатическое поле, созданное неподвижными относительно него зарядами.

Это означает, что возникновение магнитного поля является проявлением релятивистских эффектов.

Изменение направления тока в опыте Эрстеда вызвало изменение направления отклонения магнитной стрелки. Следовательно, магнитное поле имеет направленный характер. Отсюда вывод – магнитное поле должно характеризоваться векторной величиной.

Основной силовой характеристикой магнитного поля является **индукция магнитного поля**. Эту характеристику принято обозначать символом $\boldsymbol{B}$. Размерность индукции $[B]$ = Тл (тесла).

Кроме индукции $\boldsymbol{B}$ используется вспомогательная характеристика магнитного поля $\boldsymbol{H}$, которую принято называть напряжённостью магнитного поля. Размерность напряжённости $[H]$ = А/м.

3.2. ИНДУКЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, СОЗДАННОГО ДВИЖУЩИМСЯ ТОЧЕЧНЫМ ЗАРЯДОМ

Рассмотрим заряд q, движущийся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$.

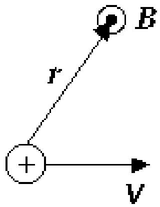
Заряд движется, следовательно он создаёт магнитное поле.

Экспериментально установлено, что индукция $\boldsymbol{B}$ магнитного поля, созданного этим зарядом в интересующей нас точке, равна

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}]}{r^3},$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, начинающийся на заряженной частице и заканчивающийся в интересующей нас точке; r – модуль вектора $\boldsymbol{r}$; μ_o – магнитная постоянная; . $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$Гн/м.

Как следует из последнего выражения, вектор $\boldsymbol{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{r}$. На приведённом рисунке вектор $\boldsymbol{B}$ в соответствии с правилом правого винта, направлен на нас (векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{r}$ лежат в плоскости рисунка).



Выражение для расчёта $\boldsymbol{B}$ позволяет выявить ряд существенных факторов, влияющих на величину индукции магнитного поля.

Во-первых, магнитное поле создаётся движущимися зарядами. Следовательно, магнитная индукция должна зависеть от величины заряда q. Эксперимент подтвердил, что индукция $\boldsymbol{B}$ прямо пропорциональна q.

Во-вторых, магнитное поле, создаётся **движущимися зарядами**. Причём вследствие релятивистского характера оно должно быть тем сильнее, чем больше скорость заряда. И действительно, $\boldsymbol{B}$ прямо пропорциональна скорости заряда $\boldsymbol{v}$.

В-третьих, магнитное поле должно ослабевать по мере удаления от движущегося заряда. Из выражения для расчёта $\boldsymbol{B}$ следует, что индукция магнитного поля, созданного движущимся зарядом, действительно обратно пропорциональна квадрату модуля радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, определяющего положение точки в пространстве относительно заряда.

Если необходимо рассчитать магнитное поле, созданное несколькими движущимися зарядами, следует использовать принцип суперпозиции $\boldsymbol{B} = \sum \boldsymbol{B_i}$.

3.3. ЗАКОН БИО–САВАРА–ЛАПЛАСА

Найдём выражение для расчёта индукции магнитного поля, созданного током I.

В элементарном участке проводника dl содержится $n \cdot dl \cdot S$ свободных носителей заряда, где n – концентрация свободных носителей заряда, dl – длина элементарного участка проводника, S – площадь поперечного сечения проводника.

Каждый из зарядов создаёт в интересующей нас точке магнитное поле, индукция которого

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e[\boldsymbol{v}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

где $\boldsymbol{v}$ – скорость направленного движения свободных носителей заряда. Умножив $\boldsymbol{B}$ на количество свободных носителей заряда в элементе проводника dl, получим индукцию магнитного поля, созданную этим элементом проводника с током,

$$d\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot n \cdot dl \cdot S = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{e[\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}]}{r^3} \cdot n \cdot dl \cdot S = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dl[en\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}]S}{r^3};$$

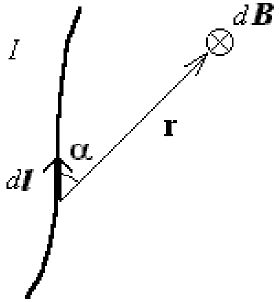
поскольку $en\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}$*,

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dl[\boldsymbol{j};\boldsymbol{r}]}{r^3} S;$$

поскольку $dl \cdot \boldsymbol{j} = d\boldsymbol{l} \cdot j$ ($d\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{j}$ совпадают по направлению),

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{jS[d\boldsymbol{l};\boldsymbol{r}]}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I[d\boldsymbol{l};\boldsymbol{r}]}{r^3}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля, созданного элементом dl проводника с током I на расстоянии r от элемента проводника, определяется выражением



$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I[d\boldsymbol{l};\boldsymbol{r}]}{r^3}.$$

Это выражение и представляет собой закон Био–Савара–Лапласа.

Из закона видно, что вектор магнитной индукции $d\boldsymbol{B}$ всегда перпендикулярен плоскости, в ко-торой лежат векторы $d\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{r}$. Его направление определяется по правилу правого винта.

Модуль вектора $d\boldsymbol{B}$ определяется из выражения

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin\alpha}{r^2},$$

где α – угол между векторами $d\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{r}$.

---

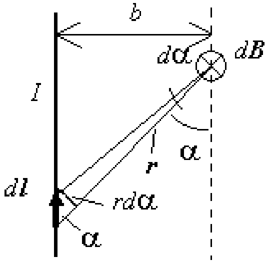
* Здесь $\boldsymbol{j}$ – вектор плотности тока.

Необходимо учесть, что полученное выражение позволяет рассчитать индукцию магнитного поля, созданную одним бесконечно малым элементом проводника dl с током I.

Для того чтобы найти магнитную индукцию, созданную всем проводником, необходимо использовать принцип суперпозиции, т. е. просуммировать векторы $d\mathbf{B}$, созданные каждым элементом проводника в интересующей нас точке.

3.4. РАСЧЁТ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНА БИО–САВАРА–ЛАПЛАСА

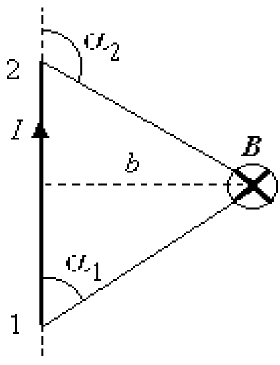
3.4.1. Индукция магнитного поля отрезка прямолинейного проводника с током



Для всех бесконечно малых элементов $d\mathbf{l}$ отрезка векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ лежат в плоскости листа. Поэтому векторы $d\mathbf{B}$, созданные в выбранной нами точке различными элементами проводника направлены одинаково – перпендикулярно плоскости листа. Следовательно, сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей $d\mathbf{B}$.

Из рисунка видно, что $r = b/\sin\alpha$ (b – расстояние от проводника до интересующей нас точки), и

$$dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b \cdot d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$



Тогда индукция, созданная элементом проводника dl, равна

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\sin\alpha dl}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} I\sin\alpha \times$$

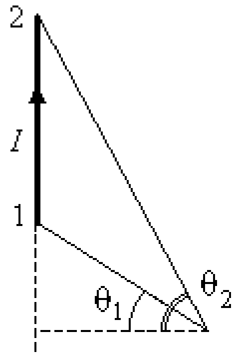
$$\times\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\frac{bd\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\mu_o}{4\pi}\cdot\frac{I\sin\alpha d\alpha}{b}.$$

Индукция магнитного поля, созданного всем проводником, может быть найдена как интеграл от dB в пределах от α_1 до $+\alpha_2$:

$$B=\int\limits_{1}^{2}dB=\frac{\mu_o}{4\pi}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{I\sin\alpha d\alpha}{b}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I}{b}\left(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right)$$

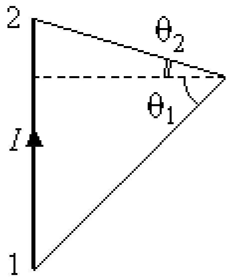
Иногда удобнее воспользоваться другим выражением:

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)$$



(обратите внимание на рисунок, показывающий углы θ_1 и θ_2).

Обратите также внимание на то, что если точка расположена так, как показано на следующем рисунке, то θ_2 меняет знак и формула для расчёта магнитного поля прямолинейного отрезка записывается следующим образом:



$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\left(\sin\theta_2+\sin\theta_1\right).$$

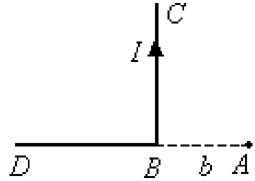
3.4.2. Индукция магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током

Если длина прямого проводника бесконечно велика, то $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$.

В этом случае индукция магнитного поля, созданного проводником, будет равна

$$B=\int\limits_{1}^{2}dB=\frac{\mu_o}{4\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{I\sin\alpha d\alpha}{b}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{b}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля, созданного бесконечно длинным проводником прямо пропорциональна току в проводнике и обратно пропорциональна расстоянию от проводника до интересующей нас точки.



Дополнительно рассмотрим магнитное поле, созданное бесконечным проводником, который изогнут под прямым углом.

Ограничимся получением расчётной формулы для точки *A*, расположенной на продолжении одной из половин проводника.

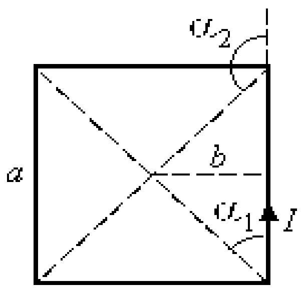
Участок *DB* в точке *A* не создаёт магнитного поля, так как для него α_1 и α_2 равны 0.

Для участка *BC* $\alpha_1 = 90^0$, $\alpha_2 = -180^0$. Поэтому индукция, созданная этим участком, равна

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля в точке *A* равна половине индукции, созданной прямым бесконечно длинным проводником с таким же током.

3.4.3. Индукция магнитного поля в центре квадрата



Рассмотрим квадрат со стороной а, в котором течёт ток *I*.

Все стороны квадрата создают в его центре одинаковое магнитное поле. Поэтому если индукция, созданная одной стороной, равна *B*, то магнитная индукция, созданная всеми сторонами, равна 4*B*.

В рассматриваемом случае $\alpha_1 = 45^0$, а $\alpha_2 = 135^0$ (см. рисунок).

Индукция магнитного поля, созданного одной стороной, равна:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\left(\cos 45 - \cos 135\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\sqrt{2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{a}\sqrt{2}.$$

Соответственно индукция магнитного поля, созданного всеми сторонами, равна

$$B = 4B = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{2I}{a}\sqrt{2}.$$

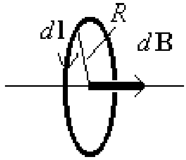
В показанном на рисунке случае индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости квадрата на нас.

3.4.4. Расчёт магнитного поля замкнутого кругового тока (витка с током).

Пусть радиус витка равен R, а ток в нём – I.

Вначале рассмотрим расчёт поля в центре витка.

Каждый элемент тока будет создавать индукцию, направленную вдоль оси витка. Поэтому, как и в предыдущем случае, сложение dB алгебраическое и

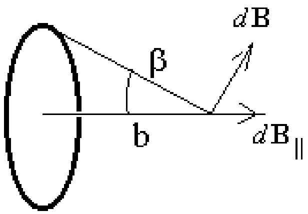


$$B = \int dB = \oint \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{Idl}{R^2},$$

(в каждой точке $\alpha = 90^0$)

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \cdot 2\pi R}{R^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \cdot 2\pi}{R}.$$

Поле на оси витка на расстоянии b от центра витка рассчитывается несколько сложнее. B этом случае векторы $d\mathbf{B}$ не параллельны друг другу.



При суммировании составляющие векторов $d\mathbf{B}$, перпендикулярные оси, уничтожаются, а параллельные оси – складываются.

Из рисунка видно, что

$$dB_{II} = dB \sin\beta = dB \frac{R}{\sqrt{R^2 + b^2}};$$

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{Idl}{\left(R^2 + b^2\right)};$$

$$dB_{II} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{Idl}{\left(R^2 + b^2\right)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + b^2}}.$$

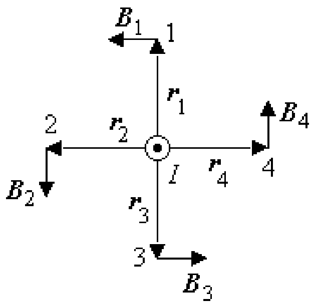
Проинтегрировав это выражение по всему контуру, получаем

$$B = \oint dB_{II} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{IR}{\left(R^2 + b^2\right)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2I\pi R^2}{\left(R^2 + b^2\right)^{3/2}}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля на оси кругового витка с током убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния от центра витка до точки на оси. Вектор магнитной индукции на оси витка параллелен оси. Его направление можно определить с помощью правого винта: если направить правый винт параллельно оси витка и вращать его по направлению тока в витке, то направление поступательного движения винта покажет направление вектора магнитной индукции.

3.5 Силовые линии магнитного поля

Магнитное поле, как и электростатическое, удобно представлять в графической форме – с помощью силовых линий магнитного поля.



Силовая линия магнитного поля – это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора магнитной индукции.

Силовые линии магнитного поля проводят так, что их густота пропорциональна величине магнитной индукции: чем больше магнитная индукция в некоторой точке, тем больше густота силовых линий.

Таким образом, силовые линии магнитного поля имеют сходство с силовыми линиями электростатического поля.

Однако им свойственны и некоторые особенности.

Рассмотрим магнитное поле, созданное прямым проводником с током I.

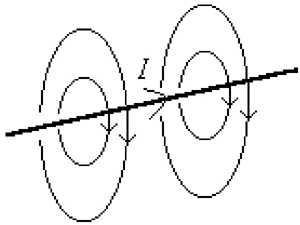
Пусть этот проводник перпендикулярен плоскости рисунка.

В различных точках, расположенных на одинаковых расстояниях от проводника, индукция одинакова по величине.

Направление вектора ***B*** в разных точках показано на рисунке.

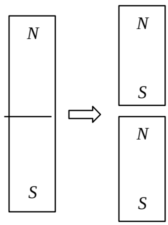
Линией, касательная к которой во всех точках совпадает с направлением вектора магнитной индукции, является окружность.

Следовательно, силовые линии магнитного поля в этом случае представляют собой окружности, охватывающие проводник. Центры всех силовых линий расположены на проводнике.



Таким образом, силовые линии магнитного поля замкнуты (силовые линии электростатического не могут быть замкнуты, они начинаются и заканчиваются на зарядах).

Поэтому магнитное поле является **вихревым** (так называют поля, силовые линии которых замкнуты).



Замкнутость силовых линий означает ещё одну, очень важную особенность магнитного поля – в природе не существует (по крайней мере, пока не обнаружено) магнитных зарядов, которые являлись бы источником магнитного поля определённой полярности.

Поэтому не бывает отдельно существующего северного или южного магнитного полюса магнита.

Даже если распилить пополам постоянный магнит, то получится два магнита, каждый из которых имеет оба полюса.

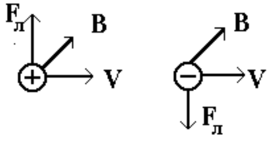
3.6. Сила Лоренца

Экспериментально установлено, что на заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила. Эту силу принято называть силой Лоренца:

$$\boldsymbol{F}_{л} = q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}].$$

Модуль силы Лоренца

$$F_{л} = qvB\sin\alpha,$$



где α – угол между векторами $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$.

Направление силы Лоренца зависит от направления вектора $[\boldsymbol{v}, \mathbf{B}]$. Его можно определить с помощью правила правого винта или правила левой руки. Но направление силы Лоренца не обязательно совпадает с направлением вектора $[\boldsymbol{v}, \mathbf{B}]$!

Дело в том, что сила Лоренца равна результату произведения вектора [$\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$] на скаляр q. Если заряд положительный, то $\boldsymbol{F}_л$ параллельна вектору [$\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$]. Если же $q < 0$, то сила Лоренца противоположна направлению вектора [$\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$] (см. рисунок).

Если заряженная частица движется параллельно силовым линиям магнитного поля, то угол α между векторами скорости и магнитной индукции равен нулю. Следовательно, сила Лоренца на такой заряд не действует ($\sin 0 = 0$, $F_л = 0$).

Если же заряд будет двигаться перпендикулярно силовым линиям магнитного поля, то угол α между векторами скорости и магнитной индукции равен 90^0. В этом случае сила Лоренца имеет максимально возможное значение: $F_л = qvB$.

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряда. Это означает, что сила Лоренца не может изменить величину скорости движения, но изменяет её направление.

Поэтому в однородном магнитном поле заряд, влетевший в магнитное поле перпендикулярно его силовым линиям, будет двигаться по окружности.

Если на заряд действует только сила Лоренца, то движение заряда подчиняется следующему уравнению, составленному на основе второго закона Ньютона: $ma = F_л$.

Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости, постольку ускорение заряженной частицы является центростремительным (нормальным): $a = \dfrac{v^2}{R}$ (здесь R – радиус кривизны траектории заряженной частицы).

Используя выражение для расчёта ускорения и заменив $F_л$ на qvB, получаем

$$m\frac{v^2}{R} = qvB.$$

Отсюда следует, что радиус окружности, по которой будет двигаться заряд в однородном магнитном поле, равен

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

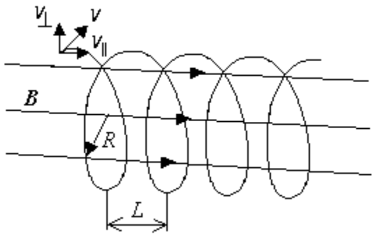
Если заряженная частица влетит в однородное магнитное поле под углом α к силовым линиям, то её траектория будет более сложной.

Для того чтобы установить форму траектории и её параметры, разложим скорость частицы на две компоненты – параллельную

$v_{\parallel} = v\cos\alpha$ и перпендикулярную $v_{\perp} = v\sin\alpha$ силовым линиям магнитного поля.

Компонента скорости $v_{\parallel}$ не изменяется, так как сила Лоренца не действует на заряженную частицу, движущуюся параллельно силовым линиям магнитного поля. За счёт этой компоненты заряд будет равномерно двигаться вдоль силовых линий.

Компонента скорости $v_{\perp}$ не будет меняться по величине, но будет непрерывно изменяться её направление. За счёт этой компоненты заряд будет двигаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна силовым линиям.



Заряженная частица одновременно будет участвовать в этих движениях, поэтому её траектория будет представлять собой винтовую линию.

Радиус винтовой линии будет равен $R = \dfrac{mv_{\perp}}{qB}$.

Период обращения заряженной частицы равен времени, за которое она пройдёт один виток, $T = \dfrac{2\pi R}{v_{\perp}}$.

Шаг винтовой линии равен расстоянию, которое заряд пройдёт за один период: $L = v_{\parallel}T$.

Рассмотрим два одноимённых заряда, движущихся с одинаковой скоростью v вдоль параллельных прямых.

За счёт кулоновского взаимодействия они отталкиваются с силой $F_{Кл} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$.

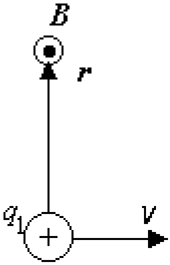
Каждый из зарядов создаёт магнитное поле. Следовательно, на заряды действует сила Лоренца.

Заряд q_1 создаёт магнитное поле, индукция которого направлена на нас (см. рисунок), и по модулю равна

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q_1 v}{r^2}.$$

Тогда сила Лоренца, действующая на второй заряд, по модулю равна

$$F_л = q_2 V \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q_1 V}{r^2}$$

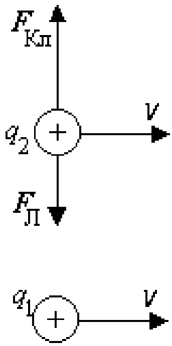


и направлена так, как показано на рисунке справа.

Отношение силы Лоренца к кулоновской силе равно

$$\frac{F_л}{F_{Кл}} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q_1 q_2 V^2}{r^2} \frac{4\pi\varepsilon_o r^2}{q_1 q_2} = \mu_o \varepsilon_o V^2 .$$

Значения величин ε_o и μ_o связаны между собой соотношением $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$, где c – скорость света в вакууме. Поэтому



$$\frac{F_л}{F_{Кл}} = \frac{V^2}{c^2} .$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации сила Лоренца меньше кулоновской и возрастает по мере роста скорости движения заряда. Это ещё раз указывает на релятивистский характер магнитного взаимодействия.

3.7. СИЛА АМПЕРА

Если проводник с током поместить в магнитное поле, то на каждый электрон, направленно движущийся в проводнике, действует сила Лоренца.

Действие этой силы передаётся всему проводнику. В результате на проводник с током, находящийся в магнитном поле, будет действовать некоторая сила. Найдём её величину.

Для этого выделим элементарный участок проводника $d\boldsymbol{l}$. В нём имеется $n \cdot S \cdot dl$ свободных электронов (n – концентрация свободных носителей заряда в проводнике, S – площадь поперечного сечения проводника, dl – длина элементарного участка). На каждый из электронов действует сила $\boldsymbol{F}_л = q[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}]$.

Результирующая сила $d\boldsymbol{F}$, действующая на элемент проводника, равна сумме сил, действующих на все электроны в участке $d\boldsymbol{l}$:

$$d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_л \cdot n \cdot dl \cdot S = q\left[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}\right] \cdot n \cdot dl \cdot S \;;$$

поскольку $q \cdot n \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}$, постольку сила $d\boldsymbol{F}$ равна

$$d\boldsymbol{F} = \left[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B}\right] dlS = \left[d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}\right] jS = I\left[d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}\right].$$

Это и есть выражение для расчёта силы Ампера, т. е. силы, действующей на элемент проводника с током, находящийся в магнитном поле.

Направление силы Ампера совпадает с направлением вектора $\left[d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}\right]$ и может быть определено по правилу правого винта для векторного произведения (или по правилу левой руки).

Для вычисления силы, действующей на весь проводник, необходимо взять интеграл от $d\boldsymbol{F}$ по длине проводника:

$$\boldsymbol{F} = \int d\boldsymbol{F} \;.$$

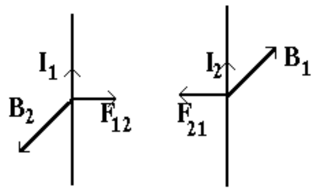
Теперь рассмотрим два параллельных проводника с токами I_1 и I_2, расположенных на расстоянии b друг от друга.

Первый проводник создаёт магнитное поле, индукция которого

$$B_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2I_1}{b} \;.$$

В этом поле на единицу длины второго проводника действует сила, равная

$$F_{21} = \frac{dF_{21}}{dl} = I_2 B_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} \;.$$



Такая же по величине сила действует и на первый проводник. Легко увидеть, что если токи направлены в одну сторону, проводники притягиваются, если же токи противоположны, то проводники отталкиваются.

3.8. КОНТУР С ТОКОМ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

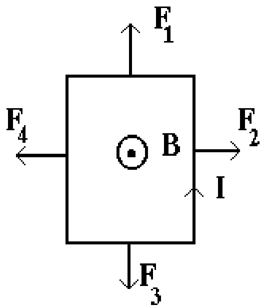
Рассмотрим контур с постоянным током I, находящийся в однородном магнитном поле. На каждый элементарный участок контура действует сила Ампера $d\boldsymbol{F} = I\left[d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}\right]$.

Сила, действующая на контур в целом, равна сумме сил, действующих на все элементарные участки контура, и может быть выражена как

$$\boldsymbol{F} = \oint I[d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}].$$

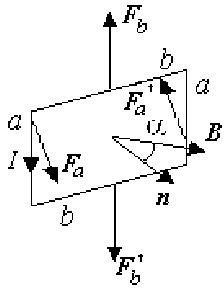
Учитывая, что I = const и в однородном магнитном поле $\boldsymbol{B}$ = = const, величины I и $\boldsymbol{B}$ можно вынести за знак интеграла:

$$\boldsymbol{F} = I\left[\oint d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}\right].$$



Векторный интеграл $\oint d\boldsymbol{l} = 0$. Поэтому результирующая сила, действующая на контур, равна нулю.

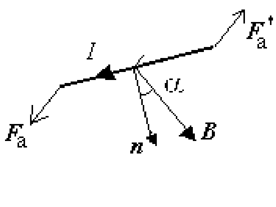
Но это не означает, что равны нулю силы, действующие на отдельные участки контура. Например, на прямоугольный контур, плоскость которого перпендикулярна силовым линиям однородного магнитного поля, действуют растягивающие или сжимающие его силы (см. рисунок).



Повернём контур так, чтобы положительная нормаль к его плоскости образовала некоторый угол α с силовыми линиями (направление положительной нормали определяют по правилу правого винта).

В этом случае на стороны b действуют силы, которые деформируют контур, но не вызывают его движения.

Силы, действующие на стороны a контура, стремятся повернуть контур так, чтобы вектор $\boldsymbol{n}$ был параллелен вектору $\boldsymbol{B}$ (вектор $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, направление которого совпадает с положительной нормалью к контуру).



Модули этих сил равны $F_a = IaB$. Силы $\boldsymbol{F}_a$ и $\boldsymbol{F}'_\alpha$ создают момент пары сил, модуль которого равен

$$M = F_a b\sin\alpha = IabB\sin\alpha = IBS\sin\alpha,$$

где S – площадь контура; α – угол между вектором $\boldsymbol{F}_a$ и продолжением стороны b контура; этот угол равен по величине углу между единичным вектором $\boldsymbol{n}$ и вектором $\boldsymbol{B}$.

В векторной форме данное выражение имеет вид

$$\boldsymbol{M} = \left[IS\boldsymbol{n}, \boldsymbol{B} \right].$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, направленный по положительной нормали к контуру.

Выражение для момента сил можно записать и в такой форме:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{p_m}, \boldsymbol{B}],$$

где $\boldsymbol{p_m} = IS\boldsymbol{n}$ – магнитный момент контура с током; направление магнитного момента совпадает с положительной нормалью к контуру.

Из выражения для расчёта $\boldsymbol{M}$ следует, что величина момента сил зависит от ориентации контура в магнитном поле. Момент сил, действующий на контур максимален, если контур параллелен силовым линиям магнитного поля (при этом угол между магнитным моментом и вектором магнитной индукции равен 90^0). Если же контур перпендикулярен им, то момент сил равен нулю.

Поэтому если магнитный момент $\boldsymbol{p_m}$ контура с током параллелен вектору $\boldsymbol{B}$, то в однородном магнитном поле контур будет находиться в состоянии устойчивого равновесия.

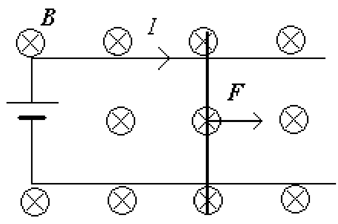
Контур будет в равновесии и в том случае, когда $\alpha = 180^0$, но равновесие будет неустойчивым.

Следует отметить, что все выводы, сформулированные в данном разделе, верны и для контура произвольной формы, находящегося в однородном магнитном поле.

3.9. МАГНИТНЫЙ ПОТОК. РАБОТА, СОВЕРШАЕМАЯ ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим контур из П-образного проводника и подвижной перемычки длиной l, находящийся в однородном магнитном поле.

Пусть в этом контуре источником ЭДС поддерживается постоянный ток I.



В результате взаимодействия с магнитным полем на перемычку будет действовать сила $\boldsymbol{F} = I\,[\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}]$. Под действием этой силы перемычка будет двигаться вправо.

При смещении перемычки на dh сила F совершит работу $\delta A = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{h} = I[\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}]d\boldsymbol{h} = I\boldsymbol{B}[d\boldsymbol{h}, \boldsymbol{l}] = I\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = Id\Phi$, где $d\Phi = \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}$ – магнитный поток через элементарную поверхность площадью $d\boldsymbol{S}$.

Магнитным потоком называется скалярная величина, равная скалярному произведению вектора магнитной индукции на площадь элементарной поверхности $d\boldsymbol{S}$, пронизываемой магнитным полем.

Из приведённых выше выкладок видно, что вектор элементарной поверхности $d\boldsymbol{S} = [d\boldsymbol{h}, \boldsymbol{l}]$ перпендикулярен поверхности dS и определяется по правилу правого винта для векторного произведения.

Размерность магнитного потока $[\Phi] = [B][dS] =$ Тл·м^2 = Вб (вебер).

Магнитный поток через конечную площадку S равен $\Phi = \int\limits_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}$.

Таким образом работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле, определяется выражением

$$\delta A = Id\,\Phi$$

и равна произведению силы тока в проводнике на приращение магнитного потока, вызванное перемещением проводника.

В данном случае $d\Phi$ есть поток вектора магнитной индукции через площадь, пройденную перемычкой в процессе её движения.

Теперь рассмотрим жёсткий замкнутый контур с током I**,** перемещающийся в магнитном поле.

Выделим бесконечно малый элемент контура dl. При его перемещении на расстояние dh магнитное поле совершает работу $\delta A' = Id\Phi'$, где $\delta A'$ – работа по перемещению элемента контура dl на расстояние dh, а $d\Phi'$ – поток вектора магнитной индукции через площадь, пройденную элементом контура dl.

Работа по перемещению всего контура на dh

$$\delta A = \int \delta A' = \int Id\Phi' = I\int d\Phi' = Id\Phi\,,$$

где $d\Phi$ – магнитный поток через площадь, пройденную всеми элементами контура dl

Работа по перемещению контура на конечное расстояние

$$A_{12} = \int\limits_1^2 \delta A = \int\limits_1^2 Id\Phi = I\int\limits_1^2 d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1)\,,$$

где Φ_2 и Φ_1 – значения магнитного потока через контур в начальном и конечном положениях контура.

Необходимо отметить, что последний результат имеет общий характер, он не зависит от того, как именно изменялось положение контура в пространстве.

3.10. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Теорема Гаусса для электростатического поля рассматривалась в разд. 1.6. Аналогичная теорема существует и для магнитного поля. Рассмотрим её.

В теореме Гаусса для магнитного поля рассматривается поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность.

Найти величину магнитного потока можно следующим образом.

Силовые линии магнитного поля всегда замкнуты.

Поэтому, в отличие от силовых линий электростатического поля, они не могут начинаться или заканчиваться внутри замкнутой поверхности.

Другими словами, количество силовых линий магнитного поля, входящих в замкнутый объём, всегда равно количеству линий, выходящих из него.

Но это означает, что **суммарный поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю**

$$\oint_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = 0 .$$

Это и есть теорема Гаусса для магнитного поля.

Теорема Гаусса для электростатического поля показывает, что источником электрического поля являются заряды: $\oint_S \boldsymbol{E} d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$.

Теорема Гаусса для магнитного поля показывает, что магнитных зарядов в природе не существует (это уже отмечено в разд. 3.5).

3.11. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

Рассмотрим магнитное поле, созданное бесконечным прямым проводником с током $\boldsymbol{I}$.

Как было установлено ранее, силовые линии такого тока – окружности с центром на проводнике, а индукция магнитного поля $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}$.

Вычислим для этого поля циркуляцию вектора магнитной индукции $\oint \boldsymbol{Bdl}$, т. е. интеграл от скалярного произведения вектора магнитной индукции на элемент контура ***dl***, взятый по некоторому замкнутому контуру.

Для этого прежде всего необходимо выбрать контур.

В данном случае удобнее всего в качестве контура выбрать окружность, совпадающую с сило*вой* линией магнитного поля.

*Для так*ого контура ***Bdl*** = *Bdl*, так как в любой точке ***B*** параллелен ***dl*** и косинус угла между этими векторами равен единице. Поэтому

$$\oint \boldsymbol{Bdl} = \oint Bdl = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{2I}{b}dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}\oint dl = \mu_0 I\ .$$

Таким образом, циркуляция вектора ***B*** оказалась равна произведению магнитной постоянной на ток, охваченный контуром интегрирования:

$$\oint \boldsymbol{Bdl} = \mu_0 I\ .$$

Можно показать, что полученный результат не связан с формой контура интегрирования и имеет общий характер.

Если магнитное поле создано несколькими токами, то индукция магнитного поля в любой точке может быть найдена на основе принципа суперпозиции $\boldsymbol{B} = \sum_i \boldsymbol{B}_i$, где $\boldsymbol{B}_i$ – индукция магнитного поля, созданного i-м проводником с током.

Циркуляция каждого из векторов $\boldsymbol{B}_i$ будет равна произведению силы *i*-го тока на магнитную постоянную $\oint_L \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{dl} = \mu_0 I_i$.

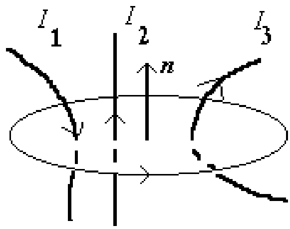
В свою очередь циркуляция вектора ***B*** по замкнутому контуру будет равна

$$\oint \boldsymbol{Bdl} = \oint \sum_i \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{dl} = \sum_i \oint \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{dl} = \sum_i \mu_0 I_i = \mu_o \sum_i I_i = \mu_0 I\ ,$$

т. е. **циркуляция вектора магнитной индукции по контуру, охватывающему несколько токов, равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охваченных этим контуром.**

Полученное выражение для циркуляции вектора магнитной индукции имеет общий характер и называется **законом полного тока***.

Знак тока в алгебраической сумме определяется простым правилом: ток, охватываемый контуром, положителен, если его направление совпадает с направлением положительной нормали к контуру (см. рисунок).



$I = -I_1 + I_2 + I_3$

Направление положительной нормали определяется правилом правого винта: если правый винт вращать по выбранному направлению обхода контура, то направление поступательного движения винта покажет направление положительной нормали $\boldsymbol{n}$.

Закон полного тока удобно использовать для расчёта магнитных полей, созданных токами, которым свойственна симметрия (см. следующий раздел).

3.11.1. Магнитное поле бесконечного соленоида

Соленоидом называется проводник, намотанный на цилиндрическую поверхность.

Если витки соленоида намотаны вплотную друг к другу, то соленоид удобно представлять в виде совокупности витков одинакового радиуса, расположенных параллельно друг другу вдоль оси соленоида. Центры витков расположены на оси, плоскости витков перпендикулярны оси. Токи во всех витках одинаковы.

Как показано в разд. 3.4, вектор магнитной индукции на оси витка параллелен ей. Следовательно, и суммарное поле всех витков на оси соленоида параллельно этой оси.

Поскольку соленоид симметричен относительно оси, проходящей через центры витков, постольку и созданное им магнитное поле должно быть симметричным относительно этой оси.

Следовательно, магнитное поле параллельно оси соленоида и в остальных точках, расположенных внутри соленоида.

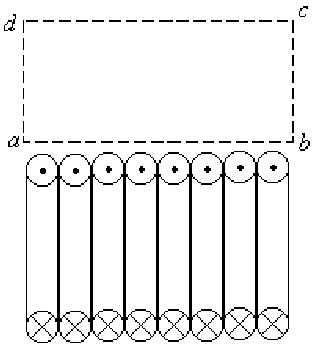
Магнитное поле вне бесконечного соленоида равно нулю. Это можно доказать следующим образом.

---

* Иногда этот закон называют **теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции.**

Вначале допустим, что магнитное поле вне соленоида всё же существует.

Тогда оно должно быть симметричным относительно оси соленоида. Это значит, что силовые линии магнитного поля вне соленоида должны быть параллельны его оси.



Для определения индукции магнитного поля вне соленоида воспользуемся законом полного тока.

Найдём циркуляцию вектора магнитной индукции по прямоугольному контуру, у которого сторона *ab* проходит вдоль витков соленоида вблизи от них, а сторона *cd* находится бесконечно далеко от витков.

Скалярное произведение $\boldsymbol{B}d\boldsymbol{l}$ во всех точках сторон *bc* и *da* равно нулю, так как угол между $\boldsymbol{B}$ и $d\boldsymbol{l}$ на этих сторонах прямой.

Магнитное поле бесконечно далеко от соленоида равно нулю, поэтому вклад участка *cd* в циркуляцию также равен нулю.

Прежде чем определять вклад участка *ab* , найдём алгебраическую сумму токов, охваченных контуром *abcd*.

Поскольку контур не охватывает ни один виток соленоида, сумма токов равна нулю.

Следовательно, и циркуляция вектора $\boldsymbol{B}$ по контуру *abcd* должна быть равна нулю.

Но это означает, что и на участке *ab* скалярное произведение равно нулю. Это возможно лишь в том случае, если индукция магнитного поля и вблизи от поверхности соленоида равна нулю.

Таким образом, магнитное поле вне бесконечно длинного соленоида действительно равно нулю.

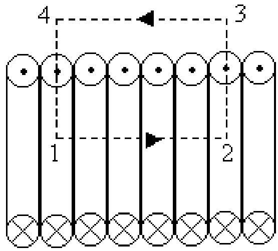
Теперь найдём индукцию магнитного поля внутри соленоида.

В качестве контура интегрирования выберем прямоугольник 1234, две стороны которого параллельны оси соленоида, охватывающий несколько витков соленоида.

Циркуляция $\boldsymbol{B}$ по этому контуру равна

$$\oint \boldsymbol{B}d\boldsymbol{l} = \int_1^2 \boldsymbol{B}_C d\boldsymbol{l} + \int_2^3 \boldsymbol{B}_C d\boldsymbol{l} + \int_3^4 \boldsymbol{B}_{вн} d\boldsymbol{l} + \int_4^1 \boldsymbol{B}_C d\boldsymbol{l}$$

На участках *2-3* и *4-1* индукция поля в соленоиде $\boldsymbol{B}_c$ перпендикулярна элементу контура dl, поэтому скалярное произведение $\boldsymbol{B}_c$ и $\boldsymbol{dl}$ равно нулю.



Интеграл на участке *3-4* также равен нулю, так как поле вне бесконечного соленоида равно нулю.

Следовательно,

$$\oint \boldsymbol{B}\boldsymbol{dl} = \int_1^2 \boldsymbol{B}_c\boldsymbol{dl} = \int_1^2 B_c dl = B_c l_{12},$$ где l_{12} – длина стороны *1-2* контура интегрирования.

При вычислении интеграла были учтены следующие соображения:

– внутри соленоида направление магнитной индукции и направление обхода контура совпадают, поэтому скалярное произведение $\boldsymbol{B}\boldsymbol{dl}$ равно произведению модулей этих векторов;

– модуль вектора магнитной индукции во всех точках участка контура *1-2* одинаков, поэтому $\boldsymbol{B}$ можно вынести за знак интеграла;

– интеграл $\int_{\mathbf{1}}^{2} dl = l_{12}$, поэтому циркуляция равняется произведению модуля магнитной индукции на длину участка *1-2*.

Ток, охваченный этим контуром, равен $nl_{12}I$, где n – количество витков на единице длины соленоида, I – ток в одном витке.

На основе закона полного тока циркуляция вектора магнитной индукции равна произведению μ_o на алгебраическую сумму токов, охваченных контуром,

$$Bl_{12} = \mu_o n l_{12} I;$$

сокращая длину участка *1-2*, получаем выражение для расчёта индукции магнитного поля внутри бесконечного соленоида:

$$B = \mu_o n I.$$

Обратите внимание на то, что величина B внутри соленоида не зависит от расстояния между точкой и осью соленоида. Это значит, что магнитное поле внутри бесконечного соленоида однородно.

3.11.2. Магнитное поле тороида

Тороидом называется соленоид, свёрнутый в кольцо.

Поскольку тороид симметричен относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости, в которой лежит тороид, то и магнитное поле должно быть симметрично относительно этой оси. Следовательно, силовые линии магнитного поля в тороиде также должны быть симметричны относительно той же самой оси.

В качестве контура интегрирования удобно выбрать окружность, совпадающую с какой-либо силовой линией магнитного поля.

В этом случае циркуляция вектора магнитной индукции $\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \oint B dl = B\oint dl = B \cdot 2\pi r$ (направления $\mathbf{B}$ и $d\mathbf{l}$ во всех точках контура совпадают, поэтому скалярное произведение $\mathbf{B}d\mathbf{l}$ равно произведению их модулей; магнитная индукция во всех точках контура одинакова, следовательно, её можно вынести за знак интеграла).

Ток, охваченный контуром, $I_\Sigma = NI$, где N – число витков тороида.

Тогда в соответствии с законом полного тока

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

и

$$B = \mu_0 NI \frac{1}{2\pi r}.$$

Обратите внимание: магнитная индукция поля внутри тороида зависит от расстояния между центром тороида и точкой внутри него. Величина B обратно пропорциональна расстоянию r.

Можно показать, что поле вне тороида равно нулю (примерно так же, как это было сделано в предыдущем разделе для поля вне соленоида).

3.12. ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДА

Рассмотрим произвольный замкнутый контур с током I. В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа индукция магнитного поля, созданного контуром, прямо пропорциональна силе тока в проводнике.

Магнитный поток, охваченный контуром, прямо пропорционален индукции магнитного поля внутри контура и его площади $\Phi = \int\limits_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S}$.

Если охваченная контуром площадь неизменна, то величина магнитного потока прямо пропорциональна $\boldsymbol{B}$ и, следовательно, силе тока в контуре I

$$\Phi = LI.$$

Коэффициент пропорциональности L называется коэффициентом индуктивности, или индуктивностью контура.

Индуктивность является размерным коэффициентом пропорциональности. В системе СИ размерность индуктивности $[L]$ = Гн (генри).

Найдём выражение для расчёта индуктивности соленоида.

Как показано в разд. 3.11.1, магнитная индукция поля внутри соленоида $B = \mu_o nI$.

Магнитный поток через один виток соленоида $\Phi = \mu_o nIS = \mu_o \frac{N}{l} IS$, где l длина соленоида, N – количество витков соленоида на длине l, S – площадь витка соленоида.

Магнитный поток через N витков соленоида равен $\mu_o \frac{N^2}{l} IS$.

Это означает, что для соленоида

$$LI = \mu_o \frac{N^2}{l} IS$$

и отсюда индуктивность соленоида

$$L = \mu_o \frac{N^2}{l} S = \mu_o n^2 lS = \mu_o n^2 V ,$$

где V – объём соленоида.

Таким образом, индуктивность соленоида без сердечника определяется плотностью витков и объёмом соленоида.

4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

Магнитное поле создаётся электрическим током.

Если один ток создаёт магнитное поле в вакууме, а второй, такой же – в веществе, то созданные ими магнитные поля будут разными. Причём в некоторых веществах магнитное поле будет слабее поля в вакууме, в других – сильнее.

По соотношению поля в веществе и в вакууме вещества делят на три класса: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

В данном разделе будут рассмотрены причины, по которым разные вещества намагничиваются по-разному.

4.1. НАМАГНИЧИВАНИЕ МАГНЕТИКА

Всякое вещество является магнетиком. Это значит, что всякое вещество способно намагничиваться, т. е. под действием внешнего магнитного поля в нём возникает дополнительное, собственное магнитное поле. Другими словами – индукция магнитного поля внутри магнетика $\boldsymbol{B}$ складывается из индукции внешнего поля $\boldsymbol{B}_{о}$ и индукции собственного поля $\boldsymbol{B}'$:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{о} + \boldsymbol{B}'.$$

Механизм намагничивания вещества был раскрыт французским учёным Андре Мари Ампером, который предположил, что во всех молекулах вещества циркулируют круговые токи. Каждый такой ток создаёт магнитное поле. Но, поскольку в отсутствие магнитного поля молекулярные токи ориентируются хаотически, суммарное магнитное поле всех этих токов равно нулю.

Появление внешнего магнитного поля вызывает упорядочение ориентации молекулярных круговых токов, в результате чего суммарное магнитное поле молекулярных токов становится отличным от нуля, а магнетик – намагниченным.

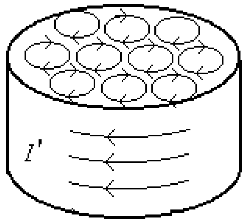
Намагничивание магнетика количественно характеризуют намагниченностью $\boldsymbol{J}$, которая определяется выражением

$$\boldsymbol{J} = \frac{\sum\limits_{\Delta V} \boldsymbol{p}_{m_i}}{\Delta V},$$

где $\sum\limits_{\Delta V} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{m}_i}$ – суммарный магнитный момент всех молекул, находящихся в элементарном объёме ΔV в окрестности интересующей нас точки.

Размерность вектора намагниченности $[J] = [p_m]/[V] = A \cdot м^2/м^3 = А/м$.

Итак, намагничивание вещества есть результат упорядочивания ориентации молекулярных токов внешним магнитным полем. Условно это можно представить так, как показано на рисунке.



Как видно из рисунка, токи внутри объёма магнетика компенсируют друг друга.

Токи же, выходящие на боковую поверхность, компенсироваться не будут.

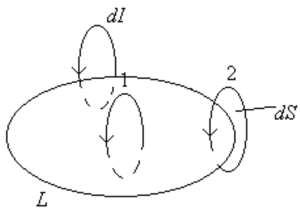
Поэтому намагничение вещества можно трактовать как результат появления на боковой поверхности магнетика макроскопического тока намагничивания I'.

4.2. НАПРЯЖЁННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА H

Пусть имеется магнетик, находящийся во внешнем магнитном поле.

Вычислим циркуляцию вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ по некоторому контуру L.

В предыдущем разделе отмечено, что при наличии магнетиков магнитное поле в веществе создаётся не только внешними токами проводимости, но и молекулярными токами I'. Поэтому циркуляция вектора магнитной индукции в магнетике будет равна



$$\oint_L \boldsymbol{B}d\boldsymbol{l} = \mu_0 \left(I + I' \right).$$

Учёт молекулярных токов связан с рядом трудностей. Но это затруднение можно устранить.

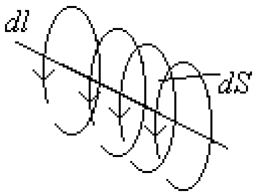
Найдём алгебраическую сумму молекулярных токов, охваченных замкнутым контуром L.

Некоторые токи будут дважды пронизывать поверхность, охваченную контуром (см. ток 1 на рисунке). Вклад таких токов в алгебраическую сумму равен нулю.

Поэтому в алгебраическую сумму войдут только те токи, которые «нанизаны» на контур (ток 2 на рисунке).

Выделим элемент контура длиной dl.

Молекулярные токи, «нанизанные» на этот элемент контура, создадут элементарный макроскопический ток намагничивания dI' (он равен алгебраической сумме молекулярных токов на элементе контура dl).



Магнитный момент этого тока равен $dI'dS$ (dS – площадь, охваченная молекулярным током).

С другой стороны, магнитный момент можно выразить через намагниченность объёма, занятого эти-ми молекулярными токами, $JdV = JdldS$.

Поэтому можно записать $dI'dS = JdldS$.

Отсюда следует, что $dI' = Jdl$, т. е. элементарный макроскопический ток намагничивания равен произведению намагниченности на элемент контура dl.

Интегрируя полученное выражение по контуру L, получаем

$$\oint_L Jdl = \oint dI' = I'.$$

Более строгий анализ позволяет получить это выражение в векторной форме

$$\oint_L \boldsymbol{J}d\boldsymbol{l} = I',$$

т. е. макроскопический ток намагничивания равен циркуляции вектора намагниченности.

Теперь можно записать

$$\oint_L \boldsymbol{B}d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \boldsymbol{J}d\boldsymbol{l};$$

$$\oint_L \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}d\boldsymbol{l} - \oint_L \boldsymbol{J}d\boldsymbol{l} = I;$$

$$\oint_L \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_o} - \boldsymbol{J}\right)d\boldsymbol{l} = I.$$

Циркуляция величины $\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{J}$ не зависит от молекулярных токов. Поэтому её удобно использовать для характеристики магнитного поля в веществе. Эту величину обозначают $\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{J}$ и называют **напряжённостью магнитного поля *H***.

Как и вектор электрического смещения ***D*** в электростатике, ***H*** является вспомогательной характеристикой поля (магнитного).

Размерность вектора [*H*] = [*J*] = А/м. Обратите внимание: размерность напряжённости магнитного поля совпадает с размерностью намагниченности.

Очевидно, что вещество намагничивается тем сильнее, чем сильнее внешнее магнитное поле. В линейных средах намагниченность ***J*** прямо пропорциональна напряжённости внешнего магнитного поля:

$$\boldsymbol{J} = \chi \boldsymbol{H},$$

где χ (хи) – магнитная восприимчивость магнетика.

Тогда

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \chi \boldsymbol{H},$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 (1 + \chi)} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 \mu},$$

где $\mu = (1 + \chi)$ – магнитная проницаемость вещества. Магнитная проницаемость показывает, во сколько раз индукция магнитного поля в веществе отличается от индукции магнитного поля в вакууме.

Последнее соотношение можно переписать в такой форме:

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu \boldsymbol{H}.$$

Возвращаясь к расчету циркуляции, можем отметить:

$$\oint_L \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{J} \right) d\boldsymbol{l} = I,$$

или

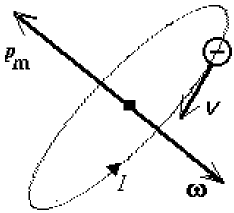
$$\oint_L \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = I,$$

т. е. циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости*, охваченных контуром. Это и есть теорема о циркуляции вектора ***H***.

Эта теорема позволяет осуществлять расчёт магнитного поля в веществе, учитывая только токи проводимости, создающие магнитное поле.

4.3. МАГНИТОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

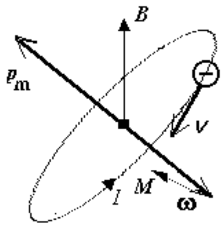
В атоме любого вещества электроны движутся вокруг ядра. Для объяснения магнитных явлений можно считать, что электрон вращается по круговой орбите. Угловая скорость электрона направлена так, как показано на рисунке (направление можно определить с помощью правила правого винта).



Движение электрона упорядочено. Поэтому орбитальное движение электрона можно трактовать как электрический ток.

Электрон движется по круговой орбите, поэтому созданный ток является круговым. Поскольку электрон имеет отрицательный заряд, направление созданного им тока противоположно направлению вращения электрона.

Этот круговой ток обладает магнитным моментом $p_m = IS$, направление которого показано на рисунке.



Если вещество находится в магнитном поле, на электрон действует вращательный момент $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{p}_m, \mathbf{B}]$ (см. разд. 3.6).

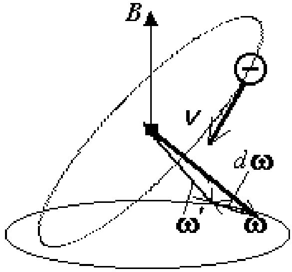
Направление вектора момента силы определяется по правилу правого винта для векторного произведения. В данном случае вектор $\boldsymbol{M}$ направлен так, как показано на рисунке справа.

---

*На самом деле циркуляция вектора $\boldsymbol{H}$ зависит не только от тока проводимости, но и от конвекционного тока (пример – движение заряженных капель дождя) и тока смещения (будет рассмотрен позже)
.

В соответствии с основным законом динамики вращательного движения электрон получает угловое ускорение, равное $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{\boldsymbol{M}}{J}$ (здесь J – момент инерции электрона). Направление углового ускорения совпадает с направлением момента силы.

За время dt электрон получит приращение угловой скорости, равное $d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon} dt$. Направление вектора $d\omega$ совпадает с направлением вектора углового ускорения.



Следовательно, через dt секунд угловая скорость изменится. Она станет равна ω' (см. рисунок).

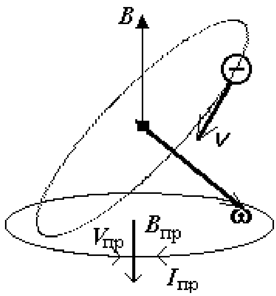
Причём, поскольку вектор $d\omega$ перпендикулярен вектору угловой скорости ω, изменится только направление угловой скорости.

В последующие моменты времени рассмотренный эффект будет повторяться – вектор угловой скорости будет поворачиваться вокруг направления внешнего магнитного поля, не изменяясь при этом по модулю.

Конец вектора угловой скорости будет описывать окружность, которая изображена на рисунке.

Поскольку вектор угловой скорости всегда направлен вдоль оси вращения, ось вращения электрона также будет вращаться вокруг направления внешнего магнитного поля.

Такое движение вращающегося тела называют **прецессией.**



Итак, внешнее магнитное поле вызывает появление дополнительного упорядоченного движения электрона – прецессии.

Дополнительное вращение электрона означает появление дополнительного тока $I_{пр}$. Направление этого тока противоположно скорости дополнительного вращения $\boldsymbol{v}_{пр}$.

Дополнительный ток $I_{пр}$ создаёт дополнительное магнитное поле $B_{пр}$.

В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа это магнитное поле направлено против внешнего магнитного поля.

Таким образом, при внесении любого вещества в магнитное поле возникает прецессия орбит электронов вокруг направления внешнего магнитного поля. Прецессия, в свою очередь, порождает магнитное поле, всегда направленное против внешнего. Поэтому в любом веществе из-за прецессии электронных орбит магнитное поле становится слабее внешнего магнитного поля.

4.3.1. Диамагнетики

Магнитный момент атома складывается из орбитальных и спиновых* магнитных моментов электронов. Если их сумма равна нулю, то атом не обладает собственным магнитным моментом. Вещества, состоящие из таких атомов, называются диамагнетиками.

При внесении такого вещества в магнитное поле в его атомах возникает прецессия электронных орбит, которая вызывает появление магнитного поля $\boldsymbol{B}'$, направленного против внешнего поля.

Таким образом, диамагнетики – это вещества, в которых внешнее магнитное поле ослабляется.

Следует отметить, что внешнее магнитное поле в диамагнетиках ослабляется очень незначительно. Магнитная проницаемость типичных диамагнетиков имеет величину $\mu \approx 0{,}99$ (медь, стекло, висмут).

Диамагнетикам свойственна важная особенность – они выталкиваются из магнитного поля.

4.3.2. Парамагнетики

К парамагнетикам относятся вещества, атомы которых обладают собственным магнитным моментом.

При внесении такого вещества в магнитное поле его атомы ведут себя подобно магнитным стрелкам – они стремятся повернуться так, чтобы направление их магнитных моментов совпало с внешним магнитным полем.

В результате внешнее магнитное поле и поле, созданное всеми атомами, складываются. Поэтому магнитное поле внутри парамагнетика становится сильнее.

---

* Электрон имеет собственный магнитный момент, который называется спиновым магнитным моментом.

Но кроме ориентации атомов по внешнему магнитному полю возникает и прецессия электронных орбит, которая создаёт магнитное поле, противоположное внешнему. Этот эффект вызывает ослабление магнитного поля в парамагнетике.

Во всех парамагнетиках собственное магнитное поле атома немного сильнее поля, порождённого прецессией электронных орбит. Поэтому магнитное поле в парамагнетике сильнее внешнего, но весьма незначительно.

Таким образом, парамагнетиками являются вещества, в которых внешнее магнитное поле немного усиливается.

Магнитная проницаемость парамагнетиков превышает единицу на 10^{-4} и менее. К парамагнетикам относятся такие вещества, как воздух, платина, натрий, литий.

В отличие от диамагнетиков, парамагнетики втягиваются в область с наиболее сильным магнитным полем.

4.4. ФЕРРОМАГНЕТИКИ. ПРИРОДА ФЕРРОМАГНЕТИЗМА

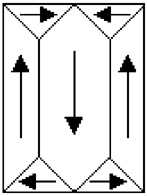
К ферромагнетикам относят вещества, которые способны самопроизвольно намагничиваться. Внешнее магнитное поле в таких веществах может усиливаться в тысячи, десятки тысяч раз.

Типичными ферромагнетиками являются железо, кобальт, никель. К ферромагнетиками также относятся некоторые сплавы.

Особенностью атомов всех ферромагнетиков является наличие у них внутренних незавершённых электронных оболочек. Например, у железа в $3d$ оболочке могут разместиться ещё несколько электронов, но у него имеется два электрона в следующей, $4s$ оболочке.

Электроны внутренних незавершённых оболочек участвуют в так называемом обменном взаимодействии, вследствие чего они самопроизвольно выстраивают параллельно друг другу свои спиновые магнитные моменты. В таком состоянии суммарная энергия взаимодействующих атомов минимальна и поэтому оно является устойчивым.

Следует отметить, что такое самопроизвольное (спонтанное) намагничивание происходит в небольших по размеру* областях, которые называют доменами. Магнитные моменты разных доменов ориентированы так, что суммарный магнитный момент образца ферромагнетика равен нулю (см. рисунок). В результате магнитное поле вне ферромагнетика отсутствует.



Если ферромагнетик поместить во внешнее магнитное поле, то он намагнитится. Магнитные моменты доменов изменят свою ориентацию и их суммарное магнитное поле уже не будет равно нулю.

Важной особенностью ферромагнетика является то, что после выключения внешнего магнитного поля он сохранит намагниченность, т. е. станет постоянным магнитом.

Намагниченность ферромагнетика исчезнет, если его нагреть до температуры Кюри θ. Это температура, при которой ферромагнетик теряет свои магнитные свойства и превращается в парамагнетик.

Металл	θ, К
Fe	1043
Co	1403
Ni	631
Gd	289
Fe_3Al	743
Ni_3Mn	773

Если нагретый ферромагнетик охладить, то доменная структура восстановится, но имевшаяся до нагрева намагниченность исчезнет.

4.5. НАМАГНИЧИВАНИЕ ФЕРРОМАГНЕТИКА. ЭТАПЫ НАМАГНИЧИВАНИЯ

Намагничивание ферромагнетиков представляет собой процесс, состоящий из нескольких этапов.

На первом этапе при увеличении напряжённости внешнего магнитного поля увеличиваются размеры тех доменов, у которых собственный магнитный момент образует с внешним полем острый угол. При этом уменьшается объём тех доменов, у которых этот угол тупой.

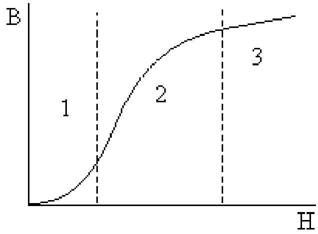
---

* Обычно размеры домена составляют $10^{-4}…10^{-5}$ м.

К концу первого этапа домены, у которых упомянутый угол острый, полностью поглощают те, у которых угол между собственным и внешним магнитным полем тупой.

Этот этап намагничивания называют **этапом смещения границ.**

На втором этапе дальнейшее увеличение напряжённости внешнего магнитного поля вызывает поворот магнитных моментов доменов в сторону внеш-него магнитного поля.



Второй этап намагничивания называют **этапом вращения.**

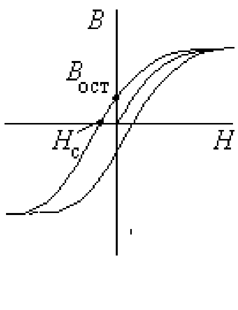
К концу второго этапа маг-нитные моменты всех доменов направлены по внешнему магнит-ному полю. По окончании этого этапа наступает третий этап намагничивания – **этап насыщения.**

В ходе первого и второго этапов намагничивания поле внутри ферромагнетика растёт за счёт увеличения как внешнего магнитного поля, так и магнитного поля, созданного доменами.

На третьем этапе увеличение магнитного поля в ферромагнетике происходит только за счёт роста внешнего магнитного поля. Суммарное магнитное поле доменов не изменяется.

4.6. ЯВЛЕНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА

Если уменьшать магнитное поле, которое вызвало намагничивание ферромагнетика, то окажется, что зависимость индукции магнитного поля в ферромагнетике от напряжённости внешнего магнитного поля не совпадает с начальной кривой намагничивания.



При уменьшении напряжённости внешнего магнитного поля до нуля, магнитное поле в ферромагнетике не уменьшится до нуля. Индукция магнитного поля в ферромагнетике окажется равной $B_{ост}$ – остаточной индукции поля в ферромагнетике. Другими словами – образец ферромагнетика после выключения внешнего магнитного поля останется нагниченным.

Для того, чтобы уменьшить индукцию магнитного поля в ферромагнетике до нуля, необходимо изменить направление внешнего магнитного поля на противоположное и начать постепенное увеличение его напряжённости.

При некоторой напряжённости H_c индукция поля в ферромагнетике уменьшится до нуля. Эту напряжённость принято называть **коэрцитивной силой**.

Дальнейшее увеличение напряжённости вызывает намагничивание ферромагнетика. Направление намагничивания противоположно первоначальному.

Если после намагничивания до насыщения вновь уменьшать напряжённость внешнего магнитного поля, то процесс пойдёт так, как показано на рисунке.

График зависимости $B(H)$ замкнётся, образовав так называемую **петлю гистерезиса**. Само рассматриваемое явление называется **явлением гистерезиса.**

Явление гистерезиса заключается в том, что значение B при данном H зависит от того, какое значение H имела ранее. Например, если ферромагнетик не намагничен, то при $H = 0$ $B = 0$.

Если ферромагнетик ранее находился в магнитном поле с $H > 0$, то при $H = 0$ $B = B_{\text{ост}}$.

Если же ранее напряжённость была отрицательной, то при $H = 0$ $B =- B_{\text{ост}}$.

Ферромагнетики делят на две группы. Основанием для классификации является коэрцитивная сила.

Коэрцитивная сила показывает, насколько трудно размагнитить ферромагнетик. Если коэрцитивная сила велика, то ферромагнетик размагнитить трудно. Такие ферромагнетики называют **магнитожёсткими**. Из жёстких ферромагнетиков изготавливают постоянные магниты.

Если коэрцитивная сила мала, ферромагнетик можно размагнитить, почти не затрачивая на это энергию. Такие ферромагнетики называют **магнитомягкими.** Из них изготавливают сердечники трансформаторов.

4.7. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ *B* И *H*

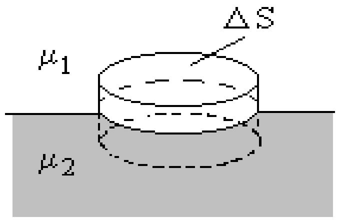
Рассмотрим магнитное поле вблизи границы раздела двух сред с различной магнитной проницаемостью μ_1 и μ_2.

Допустим, что магнитное поле не перпендикулярно границе раздела двух сред.

Разложим векторы B и H на две компоненты, из которых одна параллельна границе раздела двух сред, а вторая – перпендикулярна. Перпендикулярную компоненту назовём нормальной, а параллельную – тангенциальной.

Начнём с рассмотрения нормальной компоненты вектора магнитной индукции B_n. Воспользуемся для этого теоремой Гаусса для магнитного поля (см. разд. 8,8).

Выделим вблизи границы раздела двух сред цилиндрический объём бесконечно малой высоты с площадью основания ΔS. Верхнее основание расположено в среде с магнитной проницаемостью μ_1, а нижнее – в среде с μ_2.



Согласно теореме Гаусса, магнитный поток через замкнутую поверх-ность равен нулю.

В данном случае полный магнитный поток через выбранную поверхность равен сумме потоков B_n через верхнее и нижнее основания и через боковую поверхность цилиндра.

Поскольку высота боковой поверхности бесконечно мала, магнитный поток через неё бесконечно мал. Следовательно, полный магнитный поток равен сумме потоков через верхнее и нижнее основания.

Полный магнитный поток нормальной компоненты вектора магнитной индукции равен нулю, следовательно, потоки через верхнее и нижнее основания равны между собой

$$B_{n1}\Delta S = B_{n2}\Delta S.$$

Это означает, что нормальная компонента вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред не изменяется

$$B_{n1} = B_{n2}.$$

По определению напряжённости $B = \mu_0\mu H$, поэтому

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

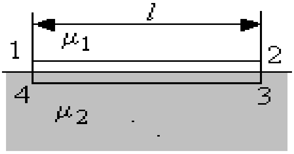
и

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Таким образом, нормальная компонента вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела двух сред изменяется.

Значение нормальной составляющей напряжённости магнитного поля в средах с разной магнитной проницаемостью различно.

Перейдём к рассмотрению тангенциальной компоненты векторов $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$. Воспользуемся для этого теоремой о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля (см. разд. 4.2.).



Выделим вблизи границы раздела двух сред замкнутый контур *1-2-3-4* прямоугольной формы (см. рисунок).

Длина горизонтальной стороны прямоугольника равна l, а высота прямоугольника бесконечно мала.

Если на границе раздела двух сред нет тока, то $\oint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l} = 0$, т. е. циркуляция вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела двух сред равна нулю.

Компоненты циркуляции по сторонам прямоугольника, перпендикулярным границе разделы пренебрежимо малы, так как высота прямоугольника бесконечно мала.

Компоненты циркуляции по параллельным сторонам соответственно равны $\int_1^2 \boldsymbol{H}_1 d\boldsymbol{l}$ и $\int_3^4 \boldsymbol{H}_2 d\boldsymbol{l}$.

Если длина участков *1-2* и *3-4* настолько мала, что напряжённости можно считать постоянными, то $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ можно вынести за знак интеграла. Тогда в результате интегрирования получим векторы $\boldsymbol{l}_{12}$ и $\boldsymbol{l}_{34}$, направление которых определяется направлением обхода контура.

Таким образом, циркуляция вектора напряжённости на границе раздела двух сред оказывается равной $\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{l}_{12} + \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{l}_{34} = 0$.

Учитывая, что скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними, получаем

$$H_{\tau 1} l - H_{\tau 2} l = 0$$

(минус обусловлен тем, что векторы $\boldsymbol{l}_{12}$ и $\boldsymbol{l}_{34}$ противоположны по направлению).

Следовательно, тангенциальная составляющая вектора напряжённости магнитного поля в средах с разной магнитной проницаемостью одинакова:

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}.$$

Тангенциальная составляющая вектора магнитной индукции при переходе из одной среды в другую изменяется

$$\frac{\boldsymbol{B}_{\tau 1}}{\mu_1} = \frac{\boldsymbol{B}_{\tau 2}}{\mu_2}$$

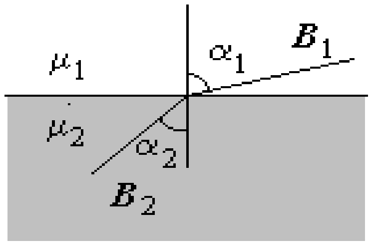
и

$$\frac{\boldsymbol{B}_{\tau 1}}{\boldsymbol{B}_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Полученные результаты означают, что силовые линии магнитного поля на границе раздела двух магнетиков преломляются (т. е. изменяют свой наклон)

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

На рисунке показано, что в среде с большей магнитной проницаемостью ($\mu_1 > \mu_2$) силовые линии отклоняются от нормали к границе раздела двух сред (это значит, что их густота увеличивается).



Из полученных результатов также следует, что если в образце магнетика сделать узкую щель, параллельную силовым линиям магнитного поля в веществе, то напряжённость магнитного поля в щели будет равна напряжённости магнитного поля внутри магнетика. Это вытекает из того, что тангенциальная составляющая вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела двух сред не изменяется.

Поскольку нормальная составляющая вектора магнитной индукции не изменяется на границе раздела, постольку значение индукции магнитного поля внутри магнетика и в узкой щели, перпендикулярной направлению магнитного поля, одинакова.

Эти особенности в поведении тангенциальной составляющей напряжённости и нормальной составляющей индукции магнитного поля лежат в основе методов практических измерений напряжённости и индукции магнитного поля внутри магнетиков.

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

5.1. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

В разделе 3.1. показано, что электрический ток порождает магнитное поле. Следовательно, магнитное поле и электрический ток взаимосвязаны.

Но взаимосвязь магнитного поля и электрического тока должна быть симметричной, поэтому магнитное поле, в свою очередь, должно порождать электрический ток в проводниках. Это утверждал в 1823 г. в своём дневнике английский учёный-самоучка Майкл Фарадей.

После многолетних попыток, в 1831 г., ему удалось получить электрический ток, порождённый магнитным полем.

Успешный эксперимент Фарадея заключался в следующем.

На деревянный цилиндрический каркас он намотал ≈30 м медной проволоки.

Между витками первой катушки была намотана вторая такая же, причём витки катушек были разделены шнуром, не дававшим им соприкасаться.

К первой катушке была подключена мощная гальваническая батарея, а к второй – гальванометр (прибор для измерения электрического тока).

Фарадей обнаружил, что при включении и выключении тока в первой катушке во второй катушке возникал кратковременный ток.

Это показало, что электрический ток порождается изменяющимся магнитным полем.

Дальнейшие эксперименты показали, что ток в замкнутом контуре можно получать различными способами (например, приближая к соленоиду другой соленоид с током или постоянный магнит).

Количественный анализ результатов многочисленных экспериментов позволил сформулировать **закон Фарадея,** в соответствии с которым можно рассчитать величину ЭДС, возникающей в замкнутом контуре,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где ε_i – ЭДС, возникающая в замкнутом контуре при изменении магнитного потока, охваченного замкнутым контуром; $d\Phi$ – приращение магнитного потока, проходящего через замкнутый контур.

Явление возникновения электродвижущей силы за счёт изменения магнитного потока называется **электромагнитной индукцией**. ЭДС ε_i, возникающая за счёт электромагнитной индукции, называется **индукционной ЭДС**. В свою очередь ток, возбуждаемый индукционной ЭДС в замкнутом контуре, называется **индукционным током**.

Индукционный ток, как и любой другой ток, создаёт магнитное поле. Это поле называют **индуцированным магнитным полем.**

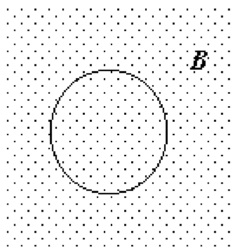
Знак « – » в законе Фарадея отображает **правило Ленца:** индукционный ток в контуре всегда направлен так, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему этот ток.

Другими словами – если магнитный поток, охваченный контуром, увеличивается, то индуцированное магнитное поле направлено против внешнего магнитного поля.

Если же магнитный поток уменьшается, то индуцированное магнитное поле будет совпадать по направлению с внешним полем.

Если известно направление индуцированного магнитного поля, то можно определить направление индукционного тока в контуре. Это можно сделать с помощью правила правого винта: если вращать правый винт так, чтобы направление его поступательного движения совпадало с направлением индуцированного магнитного поля, то направление вращения винта совпадает с направлением индукционного тока в контуре.

Рассмотрим пример.



Пусть в однородном магнитном поле находится контур. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости контура и направлен вверх (см. рисунок).

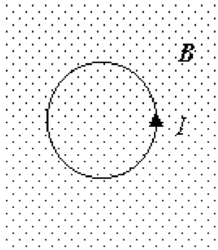
Пусть внешнее магнитное поле с течением времени уменьшается.

Уменьшение модуля вектора магнитной индукции вызывает уменьшение магнитного потока, охваченного контуром.

Следовательно, индуцированное магнитное поле должно совпадать по направлению с внешним магнитным полем.

Поставим правый винт параллельно силовым линиям внешнего магнитного поля.

Поскольку индуцированное магнитное поле должно совпадать по направлению с внешним, будем вращать правый винт так, чтобы он двигался по направлению силовых линий внешнего магнитного поля. В данном случае его необходимо вращать против часовой стрелки.



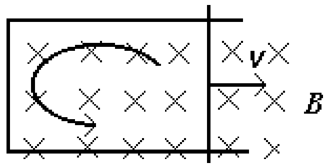
Таким образом, в рассмотренном случае индукционный ток направлен против часовой стрелки.

5.2. ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Рассмотрим П-образный проводник со скользящей по нему с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ перемычкой.

Пусть эта система находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости контура.

Свободные электроны, имеющиеся в перемычке, движутся вместе с ней в магнитном поле. Следовательно, на них действует сила Лоренца $F_л$ = e[$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$]. Поэтому электроны в движущейся перемычке начнут под действием силы Лоренца упорядоченное движение, т. е. в контуре возникнет электрический ток. Это и есть индук-ционный ток, возникший в результате движения проводника в магнитном поле или, другими словами, в результате изменения магнитного потока, охваченного контуром.



Индукционный ток вызывается индукционной ЭДС.

Величину ЭДС индукции можно рассчитать с помощью следующего выражения:

$$\varepsilon_i = \int \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} .$$

Этот интеграл нужно брать по той части контура, в которой действует сторонняя (т. е. не кулоновская) сила. В данном случае это – скользящая перемычка длиной l. Именно в ней существует поле сторонних сил, напряжённость которого мы обозначили как E*.

В соответствии с правилом правого винта для векторного произведения сила Лоренца в перемычке направлена вниз. Поэтому и электроны в ней движутся вниз. Следовательно, ток направлен “вверх”◦. Точно так же направлена и $\boldsymbol{E}$*.

Напряжённость E*можно вычислить. Определим её так же, как в своё время была определена напряжённость кулоновского поля (см. разд. 1.3), т. е. $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{F}/q$. Но в данном случае нужна не кулоновская сила, а сила Лоренца:

$$\boldsymbol{E}^* = \frac{\boldsymbol{F}_л}{q} = \frac{q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]}{q} = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}].$$

Тогда электродвижущая сила

$$\varepsilon_i = \int_1^2 [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}] d\boldsymbol{l},$$

где $d\boldsymbol{l}$ – элементарный вектор, направленный по напряжённости поля сторонних сил.

Учитывая, что в данном случае $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$ постоянны,

$$\varepsilon_i = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}] \int_1^2 d\boldsymbol{l} = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}] \boldsymbol{l}_{12}.$$

Осуществляя циклическую перестановку векторов, получим

$$\varepsilon_i = -\boldsymbol{B}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{l}_{12}] = -\boldsymbol{B}\left[\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \boldsymbol{l}_{12}\right] = -\boldsymbol{B}[d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{l}_{12}]\frac{1}{dt} = -\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}\frac{1}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким образом, и в данном случае

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

т. е. действительно, в контуре возникает ЭДС, зависящая от скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур.

◦ За направление тока принято считать направление движения положительных зарядов, поэтому электроны, заряд которых отрицателен, движутся против направления тока.

Причиной возникновения ЭДС является сила Лоренца, действующая на свободные заряды в элементах контура, движущихся в магнитном поле.

Несколько иная картина в том случае, когда ЭДС возникает в неподвижном контуре, находящемся в изменяющемся магнитном поле. Здесь уже сила Лоренца не действует – проводник не перемещается в магнитном поле. Поэтому и причина возникновения ЭДС здесь другая.

Анализируя эту ситуацию, Максвелл предположил (а впоследствии была установлена правильность гипотезы), что любое изменяющееся магнитное поле вызывает появление электрического поля.

Таким образом, в контуре, находящемся в изменяющемся магнитном поле, индуцируется электрическое поле, которое и вызывает появление электрического тока. ЭДС индукции и в этом случае

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Индукционное электрическое поле обладает существенными особенностями.

Во-первых, сейчас нельзя выделить часть контура, в которой локализован источник ЭДС. Электрическое поле порождается во всех элементах контура. Поэтому интеграл от $\boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}$ следует брать по замкнутому контуру:

$$\varepsilon_i = \oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}.$$

Во-вторых, поскольку ЭДС отлична от нуля,

$$\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} \neq 0.$$

Это означает, что индукционное электрическое поле отлично от электростатического, в котором $\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = 0$ (см. разд. 1.9).

В-третьих, поскольку $\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} \neq 0$, постольку силовые линии этого электрического поля **замкнутые**. Такое электрическое поле называют вихревым.

Именно это поле вызывает появление электрического тока в неподвижном проводнике.

5.3. ЯВЛЕНИЕ САМОИНДУКЦИИ

Любой контур с электрическим током порождает магнитное поле.

Если ток в контуре изменяется во времени, созданное им магнитное поле тоже будет изменяющимся.

В любом контуре, находящемся в переменном магнитном поле, возникает ЭДС индукции $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.

Отсюда следует, что в контуре с изменяющимся электрическим током должна возникать ЭДС, индуцированная магнитным полем, которое создано этим же контуром.

Поскольку эту ЭДС порождает сам контур, её называют **ЭДС самоиндукции**. Явление возникновения ЭДС самоиндукции называют **явлением самоиндукции**.

Определим величину ЭДС самоиндукции.

Магнитный поток *Φ*, охваченный контуром с током *I*, естественно, зависит от силы тока ***I*,** поскольку этот ток *I* и создал магнитный поток *Φ*.

Величина магнитного потока *Φ* прямо пропорциональна току *I*

$$\Phi = LI,$$

где *L* – индуктивность контура.

Магнитный поток, порождённый контуром с током *I*, зависит от ряда факторов: во-первых, – от силы тока *I*; *в*о-вторых – от формы контура (поскольку величины ***B*** и ***S*** связаны с формой контура); в-третьих, – от среды, в которой находится контур, т. е. от магнитной проницаемости среды μ.

Это означает, что индуктивность контура *L* зависит от двух факторов – от формы контура и от магнитной проницаемости среды, окружающей контур.

Если форма и магнитная проницаемость не изменяются, индуктивность контура постоянна.

На основе закона Фарадея для ЭДС самоиндукции мы можем записать

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right).$$

Знак « – » в этом выражении показывает, что направление тока самоиндукции в контуре подчиняется правилу Ленца: если ток в контуре уменьшается, то ток самоиндукции направлен в ту же сторону (т. е. препятствует уменьшению тока), если же ток в контуре растёт, ток самоиндукции направлен против него.

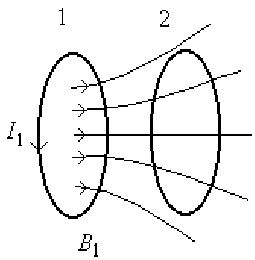
Второй член в этом выражении ($I\frac{dL}{dt}$) отличен от нуля тогда, когда L зависит от времени. Такая зависимость имеет место в двух случаях: когда с течением времени изменяется форма контура; когда вблизи контура имеются ферромагнетики, у которых μ зависит от H, а в изменяющихся магнитных полях это означает зависимость μ от времени.

Если же форма контура неизменна и μ не зависит от H, то

$$\varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt}.$$

Пример вычисления индуктивности приведён в разд. 3.12.

5.4. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ



Рассмотрим два близко расположенных контура.

Ток I_1, текущий в первом контуре, создаёт магнитное поле, пронизывающее и второй контур.

Магнитный поток через второй контур пропорционален создавшему его току

$$\Psi_2 = L_{21}I_1.$$

Если ток I_1 изменится, то во втором контуре возникнет ЭДС индукции

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}.$$

Если во втором контуре течёт изменяющийся ток I_2, то ЭДС возникает в первом

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}.$$

Коэффициенты L_{12} и L_{21} называют взаимной индуктивностью контуров. Если форма контуров и μ не изменяются, то $L_{12} = L_{21}$.

Возникновение ЭДС в соседнем контуре называют взаимной индукцией. Контуры *1* и *2* в этом случае называют связанными.

Рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на тороидальный ферромагнитный сердечник. Используем для этого теорему о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля.

В качестве контура интегрирования выберем окружность, центр которой совпадает с центром тороидального сердечника.

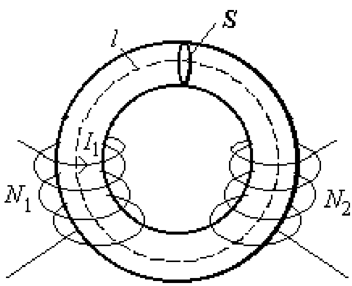
В соответствии с теоремой о циркуляции вектора H

$$Hl = N_1 \cdot I_1 \quad \text{и} \quad H = \frac{N_1}{l} I_1;$$

здесь l – длина контура интегрирования.

Магнитный поток через один виток

$$\Phi = B \cdot S = \mu_0 \mu H S = \mu_0 \mu \frac{N_1}{l} I_1 S .$$



Магнитный поток через все витки второго соленоида

$$\Psi_2 = N_2 \Phi = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} I_1 S .$$

Отсюда взаимная индуктивность второй катушки

$$L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S .$$

Такое же выражение можно получить для L_{12}

$$L_{12} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S .$$

Обратите внимание на две важные детали.

Если общий сердечник двух соленоидов ферромагнитный, то его магнитная проницаемость зависит от напряжённости магнитного поля.

Во-первых, это означает, что взаимная индуктивность двух соленоидов при разных токах различна.

Во-вторых, если количество витков в катушках различно, то одинаковые токи в первой и второй катушках создают поля разной напряжённости. Поэтому магнитная проницаемость сердечника будет разной и при $I_1 = I_2$ взаимные индуктивности L_{12} и L_{21} не будут равны между собой.

5.5. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Как уже отмечалось в разд. 5.1, изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

Максвелл предположил, что должно существовать и обратное явление – изменение электрического поля должно порождать магнитное поле.

Поэтому он поставил перед собой задачу – доказать, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле и объяснить механизм этого явления.

Рассмотрим решение этой задачи (проведённый далее анализ существенно упрощен, но полученные выводы будут правильными).

Пусть имеется конденсатор, который заряжается от источника ЭДС.

Пока происходит заряд, в проводниках, соединяющих обкладки конденсатора с источником ЭДС, идёт ток проводимости. Кроме этого, в процессе зарядки изменяется заряд на обкладках конденсатора и растёт напряжённость электрического поля между обкладками.

В разд. 1.22 показано, что напряжённость E электрического поля внутри конденсатора равна $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ (здесь σ – поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора, ε – диэлектрическая проницаемость вещества между обкладками конденсатора).

Из последнего выражения следует, что

$$\varepsilon_o \varepsilon E = \sigma.$$

В разд. 1.17 показано, что

$$\varepsilon_o \varepsilon \boldsymbol{E} = \boldsymbol{D},$$

т. е. произведение напряжённости электрического поля на электрическую постоянную и диэлектрическую проницаемость диэлектрика равно вектору электрического смещения. Это выражение можно переписать в скалярной форме: $\varepsilon_o \varepsilon E = D$.

Но это означает, что $\sigma = D$, т. е. поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора равна модулю вектора электрического смещения.

Продифференцируем последнее выражение по времени

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t}$$

(использование частных производных обусловлено тем, что поверхностная плотность заряда может зависеть не только от времени, но и от координаты).

Производная от поверхностной плотности заряда по времени есть плотность тока проводимости $j_{\text{пр}}$ $\left(d\sigma = \frac{dq}{dS};\ \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial S} = \right.$

$\left. = \frac{dI}{dS} = j_{\text{пр}} \right).$

Но тогда и правая часть равенства имеет размерность плотности тока.

Здесь следует обратить внимание на важную деталь.

В левой части равенства присутствует поверхностная плотность заряда σ, изменение которой обусловлено упорядоченным движением свободных носителей заряда в проводниках, соединяющих обкладки конденсатора с источником ЭДС. Поэтому можно сказать, что левая часть равенства относится к той части цепи, в которой может протекать ток проводимости.

В правой части равенства присутствует модуль вектора электрического смещения, который является характеристикой электрического поля в диэлектрике. Следовательно, правая часть равенства относится к той части цепи, где отсутствуют свободные носители заряда и где токи проводимости протекать не могут.

Тем не менее $\frac{\partial D}{\partial t}$ имеет размерность плотности тока.

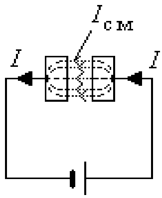
Поэтому Максвелл предположил, что в диэлектрике может существовать особый ток, природа которого существенно отлична от природы тока проводимости. Он назвал этот ток **током смещения**.

По определению, плотность тока смещения

$$\boldsymbol{j}_{\textbf{см}} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

Как отмечено выше, $\dfrac{\partial\sigma}{\partial t} = \dfrac{\partial D}{\partial t}$, поэтому

$$j_{\text{пр}} = j_{\text{см}},$$



т. е. плотности тока проводимости и тока смещения в замкнутой цепи всегда равны. Таким образом, ток непрерывен не только в цепях, состоящих из проводников, но и в цепях, содержащих непроводящие элементы (например, конденсаторы).

Рассмотрим природу тока смещения.

Производная, расположенная в правой части равенства, может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_o \frac{\partial \text{E}}{\partial t} + \frac{\partial \text{P}}{\partial t}$$

(здесь использовано определение вектора электрического смещения, данное в разд. 1.17).

Следовательно, $\text{j}_{\text{см}} = \dfrac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_o \dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{\partial P}{\partial t}$, или в векторной форме

$$\boldsymbol{j}_{\text{см}} = \varepsilon_{\text{o}} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}.$$

Рассмотрим этот ток подробнее.

Слагаемое $\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ (производная от поляризованности по времени) связано с процессами, протекающими в ходе поляризации диэлектрика.

Как отмечено в разд. 1.15, в полярных диэлектриках происходит поворот атомов так, чтобы их дипольный момент стал параллелен силовым линиям электрического поля.

В неполярных диэлектриках происходит смещение* электронных оболочек атомов в одну сторону, а ядер – в противоположную.

* Отсюда и происходит название тока смещения.

Поэтому можно сказать, что $\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ является плотностью тока, возникающего из-за упорядоченного движения атомов диэлектрика в процессе его поляризации.

Слагаемое $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ не равно нулю, если с течением времени изменяется напряжённость электрического поля.

Но электрическое поле может изменяться и там, где нет носителей заряда (например, в вакууме).

Следовательно, эта компонента тока смещения не связана с какими-либо зарядами. Она порождается изменяющимся электрическим полем.

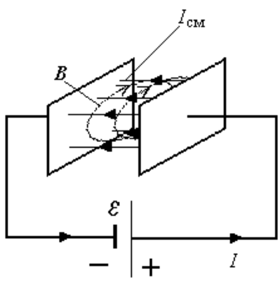
Ток проводимости в проводниках создаёт магнитное поле.

Но тогда и ток смещения должен создавать такое же магнитное поле (так как $j_{пр} = j_{см}$).

Экспериментальная проверка показала, что это предположение верно. Между обкладками конденсатора существует точнотакое же магнитное поле, как и вокруг проводников, соединённых с обкладками.

Так была подтверждена правильность гипотезы Максвелла о существовании тока смещения и доказано, что токи смещения наряду с токами проводимости являются источником магнитного поля.

Ещё раз обратите внимание на очень важную деталь: **ток смещения может существовать в среде, не содержащей заряженных частиц** (в вакууме). Если в такой среде имеется изменяющееся во времени электрическое поле, то в ней существует и ток смещения.



Кроме тока смещения, Максвелл ввёл понятие **полного тока**. Полный ток – это ток, равный сумме тока проводимости и тока смещения.

Плотность полного тока

$$\boldsymbol{j}_{полн} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

В свою очередь, сила полного тока равна

$$I_{полн} = \int\limits_S \boldsymbol{j}_{\text{полн}} d\boldsymbol{S} = \int\limits_S \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_{\text{o}} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \right) d\boldsymbol{S} .$$

5.6. УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА *H*

Как показано в разд. 3.11, циркуляция вектора магнитной индукции равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму токов, охваченных контуром,

$$\oint\limits_L \boldsymbol{B} d\boldsymbol{l} = \mu_o I .$$

По определению напряжённости магнитного поля

$$\boldsymbol{B} = \mu_{\text{o}} \boldsymbol{H}$$

(выражение записано для магнитного поля в вакууме).

Заменив вектор магнитной индукции на вектор напряжённости получим выражение для циркуляции вектора $\boldsymbol{H}$:

$$\mu_0 \oint\limits_L \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = \mu_0 I .$$

Сократив μ_{o} и учитывая не только токи проводимости, но и ток смещения, получаем

$$\oint\limits_L \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = I + I_{\text{см}} .$$

Сила тока равна потоку вектора плотности тока (см. разд. 1.19):

$$I = \int\limits_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S} .$$

С учётом последнего и принимая во внимание то, что плотность тока смещения равна производной от вектора электрического смещения по времени, получаем окончательное выражение для циркуляции вектора напряжённости магнитного поля

$$\oint\limits_L \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = \int\limits_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) d\boldsymbol{S} .$$

Читается это уравнение так: циркуляция вектора ***H*** по любому замкнутому контуру равна полному току через поверхность, ограниченную этим контуром.

Уравнение показывает, что магнитное поле порождается как токами проводимости, так и изменяющимся электрическим полем.

5.7. УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА *E*

Как было показано в разд. 5.2, ЭДС электромагнитной индукции равна циркуляции вектора ***E*** по контуру, пронизываемому магнитным полем, $\varepsilon_i = \oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}$.

В свою очередь, в соответствии с законом Фарадея, ЭДС индукции равна производной от магнитного потока по времени (см. разд. 5.1) $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.

Учитывая, что магнитный поток по определению (см. разд. 3.8) равен $\Phi = \int\limits_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}$, можем записать следующее соотношение:

$$\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = -\int\limits_S \frac{d\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{dt}}d\boldsymbol{S}$$

и окончательно

$$\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = -\int\limits_S \frac{d\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{dt}}d\boldsymbol{S} .$$

Полученное уравнение и есть уравнение Максвелла для циркуляции вектора напряжённости электрического поля ***E.***

Данное уравнение Максвелла показывает, что изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле.

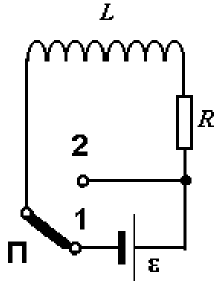
Уравнение Максвелла о циркуляции вектора ***H*** и уравнение Максвелла о циркуляции вектора ***E*** показывают, что переменные электрическое и магнитное поля неразрывно связаны между собой. Каждое из этих полей, изменяясь, порождает другое. Такая система связанных переменных электрического и магнитного полей называется электромагнитным полем (подробнее см. разд. 10).

5.8. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим изображённую на рисунке схему.

Переключение ключа из положения *1* в положение *2* вызывает отключение источника эдс от цепи. Опыт показывает, что это не вызывает мгновенного прекращения электрического тока.

Ток в цепи в этом режиме идёт за счёт ЭДС самоиндукции, возникающей в соле-ноиде.



Для поддержания тока в цепи необходимо затрачивать энергию. Откуда она берётся?

Можно предположить, что ток в такой цепи существует за счёт энергии магнитного поля, созданного током, протекавшим в цепи.

Следовательно, магнитное поле должно обладать некоторой энергией.

Найдём величину энергии магнитного поля.

В контуре с индуктивностью L и током I

$$\Phi = LI.$$

Изменение тока на dI означает изменение магнитного потока на $d\Phi = LdI$.

Ранее было установлено (см. разд. 3.9), что при изменении магнитного потока на $d\Phi$ совершается работа $dA = Id\Phi$.

Следовательно, в данном случае должна быть совершена работа

$$dA = Id\Phi = LIdI.$$

Конечная работа, совершённая в рассматриваемом контуре при изменении тока от I_o до 0,

$$A = L\int_{I_o}^{0} I \cdot dI = -\frac{LI_o^2}{2}.$$

Работа отрицательна, так как энергия контура уменьшается.

Энергия контура уменьшается до нуля, значит совершённая работа равна по величине начальному значению энергии магнитного поля:

Таким образом, энергия, запасённая в магнитном поле,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Выражение для расчёта энергии магнитного поля можно записать и в иной форме:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} I \cdot \varPhi = \frac{\varPhi^2}{2L}.$$

Выражения для расчёта энергии, запасённой в магнитном поле, можно перевести и в другую форму. Сделать это можно следующим способом.

Как известно, для соленоида $L = \mu_o \mu n^2 V$.

Тогда $W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 V I^2$.

Поскольку для бесконечного соленоида $B = \mu_o \mu n I$,

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V$$

или

$$W = \frac{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}}{2} V,$$

где $H = \frac{B}{\mu_0 \mu}$ – напряжённость магнитного поля.

Обратите внимание: в полученное выражение входят только характеристики магнитного поля. Величины, характеризующие источник поля (например, соленоид), отсутствуют.

Это означает, что носителем энергии является само магнитное поле. Энергия, запасённая в магнитном поле, рассредоточена по всему пространству, занимаемому магнитным полем.

Если магнитное поле неоднородно, то величина $\frac{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}}{2}$ в разных точках различна.

В этом случае удобно использовать **объёмную плотность энергии магнитного поля:**

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}}{2}.$$

(это энергия магнитного поля, запасённая в единице объёма).

Энергия, запасённая в конечном объёме неоднородного магнитного поля, может быть найдена следующим образом:

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\boldsymbol{BH}}{2} dV.$$

Важно отметить, что последнее выражение позволит получить правильный результат только в линейных средах, или средах, в которых $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ связаны линейно, т. е. когда магнитная проницаемость среды, в которой существует магнитное поле, не зависит от напряжённости магнитного поля (т. е. в пара- и диамагнетиках).

6. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В природе достаточно часто можно наблюдать процессы, которым свойственна некоторая повторяемость. Такие процессы называют **колебаниями**.

Если колебания повторяются через одинаковые интервалы времени, их называют **периодическими колебаниями**.

Например, подвешенный на нити и выведенный из положения равновесия груз в процессе движения будет многократно проходить через одни и те же точки. Поэтому его движение является колебательным. Время, за которое такой маятник будет совершать одно колебание, будет постоянным. Поэтому его колебания являются периодическими. Подобных примеров можно привести множество.

Если выведенная из положения равновесия и предоставленная самой себе система способна совершать колебания, то её называют **колебательной системой**.

Примером колебательной системы является упомянутый выше груз, подвешенный на нити. Колебательной системой является груз, подвешенный на пружине и множество других систем.

Но обратите внимание – не всякая система, которая может участвовать в колебаниях, является колебательной. Например, можно взять в руки небольшой шарик и перемещать его так, чтобы движение шарика являлось колебанием. Такой шарик может участвовать в колебаниях, но он не является колеба-тельной системой. Если прекратить воздействие на шарик, его колебания прекратятся. А колебательной является такая система, которая способна совершать колебания после прекращения внешнего воздействия.

6.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Гармоническими называют колебания, происходящие по закону синуса или косинуса,

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_o\right),$$

где x – мгновенное значение колеблющейся величины; A - амплитуда гармонического колебания; это максимальное отклонение колеблющейся величины от среднего значения; $\varphi = (\omega t + \varphi_o)$ – фаза гармонического колебания; φ_o – начальная фаза гармонического колебания (φ_o – это значение фазы в начальный момент времени $t = 0$); ω – циклическая частота гармонического колебания; поскольку из определения фазы видно, что $\omega = \frac{d(\omega t + \varphi_o)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$, постольку физический смысл циклической частоты – скорость изменения фазы по времени*; t – текущее время.

Кроме названных для описания гармонических колебаний используются следующие параметры: T – период гармонических колебаний; период – это время, за которое происходит одно колебание; ν – частота гармонических колебаний; частота – это количество колебаний, происходящих за единицу времени.

Параметры гармонических колебаний связаны между собой следующими соотношениями:

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad \omega = 2\pi\nu; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

6.2. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Различают следующие формы гармонических колебаний:

а) **аналитическая**, или **тригонометрическая.**

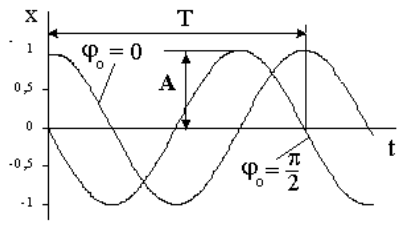
В аналитической форме колебание описывается следующим выражением:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_o).$$

Входящие в него величины рассмотрены в предыдущем разделе;

б) **графическая.**

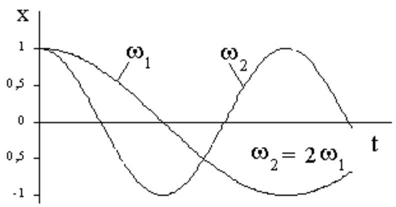
В графической форме колебание $x = A\cos(\omega t + \varphi_o)$ представляется в виде графика зависимости мгновенного значения колеблющейся величины x от времени t.



* Вспомните физический смысл производной.

На верхнем рисунке представлены два графика гармонических колебаний с одинаковыми частотами и амплитудами. Отличаются представленные колебания значением начальной фазы. Из рисунка видно, что увеличение начальной фазы вызывает смещение графика влево вдоль оси *t*. Поэтому можно сказать, что колебание с большей начальной фазой началось раньше, чем колебание с меньшим значением φ_o.

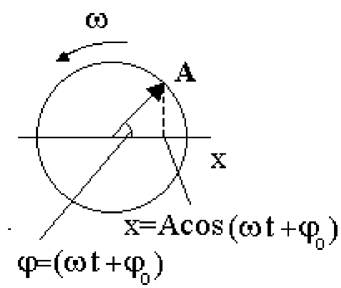
На нижнем рисунке представлены графики гармонических колебаний, у которых одинаковы амплитуда и начальная фаза, но различны частоты. Из рисунка можно видеть, что за время одного полного колебания с частотой ω_2 успеет произойти лишь половина полного колебания с частотой ω_1. Следовательно, $\omega_2 = 2\omega_1$;



в) **векторная**.

В ряде случаев представление в векторной форме позволяет получить решение задачи быстрее и проще, чем с помощью других форм. Рассмотрим этот метод.

Выберем некоторую ось *x* и построим под углом φ_o к оси x вектор, длина которого пропорциональна амплитуде гармонического колебания *A*.



Пусть этот вектор равномерно вращается против часовой стрелки с угловой скоростью, равной циклической частоте гармонического колебания ω. В этом случае угол между вектором *A* и осью *x* в любой момент времени будет равен $\omega t + \varphi_o$*.

Проекция вектора на ось *x* будет равна $x = A\cos(\omega t + \varphi_o)$. Но это выражение описывает гармоническое колебание. Следовательно, проекция вектора *A,* вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω, равной циклической частоте представляемого колебания, и будет гармоническим колебанием

* В момент $t = 0$ угол равнялся φ_o

$x = A\cos(\omega t + \varphi_o)$. Начальная фаза представляемого гармонического колебания равна углу φ_o между вектором A в момент времени $t = 0$ и осью x, лежащей в плоскости вращения вектора.

6.3. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

6.3.1. Сложение одинаково направленных гармонических колебаний с равными частотами

Пусть некоторая точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одного направления, имеющих равные частоты.

Каким будет результирующий процесс?

Уравнения, описывающие эти колебания, имеют вид

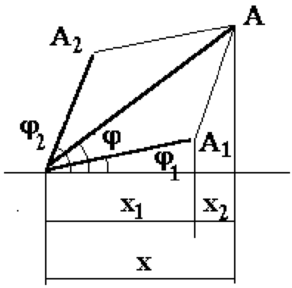
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{o1})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{o2}).$$

Представим их в векторной форме (см. рисунок).

Сложив графически векторы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$, представляющие первое и второе колебание, получим результирующий вектор $\boldsymbol{A}$.

Вектор A будет вращаться с той же угловой скоростью, что и складываемые векторы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$. Проекция вектора $\boldsymbol{A}$ на ось x будет изменяться с течением времени по гармоническому закону. Следовательно, результирующий процесс представляет собой гармоническое колебание, циклическая частота которого равна циклической частоте складываемых колебаний, амплитуда – $\boldsymbol{A}$, а начальная фаза – φ.



Для того чтобы найти значение A, выполним следующие действия:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2.$$

Скалярно умножим вектор A сам на себя:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) \cdot (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2).$$

Учитывая, что скалярное произведение вектора на себя равно квадрату его модуля, получаем

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}_1^2 + 2\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_2^2$$

и затем

$$A^2 = A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2.$$

Отсюда

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2}\ .$$

Начальная фаза результирующего колебания, как это видно из рисунка, определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\ .$$

6.3.2. Сложение одинаково направленных колебаний с разными частотами. Биения

Если частоты складываемых колебаний различны, то векторы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ будут вращаться с разной скоростью, их взаимное расположение будет меняться. Поэтому с течением времени будут изменяться модуль результирующего вектора и скорость его вращения. Следовательно, амплитуда и циклическая частота результирующего колебания изменяются.

Таким образом, при сложении одинаково направленных гармонических колебаний разных частот возникают негармонические колебания.

Полученный вывод интересен ещё и тем, что позволяет увидеть следующее. Если результатом сложения гармонических колебаний разных частот является негармоническое колебание, то негармоническое колебание можно представить как сумму гармонических колебаний разных частот. Это возможно на самом деле и достаточно широко используется как в науке, так и в технике. Раздел физики, изучающий эту проблему, называется гармоническим анализом.

Определённый интерес представляет частный случай – сложение одинаково направленных колебаний с близкими частотами (т. е. $\omega_1 \approx \omega_2$).

Рассмотрим этот случай подробнее. Будем полагать, что начальные фазы и амплитуды складываемых колебаний одинаковы.

В этом случае уравнения, описывающие складываемые колебания имеют вид:

$$x_1 = A\cos\omega_1 t,$$

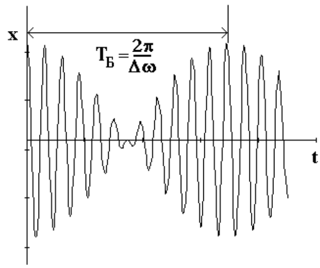
$$x_2 = A\cos\omega_2 t.$$

Результирующий процесс будет описываться выражением*

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Как видно из полученного выражения, результирующий процесс описывается произведением двух косинусов. Циклическая частота первого косинуса очень мала (по условию $\omega_1 \approx \omega_2$), а второго приблизительно равна циклическим частотам складываемых колебаний ω_1 и ω_2.

Это позволяет трактовать результирующий процесс как колебание с частотой, равной $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, амплитуда которого медленно меняется по закону $2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$.



Такие колебания принято называть **биениями**.

Частота $\omega_1 - \omega_2$, с которой изменяется амплитуда результирующего колебания, называется **частотой биений.**

Величина $T_Б = \dfrac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ называется **периодом биений**.

6.3.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$x = A\cos\omega_1 t,$$

$$y = B\cos(\omega_2 t + \varphi).$$

Точка, участвующая в таких колебаниях, будет одновременно двигаться вдоль двух осей – осей *x* и *y*. Поэтому траектория её движения в общем случае может не быть прямолинейной.

---

* Здесь использована тригонометрическая формула для суммы косинусов: cos *x* + cos *y*.

Найдём уравнение, описывающее траекторию частицы, участвующей в этих двух колебаниях, для наиболее простого случая ($\omega_1 = \omega_2$).

Для этого исключим из уравнений время *t*.

Из первого уравнения следует, что

$$\cos\omega t = \frac{x}{A} \quad \Rightarrow \quad \sin\omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\ ;$$

а из второго уравнения вытекает

$$\frac{y}{B} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi - \sin\omega t \cdot \sin\varphi$$

или

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cdot \sin\varphi,$$

$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\varphi = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cdot \sin\varphi\ ;$$

возведем это выражение в квадрат

$$\frac{y^2}{B^2} - 2\frac{y \cdot x}{B \cdot A}\cos\varphi + \frac{x^2}{A^2}\cos^2\varphi = \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)\sin^2\varphi,$$

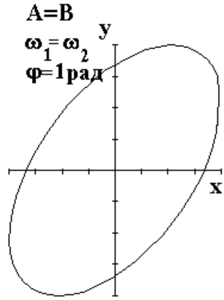
$$\frac{y^2}{B^2} - 2\frac{y \cdot x}{B \cdot A}\cos\varphi + \frac{x^2}{A^2}\cos^2\varphi + \frac{x^2}{A^2}\sin^2\varphi = \sin^2\varphi$$

и, наконец, получим уравнение, описывающее траекторию движения частицы, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{x \cdot y}{A \cdot B}\cos^2\varphi = \sin^2\varphi\ .$$

Мы получили уравнение эллипса, длина и ориентация полуосей которого зависят от амплитуд складываемых колебаний и от разности фаз φ. Например, при равных амплитудах и разности фаз в 1 радиан эллипс имеет вид, показанный на рисунке.

Рассмотрим несколько частных случаев.



1. Разность фаз φ = 0.

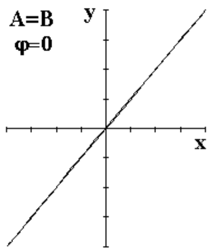
В этом случае уравнение принимает вид

$$\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right)^2=0$$

или

$$y=\frac{B}{A}x\,.$$

Это уравнение прямой. Следователь-но, при такой разности фаз точка дви-жется по прямой линии. Её движение представляет собой гармоническое коле-бание с частотой ω и амплитудой, равной $\sqrt{A^2+B^2}$.



Движение точки будет представлять собой гармоническое колебание и в том случае, когда φ = π. Только прямая, вдоль которой будут происходить колебания, будет расположена во втором и четвёртом квадрантах системы координат (проверьте это самостоятельно).

2. Разность фаз φ = π/2.

В этом случае уравнение траектории принимает вид:

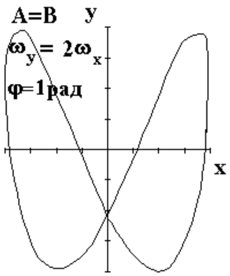
$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1\,.$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат.

Если амплитуды складываемых колебаний будут равны, точка будет двигаться по окружности.

Траектория будет такой же, как и в случае φ =-π/2. Только точка будет двигаться в противоположную сторону.

Если частоты складываемых колебаний различны, форма траектории будет более сложной. Например, если частоты складываемых колебаний отличаются в два раза, то траектория будет иметь вид, показанный на рисунке (если амплитуды складываемых колебаний равны и разность их фаз равна 1 радиан).



Кривые, описывающие траектории движения точки, участ-вующей в двух взаимно перпендику-лярных колебаниях, называют **фигурами Лиссажу**.

Фигуры Лиссажу позволяют опре-делить соотношение частот и разность фаз складываемых колебаний, что до сих пор используется на практике.

6.4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Осциллятор* – это любая система, которая может совершать колебания после того, как её вывели из положения равновесия. Если колебательная система совершает гармонические колебания, то она представляет собой гармо-нический осциллятор.

Поведение всех гармонических осцилляторов описывается дифференциальным уравнением $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ *.

Это уравнение принято называть **уравнением гармонического осциллятора.**

Решение такого дифференциального уравнения имеет вид $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Аргумент x дифференциального уравнения совершает гармонические колебания.

Взяв первую и вторую производные по времени от x, получим, что и они совершают гармонические колебания $\dot{x} = -\omega_o A\sin(\omega_o t + \varphi_o)$, $\ddot{x} = -\omega_o^2 A\cos(\omega_o t + \varphi_o)$.

Гармонический осциллятор – это абстрактная модель, воспроизводящая реальные колебательные системы, в которых могут происходить гармонические колебания.

Рассмотрим некоторые из них.

---

* *Oscillo* (лат.) – качаться.

6.4.1. Пружинный маятник

Пружинный маятник – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине, коэффициент упругости которой k.

Со стороны пружины на маятник действует упругая сила $F = -kx$ (здесь x – смещение груза от положения равновесия; если начало координат совместить с положением равновесия груза, то x – координата груза).

На основании второго закона Ньютона и закона Гука

$$ma = m\ddot{x} = -kx$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\ .$$

Введём обозначение $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Теперь уравнение примет вид

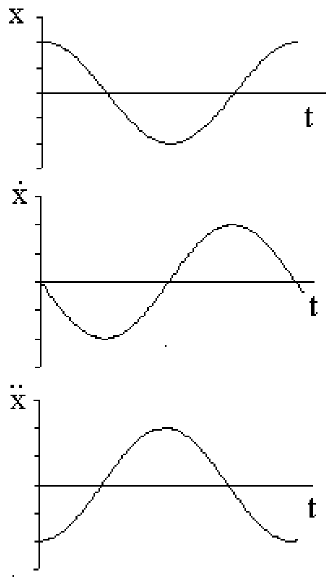
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\ .$$

Но это уравнение гармонического осциллятора. Следовательно, пружинный маятник является гармоническим осциллятором, и если пружина идеальна, отсутствует трение и нет других потерь энергии, то пружинный маятник, выведенный из положения равновесия, совершает гармонические колебания.

Величина $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ равна цикли-ческой частоте пружинного маятника. Из этого выражения видно, что частота колебаний маятника растёт с увеличением упругости пружины и уменьшением массы груза, подвешенного к ней.

Величина $\dot{x} = -\omega_0 A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$ – это **скорость** колеблющегося груза, а $\ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$ – его **ускорение** в данный момент времени.

Отсюда видно, что для пружинного маятника, совершающе-го гармонические колебания, координата груза, его скорость и ускорение изменяются по гармоническому закону, т. е. совершают гармонические колебания.

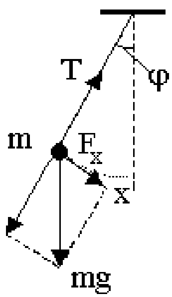


Из уравнений также видно, что начальные фазы колебаний смещения, скорости и ускорения груза различны. Это хорошо видно и на графиках (см. рисунок).

Обратите внимание: в тот момент, когда смещение от положения равновесия максимально, скорость груза равна нулю, а ускорение максимально по величине и направлено против смещения (так как проекция смещения положительна, а ускорения – отрицательна).

Период колебаний пружинного маятника $T = \dfrac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

6.4.2. Математический маятник



Рассмотрим материальную точку массой *m*, закреплённую на невесомой нерастяжимой нити длиной *l*.

Отклоним маятник от положения равновесия на малый угол φ.

Разложим силу тяжести *mg*, действующую на груз, на параллельную и перпендикулярную нити составляющие.

Составляющая, параллельная нити, компенсируется силой натяжения нити *T*, поэтому они не влияют на движение маятника. Следовательно, движение маятника определяется составляющей F_x, которая равна F_x = -mgsinφ (минус в правой части обусловлен тем, что составляющая F_x всегда направлена против отклонения маятника от положения равновесия).

При малых углах отклонения кривизной траектории груза можно пренебречь, поэтому sinφ = φ = $\frac{x}{l}$, где x – смещение груза от положения равновесия (здесь учтено, что при малых углах sinφ = φ). Поэтому $F_x = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$.

Введём обозначение $k = \frac{mg}{l}$. Тогда F_x = -kx. Это выражение похоже на закон Гука, определяющий величину силы, возникающей при упругой деформации тел. Следовательно составляющая F_x подобна упругой силе. Но, поскольку упругие деформации в рассматриваемой системе по условию отсутствуют, эту составляющую называют **квазиупругой силой**.

В соответствии со вторым законом Ньютона

$$ma = m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x;$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x;$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0.$$

Вводя обозначение $\frac{g}{l} = \omega_o^2$, получаем

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0.$$

Таким образом, движение груза, закреплённого на нити, описывается дифференциальным уравнением гармонического осциллятора. Следовательно, математический маятник при малых углах отклонения совершает гармонические колебания. Они описываются уравнениями:

$$x = x_m\cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

$$\dot{x} = -\omega_o x_m\sin(\omega_o t + \varphi_o)$$

$$\ddot{x} = -\omega_o^2 x_m\cos(\omega_o t + \varphi_o).$$

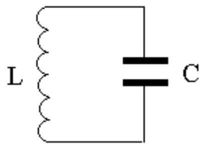
Период колебаний математического маятника $T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Период T увеличивается с увеличением длины маятника и уменьшением ускорения свободного падения (кстати, на этом основаны практически применяющиеся способы измерения ускорения свободного падения).

Обратите внимание на то, что в выражение для расчета периода колебаний математического маятника не входит m. Следовательно, период колебаний математического маятника не зависит от массы груза.

6.4.3. Колебательный контур

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую идеальный соленоид (это значит, что его сопротивление равно нулю) и конденсатор.



В соответствии со вторым правилом Кирхгофа, сумма разностей потенциалов на элементах контура равна сумме ЭДС, включённых в рассматриваемый контур.

В колебательном контуре ЭДС возникает в соленоиде. Это ЭДС самоиндукции ε_L.

Разность потенциалов на обкладках заряженного конденсатора обозначим U_C.

Тогда уравнение, описывающее идеальный колебательный контур, имеет следующий вид:

$$U_c = \varepsilon_L .$$

Поскольку напряжение на конденсаторе $U_c = \dfrac{q}{C}$, а ЭДС самоиндукции $\varepsilon_L = -L\dfrac{d^2q}{dt^2}$,

$$\frac{q}{C} = -L\ddot{q}$$

или

$$\frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0$$

и после деления на L

$$\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0 .$$

Вводя обозначение $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, получаем

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Мы вновь получили однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Следовательно, в идеальном колебательном контуре (т. е. контуре без потерь энергии) происходят гармонические колебания с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$.

Частота колебаний растёт с уменьшением индуктивности соленоида и ёмкости конденсатора.

Период колебаний в контуре $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ соответственно уменьшается при уменьшении L и C.

Процессы, протекающие в таком контуре описываются уравнениями

$$q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\dot{q} = I = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\ddot{q} = -\omega_0^2 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Таким образом, все рассмотренные нами системы отвечают уравнению $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Поэтому мы вправе утверждать, что в любой физической системе, описываемой подобным дифференциальным уравнением, будут происходить гармонические колебания. Причём изменяться по гармоническому закону будет не только основной параметр, характеризующий систему (т. е. x, φ, q и т. д.), но и производные этого параметра по времени.

Важно отметить, что для всех систем колебания первой производной по времени от основного параметра опережают по фазе колебания основного параметра на $\pi/2$, а второй производной – на π.

6.5. ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Гармонический осциллятор обладает энергией, за счёт которой и совершает колебания.

Найдём выражения для кинетической, потенциальной и полной механической энергии идеального пружинного маятника.

Кинетическая энергия

$$W = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m}{2}\omega_o^2 A^2 \sin^2\left(\omega_o t + \varphi_o\right).$$

Потенциальная энергия деформированной пружины

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2\left(\omega_o t + \varphi_o\right).$$

Полная механическая энергия

$$E = W + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}A^2\Big(m\omega_o^2 \sin^2\left(\omega_o t + \varphi_o\right) + k\cos^2\left(\omega_o t + \varphi_o\right)\Big) =$$

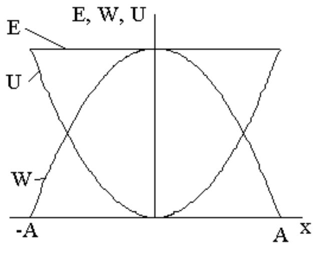
$$= \frac{1}{2}A^2 k\Big(\sin^2\left(\omega_o t + \varphi_o\right) + \cos^2\left(\omega_o t + \varphi_o\right)\Big) = \frac{A^2 k}{2}$$

(здесь учтено, что $\omega_o^2 = \dfrac{k}{m}; \quad \omega_o^2 m = k$).

Таким образом, полная механическая энергия идеального пружинного маятника постоянна. Кинетическая и потенциальная энергия постоянно изменяются, причём в положении равновесия кинетическая энергия достигает максимального значения, а потенциальная энергия уменьшается до нуля; при максимальном отклонении груза от положения равновесия всё наоборот – кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная максимальна.

В графической форме зависимость потенциальной, кинетической и полной энергии от *x* имеет вид, показанный на рисунке.

Зависимость потенциальной, кинетической и полной энергии от времени показана на следующем рисунке (символом *T* на рисунке обозначен период гармонического колебания).

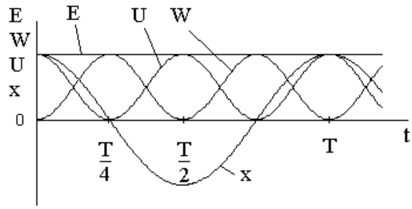


Обратите внимание: что кинетическая и потенциальная энергия изменяются с удвоенной частотой, т. е. с частотой $2\omega_o$.

Полученные выводы применимы не только к пружинному маятнику без потерь энергии. Полная энергия любого гармонического осциллятора определяется амплитудой колебаний и упругими свойствами осциллятора и не изменяется с течением времени.

Энергия математического маятника может быть найдена из следующих соображений.

При отклонении математического маятника на малый угол φ от положения равновесия груз поднимется на высоту $h = l - l\cos\varphi$. Потенциальная энергия маятника в этом положении равна $U =$ $= mgl(1-\cos\varphi) = 2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}$.



Учитывая, что при малых φ sinφ = φ, получаем

$$U = \frac{mgl}{2}\varphi^2.$$

Поскольку $\varphi = \frac{x}{l}$, потенциальная энергия математического маятника может быть рассчитана и так:

$$U = \frac{mg}{2l}x^2.$$

При возвращении маятника к положению равновесия высота груза уменьшается, при этом потенциальная энергия маятника переходит в кинетическую. В положении равновесия потенциальная энергия уменьшается до нуля, при этом кинетическая достигает максимального значения.

За счёт накопленной кинетической энергии груз продолжит своё движение и вновь поднимется на высоту h, где вся кинетическая энергия перейдёт в потенциальную.

Энергия колебательного контура также может существовать в двух формах: в виде энергии, запасённой в электрическом поле конденсатора, и в виде энергии, запасённой в магнитном поле соленоида.

Как показано в разд. 1.25, энергия заряженного конденсатора равна $\frac{q^2}{2C}$. Энергия, запасённая в магнитном поле соленоида, равна $\frac{LI^2}{2}$ (см. разд. 5.8).

В тот момент, когда весь заряд сосредоточен на обкладках конденсатора, ток в контуре равен нулю. Вся энергия контура существует в виде энергии заряженного конденсатора. Энергия магнитного поля соленоида равна нулю.

Как только конденсатор начинает разряжаться, через соленоид протекает постепенно возрастающий ток. Соответственно растёт энергия магнитного поля соленоида и уменьшается энергия заряженного конденсатора.

В момент полного разряда конденсатора ток максимален. Поэтому энергия контура существует в виде энергии магнитного поля соленоида.

Ток в контуре после разряда конденсатора протекает именно за счёт энергии магнитного поля. И именно за счёт этой энергии происходит перезарядка конденсатора.

7. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

В разд. 6.4 была рассмотрена идеальная колебательная система – гармонический осциллятор. Там было показано, что полная энергия гармонического осциллятора постоянна, вследствие чего амплитуда колебаний не изменяется.

В любой реальной колебательной системе существуют потери энергии (например, пружинный маятник испытывает воздействие силы трения, вследствие чего механическая энергия переходит во внутреннюю).

Поскольку энергия реальной колебательной системы уменьшается, должна уменьшаться и амплитуда её колебаний. Это означает, что колебания реального осциллятора затухающие.

7.1. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Циклическая частота идеального пружинного маятника $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, где k – коэффициент упругости пружины.

Если на груз кроме упругой будет действовать сила трения, то скорость движения груза уменьшается – ведь сила трения всегда направлена против скорости. Значит, реальный пружинный маятник совершит одно полное колебание за большее время, чем идеальный маятник с таким же коэффициентом упругости. Соответственно период колебаний реального пружинного маятника больше, чем у идеального, а частота меньше.

Период колебаний возрастёт тем больше, чем сильнее трение. И при некоторой определённой силе трения период колебаний может стать бесконечно большим, т. е. колебания могут вообще прекратиться. Выведенная из положения равновесия колебательная система просто плавно вернётся в положение равновесия. Вся сообщённая системе энергия уйдёт на преодоление силы трения.

Теперь рассмотрим поведение пружинного маятника более подробно.

Прежде всего составим уравнение, описывающее эту систему на основании второго закона Ньютона:

$$ma = \boldsymbol{F}_{\text{упр}} + \boldsymbol{F}_{\text{тр}}.$$

Пусть действующая на груз сила трения прямо пропорциональна его скорости*

$$F_{\text{тр}} = -r\dot{x},$$

где r – коэффициент трения, $\dot{x}$ – скорость груза.

Тогда

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

или, после деления уравнения на массу груза m,

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x}.$$

Введём обозначения $\beta = \dfrac{r}{2m}$ *и* $\omega_o^2 = \dfrac{k}{m}$.

Теперь дифференциальное уравнение можно записать в таком виде:

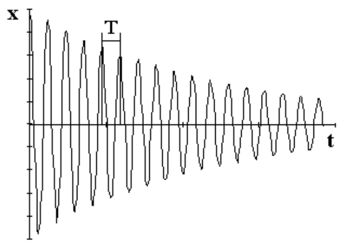
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0.$$

Решение этого уравнения при $\omega_o > \beta$ имеет вид

$$x = A_o e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_o),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$.

Из решения видно, что маятник совершает колебания (на это указывает наличие $\cos(\omega t+\varphi_o)$), амплитуда которых с течением времени уменьшается по экспоненциальному закону $A_o e^{-\beta t}$, т. е. такой маятник совершает **затухающие колебания.** График такого колебания изображён на рисунке.

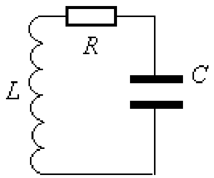


---

* Такое трение называют жидким.

7.2. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую соленоид, конденсатор и резистор.



В соответствии со вторым правилом Кирхгофа, сумма разностей потенциалов на элементах контура равна сумме ЭДС, действующих в рассматриваемом контуре.

В колебательном контуре ЭДС возникает в соленоиде. Это ЭДС самоиндукции ε_L.

На обкладках заряженного конденсатора имеется разность потенциалов. Обозначим её U_C.

Разность потенциалов на концах резистора равна IR.

Тогда уравнение, описывающее колебательный контур, имеет следующий вид:

$$IR + U_c = \varepsilon_L .$$

Поскольку напряжение на конденсаторе $U_c = \dfrac{q}{C}$, а ЭДС самоиндукции $\varepsilon_L = -L\dfrac{d^2q}{dt^2}$,

$$IR + \frac{q}{C} = -L\ddot{q}$$

или

$$IR + \frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0 ;$$

учитывая, что $I = \dfrac{dq}{dt} = \dot{q}$, получаем

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

и после деления на L

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0 .$$

Вводя обозначение $\omega_o^2 = \dfrac{1}{LC}$ и $\beta = \dfrac{R}{2L}$, получаем

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 ,$$

Мы вновь получили однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Данное уравнение ничем не отличается от того, которое было получено для пружинного маятника в предыдущем разделе. Следовательно, его решение имеет такой же вид: $q = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Это означает, что в колебательном контуре с потерями энергии могут происходить затухающие колебания.

7.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Из решения дифференциального уравнения видно, что амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени по закону $A_0 e^{-\beta t}$. Чем больше коэффициент β, тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний. Поэтому его называют коэффициентом затухания.

Поскольку $\beta = \dfrac{r}{2m}$, постольку колебания затухают тем быстрее, чем больше коэффициент трения r и чем меньше масса колеблющегося груза m.

Этот вывод достаточно легко понять – чем больше трение, которое препятствует всякому движению, тем быстрее прекратится колебательное движение реального осциллятора. Уменьшение массы означает, что уменьшается запас кинетической энергии осциллятора и поэтому при равном трении энергия будет быстрее израсходована на его преодоление.

Если обозначить символом τ время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз, то $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, т. е. $\beta\tau = 1$ и $\beta = \dfrac{1}{\tau}$.

Таким образом, β есть величина, обратная времени, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Время τ называют временем релаксации

В качестве характеристики затухания колебаний используется также **логарифмический декремент затухания**

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}},$$

где $A(t)$ – амплитуда колебания в некоторый момент t; $A(t + T)$ – амплитуда колебания через один период затухающего колебания.

Из последнего соотношения следует, что $\lambda = \beta T$.

Целесообразность использования такой характеристики видна из следующего.

Поскольку $\lambda = \beta T$, а $\beta = 1/\tau$, постольку $\lambda = \dfrac{T}{\tau}$. Но T – это время, за которое совершается одно колебание, а τ – время, за которое произойдёт, в общем случае, несколько колебаний*.

Тогда

$$\lambda = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e},$$

где N_e – число колебаний, в ходе которых амплитуда уменьшится в e раз.

Таким образом, β и λ являются характеристиками затухания, дополняющими друг друга: β показывает, как быстро затухают колебания, но при этом не содержит информации о количестве колебаний; λ же показывает, за сколько колебаний амплитуда уменьшится в e раз, но ничего не говорит о времени, за которое произойдёт это уменьшение.

Из решения дифференциального уравнения также следует, что частота затухающих колебаний ω меньше частоты колебаний идеального маятника ω_o: $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$.

Циклические частоты ω и ω_o соотносятся следующим образом. Допустим, маятник совершает затухающие колебания с частотой ω; если избавиться от трения, он будет совершать гармонические колебания с частотой ω_o.

Поскольку $\beta = \dfrac{r}{2m}$, где r – коэффициент трения, с ростом трения частота затухающих колебаний уменьшается.

Колебания, совершаемые пружинным маятником с трением, не являются гармоническими.

---

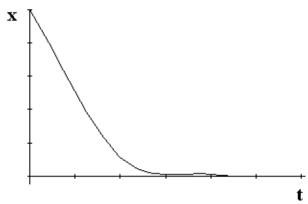
* В ходе этих колебаний амплитуда как раз и уменьшится в e раз.

Они также не являются и периодическими. Однако в физике принято использовать так называемый период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$; при этом под T подразумевают время, за которое совершается одно колебание.

7.4. КРИТИЧЕСКОЕ ЗАТУХАНИЕ

На качественной основе в разд. 7 было показано, что при достаточно большом трении колебания станут невозможны. Выведенная из положения равновесия колебательная система просто вернётся в него.

Такой режим в реальной колебательной системе наступит, если β возрастёт так, что выполнится условие $\beta > \omega_0$, и $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$ станет мнимой.



В этом случае решение дифференциального уравнения принимает такой вид:

$$x = A_0 e^{-(\beta \pm \omega)t},$$

т. е. x от времени зависит экспоненциально, колебаний нет. Система, которую вывели из положения равновесия, действительно постепенно возвращается в него (см. рисунок).

Затухание, при котором $\beta = \omega_0$, называют **критическим**. При таком (и большем) затухании колебания в системе невозможны.

7.5. ЭНЕРГИЯ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Энергию осциллятора с потерями энергии можно рассчитать с помощью тех же формул, которые получены для идеального осциллятора.

Особенностью реального осциллятора является то, что амплитуда его колебаний с течением времени уменьшается.

Поскольку полная энергия осциллятора прямо пропорциональна квадрату амплитуды, постольку и полная энергия реального осциллятора будет уменьшаться с течением времени.

Выражения для расчёта энергии реального осциллятора имеют следующий вид:

для пружинного маятника

$$U = \frac{A^2 k}{2} = A_0^2 e^{-2\beta t} \frac{k}{2};$$

энергия математического маятника с потерями энергии

$$U = \frac{mg}{2l} A_0^2 e^{-2\beta t} .$$

Энергия, запасённая в колебательном контуре, сопротивление которого отлично от нуля, может быть найдена следующим образом:

$$U = \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2} I_0^2 e^{-2\beta t} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2C} q_0^2 e^{-2\beta t} .$$

Таким образом, полная энергия осциллятора с потерями энергии уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону.

Обратите внимание: скорость уменьшения энергии осциллятора в два раза выше скорости уменьшения амплитуды колебаний осциллятора.

8. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Любой осциллятор (например, пружинный маятник) может испытывать внешнее воздействие. Если внешнее воздействие периодическое, то возникнут вынужденные колебания осциллятора. Характер колебаний осциллятора определяется как внешним воздействием, так и свойствами осциллятора.

8.1 ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Рассмотрим поведение пружинного маятника, на который кроме силы трения действует внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону: $F = F_o \cdot \cos\omega t$.

Уравнение движения для него в этом случае будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos\omega t\,,$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t\,.$$

Введём коэффициенты $\beta = \dfrac{r}{2m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Теперь дифференциальное уравнение принимает вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t\,.$$

Получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Общее решение такого уравнения является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения уже было получено. Оно описывает затухающие колебания $x = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega' t - \varphi_0)$, где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Эти колебания возникают сразу после первого толчка внешней силы и по истечении некоторого времени затухают.

Для того чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, отметим следующее.

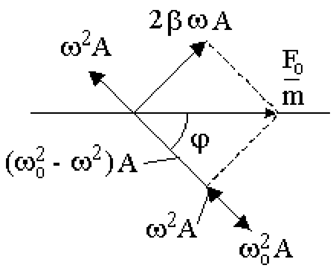
В правой части уравнения стоит функция $\dfrac{F_0}{m}\cos\omega t$, которая описывает гармоническое колебание с начальной фазой, равной нулю.

Следовательно, сумма слагаемых в левой части дифференциального уравнения должна представлять собой такое же гармоническое колебание.

Как показано в разд. 6.3.1 результатом сложения нескольких одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми частотами является гармоническое колебание. Поэтому каждый из членов суммы $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x$ представляет собой гармоническое колебание, частота которого равна частоте внешнего воздействия ω.

Допустим, что колебания *x* отстают по фазе от колебаний внешней силы на φ: $x = A\cos(\omega t-\varphi)$. Тогда слагаемое $\omega_0^2 x$ можно записать следующим образом: $\omega_0^2 x = \omega_0^2 A\cos(\omega t - \varphi)$.

Взяв производную от *x* по времени и умножив её на 2β, получаем $2\beta\dot{x} = -2\beta\omega A\sin(\omega t - \varphi) = 2\beta\omega A\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$.



Вторая производная от координаты маятника по времени равна $\ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t - \varphi)$.

Амплитуда *A* и начальная фаза φ колебаний *x* являются неизвестными величинами. Для того чтобы найти выражения для расчёта этих величин, воспользуемся векторной формой представления гармонических колебаний.

В момент времени *t* = 0 фаза силы внешнего воздействия равна нулю, поэтому колебание $\frac{F_0}{m}\cos\omega t$ будет представлено горизонтальным вектором $\frac{F_0}{m}$.

Как уже отмечаось, $\omega_0^2 x = \omega_0^2 A\cos(\omega t - \varphi)$. Это колебание будет представлено вектором $\omega_0^2 A$, который расположен под углом -φ относительно вектора $\frac{F_0}{m}$.

Второй член суммы $2\beta\dot{x} = 2\beta\omega A\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$ опережает по фазе $\omega_0^2 A\cos(\omega t - \varphi)$ на π/2. Следовательно, вектор 2βωA расположен под углом 90° относительно вектора $\omega_0^2 A$.

Первый член суммы $\ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t - \varphi)$ имеет фазу, равную фазе третьего, но противоположен ему по знаку, поэтому представлен вектором $\omega^2 A$, который направлен против вектора $\omega_o^2 A$.

Сумма этих векторов равна вектору $\dfrac{F_o}{m}$, что и показано на векторной диаграмме.

Из векторной диаграммы на основе теоремы Пифагора получаем, что

$$A^2\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\left(2\beta\omega A\right)^2=\frac{F_o^2}{m^2}.$$

Выражая отсюда *A*, получаем

$$A=\frac{F_o}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}.$$

Из векторной диаграммы также видно, что тангенс угла φ равен

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega_o^2-\omega^2}.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения имеет следующий вид:

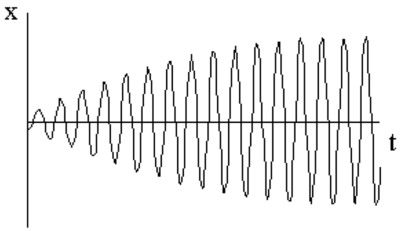
$$x=\frac{F_o}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cdot\cos\left(\omega t-\varphi\right).$$

Это выражение описывает установившиеся вынужденные колебания системы.

Наличие в решении гармонической функции $\cos(\omega t\text{-}\varphi)$, говорит о том, что под воздействием внешней гармонической силы осциллятор будет совершать гармоническое колебание с циклической частотой ω, равной циклической частоте внешней вынуждающей силы.

Амплитуда *A* и разность фаз φ этих колебаний зависят от параметров осциллятора (ω_o, β) и от частоты внешнего воздействия ω.

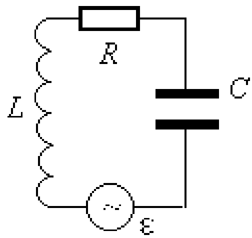
Как уже отмечалось, об-щее решение рассматривае-мого дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного



уравнения, поэтому сразу после начала внешнего воздействия колебания осциллятора будут представлять собой результат сложения двух колебаний – затухающего с частотой ω′ и гармонического с частотой внешнего воздействия ω. Постепенно амплитуда затухающих колебаний становится пренебрежимо малой, а колебание – гармоническим (см. рисунок).

8.2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую соленоид, конденсатор, резистор и источник переменной ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\omega t$.



В соответствии со вторым правилом Кирхгофа, сумма разностей потенциалов на элементах контура равна сумме ЭДС, дей-ствующих в рассматриваемом контуре.

В рассматриваемом колебательном контуре два источника ЭДС – это источник переменной ЭДС ε и соленоид (в нём возникает ЭДС самоиндукции ε_L).

На обкладках заряженного конденсатора имеется разность потенциалов. Обозначим её U_C.

Разность потенциалов на концах резистора, в соответствии с законом Ома, равна IR.

Тогда уравнение, описывающее колебательный контур, имеет следующий вид:

$$IR + U_c = \varepsilon_L + \varepsilon_0 \cos\omega t \ .$$

Поскольку разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_c = \dfrac{q}{C}$, а ЭДС самоиндукции $\varepsilon_L = -L\dfrac{d^2q}{dt^2}$,

$$IR + \frac{q}{C} = -L\ddot{q} + \varepsilon_0 \cos\omega t$$

или

$$IR + \frac{q}{C} + L\ddot{q} = \varepsilon_0 \cos\omega t\ ;$$

учитывая, что $I = \dfrac{dq}{dt} = \dot{q}$, получаем

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos\omega t$$

и после деления на L

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t\ .$$

Вводя обозначения $\omega_o^2 = \dfrac{1}{LC}$ и $\beta = \dfrac{R}{2L}$, получаем

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_o^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t\ .$$

Мы вновь получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Полученное дифференциальное уравнение ничем не отличается от того, которое получено для пружинного маятника в предыдущем разделе. Следовательно, его решение имеет такой же вид: $q = \dfrac{\varepsilon_0}{L} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \varphi\right)$.

Это означает, что в колебательном контуре, содержащем источник переменной ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону, будут происходить вынужденные колебания с частотой, равной частоте колебаний вынуждающей ЭДС.

8.3. ЗАВИСИМОСТЬ АМПЛИТУДЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ЧАСТОТЫ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ. ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА

Рассмотрим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия и параметров осциллятора более подробно.

Из выражения $A = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ видно, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты внешнего воздействия ω. Можно показать, что эта функция имеет экстремум, т. е. при определённой частоте амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной.

Это явление называют резонансом, а частоту вынужденных колебаний, при которой амплитуда максимальна – **резонансной частотой.**

При резонансной частоте амплитуда максимальна, а знаменатель выражения, показывающего величину амплитуды, минимален. Найдём эту частоту.

Знаменатель имеет экстремум при частоте внешнего воздействия, на которой производная от знаменателя по частоте ω равна нулю:

$$-4\omega_o^2\omega + 4\omega^3 + 8\beta^2\omega = 4\omega\left(-\omega_o^2 + \omega^2 + 2\beta^2\right) = 0\,.$$

Полученное выражение будет равно нулю при двух значениях частоты внешнего воздействия: $\omega = 0$ и $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$.

Если $\omega = 0$, то колебаний нет, поэтому первый корень уравнения отбрасываем.

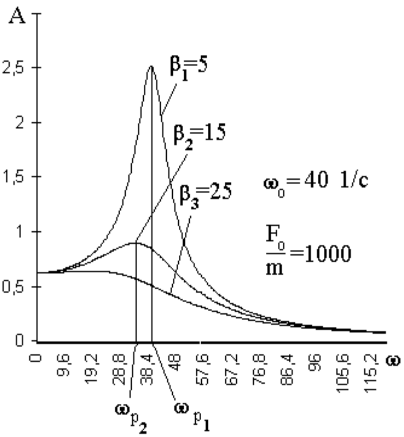
Второй же корень и есть резонансная частота $\omega_{рез}$. Именно при частоте внешнего воздействия $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$ амплитуда вынужденных колебаний максимальна. Её значение

$$A_{рез} = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_o^2 + 2\beta^2\right)^2 + 4\beta^2\left(\omega_o^2 - 2\beta^2\right)}} =$$

$$= \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{2\beta\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}\,.$$

При слабом затухании ($\beta \langle\langle\ \omega_o$) резонансную амплитуду можно считать равной

$$A_{\text{рез}} \approx \frac{F_{\text{o}}}{m} \cdot \frac{1}{2\beta\omega_{\text{o}}}.$$



Обратите внимание на то, что значение β достаточно сильно влияет на амплитуду при резонансе (см. рисунок): чем больше потери, тем меньше резонансная амплитуда.

При отклонении частоты внешнего воздействия от резонансной амплитуда вынужденных колебаний уменьшается (см. рисунок).

Теперь найдём амплитуду вынужденных колебаний для низких (ω<<ω_{o}) и высоких (ω>>ω_{o}) частот внешнего воздействия.

При ω<<ω_{o} амплитуда вы-нужденных колебаний будет приблизительно равна:

$$A \approx \frac{F_{\text{o}}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_{\text{o}}^4 + 4\beta^2\omega^2}};$$

если затухание мало ($\beta \langle\langle \omega_o$), то

$$A \approx \frac{F_{\text{o}}}{m\omega_{\text{o}}^2} = \frac{F_{\text{o}}}{k},$$

где k – коэффициент упругости пружины.

В полученном выражении отсутствует частота внешнего воздействия. Это значит, что при малых частотах внешнего воздействия колебательная система реагирует на гармоническую внешнюю силу практически как на статическую, т. е. не изменяющуюся с течением времени. Амплитуда вынужденных колебаний определяется величиной внешнего воздействия и упругими свойствами осциллятора.

При высоких частотах (ω>>ω_{o}). и при $\beta \langle\langle \omega$ амплитуда вынужденных колебаний приблизительно равна

$$A \approx \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 4\beta^2\omega^2}} \approx \frac{F_o}{m\omega^2}.$$

Таким образом, при высокой частоте внешнего воздействия максимальное отклонение от положения равновесия A определяется величиной внешнего воздействия, инертностью осциллятора и частотой воздействия. Упругие свойства колебательной системы не имеют никакого значения (поскольку в выражении отсутствует ω_o).

8.4. ДОБРОТНОСТЬ

Добротность используется для характеристики колебательных систем.

Добротность определяют как отношение амплитуды вынужденных колебаний при резонансе $A_{рез}$ к амплитуде при низкой частоте $A_{стат}$

$$Q = \frac{A_{рез}}{A_{стат}}.$$

Используя полученные в разд. 8.3 выражения для $A_{рез}$ и $A_{стат}$, получаем

$$Q = \frac{A_{рез}}{A_{стат}} = \frac{F_o}{2m\omega_o\beta} \cdot \frac{m\omega_o^2}{F_o} = \frac{\omega_o}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda}.$$

Добротность показывает, во сколько раз амплитуда при резонансе больше амплитуды вынужденных колебаний при низких частотах.

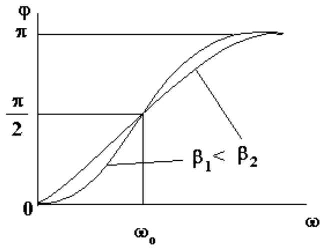
Следовательно, чем больше добротность, тем сильнее проявляет себя резонанс при вынужденных колебаниях.

Можно сказать и иначе: чем меньше потери энергии, тем сильнее резонанс.

8.5. ЗАВИСИМОСТЬ ФАЗЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ЧАСТОТЫ

Вынужденные колебания описываются уравнением

$x = A(\omega)\cos(\omega t - \varphi)$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$, т. е. ко-лебания осциллятора отстают по фазе от колебаний внешне-го воздействия $F_o \cdot \cos\omega t$.



Нетрудно получить, что при ω = 0 φ = arctg0 = 0 радиан.

При $\omega = \omega_o$ $\varphi = \operatorname{arctg}\infty = \pi/2$.

При $\omega > \omega_o$ $\varphi \to \pi$.

Таким образом, при резонансе колебания *x* отстают по фазе от внешнего воздействия на π/2. Другими словами – сила достигает максимального значения в те моменты, когда смещение от положения равновесия равно нулю.

В этот момент осциллятор имеет максимальную скорость. Наибольшее воздействие именно в этот момент увеличивает скорость осциллятора, и поэтому он наиболее сильно раскачивается.

9. ВОЛНЫ

9.1. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Если вызвать колебания одной частицы среды (твёрдой, жидкой или газообразной), то в колебательное движение начнут вовлекаться и окружающие частицы.

Таким образом, в упругой среде колебательный процесс теряет локальный характер. Колебания могут распространяться в пространстве. Этот процесс и называют волной.

Упругая волна – это процесс распространения колебаний в среде.

Обратите внимание на важную деталь: каждая из частиц среды колеблется вокруг своего равновесного положения. **Волна не вызывает переноса частиц среды.** Она лишь вовлекает в колебательный процесс всё новые и новые частицы.

Энергия колеблющейся частицы больше, чем энергия такой же покоящейся частицы. Поэтому вовлечение в колебательный процесс новых частиц среды означает, что их энергия возрастает.

Это значит, что **волна переносит энергию**.

В зависимости от того, как взаимно ориентированы направление распространения волны и направление колебаний частиц, различают продольные и поперечные волны.

Продольными называют волны, в которых направление колебаний частиц и направление распространения волны совпадают.

Поперечными называют волны, в которых направление колебаний частиц и направление распространения волны взаимно перпендикулярны.

Поперечные упругие волны возможны лишь в тех средах, где частицы достаточно сильно связаны между собой. Такой средой являются твёрдые тела и, в определённой степени, жидкости. В газах связь молекул пренебрежимо мала. Поэтому поперечные упругие волны возникают лишь в твёрдых телах.*

Если колебания частиц происходят по гармоническому закону, волна называется **гармонической.**

Как уже отмечалось, волна есть процесс распространения колебаний в пространстве.

Это означает, что существуют точки, до которых колебания ещё не дошли. Совокупность точек, до которых к моменту времени t дошли колебания, называют **фронтом волны**.

Фронт волны перемещается в пространстве со скоростью распространения волны.

При описании волн удобно пользоваться понятием **волновая поверхность**. Это геометрическое место точек среды, колеблющихся в одной фазе.

Волновую поверхность можно провести через любую точку среды, охваченной волновым процессом. Поэтому можно построить любое количество волновых поверхностей.

Поскольку все точки волновой поверхности колеблются в одной фазе во все моменты времени, волновая поверхность неподвижна.

Волновая поверхность может иметь различную форму. В простейших случаях это плоскость, сфера.

Волны с плоской волновой поверхностью называют **плоскими.**

Волны со сферической волновой поверхностью называют **сферическими**.

---

* В жидкостях тоже могут возникнуть поперечные волны, но из-за слабой связи между молекулами они быстро затухают.

9.2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим ряд точек плоской волны, лежащих на прямой, проходящей через источник колебаний.

Поскольку волна гармоническая, все точки колеблются по закону $\xi = A\cos(\omega t + \alpha)$*.

Поскольку точки, расположенные дальше от источника, начали колебаться позже, их колебания отстают по фазе от колебаний источника. Найдём величину этого сдвига по фазе α.

Если точка находится на расстоянии x от источника, то колебания «доберутся» до неё через $\tau = \frac{x}{v}$ секунд после начала колебаний источника (v – скорость распространения волны).

Поскольку отставание по фазе α обусловлено задержкой начала колебаний точки на τ секунд, это уравнение можно записать в виде

$$\xi = A\cos(\omega(t-\tau)) =$$
$$= A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right) =$$
$$= A\cos(\omega t - kx),$$

где $k = \frac{\omega}{v}$ – волновое число.

Таким образом, колебания произвольной точки, находящейся на расстоянии x от источника, описывается уравнением

$$\xi = A\cos(\omega t - kx).$$

Как видно из этого уравнения, смещение ξ интересующей нас точки меняется по гармоническому закону.

Фаза гармонической функции зависит от t и от x.

Произвольная точка среды, расположенная на расстоянии x от источника, колеблется по закону

$$\xi = A\cos(\omega t + \alpha),$$

где $\alpha = -kx$.

---

* Символ ξ читается как «кси».

Положение всех вовлечённых в волновой процесс точек среды в момент времени t определяется выражением

$$\xi = A\cos\left(-kx + \alpha'\right),$$

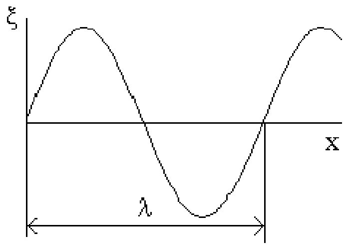
где $\alpha' = \omega t$.

Таким образом, смещение вовлечённых в волновой процесс точек среды зависит от координаты точки.

Обе функции периодические.

Но первая периодична во времени t, а вторая – по координате x. В свою очередь функция $\xi = a\cos\left(\omega t - kx\right)$ имеет временнýю и пространственную периодичность.

Периодичность во времени характеризуется периодом T – временем, за которое совершается одно колебание частицы среды.



Пространственный период называется **длиной волны** λ. Выразим длину волны через другие параметры волнового процесса.

За один период гармонической функции ее фаза и меняется на 2π, поэтому

$$\left|\left(-k\left(x+\lambda\right)+\alpha'\right)-\left(-kx+\alpha'\right)\right| = 2\pi$$

$$k\lambda = 2\pi;$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Учитывая, что $k = \dfrac{\omega}{v}$,

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu} = v \cdot T;$$

(v – скорость распространения колебаний в пространстве; ν – частота волны; T – период волны).

Из последнего выражения следует, что длина волны есть расстояние, которое волна проходит за один период.

Волновое число, которое было введено как отношение циклической частоты к скорости волны, можно выразить и через длину волны (из выражения $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$):

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Физический смысл волнового числа можно определить следующим образом. Найдём производную от фазы волны по x*.

$$\frac{d(\omega t - kx)}{dx} = \frac{d\omega t}{dx} - \frac{dkx}{dx} = -k.$$

Таким образом, волновое число k есть скорость изменения фазы колебаний по координате.

9.3. ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ

Вернёмся к уравнению $\xi = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$, описывающему колебания некоторой точки волны.

Выделим из него фазу

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Пусть фаза имеет фиксированное значение, т. е. $\varphi = \text{const}$.

Тогда

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{const},$$

или

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \omega\left(t + dt - \frac{x + dx}{v}\right),$$

т. е. фазу, которую в момент t имела частица среды, находящаяся на расстоянии x от источника волны, через dt секунд будет иметь частица, находящаяся на dx метров дальше. Другими словами, любое постоянное значение фазы перемещается, удаляясь от источника.

Сокращая ω в последнем выражении, получаем

$$t - \frac{x}{v} - t - dt + \frac{x + dx}{v} = 0;$$

---

* Физический смысл производной – скорость изменения функции по изменению ее аргумента.

$$-dt - \frac{dx}{v} = 0\,;$$

$$v = \frac{dx}{dt}\,.$$

Таким образом скорость v является скоростью, с которой перемещается фиксированное значение фазы. Поэтому её называют **фазовой скоростью**.

Волновое число k по определению равно $k = \frac{\omega}{v}$. Преобразовав это выражение получаем, что фазовая скорость может быть выражена через волновое число и циклическую частоту волны:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}\,.$$

Отметим ещё одну деталь.

Величина отношения ω/k зависит от значения частоты, поэтому фазовая скорость волн разных частот будет разной.

Такое явление действительно существует и называется **дисперсией волн**.

Среды, в которых имеет место дисперсия, называют **диспергирующими**.

9.4. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Волновым называют дифференциальное уравнение, описывающее процесс распространения гармонических волн в среде.

Найдём вид этого уравнения в простейшем случае – для плоской бегущей волны, распространяющейся параллельно оси *x,*

$$\xi = A\cos\left(\omega t - kx\right).$$

Возьмём вторые производные от ξ по времени и координате:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k^2\xi;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2\xi\,.$$

Учитывая, что $k = \frac{\omega}{v}$, можем записать

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,.$$

Таким образом, если анализ некоторой системы приводит нас к дифференциальному уравнению $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, мы вправе утверждать, что в этой системе могут распространяться волны.

Уравнение волны $\xi = A\cos(\omega t - kx)$ является результатом решения волнового уравнения с учётом начальных и граничных условий.

Обратите внимание: волновое уравнение не следует путать с уравнением волны.

Волновое уравнение описывает процесс распространения гармонических колебаний в некоторой среде.

Уравнение волны показывает, как смещены от положения равновесия частицы упругой среды в зависимости от t и x.

9.5. ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ

Пусть вдоль оси x распространяется плоская волна

$$\xi = A\cos(\omega t - kx).$$

Выделим некоторый малый объём ΔV в пределах которого скорость движения колеблющихся частиц $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и деформация среды, вызванная колебаниями частиц $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, неизменны.

Тогда кинетическая энергия частиц в этом объёме

$$\Delta W = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{\rho \Delta V}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2,$$

где ρ – плотность упругой среды.

Можно показать, что потенциальная энергия упругой деформации этого объёма

$$\Delta U = \frac{\rho v^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta V,$$

где v – фазовая скорость волны.

Полная энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$\Delta E = \Delta W + \Delta U = \frac{\rho \Delta V}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho v^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \cdot \Delta V \ .$$

Объёмная плотность энергии, равная энергии единичного объёма

$$s = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho v^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 =$$

$$= \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right).$$

Поскольку

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx);$$

и

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = kA \sin(\omega t - kx);$$

$$s = \frac{\rho}{2} \cdot \left(\omega^2 + v^2 k^2 \right) \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx) .$$

Так как $k = \frac{\omega}{v}$,

$$s = \frac{\rho \cdot A^2}{2} \cdot \left(\omega^2 + v^2 k^2 \right) \cdot \sin^2(\omega t - kx) =$$

$$= \frac{\rho \cdot A^2}{2} \cdot \left(\omega^2 + \omega^2 \right) \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

и, наконец,

$$s = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) .$$

Как известно, среднее значение квадрата синуса равно 1/2. Следовательно, среднее значение плотности энергии

$$\langle s \rangle = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2} .$$

Отсюда видно, что среднее значение плотности энергии зависит от плотности среды, амплитуды колебаний и циклической частоты волны. Вообще же плотность энергии волны различна в разные моменты времени в одной точке пространства и в один момент времени в разных точках пространства.

Эта энергия испускается источником колебаний и переносится волной в пространстве.

Кроме объёмной плотности энергии используется плотность потока энергии j, которая равна энергии, перенесённой волной через единичную поверхность ΔS_n, перпендикулярную направлению распространения волны, за единицу времени.

В аналитической форме определение плотности потока энергии имеет вид

$$j = \frac{\Delta E}{\Delta S_n \cdot \Delta t},$$

где ΔE – энергия, переносимая за время Δt через площадку ΔS_n, перпендикулярную к скорости распространения волны.

В случае плоской волны

$$\Delta E = s\Delta V = s\Delta S_n v \Delta t .$$

Тогда

$$j = \frac{s\Delta S_n v \Delta t}{\Delta S_n \cdot \Delta t} = sv$$

или, векторной форме,

$$\boldsymbol{j} = s\boldsymbol{v} .$$

Вектор $\boldsymbol{j}$ называют **вектором Умова.** Этот вектор показывает, какая энергия передаётся волной за единицу времени через единицу площади и в каком направлении она распространяется. Как видите, направление переноса энергии определяется скоростью волны – энергия переносится волной в направлении распространения волны.

9.6. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ. КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Пусть вдоль оси x навстречу друг другу распространяются две плоские гармонические волны с одинаковыми частотами и амплитудами:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx),$$
$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx).$$

Все частицы упругой среды, охваченной волновым процессом, будут участвовать в колебаниях, возбуждённых каждой из волн:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos\left(\omega t - kx\right) + A\cos\left(\omega t + kx\right).$$

Используя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

$$\xi = 2A\cos kx \cos\omega t = A(x)\cos\omega t,$$

где $A(x) = 2A\cos kx$.

Полученное выражение показывает, что частицы упругой среды, охваченные двумя волновыми процессами, совершают гармонические колебания с частотой ω.

Амплитуда колебаний частиц среды зависит от координаты x.

В точках, координаты которых отвечают условию $kx = \pm\, n\pi$, где $n = 0, 1, 2, 3...$ $\cos kx = \pm 1$ и амплитуда колебаний частиц среды максимальна. Такие точки называются **пучностями**. Координаты пучностей определяются соотношением $x_{\text{пучн}} = \pm\dfrac{n\pi}{k} = \pm\dfrac{n\lambda}{2}$.

В точках, отвечающих условию $kx = \pm\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ амплитуда равна нулю, т. е. частицы среды в этих точках не колеблются вообще. Такие точки называют **узлами**. Координаты узлов определяются соотношением $x_{\text{узла}} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}$.

Поскольку амплитуда колебаний частиц среды определяется их координатой и не зависит от времени, постольку положение узлов и пучностей не изменяется. Узлы и пучности остаются на одном месте. Поэтому волну, возникающую в результате наложения встречных волн одинаковой частоты, называют **стоячей**.

Рассмотрим натянутую струну, концы которой жёстко закреплены. Пусть длина струны равна l.

Допустим, что в этой струне возбуждены колебания.

Струну можно представить себе как совокупность бесконечно малых связанных между собой элементов. Колебания одного такого элемента должны вовлекать в колебательный процесс и другие элементы струны. Следовательно, если в струне возбудить колебания, то в ней возникнет упругая волна.

Конец струны жёстко закреплён, колебаться не может. Следовательно, он не может возбудить колебания в той среде, к которой прикреплён. Поэтому волна, дошедшая до конца струны, полностью отразится.

Это означает, что по струне будут распространяться две встречные волны $\xi_1 = A\cos(\omega t - kx)$ и $\xi_2 = A\cos(\omega t + kx)$.

Как показано выше, при наложении таких волн возникает стоячая волна. Это означает, что на струне с закреплёнными концами может возникнуть стоячая волна.

Поскольку мы говорим о струне с жёстко закреплёнными концами, на концах струны всегда должна быть узлы.

Из выражений для расчёта координат узлов и пучностей видно, что соседние узлы (так же как и пучности) отстоят друг от друга на $\lambda/2$.

Следовательно, длина струны должна быть такой, чтобы на ней целое число раз укладывалась половина длины волны:

$$l = n\frac{\lambda}{2},$$

где n = 1, 2, 3...

Это, в свою очередь, означает, что на струне длинной l могут возникать стоячие волны лишь определённых частот

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l}n.$$

Эти частоты называются **собственными частотами** струны, или **частотами нормальных колебаний.** Колебания с такими частотами называют гармониками (колебание с частотой, соответствующей n = 1 называют первой гармоникой, n = 2 – второй гармоникой и т. д.).

9.7. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

В науке и технике волны широко используются для передачи информации. Однако гармоническая волна способна донести информацию лишь о том, что где-то есть источник волны.

Для того чтобы с помощью волн можно было передавать необходимое количество информации, их необходимо изменять (например, испускать волны в виде импульсов, или изменять амплитуду волны, её частоту, начальную фазу). Такая волна называется модулированной.

С помощью модулированных упругих волн определяют глубину морей и океанов (эхолот), а модулированные электромагнитные волны позволяют осуществлять радио- и телевещание.

Но если модулированные волны отличаются от гармонических способностью переносить информацию, то, возможно, им присущи и другие отличия.

Исследуем один из аспектов этой проблемы – найдём скорость, с которой модулированная волна переносит энергию.

Для этого рассмотрим две одинаково направленные плоские поперечные бегущие волны, колебания которых происходят в одной плоскости, амплитуды которых равны, а частоты почти одинаковы.

Тогда

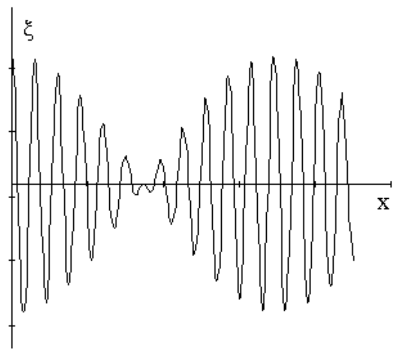
$$\xi = A\cos\left(\omega t - kx\right) + A\cos\left(\left(\omega + d\omega\right)t - \left(k + dk\right)x\right),$$

$$\xi = 2A\cos\left(\frac{t \cdot d\omega - x \cdot dk}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t - kx\right).$$

Эту волну можно представить в виде

$$\xi = a\cos\left(\omega t - kx\right),$$

где



$$a = 2A\cos\left(\frac{t \cdot d\omega - x \cdot dk}{2}\right),$$

т. е. это волна с медленно изменяющейся амплитудой, или модулированная, такая же, как на рисунке.

Показанная здесь картина соответствует какому-то моменту времени. В следующий момент она сдвинется вправо.

Найдём скорость, с которой модулированная волна будет распространяться. Для простоты рассмотрим точку, в которой амплитуда максимальна, – скорость перемещения этой точки равна скорости модулированной волны.

Поведение точки с максимальной амплитудой описывается выражением $a = 2A\cos\left(\frac{t \cdot d\omega - x \cdot dk}{2}\right)$. Но это выражение можно трактовать как уравнение бегущей волны с циклической частотой $d\omega = \omega_1 - \omega_2$ и волновым числом $dk = k_1 - k_2$.

Для любой бегущей волны $k = \frac{\omega}{v}$, и $\omega = kv$. Тогда скорость точки с максимальной амплитудой будет равна

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{v_1 k_1 - v_2 k_2}{k_1 - k_2},$$

где v_1 и v_2 – фазовые скорость волн с циклическими частотами ω_1 и ω_2 соотвественно.

Если дисперсии нет, то $v_1 = v_2 = v$ и $\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = v$, т. е. «гребень» такой волны перемещается с фазовой скоростью.

Если же среда диспергирующая, то $\frac{\omega_1}{k_1} \neq \frac{\omega_2}{k_2}$ и скорость $u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \neq v$. Это означает, что «гребень» перемещается со скоростью, отличной от v_1 и v_2.

Если вспомнить, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, то легко сообразить, что бóльшая часть энергии, переносимой такой волной, сконцентрирована там, где амплитуда волны велика. Это означает, что полученная скорость u есть скорость передачи энергии.

Эту скорость *u* и называют **групповой**:

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

Важно отметить, что фронт волны распространяется с групповой скоростью.

10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

К середине XIX в. был открыт ряд важнейших законов в области электричества и магнетизма. Значительная часть открытий в этой области принадлежит Майклу Фарадею.

Этот крупнейший учёный, по праву считающийся основоположником современной электродинамики, как это ни странно, не знал математики.

Поэтому открытые им явления не имели математического описания.

В 1854 г. в Кембриджский университет был принят на работу только что закончивший его Джеймс Клерк Максвелл. Основной целью своей деятельности он избрал математическое описание открытий Фарадея.

Это ему удалось (см. разд. 5.6, 5.7). Один из результатов деятельности Максвелла – предсказание о существовании электромагнитных волн.

Примерно через двадцать лет после этого электромагнитные волны были получены экспериментально немецким физиком Генрихом Герцем.

Рассмотрим механизм возникновения и некоторые особенности электромагнитных волн.

Допустим, что электрическое поле в вакууме создано зарядом, совершающим гармонические колебания.

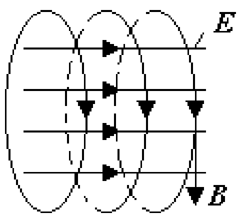
Электрическое поле, созданное таким зарядом, также должно изменяться с течением времени по гармоническому закону.

Плотность тока смещения, созданного изменяющимся электрическим полем, равна $\boldsymbol{j}_{\text{см}} = \varepsilon_{\text{o}} \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$. Поскольку производная от гармонической функции является гармонической функцией, постольку ток смещения также будет изменяться по гармоническому закону.

Ток смещения создаёт магнитное поле

$$\oint_L H dl = \varepsilon_{\text{o}} \int_S \frac{\partial E}{\partial t} dS = \int_S j_{\text{см}} dS .$$

Интеграл от гармонической функции также является гармонической функцией. Следовательно, магнитное поле, созданное током смещения, будет изменяться по гармоническому закону.



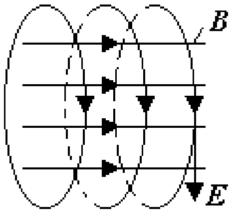
Важно отметить, что изменение электрического и магнитного полей описывается одной и той же гармонической функцией.

Ток смещения $\boldsymbol{j}_{\text{см}} = \varepsilon_{\text{o}} \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ совпадает по направлению с вектором $\partial \boldsymbol{E}$.

Вектор индукции магнитного поля всегда перпендикулярен создавшему его току.

Это означает, что магнитное поле, созданное изменяющимся электрическим полем, будет перпендикулярно ему.

В соответствии с уравнением Максвелла о циркуляции вектора ***E***, изменяющееся магнитное поле порождает электрическое. Причём порождаемое электрическое поле будет перпендикулярно изменяющемуся магнитному.



Это, в свою очередь, означает, что даже если исчезнет заряд, создавший изменяющееся электрическое поле, изменяющиеся электрическое и магнитное поля будут продолжать распространяться в пространстве в виде электромагнитной волны.

Более строгий анализ позволяет показать, что изменяющиеся электрическое и магнитное поля описываются волновыми уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2} \cdot \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2} \cdot \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \end{cases}$$

где c – скорость света в вакууме (если электромагнитная волна распространяется в среде, то используется скорость света в этой среде).

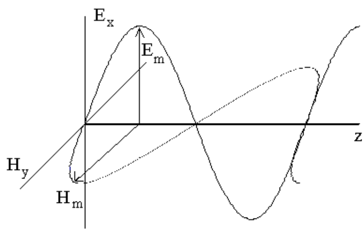
Решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$E_x = E_m \cos(\omega t - kz)$$

$$H_y = H_m \cos(\omega t - kz),$$

где амплитуды E и H связаны соотношением $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_m = \sqrt{\mu_0 \mu} H_m$.

Можно также показать, что если вектор ***E*** па-раллелен оси x, а вектор В параллелен оси y, то электромагнитная волна распространяется вдоль оси z (см. рисунок). Другими словами, векторы ***E***, ***H*** и вектор скорости электромагнитной волны с образуют правую тройку.



Важно отметить, что колеба-ния ***E*** и ***H*** синфазны.

10.1. Энергия электромагнитной волны. Вектор Умова–Пойнтинга

Электромагнитные волны, как и упругие волны, переносят энергию.

Эта энергия складывается из энергии, перенесённой электрической и магнитной составляющими электромагнитной волны.

Ранее мы установили, что плотность энергии электрического поля

$$w_E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2},$$

а плотность энергии магнитного поля

$$w_H = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Поэтому в любой момент времени плотность энергии электромагнитной волны

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Поскольку $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_m = \sqrt{\mu_0 \mu} H_m$, w_E в любой момент времени равна w_H.

Отсюда

$$w = w_E + w_H = 2w_E = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E \cdot \sqrt{\mu_0 \mu} H =$$

$$E \cdot H \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = \frac{E \cdot H}{c}$$

и окончательно

$$w = \frac{E \cdot H}{c}.$$

Умножая объёмную плотность энергии электромагнитной волны на скорость её распространения, получим некоторую величину

$$\Pi = cw = EH.$$

Размерность этой величины $\left[\Pi\right] = \frac{Дж}{м^3} \frac{м}{с} = \frac{Дж}{м^2 с}$. Это означает, что она показывает количество энергии, переносимой волной через единицу поверхности за единицу времени. Такую же размерность имеет плотность потока энергии.

Так как векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку с направлением распространения волны, направление вектора $\left[\boldsymbol{EH}\right]$ совпадает с направлением переноса энергии.

Поэтому вектор $\boldsymbol{n} = \left[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\right]$ представляет собой **плотность потока энергии**, переносимого электромагнитной волной в направлении её распространения. Этот вектор принято называть **вектором Умова–Пойнтинга.**

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арсентьев В.В., Кирпиченков В.Я.* и *др*. Курс физики. – СПб.: Лань, 2000. – Т. 1.
2. *Баранов А.В., Невская Г.Е.* и *др*. Колебания и волны. Оптика. Квантовая механика. – Новосибирск, 1993.
3. *Барановский С.Н., Болдырев А.М*. и *др.* Механика. Элект-ричество. Магнетизм. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1995.
4. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. – М.: ГИТТЛ, 1950.
5. Джанколи. Физика. – М.: Мир, 1989. – Т. 1, 2.
6. *Калашников С.Г.* Электричество – М.: Наука, 1970
7. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм. – М.: Высшая школа, 1983.
8. *Орир.* Физика. – М.: Мир, 1981. – Т. 1, 2.
9. *Путилов К.А.* Курс физики. – М.: ОГИЗ, 1945.
10. *Савельев И.В*. Курс общей физики. – М.: Наука, 1978. – Т. 1, 2.
11. *Сивухин Д.В*. Общий курс физики. –М.: Наука, 1977. – Т. 3.
12. *Спасский Б.И*. История физики. – М.: Высшая школа, 1977. – Т.1, 2
13. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Высш. школа, 1990.
14. Физика. Большой энциклопедический словарь. – М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999
15. *Фриш С.Э., Тиморева А.В.* Курс общей физики. – М.: Физматгиз, 1961. – Т. 2
16. *Штрауф Е.А.* Курс физики. – Л.: Судпромгиз, 1962.

ОГЛАВЛЕНИЕ