Министерство образования Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙУНИВЕРСИТЕТ

 № 2444

КОЛЕБАНИЯ

Компьютерный лабораторный практикум по физике

НОВОСИБИРСК
2003

УДК 534 (076.5)
К 602

Описаны компьютерные лабораторные работы, в которых моделируются колебания простейшей механической системы – пружинного маятника. Лабораторные работы позволяют проанализировать свободные, связанные, затухающие и вынужденные колебания. В начале пособия дано краткое теоретическое введение. Для каждой лабораторной работы приводится описание моделируемой ситуации и дается задание для выполнения работы на компьютере.

Составители: *А.В. Баранов, В.В. Давыдков, Б.И. Юдин, Г.И. Куркина, Л.М. Родникова*

Рецензент *Б.Б. Горлов*

Работа подготовлена на кафедре общей физики

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих системах могут происходить процессы, которым свойственна некоторая повторяемость состояния системы во времени. Такие процессы называются **колебаниями**. Если любые состояния системы повторяются через одинаковые интервалы времени, то колебания называются **периодическими**.

Если выведенная из положения равновесия и предоставленная самой себе система способна совершать колебания, то её называют **колебательной системой** или **осциллятором**, а колебания называют **собственными**. Осциллятор может совершать колебания и за счёт внешнего периодического воздействия. Такие колебания называются **вынужденными**.

1.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1.1. УРАВНЕНИЕ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Гармоническими называют колебания, происходящие по закону синуса или косинуса:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x – мгновенное значение колеблющейся величины, или **смещение**; A – **амплитуда колебания**; $\varphi = (\omega t + \varphi_o)$ – **фаза колебания**; φ_0 – **начальная фаза колебания**; ω – **циклическая частота колебания**; t – текущее время.

Кроме названных, ещё используются следующие параметры:

T – **период колебаний**; это время одного колебания;

ν – **частота колебаний**; это количество колебаний в единицу времени.

Любое произвольное колебание можно представить в виде суммы гармонических.

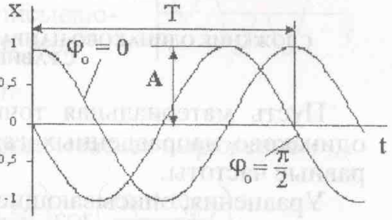
1.1.2. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

а) АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМА

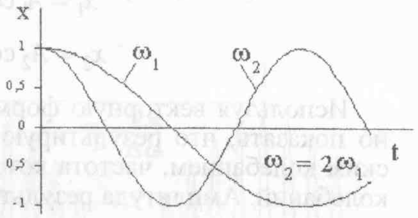
В аналитической форме колебание описывается выражением: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Входящие в него величины рассмотрены выше.

б) ГРАФИЧЕСКАЯ ФОРМА



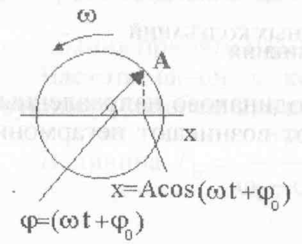
В графической форме колебание $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ представляется в виде графика зависимости значения величины x от времени t.



На верхнем рисунке представлены два графика гармонических колебаний с одинаковыми частотами и амплитудами. Колебания отличаются значениями начальной фазы. Увеличение начальной фазы вызывает смещение графика влево вдоль оси t.

На нижнем рисунке представлены графики колебаний, у которых одинаковы амплитуды и начальные фазы, но различны частоты. Из графиков видно, что за время одного полного колебания с частотой ω_2 успеет произойти лишь половина полного колебания с частотой ω_1. Следовательно, $\omega_2 = 2\omega_1$.

в) ВЕКТОРНАЯ ФОРМА



В ряде случаев представление гармонических колебаний в векторной форме позволяет решить задачу быстрее и проще.

Выберем некоторую ось x и построим под углом φ_0 к ней вектор, длина которого равна амплитуде гармонического колебания A. Пусть вектор равномерно вращается против часовой стрелки с угловой скоростью, равной циклической частоте колебания ω. В этом случае угол между вектором A и осью x в любой момент времени будет равен $\omega t+\varphi_0$*. Проекция вектора на ось x будет равна $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Но это выражение и описывает гармоническое колебание.

1.1.3. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

СЛОЖЕНИЕ ОДИНАКОВО НАПРАВЛЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С РАВНЫМИ ЧАСТОТАМИ

Пусть материальная точка участвует одновременно в двух одинаково направленных гармонических колебаниях, имеющих равные частоты.

Уравнения, описывающие эти колебания, имеют вид:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01})$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02}).$$

Используя векторную форму представления колебаний, можно показать, что результирующий процесс является гармоническим колебанием, частота которого равна частоте складываемых колебаний. Амплитуда результирующего колебания:

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2}$$

Начальная фаза результирующего колебания:

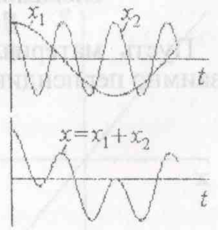
$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

СЛОЖЕНИЕ ОДИНАКОВО НАПРАВЛЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ С РАЗНЫМИ ЧАСТОТАМИ. БИЕНИЯ

Можно показать, что при сложении одинаково направленных гармонических колебаний разных частот возникают негармонические колебания (см. рисунок).

* В момент $t = 0$ угол равнялся φ_0.

Определённый интерес представляет частный случай – сложение одинаково направленных колебаний с близкими частотами (т. е. $\omega_1 \approx \omega_2$). Рассмотрим этот случай подробнее. Будем полагать, что начальные фазы и амплитуды складываемых колебаний одинаковы. В этом случае уравнения, описывающие складываемые колебания, имеют вид:

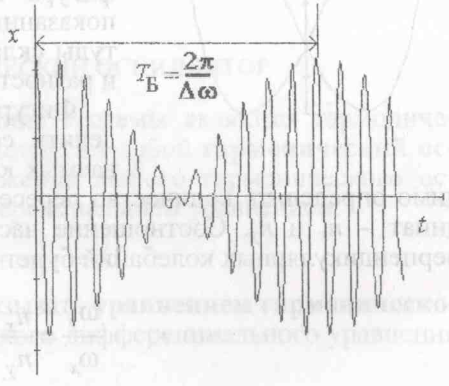


$$x_1 = A\cos\omega_1 t, \qquad x_2 = A\cos\omega_2 t.$$

Результирующий процесс будет описываться выражением

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Это выражение представляет собой произведение двух гармонических функций. Циклическая частота первой очень мала (по условию $\omega_1 \approx \omega_2$), а второй – приблизительно равна циклическим частотам складываемых колебаний ω_1 и ω_2. Это позволяет трактовать результирующий процесс как колебание с частотой, равной $\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, амплитуда



которого медленно меняется по закону $2A\cos\left(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$. Такие колебания принято называть **биениями**.

Частота $\omega_1 - \omega_2$, с которой изменяется амплитуда результирующего колебания, называется **частотой биений**.

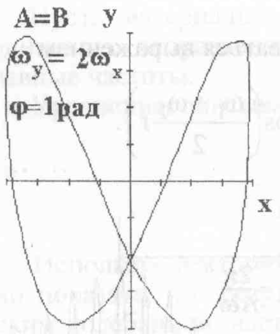
Величина $T_Б = \dfrac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ называется **периодом биений**.

СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$x = A\cos\omega_1 t,$$
$$y = B\cos(\omega_2 t + \varphi).$$

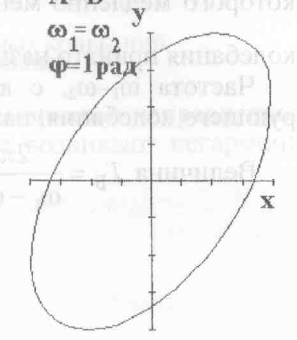
Материальная точка будет одновременно двигаться вдоль двух осей – x и y. Поэтому траектория её движения в общем случае может быть довольно сложной. Такая траектория называется **фигурой Лиссажу**. Например, если частоты складываемых колебаний отличаются в два раза, то фигура Лиссажу будет иметь вид, показанный на рисунке (если амплитуды складываемых колебаний равны и разность их фаз равна 1 рад).



Фигуры Лиссажу позволяют определить соотношение частот складываемых колебаний. Для этого необходимо определить количество пересечений фигуры с осями координат – n_x и n_y. Соотношение частот складываемых взаимно-перпендикулярных колебаний будет равно:

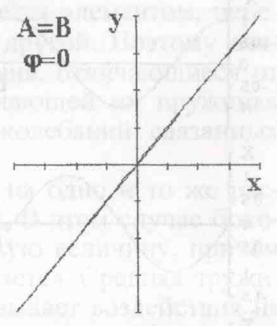
$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{n_x}{n_y}.$$

Если частоты складываемых колебаний одинаковы, то фигура Лиссажу будет иметь форму эллипса. Длина и ориентация полуосей эллипса зависят от амплитуд и разности фаз φ складываемых колебаний. Например, при равных амплитудах и разности фаз в 1 радиан эллипс имеет вид, показанный на рисунке.



Если разность фаз $\varphi = 0$, то малая полуось эллипса равна нулю и траектория будет прямой, проходящей через первый и третий квадранты.

Траектория точки будет представлять собой прямую и в том случае, когда $\varphi = \pi$. Только прямая, вдоль которой будут происходить колебания, будет расположена во втором и четвёртом квадрантах.



Если разность фаз $\varphi = \pi/2$, то траектория описывается следующим выражением:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат. Если амплитуды складываемых колебаний будут равны, точка будет двигаться по окружности. Траектория будет такой же и в случае $\varphi = -\pi/2$. Только точка будет двигаться в противоположную сторону.

1.2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Если собственные колебания системы являются гармоническими, то такая система представляет собой **гармонический осциллятор**. Собственное движение любого гармонического осциллятора описывается дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

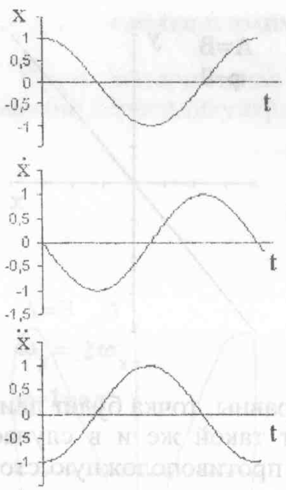
Это уравнение принято называть **уравнением гармонического осциллятора**. Решение такого дифференциального уравнения имеет вид $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Величина ω_0 называется **циклической частотой собственных колебаний гармонического осциллятора** или **собственной циклической частотой гармонического осциллятора**. Она зависит только от свойств самого осциллятора.

1.2.1. ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК КАК ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Пружинный маятник – это груз массы m, закреплённый на пружине, коэффициент упругости которой равен k.

Со стороны пружины на груз действует упругая сила $F_x = -kx$ (здесь x – смещение груза от положения равновесия).



Пружинный маятник является гармоническим осциллятором, если у него нет потерь энергии. Циклическая частота собственных колебаний пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Из этого выражения видно, что ω_0 растёт с увеличением упругости пружины и уменьшением массы груза.

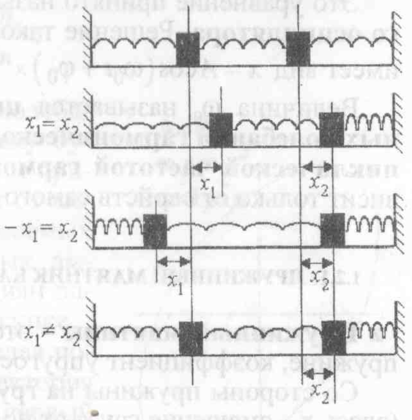
Величина $\dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ – это **скорость** колеблющегося груза, а $\ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ – его **ускорение**.

У пружинного маятника, совершающего гармонические колебания, координата груза, его скорость и ускорение изменяются по гармоническому закону. Начальные фазы колебаний смещения, скорости и ускорения груза различны. Это хорошо видно на графиках (см. рисунок). Обратите внимание на то, что в момент времени, когда смещение от положения равновесия максимально, скорость груза равна нулю, а ускорение максимально по величине и направлено против смещения.

1.2.2. СВЯЗАННЫЕ ПРУЖИННЫЕ МАЯТНИКИ

Связанные маятники – это несколько маятников, которые взаимодействуют между собой.

Например, связанными являются два пружинных маятника, которые соединены пружиной (см. рисунок).



Пусть грузы маятников имеют одинаковые массы m, пружины имеют одинаковый коэффициент упругости k и одинаковую длину и в системе нет потерь механической энергии.

Пружина, связывающая маятники, является элементом, передающим воздействие одного маятника на другой. Поэтому связанные маятники могут совершать колебания, отличающиеся от колебаний этих же маятников без соединяющей их пружины. Рассмотрим несколько частных случаев колебаний связанных маятников.

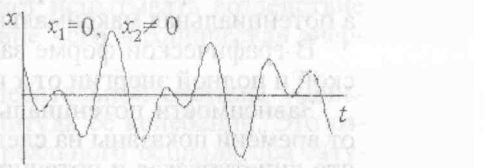
Сместим оба маятника в одну сторону на одно и то же расстояние от положения равновесия ($x_2 = x_1$). В этом случае боковые пружины деформируются на одинаковую величину, причём одна из них растягивается, а другая – сжимается. Средняя пружина не деформируется. Поэтому она не оказывает воздействия на грузы и маятники ведут себя как два независимых. Они совершают синфазные гармонические колебания с циклической частотой $w_{01} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Сместим оба маятника в противоположных направлениях на одинаковые расстояния от положения равновесия ($x_2 = -x_1$). В этом случае боковые пружины деформируются одинаково, а средняя пружина деформируется в два раза сильнее, чем боковые. Сила, с которой две пружины будут действовать на груз, будет в три раза больше силы, действующей на груз несвязанного маятника (при таком же смещении груза от положения равновесия). Поэтому ускорение груза будет в три раза больше. Маятники будут совершать противофазные гармонические колебания с циклической частотой $w_{02} = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$.

Собственные колебания связанных маятников, происходящие по гармоническому закону, называют **нормальными колебаниями**.

В системе из двух связанных маятников может быть только два рассмотренных вида нормальных колебаний.

Можно показать, что любое произвольное собственное колебание двух связанных маятников представляет собой суперпозицию нормальных колебаний. Поскольку частоты нормальных колебаний различны, результирующее колебание является негармоническим.



Например, если смещение левого маятника равно нулю, а правый маятник смещён на некоторое расстояние от положения равновесия, то график, описывающий колебания одного из маятников, будет иметь вид, показанный на рисунке.

1.2.3. ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Гармонический осциллятор обладает энергией, за счёт которой он и совершает колебания. Найдём выражения для кинетической, потенциальной и полной механической энергии идеального пружинного маятника.

Кинетическая энергия, связанная с движением груза:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Потенциальная энергия, связанная с деформацией пружины:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Полная механическая энергия осциллятора:

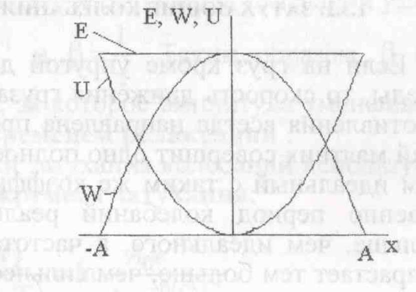
$$E = W + U = \frac{1}{2}A^2\left(m\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + k\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right) =$$

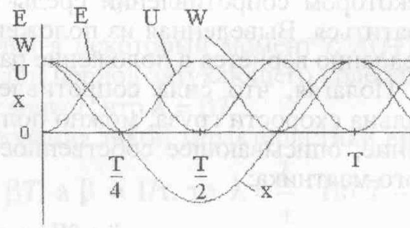
$$= \frac{1}{2}A^2 k\left(\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right) = \frac{A^2 k}{2}.$$

Полная механическая энергия идеального пружинного маятника постоянна. Кинетическая и потенциальная энергия в процессе колебаний изменяются, причём в положении равновесия кинетическая энергия достигает максимального значения, а потенциальная энергия уменьшается до нуля; при максимальном отклонении груза, наоборот, – кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная максимальна.

В графической форме зависимости потенциальной, кинетической и полной энергии от x имеют вид, показанный на рисунке.

Зависимости потенциальной, кинетической и полной энергии от времени показаны на следующем рисунке. Обратите внимание, что кинетическая и потенциальная энергия изменяются с удвоенной частотой, т. е. с частотой $2\omega_0$.





Полученные выводы применимы не только к пружинному маятнику. Полная энергия любого гармонического осциллятора определяется амплитудой колебаний и упругими свойствами осциллятора и не изменяется с течением времени.

В случае колебаний связанных маятников зависимостям энергии маятников от координаты и от времени присущи некоторые особенности. Как отмечено в предыдущем разделе, в общем случае (т. е. при $x_1 \neq x_2$) каждый из связанных маятников совершает негармонические колебания. Можно сказать, что амплитуда колебаний каждого из маятников зависит от времени. Поскольку энергия осциллятора прямо пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, полная энергия каждого из маятников изменяется с течением времени. Причём энергия маятника, амплитуда которого уменьшается, передаётся пружиной второму маятнику, амплитуда которого увеличивается. При этом полная энергия связанных маятников остаётся постоянной (если связанные маятники идеальны).

1.3. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

В предыдущем разделе была рассмотрена идеальная колебательная система – гармонический осциллятор. Было показано, что полная энергия собственных колебаний такого осциллятора постоянна, вследствие чего амплитуда колебаний не изменяется. В любой реальной системе существуют потери энергии колебаний. Например, пружинный маятник может испытывать воздействие силы сопротивления среды, вследствие чего механическая энергия маятника уменьшается.

Поскольку энергия реальной колебательной системы уменьшается, должна уменьшаться и амплитуда её колебаний. Это означает, что собственные колебания реального осциллятора затухающие.

1.3.1. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Если на груз кроме упругой действует сила сопротивления среды, то скорость движения груза уменьшается – ведь сила сопротивления всегда направлена против скорости. Значит, реальный маятник совершит одно полное колебание за большее время, чем идеальный с таким же коэффициентом упругости. Соответственно период колебаний реального пружинного маятника больше, чем идеального, а частота меньше. Период колебаний возрастает тем больше, чем сильнее сопротивление среды. И при некотором сопротивлении среды колебания могут вообще прекратиться. Выведенная из положения равновесия система просто медленно вернётся в положение равновесия.

Полагая, что сила сопротивления среды прямо пропорциональна скорости груза, можно получить дифференциальное уравнение, описывающее собственное движение реального пружинного маятника:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

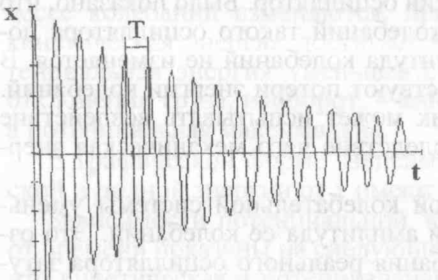
(здесь $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\beta = \dfrac{r}{2m}$, где r – коэффициент сопротивления среды).

Решение этого уравнения при $\omega_0 > \beta$ имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Из решения видно, что маятник совершает колебания, амплитуда которых с течением времени уменьшается по экспоненциальному закону $A_0 e^{-\beta t}$, т. е. такой маятник совершает **затухающие колебания**. График затухающего колебания изображён на рисунке.



Чем больше коэффициент β, тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний. Поэтому его называют **коэффициентом затухания**.

Если ввести τ – время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз, то $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$ и $\beta = \dfrac{1}{\tau}$. Таким образом, β есть величина, обратная времени, за которое амплитуда уменьшается в e раз. Время τ называется **временем релаксации***.

В качестве характеристики затухания колебаний используется также **логарифмический декремент затухания**:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}},$$

где $A(t)$ – амплитуда колебания в некоторый момент t; $A(t+T)$ – амплитуда колебания через один период затухающего колебания. Из последнего соотношения следует, что $\lambda = \beta T$.

Целесообразность использования такой характеристики видна из следующего. Так как $\lambda = \beta T$, а $\beta = 1/\tau$, то $\lambda = \dfrac{T}{\tau}$. Но T – это время, за которое совершается одно колебание, а τ – время, за которое произойдёт в общем случае несколько колебаний**. Тогда

$$\lambda = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e},$$

где N_e – число колебаний, в ходе которых амплитуда уменьшится в e раз.

Таким образом, β и λ являются характеристиками затухания, дополняющими друг друга: β показывает, как быстро колебания затухают во времени, но при этом не содержит информации о количестве колебаний; λ же показывает, за сколько колебаний амплитуда уменьшится в e раз, но ничего не говорит о времени, за которое произойдёт это уменьшение.

Из решения дифференциального уравнения следует, что **частота затухающих колебаний** ω меньше частоты собственных колебаний идеального маятника ω_0: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. С ростом сопротивления среды частота затухающих колебаний уменьшается.

* От лат. relaxatio – ослабление

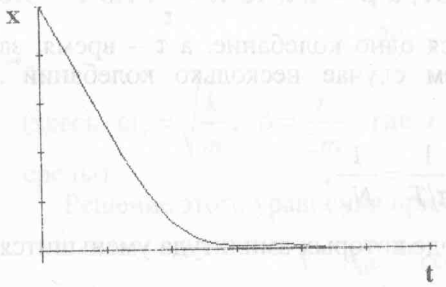
** В ходе этих колебаний амплитуда как раз и уменьшится в e раз.

Колебания, совершаемые реальным пружинным маятником, не являются гармоническими. Они также не являются и периодическими. Однако в физике принято использовать так называемый **период затухающих колебаний** $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (см. рисунок); при этом под T подразумевают время, за которое совершается одно колебание.

1.3.2. КРИТИЧЕСКОЕ ЗАТУХАНИЕ

Ранее было показано, что при достаточно большом сопротивлении среды колебания станут невозможны. Такой режим наступает, если выполняется условие $\beta \geq \omega_0$.

В этом случае система, которую вывели из положения равновесия, постепенно возвращается в него, не совершая колебаний (см. рисунок). Имеет место **апериодический процесс**.



Затухание, при котором $\beta = \omega_0$, называют **критическим**. При таком (и большем) затухании собственные колебания в системе невозможны.

1.3.3. ЭНЕРГИЯ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Особенностью реального осциллятора является то, что амплитуда его колебаний с течением времени уменьшается. Поскольку полная энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды, она также будет уменьшаться с течением времени.

Для пружинного маятника

$$U = \frac{A^2 k}{2} = A_0^2 e^{-2\beta t}\frac{k}{2}.$$

Обратите внимание – скорость уменьшения энергии осциллятора в два раза выше скорости уменьшения амплитуды колебаний осциллятора.

1.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Любой осциллятор может испытывать внешнее воздействие. Если внешнее воздействие периодическое, то возникают **вынужденные колебания осциллятора**. Характер колебаний определяется как внешним воздействием, так и свойствами осциллятора.

1.4.1. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Рассмотрим поведение пружинного маятника, на который действует внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону: $F = F_0 \cdot \cos\omega t$. Дифференциальное уравнение, описывающее движение маятника, имеет такой вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

где $\beta = \dfrac{r}{2m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Общее решение такого уравнения является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения уже рассмотрено. Оно описывает или затухающее колебание, или апериодический процесс. В любом случае с течением достаточного промежутка времени это решение (и соответствующее движение осциллятора) становится пренебрежимо малым.

Частное решение неоднородного уравнения описывает **установившееся вынужденное гармоническое колебание** и может быть записано в виде:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi),$$

Установившееся колебание будет иметь амплитуду, равную:

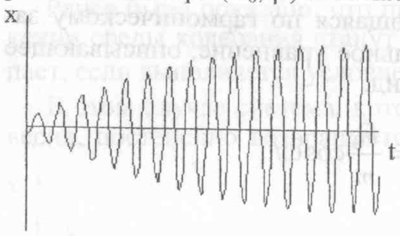
$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Величина φ представляет собой разность фаз колебаний внешней силы и установившихся вынужденных колебаний маятника:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Частота установившегося колебания будет равна частоте внешнего воздействия.

Амплитуда A и разность фаз φ колебаний зависят от параметров осциллятора (ω_0, β) и от частоты внешнего воздействия ω.



Как уже отмечалось, общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, поэтому сразу после начала внешнего воздействия колебания осциллятора будут представлять собой результат сложения двух колебаний – затухающего колебания с частотой ω′ и гармонического колебания с частотой внешнего воздействия ω. Постепенно амплитуда затухающих колебаний становится пренебрежимо малой и колебание становится гармоническим (см. рисунок).

1.4.2. ЗАВИСИМОСТЬ АМПЛИТУДЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ЧАСТОТЫ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ. ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА

Рассмотрим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия и параметров осциллятора более подробно.

Из выражения

$$A = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

видно, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты внешнего воздействия ω. Можно показать, что эта функция имеет экстремум, т. е. при определённой частоте амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной.

Это явление называют **резонансом**, а частоту вынужденных колебаний, при которой амплитуда максимальна, – **резонансной частотой**.

Резонансная частота равна $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Амплитуда вынужденных колебаний на этой частоте будет максимальна. Её значение

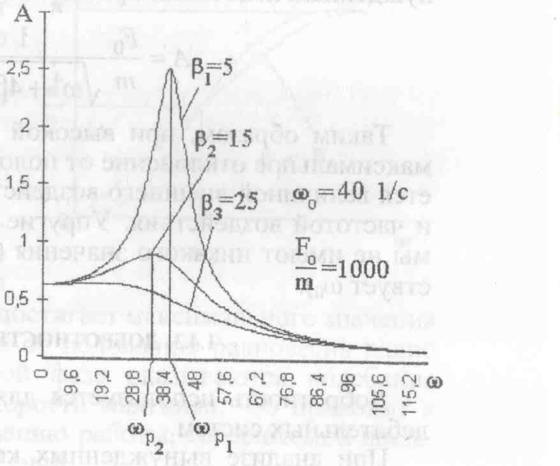
$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2\right)^2 + 4\beta^2\left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)}} =$$

$$= \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Обратите внимание, что увеличение амплитуды при резонансе обусловлено не ростом амплитуды внешнего воздействия, а его частотой. Максимальное усилие, прикладываемое к осциллятору, остаётся постоянным. Однако по мере приближения частоты к резонансной система раскачивается всё сильнее!

При слабом затухании ($\beta \langle\langle \omega_0$) резонансную амплитуду можно считать равной

$$A_{\text{рез}} \approx \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{2\beta\omega_0}$$



Обратите внимание на то, что значение β достаточно сильно влияет на амплитуду при резонансе (см. рисунок) – чем больше потери, тем меньше резонансная амплитуда.

При отклонении частоты внешнего воздействия от резонансной амплитуда вынужденных колебаний уменьшается (см. рисунок).

Найдём амплитуду вынужденных колебаний для низких ($\omega << \omega_o$) и высоких ($\omega >> \omega_o$) частот внешнего воздействия.

При $\omega \ll \omega_0$ амплитуда вынужденных колебаний будет приблизительно равна:

$$A \approx \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\omega_0^4+4\beta^2\omega^2}},$$

если затухание мало ($\beta \langle\langle \omega_0$), то

$$A \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2}=\frac{F_0}{k},$$

где k – коэффициент упругости пружины.

В полученном выражении отсутствует частота внешнего воздействия. Это значит, что при малых частотах внешнего воздействия колебательная система реагирует на гармоническую внешнюю силу практически как на статическую, т. е. не изменяющуюся с течением времени. Амплитуда вынужденных колебаний определяется величиной внешнего воздействия и упругими свойствами осциллятора.

При высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$), и при $\beta \ll \omega$ амплитуда вынужденных колебаний приблизительно равна

$$A \approx \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\omega^4+4\beta^2\omega^2}} \approx \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Таким образом, при высокой частоте внешнего воздействия максимальное отклонение от положения равновесия A определяется величиной внешнего воздействия, инертностью осциллятора и частотой воздействия. Упругие свойства колебательной системы не имеют никакого значения (поскольку в выражении отсутствует ω_0).

1.4.3. ДОБРОТНОСТЬ ОСЦИЛЛЯТОРА

Добротность используется для характеристики реальных колебательных систем.

При анализе вынужденных колебаний **добротность** определяют как отношение амплитуды вынужденных колебаний при резонансе $A_{рез}$ к амплитуде при низкой частоте $A_{стат}$.

$$Q=\frac{A_{рез}}{A_{стат}}.$$

Используя полученные в предыдущем разделе выражения для $A_{рез}$ и $A_{стат}$, получаем

$$Q=\frac{A_{рез}}{A_{стат}}=\frac{F_0}{2m\omega_0\beta}\frac{m\omega_0^2}{F_0}=\frac{\omega_0}{2\beta}=\frac{2\pi}{2\beta T}=\frac{\pi}{\beta T}=\frac{\pi}{\lambda}.$$

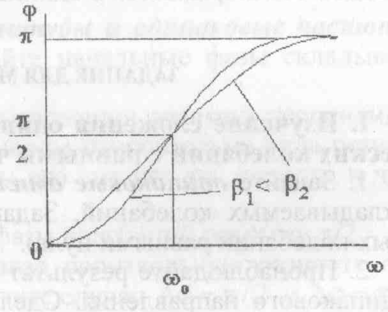
Добротность показывает, во сколько раз амплитуда при резонансе больше амплитуды вынужденных колебаний при низких частотах. Следовательно, чем больше добротность, тем сильнее проявляет себя резонанс при вынужденных колебаниях.

1.4.4. ЗАВИСИМОСТЬ ФАЗЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ЧАСТОТЫ

Вынужденные колебания описываются уравнением

$$x=A(\omega)\cos(\omega t-\varphi),$$

где $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$, т. е. колебания осциллятора отстают по фазе от колебаний внешнего воздействия $F_0\cos\omega t$.



Нетрудно получить, что при $\omega = 0$ $\varphi = \operatorname{arctg}0 = 0$ радиан.

При $\omega = \omega_0$ $\varphi = \operatorname{arctg}\infty = \pi/2$.

При $\omega > \omega_0$ $\varphi \to \pi$.

Таким образом, при резонансе колебания x отстают по фазе от внешнего воздействия на $\pi/2$. Другими словами, сила достигает максимального значения в те моменты, когда смещение от положения равновесия равно нулю. При этом в одинаковой фазе оказываются колебание внешней силы и колебание скорости маятника, что приводит к максимально возможному значению работы, совершаемой внешней силой за один период колебаний.

2. ОПИСАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

2.1. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

МОДЕЛИРУЕМАЯ СИСТЕМА

Моделируется сложение двух гармонических колебаний с произвольными амплитудами, частотами и начальными фазами. Возможна реализация двух вариантов: 1) сложение колебаний одинакового направления и 2) сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Имитируется сложение колебаний на экране осциллографа. Изображение на экране можно настраивать, изменяя значение цены деления масштабной сетки по горизонтальной и вертикальной осям.

В случае сложения колебаний одинакового направления цена деления горизонтальной оси выражается в единицах времени (с/дел), вертикальной – в единицах напряжения (В/дел). В случае сложения взаимно перпендикулярных колебаний цена деления каждой оси выражается в единицах напряжения (В/дел).

ЗАДАНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

I. Изучение сложения одинаково направленных гармонических колебаний с равными частотами.

1. Задайте ***одинаковые амплитуды и одинаковые частоты*** складываемых колебаний. Задайте начальные фазы складываемых колебаний равными нулю.
2. Пронаблюдайте результат сложения колебаний в случае их одинакового направления. Сделайте выводы относительно вида результирующего колебания, величины его амплитуды, периода и частоты.
3. Повторите пп.1 и 2, задав начальные фазы колебаний равными $\pi/2$.
4. Повторите пп.1 и 2, задавая произвольную разность фаз складываемых колебаний.
5. Пронаблюдайте результат сложения для произвольных амплитуд и разности фаз складываемых колебаний.
6. Сделайте общие выводы из результатов моделирования.

II. Изучение сложения одинаково направленных гармонических колебаний с разными частотами.

1. Задайте ***одинаковые амплитуды и разные частоты*** складываемых колебаний. Задайте начальные фазы складываемых колебаний равными нулю.
2. Пронаблюдайте результат сложения колебаний в случае их одинакового направления. Сделайте выводы относительно вида результирующего колебания.
3. Повторите пп.1 и 2, задав фазы колебаний равными $\pi/2$.
4. Повторите пп.1 и 2, задавая произвольную разность фаз складываемых колебаний.
5. Пронаблюдайте результат сложения для произвольных амплитуд и начальных фаз складываемых колебаний.
6. Пронаблюдайте результат сложения при равных амплитудах и близких значениях частот складываемых колебаний. Проверьте выполнение соотношения $\nu_б = \nu_2 - \nu_1$.
6. Сделайте общие выводы из результатов моделирования.

III. Изучение сложения взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

1. Задайте ***одинаковые амплитуды и одинаковые частоты*** складываемых колебаний. Задайте начальные фазы складываемых колебаний равными нулю.
2. Пронаблюдайте результат сложения взаимно перпендикулярных колебаний. Сделайте выводы относительно вида результирующего колебания, величины его амплитуды, периода и частоты.
3. Повторите пп.1 и 2, задав фазы колебаний равными $\pi/2$.
4. Повторите пп.1 и 2, задавая произвольную разность фаз складываемых колебаний (выделите случаи $\Delta\varphi = \pi/2$ и $\Delta\varphi = \pi$).
5. Пронаблюдайте результат сложения для произвольных амплитуд и фаз складываемых колебаний.
7. Проанализируйте ситуацию $\nu_1 : \nu_2 = m : n$, где m и n – целые числа.
6. Сделайте общие выводы из результатов моделирования.

2.2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

МОДЕЛИРУЕМАЯ СИСТЕМА

Моделируются собственные колебания идеального пружинного маятника.

В качестве исходных данных задаются:

m – масса груза,

k – коэффициент упругости пружины,

x_0 – начальное смещение груза из положения равновесия,

v_0 – начальная скорость груза.

В процессе работы моделирующей программы могут быть активизированы два окна. В первом окне производится установка параметров и наблюдается процесс собственных колебаний маятника. Во втором окне воспроизводятся графики зависимостей смещения и скорости груза от времени. В первом окне имеется таймер, регистрирующий текущее время наблюдаемого процесса и средства управления процессом (пуск, остановка, ускорение-замедление, смена параметров). В процессе колебаний груза выводится текущее значение его координаты.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Задайте параметры системы и её начальное состояние.
2. Пронаблюдайте собственные колебания пружинного маятника.
3. Используя таймер, определите период и собственную циклическую частоту маятника.
4. Активизируйте окно графиков. Сверьте результаты расчёта периода с периодом колебаний на графиках.
5. Определите фазовый сдвиг колебаний смещения и колебаний скорости. Найдите максимальные значения смещения и скорости в процессе колебаний.
6. Определите максимальную кинетическую, максимальную потенциальную и полную энергию колебаний маятника. Сравните полученные значения между собой.
7. Исследуйте зависимость периода колебаний от массы груза.
8. Исследуйте зависимость периода колебаний от коэффициента упругости пружины.
9. Исследуйте зависимость полной энергии от амплитуды колебаний.
10. Сделайте выводы из результатов моделирования.

2.3. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

МОДЕЛИРУЕМАЯ СИСТЕМА

Моделируется собственное движение пружинного маятника с потерями энергии.

В качестве исходных данных задаются:

m – масса груза,

k – коэффициент упругости пружины,

r – коэффициент сопротивления среды,

x_0 – начальное смещение груза от положения равновесия.

В процессе работы моделирующей программы могут быть активизированы два окна. В первом окне производится установка параметров и наблюдается процесс движения маятника. Во втором окне воспроизводятся графики зависимостей смещения, скорости и полной энергии маятника от времени. В первом окне имеется таймер, регистрирующий текущее время наблюдаемого процесса и средства управления процессом (пуск, остановка, ускорение-замедление, смена параметров). В процессе колебаний груза выводится текущее значение его координаты.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Задайте параметры системы и её начальное состояние.
2. Пронаблюдайте собственное движение пружинного маятника.
3. Изменяя только величину r, получите режим затухающих колебаний.
4. Используя таймер, определите период и циклическую частоту затухающих колебаний.
5. Активизируйте окно графиков. Сверьте результаты расчёта периода с периодом колебаний на графиках.
6. Определите коэффициент затухания и логарифмический декремент, используя графики.
7. Используя графики, определите время релаксации для смещения и для полной энергии колебаний. Сравните эти времена между собой.
8. Исследуйте зависимость периода затухающих колебаний от коэффициента сопротивления среды.
9. Исследуйте зависимость коэффициента затухания колебаний от коэффициента сопротивления среды.
10. Изменяя коэффициент затухания, определите условия перехода системы в апериодический режим.
11. Сделайте выводы из результатов моделирования.

2.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

МОДЕЛИРУЕМАЯ СИСТЕМА

Моделируется движение пружинного маятника под действием внешней гармонической вынуждающей силы.

В качестве исходных данных задаются:

m – масса груза,

k – коэффициент упругости пружины,

r – коэффициент сопротивления среды,

x_0 – начальное смещение груза от положения равновесия,

F_0 – амплитуда вынуждающей силы,

ν – частота вынуждающей силы.

В процессе работы моделирующей программы могут быть активизированы два окна. В первом окне производится установка параметров и наблюдается процесс движения маятника. Во втором окне воспроизводятся графики зависимостей смещения, скорости и полной энергии маятника от времени. В первом окне имеется таймер, регистрирующий текущее время наблюдаемого процесса и средства управления процессом (пуск, остановка, ускорение-замедление, смена параметров). В процессе колебаний груза выводится текущее значение его координаты.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Задайте параметры системы и параметры вынуждающей силы.
2. Пронаблюдайте процесс установления вынужденных колебаний маятника.
3. Используя таймер, определите период и частоту установившихся колебаний. Сравните частоту колебаний с частотой воздействия.
4. Активизируйте окно графиков. Сверьте результаты расчёта периода с периодом установившихся колебаний на графиках.
5. Проанализируйте характер графиков.
6. Исследуйте зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы, зафиксировав параметры маятника и амплитуду вынуждающей силы.
7. Определите резонансную частоту системы.
8. Исследуйте зависимость амплитуды вынужденных колебаний от амплитуды вынуждающей силы, зафиксировав параметры маятника и частоту вынуждающей силы.

9. Используя полученные данные, оцените добротность колебательной системы.
10. Сделайте выводы из результатов моделирования.

2.5. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ ПРУЖИННЫХ МАЯТНИКОВ

МОДЕЛИРУЕМАЯ СИСТЕМА

Моделируются собственные колебания двух одинаковых идеальных связанных пружинных маятника.

В качестве исходных данных задаются:

m – масса груза,

k – коэффициент упругости пружин,

x_{01}, x_{01} – начальные смещения грузов от положения равновесия

В процессе работы моделирующей программы могут быть активизированы два окна. В первом окне производится установка параметров и наблюдается процесс собственных колебаний связанных маятников. Во втором окне воспроизводятся графики зависимостей смещения и скорости груза от времени. В первом окне имеется таймер, регистрирующий текущее время наблюдаемого процесса и средства управления процессом (пуск, остановка, ускорение-замедление, смена параметров). В процессе колебаний грузов выводится текущие значения их координат.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Задайте значения массы и коэффициента упругости. Выведите маятники из положения равновесия, **задав одинаковые по величине и знаку смещения**.
2. Пронаблюдайте **первое нормальное колебание связанных маятников.**
3. Используя таймер, определите период и циклическую частоту колебаний каждого маятника. Сравните значение частоты колебаний с собственной частотой несвязанного маятника.
4. Активизируйте окно графиков. Сверьте результаты расчёта периода с периодом колебаний на графиках.
5. Оставив прежние значения массы и коэффициента упругости, выведите маятники из положения равновесия, **задав одинаковые по величине, но противоположные по знаку смещения**.
6. Повторите п.2-4 для **второго нормального колебания связанных маятников**.

7. Оставив прежние значения массы и коэффициента упругости, выведите **из положения равновесия только один из маятников**.

8. Пронаблюдайте колебания связанных маятников. Проанализируйте процесс обмена энергией маятниками.

9. Активизируйте окно графиков. Проанализируйте полученное колебание.

10. Исследуйте поведение системы при различных значениях параметров и различных начальных смещениях из положения равновесия.

11. Сделайте выводы из результатов моделирования.

КОЛЕБАНИЯ

Лабораторный практикум по физике

Редактор *И.Л. Кескевич*

Подписано в печать 06.02.2003. Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная.
Тираж 100 экз. Уч.-изд. л. 1,75. Печ. л. 1,75. Изд. № 294. Заказ № 76
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20