Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. А. ШТЫГАШЕВ, Ю. Г. ПЕЙСАХОВИЧ

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2022

УДК 53(076.1)
Ш 948

Рецензенты:
канд. техн. наук *В. В. Христофоров*
д-р физ.-мат. наук *Я. С. Гринберг*

Работа подготовлена на кафедре общей физики
для студентов I курса АВТФ

Штыгашев А.А.
Ш 948 Задачи по физике. Механика. Молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие / А. А. Штыгашев, Ю. Г. Пейсахович. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2022. – 123 с.

ISBN 978-5-7782-4778-9

Пособие соответствует первой части рабочей программы по физике для студентов АВТФ, обучающихся по направлениям: «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии», «Программная инженерия», «Информационная безопасность», «Биотехнические системы и технологии», «Машиностроение», «Приборостроение», «Управление в технических системах» и по специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем». Приведены задачи и примеры их решения по всем темам разделов: механика, молекулярная физика и термодинамика. Предназначено для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

УДК 53(076.1)

ISBN 978-5-7782-4778-9

ВВЕДЕНИЕ

Решение учебных физических задач является важнейшей частью курса физики. Это позволяет глубже понять природу физических законов и освоить элементарные методики их практического применения. Для того чтобы научиться хорошо решать задачи по физике, необходимо на практических занятиях и самостоятельно прорешать определенное количество достаточно стандартных задач. Решение задач по физике – это активная индивидуальная форма учебной деятельности. С каждой решенной или разобранной задачей растут понимание предмета, профессиональное мастерство студента и уверенность в своих силах, что является немаловажным в процессе обучения и приобретения жизненного опыта.

Специфика физических задач, в отличие от математических и технических, состоит в том, что в них переплетаются качественные и количественные аспекты, которые тем не менее обычно не очень сложно разделить между собой в процессе решения. Это позволяет в конечном счете описать конкретное физическое явление в природе или в технике, и в этом отношении они интересны для любого мыслящего человека.

Решение задач – творческий процесс, как правило, он неформализуем, но можно выделить основные логические этапы и шаги алгоритмической процедуры решения, применимые к широкому кругу физических задач.

1. Внимательно прочитать условие задачи и понять, к какому разделу физики относится данная задача. Вспомнить основные физические законы и формулы этого раздела (их, на удивление, совсем немного и они имеют довольно простой смысл). Выделить заданные физические величины и те величины, которые надо найти.

2. Сделать эскизный рисунок или схему, на рисунке указать основные векторные и скалярные физические величины.

3. Выписать математические уравнения, связывающие физические величины задачи.

4. Решить систему уравнений. Желательно сначала найти аналитическое решение и проанализировать его. Определить размерность найденных величин, а затем произвести числовые расчеты с требуемой точностью.

5. Полученное решение следует проанализировать на выполнение фундаментальных законов и на соответствие здравому смыслу в очевидных предельных случаях.

6. Выписать ответ.

Весь материал пособия распределен по темам, соответствующим рабочей программе курса физики на АВТФ. Каждая тема содержит краткий теоретический раздел справочного характера, примеры решения типовых задач, список задач для аудиторной работы и задания на дом. Теоретические разделы и примеры решения типовых задач практикума удобно использовать при выполнении расчетно-графических заданий.

Задачи подбирались из апробированных задачников для студентов высших технических учебных заведений, список которых приведен в конце пособия [1–3].

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Мгновенная скорость материальной точки (*частицы*)

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{i}\,\upsilon_x + \boldsymbol{j}\,\upsilon_y + \boldsymbol{k}\upsilon_z\,, \tag{1.1}$$

где $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ – *перемещение частицы* за промежуток времени Δt; $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}\,y + \boldsymbol{k}\,z$ – *радиус-вектор*, задающий положение материальной точки относительно системы отсчета, с которой связана декартова система координат с ортами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; x, y, z – *проекции радиуса-вектора* $\boldsymbol{r}$ на координатные оси. *Законом движения материальной точки в векторной форме* называется временная зависимость $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, а *законом движения в координатной форме* – зависимость $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. *Проекции вектора скорости* $\upsilon_x = dx/dt$, $\upsilon_y = dy/dt$, $\upsilon_z = dz/dt$, а *модуль скорости* $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$.

Вектор *средней скорости за время* Δt

$$\langle \boldsymbol{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\,. \tag{1.2}$$

Путь, пройденный материальной точкой вдоль траектории за промежуток времени от t до $t+\Delta t$,

$$\Delta s = \int_t^{t+\Delta t} \upsilon(t)\,dt\,. \tag{1.3}$$

Средняя путевая скорость

$$\bar{\upsilon} = \Delta s / \Delta t\,. \tag{1.4}$$

Классический закон сложения скоростей

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}' + \boldsymbol{V}, \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}$ – скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета (*абсолютная скорость*); $\boldsymbol{\upsilon}'$ – скорость этой материальной точки относительно движущейся системы отсчета (*относительная скорость*); $\boldsymbol{V}$ – скорость движения пространства в окрестности материальной точки, определяемая движением системы отсчета (*переносная скорость*).

Ускорение материальной точки:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t} = \boldsymbol{i}\, a_x + \boldsymbol{j}\, a_y + \boldsymbol{k} a_z\,, \tag{1.6}$$

где $a_x = d\upsilon_x / dt,\ a_y = d\upsilon_y / dt,\ a_z = d\upsilon_z / dt$ – *проекции вектора ускорения*;

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.7}$$

– *модуль ускорения*.

При криволинейном движении удобно представить вектор ускорения $\boldsymbol{a}$ в виде суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих, называемых тангенциальным *ускорением* $\boldsymbol{a}_\tau$ (направлено по касательной к траектории коллинеарно вектору скорости $\boldsymbol{\upsilon}$) и *нормальным ускорением* $\boldsymbol{a}_n$ (направлено перпендикулярно к вектору скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ в сторону вогнутости траектории):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n\,. \tag{1.8}$$

Модули этих ускорений равны:

$$a_\tau = \left|\frac{d\upsilon}{dt}\right|,\ \ a_n = \frac{\upsilon^2}{R}\,,\ \ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,, \tag{1.9}$$

где R – *радиус кривизны траектории*.

Пример 1.1. Начальное значение радиуса-вектора равно $\boldsymbol{r}_1 = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k}$, конечное значение равно $\boldsymbol{r}_2 = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Найти: а) приращение радиуса-вектора $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$; б) модуль приращения радиуса-вектора $|\Delta\boldsymbol{r}|$; в) приращение модуля радиуса-вектора $\Delta|\boldsymbol{r}|$.

Решение

По определению:

а) $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{i}(x_2 - x_1) + \boldsymbol{j}(y_2 - y_1) + \boldsymbol{k}(z_2 - z_1)$,

$\Delta\boldsymbol{r} = (-1-4)\boldsymbol{i} + (-2+3)\boldsymbol{j} + (2-12)\boldsymbol{k} = -5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}$;

б) $|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(-1-4)^2 + (-2+3)^2 + (2-12)^2} = \sqrt{126}$;

в) $\Delta|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$,

$\Delta|\boldsymbol{r}| = \sqrt{1+4+4} - \sqrt{16+9+144} = 3 - 13 = -10$.

Ответ: а) $\Delta\boldsymbol{r} = -5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}$; б) $|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{126}$; в) $\Delta|\boldsymbol{r}| = -10$.

Пример 1.2. Лодка перемещается относительно воды в реке со скоростью $\boldsymbol{u}$ под углом α к направлению скорости течения $\boldsymbol{V}$. Скорость течения $\boldsymbol{V}$ параллельна береговой линии. Определить величину υ и направление скорости лодки относительно берега, а также перемещение лодки за время t.

Решение

Введем неподвижную систему отсчета К, связанную с берегом реки и подвижную систему отсчета К′, связанную с водой реки, текущей со скоростью $\boldsymbol{V}$, оси x и x' направим вдоль берега, как показано на рис. 1.1. Пусть в момент $t = 0$ начала координат систем К и К′ совпадают. В момент t радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ лодки относительно системы К, радиус-вектор $\boldsymbol{r}'$ лодки относительно системы К′ и радиус-вектор $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}t$ начала координат подвижной системы К′ относительно неподвижной системы К связаны преобразованием координат Галилея

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}. \tag{1.10}$$

Из этого соотношения следует теорема сложения скоростей.

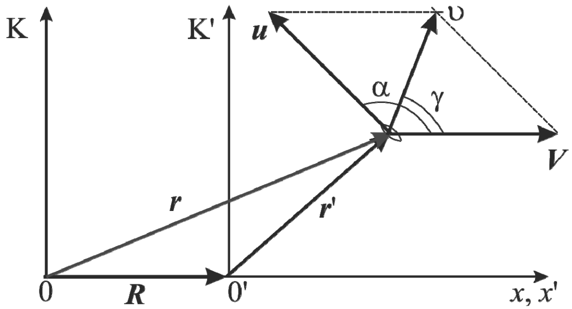


Рис. 1.1. К примеру 1.2

По теореме сложения скоростей скорость $\boldsymbol{\upsilon}$ лодки относительно берега равна векторной сумме (рис. 1.1):

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{V}. \tag{1.11}$$

Возведем это выражение в квадрат: $\upsilon^2 = u^2 + V^2 + 2\boldsymbol{uV}$. Раскрывая скалярное произведение $\boldsymbol{uV} = uV\cos\alpha$, получим абсолютное значение скорости $\upsilon = \sqrt{u^2 + V^2 + 2uV\cos\alpha}$. Обозначим через γ угол между векторами $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\boldsymbol{V}$, он характеризует направление скорости лодки относительно берега. Спроецируем равенство (1.11) на направление вектора $\boldsymbol{V}$ (см. рис. 1.1), получим $\upsilon\cos\gamma = u\cos\alpha + V$, откуда $\cos\gamma = (u\cos\alpha + V)/\upsilon$. (Проверьте, что это выражение согласуется с выражением $\sin\gamma = u\sin\alpha/\upsilon$, которое следует из теоремы синусов для треугольника, образованного векторами $\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{V}$.)

Перемещение лодки за время t относительно воды в реке равно $\Delta\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{u}t$, а относительно берега равно $\Delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{\upsilon}t$.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{u^2 + V^2 + 2uV\cos\alpha}$, $\cos\gamma = (u\cos\alpha + V)/\upsilon$, $\Delta\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{u}t$, $\Delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{\upsilon}t$.

Пример 1.3. Рядом с поездом на одной линии с передними буферами электровоза стоит путевой обходчик. В тот момент, когда поезд начал двигаться с ускорением 0.15 м/с^2, обходчик начал идти в том же направлении со скоростью 1.5 м/с. Через сколько времени поезд догонит человека? Определить скорость поезда в этот момент и путь, пройденный обходчиком и поездом за это время.

Решение

Аналитический способ решения. Направим ось x вдоль железнодорожного пути в направлении движения. Пусть x_0 – координата обходчика и буферов электровоза в момент начала движения. Обозначим через x_1, υ_1 и a_1 координату, скорость и ускорение путевого обходчика, а через x_2, υ_2 и a_2 – координату, скорость и ускорение буферов электровоза. Закон движения путевого обходчика $x_1(t) = x_0 + \upsilon_1 t$ (равномерное прямолинейное движение), а поезда $x_2(t) = x_0 + a_2 t^2 / 2$ (равноускоренное прямолинейное движение с нулевой начальной скоростью). Момент встречи t_r определяется уравнением $x_1(t_r) = x_2(t_r)$, т. е. $x_0 + \upsilon_1 t_r = x_0 + a_2 t_r^2 / 2$. Это уравнение имеет два решения: $t_{r0} = 0$ – время начала движения и $t_r = 2\upsilon_1 / a_2$ – момент обгона. Подставляя данные, получаем $t_r = 2 \cdot 1.5 / 0.15 = 20$ с. В момент обгона скорость поезда $\upsilon_2(t_r) = a_2 t_r = 0.15 \cdot 20 = 3$ м/с, а длина пройденного пути $x_1(t_r) - x_0 = x_2(t_r) - x_0 = a_2 t_r^2 / 2 = 0.15 \cdot 20^2 / 2 = 30$ м.

Графический способ решения. На $x-t$-плоскости построим два графика $x_1(t)$ (1 – линейная функция) и $x_2(t)$ (2 – параболическая функция), для простоты полагая $x_0 = 0$. Точки пересечения графиков позволяют найти значения координат $x_1(t_r) = x_2(t_r)$ и времени t_r встречи (рис. 1.2, *а*).

Ответ: $t_r = 20$ с; $\upsilon_2(t_r) = 3$ м/с, $x_1(t_r) - x_0 = x_2(t_r) - x_0 = 30$ м.

Пример 1.4. С высокой башни горизонтально бросили камень со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня в момент времени $t = 3$ с после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Радиус кривизны R входит в формулу для нормального ускорения $a_n = \upsilon^2 / R$, где υ – скорость камня, т. е. чтобы найти $R = \upsilon^2 / a_n$, необходимо знать a_n и υ. Учтем, что полное ускорение камня $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ постоянно и равно ускорению свободного падения $a = g$, поэтому нормальное ускорение есть $a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}$. Скорость камня в момент времени t после броска равна $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}$. Тангенциальное (касательное) ускорение равно $a_\tau = d\upsilon / dt$. Вычисляя производную, получим $a_\tau = g^2 t / \upsilon$. Таким образом, $R = \upsilon^2 \Big/ \sqrt{g^2 - a_\tau^2} =$

$$= \frac{1}{g\upsilon_0}\left(\upsilon_0^2 + g^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}} = 305.6 \approx 3 \cdot 10^2 \text{ м.}$$

Ответ: $R = 3 \cdot 10^2$ м.

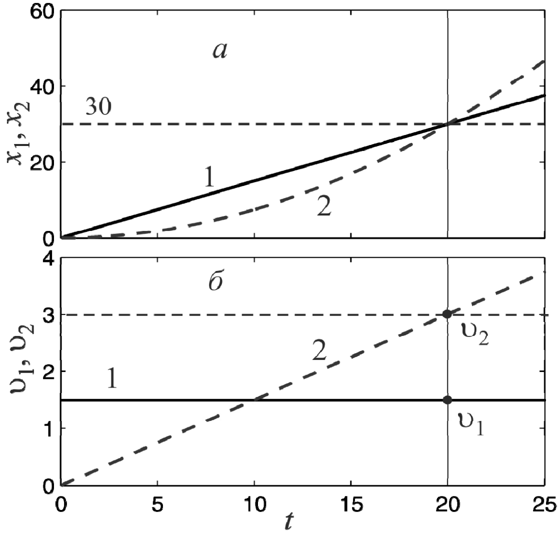


Рис. 1.2. К примеру 1.3:

а – временная зависимость *1* координаты путевого обходчика $x_1(t)$ и *2* координаты буферов электровоза $x_2(t)$; по точке пересечения определяем, что координата точки встречи равна 30 м, а момент времени встречи $t_r = 20$ с; *б* – временная зависимость скоростей *1* путевого обходчика $\upsilon_1(t) = \text{const}$ и *2* буферов электровоза $\upsilon_2(t) = a_2 t$; в момент встречи $t_r = 20$ с скорость электровоза $\upsilon_2(t_r) = 3$ м/с

Пример 1.5. Из трех труб, расположенных на поверхности Земли, с одинаковой скоростью бьют струи воды под углами $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 45°$ и $\alpha_3 = 30°$ к горизонту. Найти соотношения между наибольшими высотами подъема трех струй, а также между дальностями их падения на горизонтальную плоскость.

Решение

Движение частиц воды будем описывать уравнениями движения тела, брошенного под углом α к горизонту,

$$\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_{0x} t, \\ y = y_0 + \upsilon_{0y} t - gt^2 / 2, \end{cases} \quad \begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{0x}, \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt \end{cases} \qquad (1.12)$$

с начальными условиями: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$. Время подъема t_h определяется условием $\upsilon_y(t_h) = 0$, тогда $t_h = \upsilon_{0y} / g$ и максимальная высота подъема есть $h = y_0 + \upsilon_{0y}^2 \big/ 2g = \upsilon_0^2 \sin^2 \alpha \big/ 2g$. Время падения t_l определяется условием $y(t_l) = 0$, т. е. квадратным уравнением $y_0 + \upsilon_{0y} t_l - g t_l^2 \big/ 2 = 0$, и дается соответствующим корнем $t_l = \upsilon_{0y} / g + \sqrt{\upsilon_{0y}^2 \big/ g^2 + 2 y_0 / g} = 2\upsilon_{0y} / g = 2\upsilon_0 \sin\alpha / g$. Дальность точки падения равна $l = x_0 + \upsilon_{0x} t_l = \upsilon_0^2 \sin 2\alpha \big/ g$ (рис. 1.3).

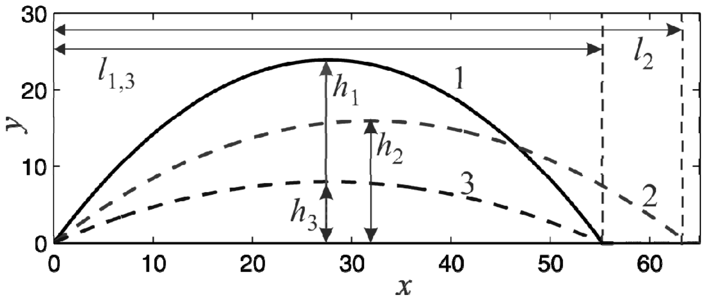


Рис. 1.3. К примеру 1.5. Струи воды, бьющие под углами $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 45°$ и $\alpha_3 = 30°$ к горизонту

Таким образом, отношение высот подъема трех струй воды $h_1 : h_2 : h_3 = \sin^2 \alpha_1 : \sin^2 \alpha_2 : \sin^2 \alpha_2 = 3 : 2 : 1$, а отношение их дальностей падения $l_1 : l_2 : l_3 = \sin 2\alpha_1 : \sin 2\alpha_2 : \sin 2\alpha_2 = \sqrt{3}/2 : 1 : \sqrt{3}/2$.

Ответ: $h_1 : h_2 : h_3 = 3 : 2 : 1$, $l_1 : l_2 : l_3 = \sqrt{3}/2 : 1 : \sqrt{3}/2$.

Задачи для аудиторной работы

А1.1. Вектор скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ изменил направление на обратное. Найти: а) приращение вектора скорости $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$; б) модуль его приращения $|\Delta\boldsymbol{\upsilon}|$; в) приращение модуля $\Delta|\boldsymbol{\upsilon}|$.

А1.2. Штурман круизного лайнера, идущего со скоростью $\boldsymbol{V}$ на северо-восток, определил величину и направление относительной скорости $\boldsymbol{u}$ проходящего вблизи танкера. При этом оказалось, что относительная скорость $\boldsymbol{u}$ направлена точно на запад. Найти скорость танкера.

А1.3. Из одного и того же места начали равноускоренно двигаться в одном направлении две материальные точки, причем вторая точка начала свое движение через две секунды после первой. Первая точка имела начальную скорость 1 м/с и ускорение 2 м/с^2, вторая точка – начальную скорость 10 м/с и ускорение 1 м/с^2. Через сколько времени и на каком расстоянии от исходного положения вторая точка догонит первую? Сопротивлением воздуха пренебречь.

А1.4. Камень брошен с башни горизонтально с начальной скоростью 15 м/с. Найти нормальное и тангенциальное ускорение камня, а также радиус кривизны его траектории через одну секунду после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

А1.5. Сколько оборотов сделали колеса автомобиля до полной остановки после включения тормоза, если в момент начала торможения автомобиль имел скорость 60 км/ч и остановился через три секунды после начала торможения? Диаметр колес 70 см.

А1.6. На перроне стоит человек. Мимо него равноускоренно движется поезд. Первый вагон проехал мимо человека за 1 с, второй вагон за 1.5 с. Длина вагона 12 м. Найти ускорение поезда и его скорость в начале наблюдения.

Задание на дом

В1.1. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 4$ м/с, $B = -0.05$ м/с^2. Определить момент времени, когда скорость точки равна нулю. Найти координату и ускорение точки в этот момент. Построить графики зависимости от времени для координаты, пути, скорости и ускорения материальной точки.

В1.2. Камень падает с высоты 1.2 км. Какое расстояние пролетит камень за последнюю секунду своего падения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

В1.3. Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению $\boldsymbol{r} = At^3\boldsymbol{i} + Bt^2\boldsymbol{j}$. Найти зависимости $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ и $\boldsymbol{a}(t)$.

В1.4. По дуге радиусом 10 м движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки равно 4.9 м/с^2, в этот момент векторы полного и нормального ускорения образуют угол 60 градусов. Найти скорость и тангенциальное ускорение.

В1.5. Движение материальной точки по плоской кривой задано уравнениями $x = A_1 t^3$ и $y = A_2 t$, где $A_1 = 1$ м/с^3, $A_2 = 2$ м/с. Найти явное уравнение траектории, а также скорость и полное ускорение материальной точки в момент времени $t = 0.8$ с.

2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Первый закон Ньютона. Всякое тело остается в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Второй закон Ньютона. Скорость изменения импульса тела равна сумме приложенных к телу сил

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{F}_i , \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$ – импульс тела. Если масса тела постоянная величина, то уравнение движения (2.1) имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \sum_i \boldsymbol{F}_i , \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{a}$ – ускорение тела массы m под действием суммы приложенных к нему сил $\boldsymbol{F}_i$.

Третий закон Ньютона. Всякие два взаимодействующие тела действуют друг на друга силами, равными по величине и противоположными по направлению.

Эти силы не уравновешивают друг друга, так как приложены к разным телам.

Алгоритм решения динамических задач

1. Сделать схематический рисунок системы, изобразить на нем рассматриваемые в задаче основные векторы, характеризующие силы, ускорения, скорости, импульсы, моменты и т. п.
2. Выбрать наиболее удобную систему отсчета и ориентацию координатных осей.
3. Записать систему уравнений динамики в векторной форме для всех тел с учетом заданных связей.

4. Записать эти уравнения в проекциях на оси выбранной системы координат.

5. Решить полученную систему алгебраических и/или дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

6. Привести ответ к наиболее удобной алгебраической форме и проверить на размерность и предельные случаи.

7. Подставить численные значения заданных величин и произвести приближенные вычисления.

8. Записать ответ и дать физическую интерпретацию результата.

Пример 2.1. Два бруска (рис. 2.1) массой $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 10$ кг находятся на гладкой горизонтальной поверхности, они связаны невесомой нитью, которая разрывается при силе натяжения $T = 24$ Н. Какую максимальную силу тяги $\boldsymbol{F}$ можно приложить: а) к меньшему грузу? б) к большему грузу?

Решение

Пусть ось x сонаправлена с вектором силы $\boldsymbol{F}$, а ось y направлена вертикально вверх. Изобразим на рис. 2.1 приложенные к брускам силы тяжести $m_1\boldsymbol{g}$, $m_2\boldsymbol{g}$ и нормальной реакции $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ (направлены по оси y), силы натяжения нитей $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ и тяги $\boldsymbol{F}$ (направлены по оси x).

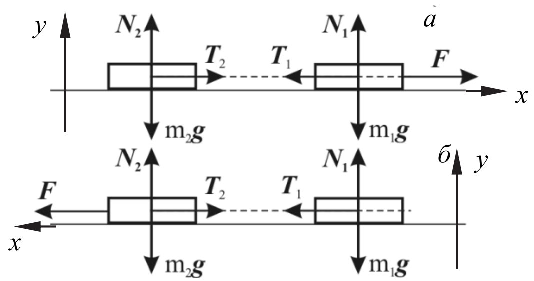


Рис. 2.1. К примеру 2.1

Если ускорение брусков $\boldsymbol{a}$ направлено по оси x, то в случае а) согласно второму закону Ньютона

$$m_1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}_1 + m_1\boldsymbol{g},$$

$$m_2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{T}_2 + m_2\boldsymbol{g}.$$

Проецируя на ось y силы $\boldsymbol{N}_1$, $m_1\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{N}_2$ и $m_2\boldsymbol{g}$, имеем соотношения между абсолютными величинами вертикальных сил $N_1 = m_1 g$, $N_2 = m_2 g$.

Проецируя на ось x силы и ускорения, имеем

$$\begin{cases} m_1 a = F - T_1, \\ m_2 a = T_2. \end{cases}$$

Невесомость нити обеспечивает равенство $T_1 = T_2 \equiv T$, из второго уравнения системы получаем $a = \dfrac{T}{m_2}$, тогда первое уравнение дает $F = \left(\dfrac{m_1}{m_2} + 1\right)T$, откуда следует, что $F_{1\max} = \left(\dfrac{m_1}{m_2} + 1\right)T_{\max}$.

В случае б) аналогичные соотношения принимают вид:

$$m_1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}_1 + m_1\boldsymbol{g},$$

$$m_2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{T}_2 + m_2\boldsymbol{g},$$

$$N_1 = m_1 g, \quad N_2 = m_2 g, \quad \begin{cases} m_1 a = T_1, \\ m_2 a = F - T_2, \end{cases} \quad T_1 = T_2 \equiv T,$$

$$a = \frac{T}{m_1}, \quad F = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)T, \text{ откуда } F_{2\max} = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)T_{\max}.$$

Подставляя численные значения, получаем $F_{1\max} = 36$ Н, $F_{2\max} = 72$ Н.

Ответ: $F_{1\max} = 36$ Н, $F_{2\max} = 72$ Н.

Пример 2.2. Тело массой $m = 2$ кг находится на горизонтальной поверхности. Если на тело действует сила тяги $F = 10$ Н, направленная под углом $\alpha_1 = 45°$ к горизонту, то тело движется равномерно. Определить ускорение тела, если угол между направлением той же по величине силы тяги и горизонтом будет равен $\alpha_2 = 30°$.

Решение

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_1 + m\boldsymbol{g},$$

где ускорение тела $\boldsymbol{a}$ и сила трения $\boldsymbol{F}_1$ направлены по оси x, а силы тяжести $m\boldsymbol{g}$ и нормальной реакции $\boldsymbol{N}$ направлены по оси y; $\boldsymbol{F}$ – сила тяги, направленная под углом α к горизонту (рис. 2.2).

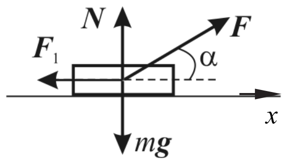


Рис. 2.2. К примеру 2.2

Перепишем это уравнение в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} ma = F\cos\alpha - F_1, \\ 0 = N + F\sin\alpha - mg. \end{cases} \quad (2.3)$$

Сила трения $F_1 = \mu N$ (μ – коэффициент трения), а силу реакции N найдем из второго уравнения системы (2.3): $N = mg - F\sin\alpha$. При $\alpha = \alpha_1$ ускорение равно нулю, и из первого уравнения (2.3) $0 = F\cos\alpha_1 - \mu(mg - F\sin\alpha_1)$ найдем коэффициент трения $\mu =$ $= F\cos\alpha_1 / (mg - F\sin\alpha_1) = 0.48$. Тогда при $\alpha = \alpha_2$ имеем $F_1 = \mu \times$ $\times (mg - F\sin\alpha_2)$, и первое уравнение системы (2.3) дает ускорение

$$a_2 = \frac{1}{m}(F\cos\alpha_2 - F_1) = \frac{F}{m}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \frac{mg - F\sin\alpha_2}{mg - F\sin\alpha_1}\right) = 0.21 \approx 0.2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_2 \approx 0.2$ м/с^2.

Пример 2.3. Найти силу тяги, которую развивает мотор автомобиля, движущегося в гору с постоянным ускорением $a = 1$ м/с^2. Масса автомобиля $m = 1$ т, уклон прямолинейной трассы составляет $h = 1$ м на каждые $l = 25$ м пути, коэффициент трения $\mu = 0.1$.

Решение

Автомобиль моделируем бруском на плоскости с углом наклона к горизонту α. Для решения задачи введем декартову систему координат с осью x параллельно и осью y перпендикулярно наклонной

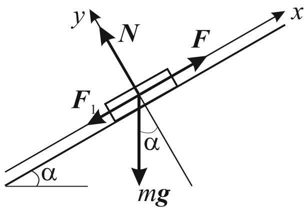


Рис. 2.3. К примеру 2.3

плоскости вверх. Изобразим на рис. 2.3 приложенные к автомобилю силы тяжести $m\mathbf{g}$, нормальной реакции $\mathbf{N}$, трения $\mathbf{F}_1$ и тяги $\mathbf{F}$. Второй закон Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_1 + m\mathbf{g}$ в проекциях на координатные оси принимает вид

$$\begin{cases} ma = F - F_1 - mg\sin\alpha, \\ \;0 = N - mg\cos\alpha. \end{cases} \tag{2.4}$$

Сила трения $F_1 = \mu N$, а силу реакции N найдем из второго уравнения системы (2.4): $N = mg\cos\alpha$, тогда сила тяги есть $F = m(a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))$, где $\sin\alpha = h/l \approx 0.04$ и $\cos\alpha = \cos(\arcsin(h/l)) \approx 0.9992$. Подставляя численные значения в расчетную формулу, получаем $F = 1000(1 + 9.8(0.04 + 0.1 \cdot 0.9992) = 2371$ Н ≈ 2.4 кН.

Ответ: $F \approx 2.4$ кН.

Пример 2.4. Груз массой $m = 10$ кг поднимается вверх с помощью системы подвижного и неподвижного блоков. Определить ускорение груза a, если к концу нити, перекинутой через неподвижный блок, приложена сила $F =$ 60 Н. Массами нитей и блоков пренебречь.

Решение

Изобразим на рис. 2.4 действующие силы.

Из невесомости нитей и блоков с учетом третьего закона Ньютона следует цепочка условий связи для абсолютных значений сил натяжения нитей:

$$T_3 = T_2 = T_1 = F, \;\; T_5 = T_4 = 2F.$$

Проекция второго закона Ньютона для груза $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}_5$ на вертикальную ось дает $ma = T_5 - mg = 2F - mg$, откуда $a = 2F/m - g = 2 \cdot 60/10 - 9.8 = 2.2$ м/с^2.

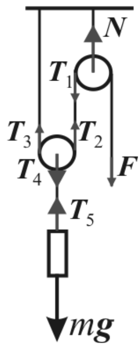


Рис. 2.4. К примеру 2.4

Ответ: $a = 2.2$ м/с^2.

Пример 2.5. Моторная лодка массой $m = 400$ кг начинает движение по озеру. Сила тяги мотора равна $F = 200$ Н. Определить скорость лодки через $t = 20$ с после начала движения, считая силу сопротивления $F_k = k\upsilon$ пропорциональной модулю скорости лодки $\upsilon = |\boldsymbol{\upsilon}|$. Коэффициент сопротивления $k = 20$ кг/с.

Решение

В уравнении второго закона Ньютона $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_k + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_\text{A}$ ускорение $\boldsymbol{a}$ равно $d\boldsymbol{\upsilon}/dt$, выталкивающая сила Архимеда $\boldsymbol{F}_\text{A}$ компенсирует силу тяжести $m\boldsymbol{g}$. Проецируя векторы сил и ускорения на горизонтальное направление вдоль вектора скорости, получаем $d\upsilon/dt = F - k\upsilon$. Это дифференциальное уравнение первого порядка подстановкой $\upsilon = u + F/k$ преобразуем в дифференциальное уравнение $mdu/dt = -ku$ с разделяющимися переменными $du/u = -(k/m)dt$, общее решение которого имеет вид $u = A\exp(-kt/m)$. Возвращаясь к переменной υ, получаем $\upsilon = F/k + A\exp(-kt/m)$. Постоянную интегрирования A найдем из начального условия $\upsilon(0) = 0$, т. е. $F/k + A = 0$, откуда $A = -F/k$. Таким образом, искомая формула имеет вид

$$\upsilon = (F/k)(1 - \exp(-kt/m)).$$

Подставляя численные значения заданных величин, получаем $\upsilon = 10(1 - \exp(-20 \cdot 20/400)) = 6.3$ м/с.

При $t \to \infty$ предельная скорость равна $\upsilon_\infty = F/k = 10$ м/с.

Ответ: $\upsilon = 6.3$ м/с.

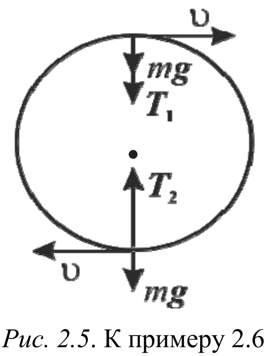


Рис. 2.5. К примеру 2.6

Пример 2.6. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости (рис. 2.5). Найти массу камня, если разность между максимальной и минимальной силами натяжения равна 10 Н.

Решение

Согласно второму закону Ньютона

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}. \qquad (2.5)$$

Сила натяжения веревки $\boldsymbol{T}$ имеет противоположные направления и разные абсолютные значения: в верхней точке окружности T_1, в нижней точке окружности T_2.

Запишем проекции векторного уравнения (2.5) на ось y в нижней и верхней точках траектории:

$$\begin{cases} ma = T_2 - mg, \\ -ma = -T_1 - mg. \end{cases} \tag{2.6}$$

Сравнивая левые части системы (2.6), имеем $T_2 - mg = T_1 + mg$, откуда $m = (T_2 - T_1) / 2g = 10 / 19.6 = 0.51$ кг.

Ответ: $m \approx 0.51$ кг.

Пример 2.7. Метатель посылает молот массой $m = 5$ кг на расстояние $l = 70$ м по траектории, обеспечивающей максимальную дальность броска при данной начальной скорости. Какая сила действует на спортсмена при ускорении молота? Разгон ведется по окружности радиусом $R = 2.0$ м. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

Пусть начальная скорость молота при броске равна υ_0. Центростремительное ускорение $a_n = \upsilon_0^2 / R$ определяется силой F, воздействующей на молот, $F = ma_n$. По третьему закону Ньютона эта сила F равна по модулю силе F', действующей на спортсмена. В примере 1.5 получено выражение для дальности полета $l = \upsilon_0^2 \sin 2\alpha / g$, откуда следует, что $\upsilon_0^2 = gl / \sin 2\alpha$, и для достижения наибольшей дальности полета молота угол бросания α должен быть равен 45°. С учетом сказанного выше $F' = m\upsilon_0^2 / R = mgl / R \sin 2\alpha = 1715$ Н ≈ 1.7 кН.

Ответ: $F' = 1.7$ кН.

Пример 2.8. Старый проигрыватель пластинок имел три частоты вращения: $\nu = 33$, 45 и 78 об/мин. На пластинку кладут пластмассовую шайбу. Оказывается, что на третьей скорости шайба приходит в движение, если расстояние между шайбой и осью вращения превышает

$R = 10$ см. Определите коэффициент трения μ между шайбой и пластинкой.

Решение

При скольжении шайбы возникает сила трения скольжения $F_\mu = \mu N$, и согласно второму закону Ньютона $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_\mu + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}$. Проецируем это уравнение на горизонтальную и вертикальную оси, получаем

$$\begin{cases} ma = \mu N, \\ 0 = N - mg, \end{cases} \tag{2.7}$$

откуда $ma = \mu mg$. Учитывая, что центростремительное ускорение равно $a = \omega^2 R$, где $\omega = 2\pi\nu$, получаем расчетную формулу $\mu = 4\pi^2\nu^2 R / g$. Подставляя численные значения, находим, что коэффициент трения равен $\mu = 0.68$.

Ответ: $\mu = 0.68$.

Пример 2.9. Грузик массой $m = 100$ г, прикрепленный к нити, движется равномерно по окружности в горизонтальной плоскости (конический маятник) (рис. 2.6). Расстояние от точки подвеса до горизонтальной плоскости $h = 1$ м. Найти угловую скорость ω.

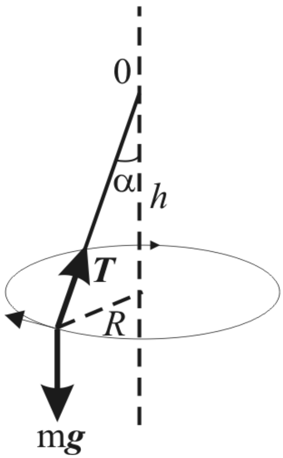


Рис. 2.6. К примеру 2.9

Решение

Согласно второму закону Ньютона $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}$, где $\boldsymbol{T}$ – сила натяжения нити.

Проецируя векторы сил и ускорения на горизонтальную и вертикальную оси, получаем

$$\begin{cases} ma = T\sin\alpha, \\ 0 = T\cos\alpha - mg, \end{cases} \tag{2.8}$$

где α – угол между нитью и вертикальной осью. Из системы уравнений (2.8) получаем: $T = mg / \cos\alpha$, $ma = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Учитывая, что центростремительное ускорение равно $a = \omega^2 R$, получаем $\omega^2 R = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$. С учетом $\mathrm{tg}\,\alpha = R / h$ имеем $\omega^2 = g / h$ и окончательно получаем $\omega = \sqrt{g / h}$. Подставляя численные значения, находим, что угловая скорость равна $\omega = 3.1$ рад/с.

Ответ: $\omega = 3.1$ рад/с.

Задачи для аудиторной работы

А2.1. Два груза массой 5 и 10 кг находятся на горизонтальной поверхности, связаны нитью, которая разрывается при силе натяжения 24 Н. Какую максимальную силу можно приложить: к меньшему грузу? к большему грузу? Коэффициенты трения грузов принять равными $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$.

А2.2. Автомобиль массой 3 т движется в гору с постоянной скоростью. Оценить силу тяги мотора автомобиля, если угол наклона трассы 30°, коэффициент трения 0.1.

А2.3. Вычислить время, за которое тело соскользнет с наклонной плоскости высотой 26 см с углом наклона 60°, если по наклонной плоскости с углом наклона 45° и тем же коэффициентом трения оно движется равномерно.

А2.4. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью 72 км/ч, делая поворот радиусом 100 м. На какой угол при этом он должен наклониться, чтобы не упасть при повороте?

А2.5. Грузик, привязанный к шнуру длиной 50 см, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Какой угол образует шнур с вертикалью, если частота вращения 1 об/с?

А2.6. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске лежит груз на расстоянии 10 см от оси вращения. Найти коэффициент трения между диском и грузом, если при частоте вращения 0.5 об/с груз начинает скользить по поверхности диска.

А2.7. Катер массой 2 т трогается с места и в течение 10 с развивает при движении по спокойной воде скорость 4 м/с. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости, определить скорость лодки через 20 с после начала ее движения. Коэффициент сопротивления 20 кг/с.

Задание на дом

В2.1. Материальная точка массой 2 кг движется под действием силы F согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с^2, $D = -0.2$ м/с^3. Найти значения этой силы в моменты 2 с и 5 с. В какой момент t_0 сила равна нулю?

В2.2. Два бруска массой $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 4$ кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу 10 Н, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения шнура, соединяющего бруски, если силу 10 Н приложить: к первому бруску? к второму бруску? Трением пренебречь.

В2.3. Наклонная плоскость, образующая угол 25° с горизонтом, имеет длину 2 м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за две секунды. Определить коэффициент трения тела о плоскость.

В2.4. Диск радиусом 40 см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит кубик. Принимая коэффициент трения равным 0.4, найти частоту вращения, при которой кубик соскользнет с диска.

В2.5. Автомобиль массой 5 т движется со скоростью 36 км/ч по выпуклому мосту. Определить силу давления автомобиля на мост в его верхней части, если радиус кривизны моста равен 50 м.

В2.6. Автомобиль проезжает поворот, радиус кривизны которого равен 200 м. Коэффициент трения колес о покрытие дороги равен 0.1 (гололед). При какой скорости автомобиля начнется его занос?

3. РАБОТА И МОЩНОСТЬ. ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Элементарная работа силы $\boldsymbol{F}$ *на малом перемещении* $d\boldsymbol{r}$

$$dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = F\cos\alpha\, dr. \tag{3.1}$$

Мощность силы $\boldsymbol{F}$

$$N_F = \frac{dA}{dt} = \boldsymbol{F\upsilon} = F\upsilon\cos\alpha\,, \tag{3.2}$$

где α – угол между силой $\boldsymbol{F}$ и перемещением $d\boldsymbol{r}$ (скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$).

Полная работа силы $\boldsymbol{F}$ *на траектории* L

$$A = \int_L \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = \int_L F\cos\alpha dr. \tag{3.3}$$

Кинетическая энергия материальной точки

$$E_K = \frac{m\boldsymbol{\upsilon}^2}{2} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\,, \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$ – импульс тела.

Кинетическая энергия системы N *материальных точек*

$$E_K = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\boldsymbol{\upsilon}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m_i}\,. \tag{3.5}$$

Закон изменения кинетической энергии

$$A = E_{K2} - E_{K1}\,, \tag{3.6}$$

где A – полная работа всех сил по переводу системы из состояния с кинетической энергией $\boldsymbol{E}_{K1}$ в состояние с кинетической энергией $\boldsymbol{E}_{K2}$.

Потенциальная сила

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U(\boldsymbol{r}) = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z} \right), \qquad (3.7)$$

где $U(\boldsymbol{r})$ – потенциальная энергия.

Работа потенциальных сил

$$A = U_1 - U_2, \qquad (3.8)$$

где U_1 – потенциальная энергия в начальном состоянии; U_2 – потенциальная энергия в конечном состоянии.

Закон сохранения механической энергии E в замкнутой системе при действии только консервативных сил

$$E = E_K + U = \mathrm{const}, \qquad (3.9)$$

где E_K и U – кинетическая и потенциальная энергия системы.

Пример 3.1. Автомобиль «Жигули» способен на скорости $\upsilon = 50$ км/ч двигаться вверх по дороге с наибольшим уклоном $\alpha = 16°$. При движении по ровной дороге с таким же покрытием и на той же скорости мощность, расходуемая двигателем, составляет $N_{F2} = 20$ л.с. (1 л.с. = 736 Вт). Найти максимальную мощность N_{F1} двигателя, если масса автомобиля $m = 1200$ кг.

Решение

Мощность двигателя согласно (3.2) равна $N_F = F\upsilon$, где F – сила тяги двигателя; υ – скорость автомобиля. В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение равномерного движения в гору имеет вид (см. рис. 2.3)

$$0 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{F}_{\mu 1} + m\boldsymbol{g},$$

а по ровной дороге

$$0 = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{F}_{\mu 2} + m\boldsymbol{g} \ ,$$

где $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{F}_{\mu 1}$ – силы тяги, нормальной реакции и трения при движении в гору, а $\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{N}_2$ и $\boldsymbol{F}_{\mu 2}$ – при движении по ровной дороге.

Для случая подъема в гору воспользуемся системой координат, как в решении примера 2.3, тогда в проекциях имеем

$$\begin{cases} 0 = F_1 - F_{\mu 1} - \mu mg \sin\alpha, \\ 0 = N_1 - mg\cos\alpha, \end{cases}$$

а для движения автомобиля по ровной дороге $(\alpha = 0)$ уравнение движения в проекциях принимает вид

$$\begin{cases} 0 = F_2 - F_{\mu 2}, \\ 0 = N_2 - mg. \end{cases}$$

Учитывая, что $F_{\mu 1,2} = \mu N_{1,2}$, из формул для второго случая получаем, что коэффициент трения равен

$$\mu = \frac{F_2}{mg} = \frac{N_{F2}}{mg\upsilon} \ ,$$

а из формул для первого случая, получаем

$$F_1 = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = \frac{N_{F2}}{\upsilon}\cos\alpha + mg\sin\alpha \ ,$$

тогда искомая мощность

$$N_{F1} = F_1\upsilon = N_{F2}\cos\alpha + mg\upsilon\sin\alpha \approx 59.2 \text{ кВт} = 80.4 \text{ л.с.}$$

Проверим расчетную формулу по размерности[1]:

$$[N_{F2}\cos\alpha]+[mg\upsilon\sin\alpha]=L^2MT^{-3}+MLT^{-2}LT^{-1}=L^2MT^{-3}.$$

Полученная размерность совпадает с размерностью мощности (см. приложение 1).

Ответ: $N_{F1}\approx 59.2$ кВт $=80.4$ л.с.

Пример 3.2. Брусок массой $m=2$ кг медленно подняли по шероховатой наклонной плоскости на высоту $h=0.51$ м при помощи нити, параллельной этой плоскости. При этом совершили работу $A=16$ Дж. На высоте h нить отпустили. Найти скорость бруска, достигшего первоначального положения.

Решение

Решение разобьем на два этапа. Первый этап – подъем бруска под действием силы $\boldsymbol{F}$, второй этап – соскальзывание бруска под действием силы тяжести.

Первый этап. Работа силы $\boldsymbol{F}$ определяется по формуле (3.3):

$$A=\int_1^2 \boldsymbol{F}d\boldsymbol{l}=\int_1^2 Fdl=F\,l_{12}\,, \tag{3.10}$$

где l_{12} связано с высотой формулой $h=l_{12}\sin\alpha$.

Силу $\boldsymbol{F}$ найдем из второго закона Ньютона при условии равномерного движения

$$0=m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F}_\mu\,.$$

Проецируем силы на координатные оси (рис.3.1), получим систему уравнений

$$\begin{cases}0=F-F_\mu-mg\sin\alpha,\\0=N-mg\cos\alpha.\end{cases} \tag{3.11}$$

---

[1] Анализ размерностей – качественно-аналитический подход, используемый в физике для установленя связей между физическими величинами. Проведение такого анализа расчетных формул является необходимым, но недостаточным условием их правильности.

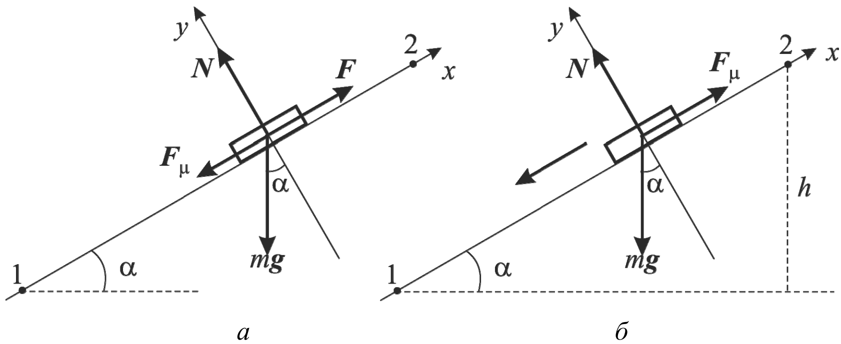


Рис. 3.1. К примеру 3.2

Учитывая определение силы трения скольжения

$$F_\mu = \mu N, \tag{3.12}$$

где μ – коэффициент трения скольжения, получаем из (3.11) выражение для силы натяжения нити:

$$F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha\,. \tag{3.13}$$

Работа этой силы по подъему бруска

$$A = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)l_{12} = mgh(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)/\sin\alpha\,,$$

откуда выразим коэффициент трения

$$\mu = \left(\frac{A}{mgh} - 1\right)\mathrm{tg}\,\alpha\,. \tag{3.14}$$

Второй этап. Для нахождения скорости спуска бруска воспользуемся законом изменения полной механической энергии

$$E_2 - E_1 = A_{21}^{*}\,, \tag{3.15}$$

где A_{21}^* – работа неконсервативной силы трения скольжения. Пусть высота точки 1 есть y_1, а точки 2 – y_2, тогда закон (3.15) принимает вид

$$mgy_2 - \left(mgy_1 + m\frac{\upsilon_1^2}{2} \right) = A_{21}^*, \qquad (3.16)$$

где $y_2 - y_1 = h$ – перепад высот. Работа силы трения F_μ (второе слагаемое в (3.13)) есть

$$A_{21}^* = \int_2^1 F_\mu dl = \mu mg \cos\alpha l_{12} = \mu mgh \operatorname{ctg}\alpha . \qquad (3.17)$$

Подставляем (3.17) в (3.16), получаем

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh(1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha)}, \qquad (3.18)$$

т. е. при заданном коэффициенте трения μ скорость бруска υ_1 не зависит от его массы. Далее, подставляя (3.14) в (3.18), получаем выражение υ_1 через заданную работу силы тяги:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2\left(2gh - \frac{A}{m} \right)}. \qquad (3.19)$$

Проверим расчетную формулу скорости бруска по размерности:

$$[\upsilon_1] = [(2(2gh - A/m)^{1/2}] = (LT^{-2}L^1 + L^2MT^{-2}M^{-1})^{1/2} = LT^{-1},$$

что совпадает с размерностью скорости (см. приложение 1).

Подставив заданные численные значения параметров, найдем

$$\upsilon_1 = \sqrt{2\left(2 \cdot 9.8 \cdot 0.51 - \frac{16}{2} \right)} \text{ м/с} \approx 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_1 = \sqrt{2\left(2gh - \frac{A_{12}}{m} \right)} \approx 2$ м/с.

Пример 3.3. Тело массой $m = 1$ кг, брошенное с башни в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с, через $t_1 = 3$ с упало на землю. Выразить потенциальную и кинетическую энергию тела как функции времени. Определить высоту башни, потенциальную и кинетическую энергию тела в начальный момент и в момент удара о землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Потенциальную энергию тела будем отсчитывать от уровня Земли. Введем декартову систему координат с началом у основания башни, направим *y*-ось вертикально вверх, *x*-ось – горизонтально в плоскости траектории (рис. 3.2).

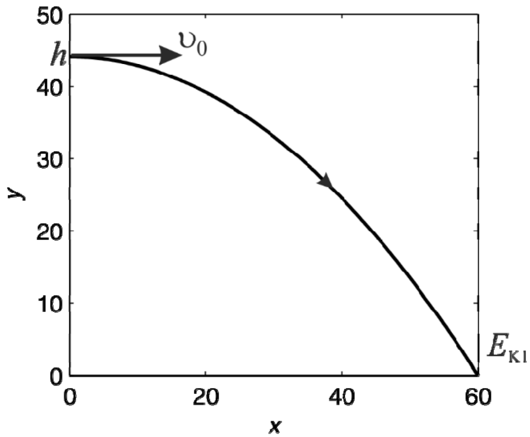


Рис. 3.2. К примеру 3.3

В произвольный момент t кинетическая энергия тела есть $E_K = m\upsilon^2 / 2$, а потенциальная энергия тела есть $U = mgy$.

Выразим потенциальную и кинетическую энергию тела как функции времени. Кинематические уравнения движения дают зависимости от времени высоты тела

$$y = h + \upsilon_{0y}t + a_y \frac{t^2}{2} = h - \frac{gt^2}{2}, \tag{3.20}$$

где $\upsilon_{0y} = 0$, $a_y = -g = -9.8$ м/с^2, и квадрата скорости тела

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = \upsilon_0^2 + (gt)^2,$$

так как $\upsilon_x = \upsilon_0$, $\upsilon_y = a_y t = -gt$. Таким образом,

$$U = mgy = mg\left(h - \frac{gt^2}{2}\right), \tag{3.21}$$

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\left[\upsilon_0^2 + (gt)^2\right]}{2}. \tag{3.22}$$

Сумма этих выражений дает полную механическую энергию тела E:

$$E = E_K + U = E_{K0} + U_0, \tag{3.23}$$

где $E_{K0} = m\upsilon_0^2/2$ – кинетическая энергия тела в начальный момент; $U_0 = mgh$ – потенциальная энергия в начальный момент. Формула (3.23) выражает закон сохранения механической энергии для системы «камень – Земля».

В начальный момент $t = 0$ выражения (3.21) и (3.22) дают

$$U(0) = mgh, \qquad E_K(0) = \frac{m\upsilon_0^2}{2},$$

а в момент падения t_1 имеем $y(t_1) = 0$, поэтому из (3.20) получаем

$$h = g\frac{t_1^2}{2},$$

следовательно, тело будет иметь энергии:

$$U(t_1) = mg\left(h - \frac{gt_1^2}{2}\right) = 0,$$

$$E_K(t_1) = E_K(0) + U(0) = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \frac{mg^2t_1^2}{2}.$$

Рис. 3.3 демонстрирует графики функций (3.21) и (3.22), т. е. изменение со временем потенциальной (сплошная кривая) и кинетической (пунктирная кривая) энергии, точечная кривая изображает полную механическую энергию, она не меняется со временем.

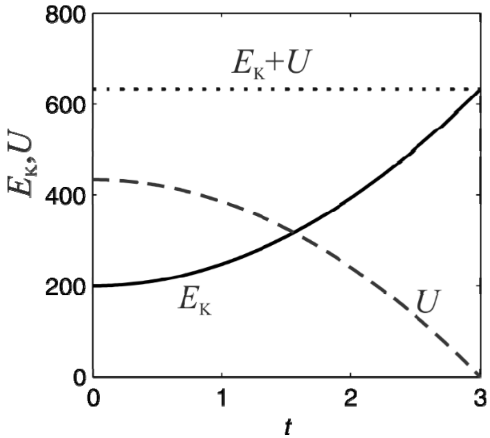


Рис. 3.3. К примеру 3.3

Подставив заданные численные значения параметров, найдем:

$h = 9.8 \cdot 4.5 \approx 44.1$ м,

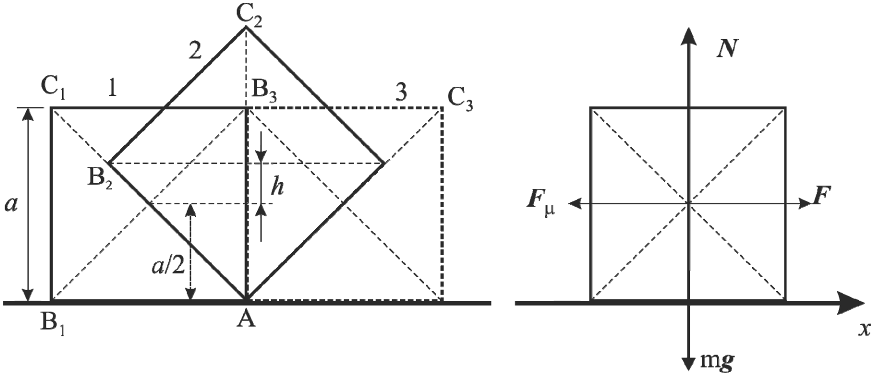
$$E_K(0) = 1\frac{20^2}{2} = 200 \text{ Дж}, \quad U(0) = 1 \cdot 9.8 \cdot 44.1 \approx 432 \text{ Дж},$$

$$E_K(t_1) = 1\frac{20^2}{2} + 1 \cdot 9.8^2 \frac{3^2}{2} \approx 632 \text{ Дж}, \quad U(t_1) = 0.$$

Ответ: $h \approx 44.1$ м, $E_K(0) = 200$ Дж, $U(0) = 432$ Дж,
$\mathrm{E}_K(t_1) = E_K(0) + U(0) = 632$ Дж, $U(t_1) = 0$.

Пример 3.4. Какую работу надо совершить, чтобы перевернуть дубовый брус сечением 20×20 см и массой 100 кг с одной грани на другую (рис. 3.4). Сравните с минимальной работой, которую необходимо совершить при поступательном сдвиге бруса на такое же расстояние, если коэффициент трения скольжения $\mu = 0.45$.

Решение



а *б*

Рис. 3.4. К примеру 3.4

Искомая работа совершается против действия силы тяжести при перемещении бруса из положения *1* в положение *2* и в соответствии с формулой (3.8) есть

$$A_{12} = -(U_1 - U_2) = U_2 - U_1,$$

где потенциальная энергия бруса определяется высотой его центра тяжести и в начальной конфигурации *1* (рис. 3.4, *а*) равна

$$U_1 = mg\frac{a}{2},$$

а в конфигурации *2* (рис. 3.4, *а*) она равна

$$U_2 = mg\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

При перемещении бруса из положения *2* в положение *3* работу, равную по модулю работе A_{12}, совершает сила тяжести. Эту работу в данной задаче учитывать не надо.

Таким образом, требуется совершить работу

$$A_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}mga - \frac{1}{2}mga = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)mga.$$

Подставляя численные значения параметров, получаем

$$A_{12} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) 196 \approx 40.6 \text{ Дж.}$$

Работа A'_{12} внешней силы $\boldsymbol{F}$ по поступательному перемещению бруса из положения *2* в положение *3* на расстояние *a* равна

$$A'_{12} = \int_0^a F dx = Fa.$$

Минимальная работа A'_{12} совершается при равномерном поступательном перемещении без ускорения, тогда в соответствии со вторым законом Ньютона (при равном нулю ускорении)

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mu + \boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g} = 0,$$

где $F_\mu = \mu N$ (обозначения сил очевидны, см. рис. 3.4, *б*) в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеем связь модулей сил

$$\begin{cases} 0 = F - F_\mu, \\ 0 = N - mg, \end{cases}$$

т. е. $F = F_\mu = \mu mg$, и работа A'_{12}, совершаемая против силы трения, равна

$$A'_{12} = Fa = \mu mga.$$

Подставляя значения заданных параметров, получаем

$$A'_{12} = \mu mga = 0.45 \cdot 100 \cdot 9.8 \cdot 0.2 \approx 88.2 \text{ Дж.}$$

Для сравнения найдем отношение найденных работ:

$$\frac{A'_{12}}{A_{12}} = \frac{2\mu mga}{mga\left(\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \mu = 4.83\mu.$$

Результат пропорционален коэффициенту трения скольжения. Для заданного значения коэффициента трения получаем

$$\frac{A'_{12}}{A_{12}} = 4.83\mu = 2.17,$$

таким образом, в данном случае по затратам энергии экономичнее кантовать брус, чем тащить волоком.

Найдем значение коэффициента трения μ^*, при котором работы A'_{12} и A_{12} одинаковы:

$$\frac{A'_{12}}{A_{12}} = 1 = 4.83\mu^*, \quad \mu^* = 1/4.83 = 0.207.$$

Если $\mu > 0.207$, то легче брус кантовать, в противном случае – тащить волоком.

Ответ: $A_{12} \approx 40.6$ Дж; $A'_{12} \approx 88.2$ Дж.

Пример 3.5. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = kr^2/2$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – модуль радиуса-вектора частицы; $k > 0$ – постоянная. Найти силу $\boldsymbol{F}$, действующую на частицу, и работу A, совершаемую этой силой при пермещении частицы из точки 1 с координатами (1,1,1) м в точку 2 с координатами (2, 2, 2) м.

Решение

Воспользуемся формулой (3.7), выражающей действующую на частицу потенциальную силу $\boldsymbol{F}$ через потенциальную энергиею частицы U:

$$\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right). \qquad (3.24)$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = kx,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) = ky,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2) = kz.$$

Подставляя эти выражения в (3.7), получаем

$$\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{i} - ky\boldsymbol{j} - kz\boldsymbol{k},$$

или

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

Знак минус показывает, что сила $\boldsymbol{F}$ является силой притяжения к центру с координатой $r = 0$.

Найдем работу силы $\boldsymbol{F}$ по перемещению частицы из начальной точки 1 в конечную 2 согласно (3.8):

$$A_{12} = U_1 - U_2, \quad A_{12} = k\frac{r_1^2}{2} - k\frac{r_2^2}{2} = \frac{k}{2}\left(r_1^2 - r_2^2\right).$$

Вычисляем квадраты модулей радиусов-векторов начального и конечного состояния:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 + 1 + 1 = 3\text{м}^2,$$

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 4 + 4 + 4 = 12\text{м}^2,$$

получаем $A_{12} = -4.5k$ (Дж).

Работа отрицательная, так как в конечной точке 2 перемещения потенциальная энергия больше, чем в начальной точке 1.

Ответ: $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$ (Н); $A_{12} = -4.5k$ (Дж).

Задачи для аудиторной работы

А3.1 Какую мощность должен развивать трактор при перемещении прицепа массой 5 т вверх по уклону со скоростью 3.6 км/ч, если угол наклона 20°, а коэффициент трения прицепа 0.2?

А3.2. Два тела соскальзывают без трения и без начальной скорости с наклонных плоскостей (рис. 3.5). 1. Сравнить скорости этих тел в конце соскальзывания. 2. Одинаковы ли времена соскальзывания?

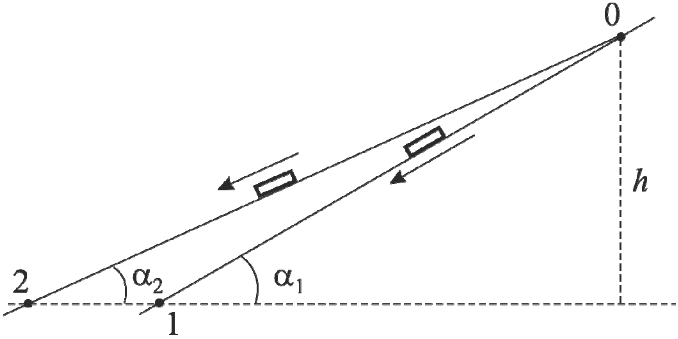


Рис. 3.5. К задаче **А3.2**

А3.3. Камень брошен вверх под углом $\alpha = 60°$ к плоскости горизонта. Кинетическая энергия E_{K0} тела в начальный момент времени равна 20 Дж. Определить кинетическую E_{K1} и потенциальную энергию U_1 камня в высшей точке его траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

А3.4. Какую работу надо произвести, чтобы сосновый брус сечением 20×20 см и массой 209 кг перевести из горизонтального в вертикальное положение. Длина бруса $l = 6$ м.

А3.5. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = \alpha / r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – модуль радиуса-вектора частицы; α – некоторая постоянная. Найти силу $\boldsymbol{F}$, действующую на частицу, и работу A, совершаемую над частицей при переходе ее из точки с координатами (1, 2, 3) м в точку с координатами (2, 3, 4) м.

Задание на дом

B3.1. Тело массой 50 кг падает с высоты 25 м. Определить среднюю и мгновенную мощность, развиваемые силой тяжести. Сопротивлением воздуха пренебречь.

B3.2. Под действием постоянной силы вагонетка прошла путь 5 м и приобрела скорость 2 м/с. Определить работу силы, если масса вагонетки равна 400 кг и коэффициент трения 0.01.

B3.3. На наклонную плоскость с углом наклона $\alpha = 30°$ влетела хоккейная шайба со скоростью $\upsilon_0 = 25$ м/с. Поднявшись на максимальную высоту, шайба начинает возвращаться к начальному положению. Коэффициент трения скольжения шайбы о плоскость $\mu = 0.05$. Определить скорость шайбы после возвращения в исходное положение.

B3.4. Оконную штору массой 5 кг и длиной 2 м свертывают в валик над окном. Какова наименьшая затрачиваемая работа? Трением пренебречь.

B3.5. Тело массой $m = 1$ кг, брошенное с вышки в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с, через $t_1 = 3$ с упало на землю. Определить потенциальную энергию и кинетическую энергию спустя секунду после начала движения.

B3.6. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = \alpha(x / y - y / z)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – модуль радиуса-вектора частицы; α – некоторая постоянная. Найти силу $\boldsymbol{F}$, действующую на частицу, и работу A, совершаемую над частицей при переходе ее из точки с координатами (1, 1, 1) м в точку с координатами (2, 2, 3) м.

4. ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА УПРУГОЕ И НЕУПРУГОЕ СОУДАРЕНИЯ

Импульс силы за малый промежуток времени dt

$$\boldsymbol{F}dt = d\boldsymbol{p}\ . \tag{4.1}$$

Импульс материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\upsilon}\ . \tag{4.2}$$

Центр масс C системы N *материальных точек задается радиусом-вектором* $\boldsymbol{r}_C$

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i\ . \tag{4.3}$$

Импульс системы N *материальных точек* (*импульс тела*)

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = m\boldsymbol{\upsilon}_C, \quad \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{\upsilon}_i\ , \tag{4.4}$$

где $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – полная масса; $\boldsymbol{\upsilon}_C = d\boldsymbol{r}_C / dt$.

$$\boldsymbol{\upsilon}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{\upsilon}_i \tag{4.5}$$

– скорость центра масс.

Закон сохранения импульса замкнутой системы

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \upsilon_i = \text{const}. \tag{4.6}$$

Если для некоторого направления в пространстве (например, вдоль оси x) проекция на это направление равнодействующей всех сил равна нулю, то сохраняется проекция импульса на это направление:

$$p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{ix} = \sum_{i=1}^{N} m_i \upsilon_{ix} = \text{const}.$$

При *упругом соударении* тел сохраняются как полный импульс, так и полная механическая энергия системы тел. В частности, при *упругом центральном* (*лобовом*) *соударении* двух тел массой m_1 и m_2, движущихся со скоростью υ_1 и υ_2, их скорости после соударения равны:

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \tag{4.7}$$

$$\upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \tag{4.8}$$

При неупругом соударении тел полный импульс системы сохраняется, а полная механическая энергия не сохраняется и частично переходит в тепловую энергию. При абсолютно неупругом соударении два тела после соударения слипаются. В частности, при абсолютно неупругом центральном (лобовом) соударении двух тел массой m_1 и m_2, движущихся со скоростью υ_1 и υ_2, их скорость после слипания равна

$$\upsilon' = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \tag{4.9}$$

Пример 4.1. Найти временную зависимость изменения импульса хоккейной шайбы, движущейся вверх по наклонной плоскости (рис. 4.1). Масса шайбы $m = 0.165$ кг, начальная скорость 20 м/с, угол наклона плоскости $\alpha = \pi / 6$, коэффициент трения скольжения шайбы $\mu = 0.05$. Спустя время τ шайба остановилась в верхней точке наклонной плоскости, определить среднее значение импульса $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ за время τ.

Решение

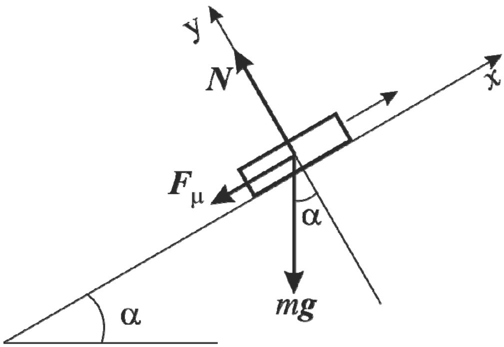


Рис. 4.1. К примеру 4.1

Согласно второму закону Ньютона

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_\mu + \boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g},$$

где $F_\mu = \mu N$, уравнения движения в проекциях на оси x, y (рис. 4.1) имеют вид

$$\begin{cases} ma = -F_\mu - mg\sin\alpha, \\ 0 = N - mg\cos\alpha. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получаем x – проекцию ускорения шайбы

$$a = -g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha),$$

через которую выразим x –проекции скорости шайбы

$$\upsilon = \upsilon_0 - at = \upsilon_0 - g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)t$$

и импульса шайбы

$$p(t) = m\upsilon = m\upsilon_0 - mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)t.$$

Учитывая, что начальный импульс $p_0 = m\upsilon_0$, находим x – проекцию приращения импульса

$$\Delta p(t) = p(t) - p_0 = -mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)t,$$

которое не зависит от начальной скорости.

Время τ подъема шайбы до остановки, когда $p(\tau) = 0$, определяется начальной скоростью

$$p(\tau) = m\upsilon_0 - mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\tau = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{\upsilon_0}{g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

Очевидно, что при движении вверх по наклонной плоскости векторы $\boldsymbol{\upsilon}_0$, $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{p}(t)$ направлены вдоль оси x, а векторы $\boldsymbol{a}$ и $\Delta\mathbf{p}(t)$ – против оси x.

Среднее значение импульса $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ за время τ по оределению есть

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \boldsymbol{p}(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\boldsymbol{p}_0 + m\boldsymbol{a}t)dt = \boldsymbol{p}_0 + m\boldsymbol{a}\frac{\tau}{2}.$$

Его проекция на ось x равна

$$\langle p \rangle = \left(m\upsilon_0 - mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\frac{\tau}{2} \right) = \frac{m\upsilon_0}{2} = 1.65 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Ответ: а) $\Delta p(t) = -mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)t$; б) $\langle p \rangle = 1.65$ кг · м/с.

Пример 4.2. Через блок радиусом R, укрепленным на потолке комнаты, перекинута нить, на концах которой подвешены тела массой $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг (рис. 4.2). Массы блока и нити пренебрежимо малы, трение отсутствует. Найти ускорение центра масс этой системы, считая тела материальными точками.

Решение

Составим уравнения движения для двух тел системы:

$$\begin{cases} m_1\boldsymbol{a}_1 = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1, \\ m_2\boldsymbol{a}_2 = m_2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_2. \end{cases}$$

Направим координатные оси так, как показано на рис. 4.2.

Проецируем силы и ускорения на вертикальную ось, и, полагая, что более тжелое тело опускается, а легкое поднимается, запишем эти уравнения через модули сил и ускорений:

$$\begin{cases} -m_1a_1 = m_1g - T_1, \\ m_2a_2 = m_2g - T_2. \end{cases}$$

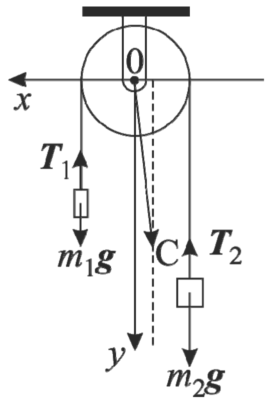


Рис. 4.2. К примеру 4.2

Поскольку нить невесома и нерастяжима, то $T_1 = T_2 = T$ и $a_1 = a_2 = a$, поэтому последняя система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} -m_1a = m_1g - T, \\ m_2a = m_2g - T. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$(m_2 + m_1)a = (m_2 - m_1)g,$$

откуда получим модуль ускорения

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g.$$

Радиус-вектор центра масс найдем согласно (4.3):

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{m_2 + m_1}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2),$$

где $\boldsymbol{r}_1 = R\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{r}_2 = -R\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$. Подставляя эти радиусы-векторы в (4.3), получаем

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{m_2 + m_1}((m_1 - m_2)R\boldsymbol{i} + (m_1 y_1 + m_2 y_2)\boldsymbol{j}).$$

Скорость центра масс выражается формулой (4.5) и равна

$$\upsilon_C = \frac{1}{m_2 + m_1}(-m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)\boldsymbol{j}.$$

Дифференцируя по времени последнее выражение, получаем ускорение центра масс, которое выразим через модули ускорений тел:

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{1}{m_2 + m_1}(-m_1 a_1 + m_2 a_2)\boldsymbol{j} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} a\boldsymbol{j} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \boldsymbol{g}.$$

Подставляя заданные числовые значения, получаем

$$\boldsymbol{a}_C = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)^2 \boldsymbol{g} = \frac{9.8}{9}\boldsymbol{j} \approx 1.1\boldsymbol{j} \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\boldsymbol{a}_C \approx 1.1\boldsymbol{j}$ м/с^2.

Пример 4.3. На тонкой нити длиной l = 50 см подвешен пружинный пистолет так, что ствол расположен горизонтально. На какой угол α отклонится нить после выстрела, если пуля массой $m_1 = 20$ г при вылете имеет скорость $\upsilon_1 = 10$ м/с? Масса пистолета $m_2 = 200$ г.

Решение

Из закона сохранения импульса $m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = 0$ получаем скорость пистолета сразу после выстрела $\upsilon_2 = m_1\upsilon_1 / m_2$, а из закона сохранения энергии $m_2\upsilon_2^2/2 = m_2 gh$ выражаем высоту отклонения пистолета $h = \upsilon_2^2/2g$. Вместе с тем высота h равна: $h = l - l\cos\alpha$. Приравнивая правые части, выражаем $\cos\alpha = 1 - \upsilon_2^2/2gl$, откуда $\alpha = \arccos\left(1 - m_1^2\upsilon_1^2/2glm_2^2\right) \approx 0.456 \text{ рад} \approx 26°$.

Ответ: $\alpha \approx 26°$.

Пример 4.4. Граната массой m = 2.5 кг, летящая со скоростью $\upsilon = 8$ м/с, разрывается на два осколка. Один из них имеет массу $m_1 = 1$ кг и скорость $\upsilon_1 = 4$ м/с, которая направлена перпендикулярно скорости гранаты. Чему равна скорость υ_2 второго осколка?

Решение

Согласно закону сохранения импульса $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$, где $\boldsymbol{p}$ – импульс гранаты; $\boldsymbol{p}_1$ – импульс первого осколка; $\boldsymbol{p}_2$ – импульс второго осколка. В проекциях на направления векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}_1$ имеем: $p = p_2 \cos\varphi$ и $p_1 - p_2 \sin\varphi = 0$, где $p = m\upsilon$, $p_1 = m_1\upsilon_1$, $p_2 = m_2\upsilon_2$, $m_2 = m - m_1$.

Как видно из рис. 4.3, угол φ вылета второго осколка равен $\varphi = \mathrm{arctg}(p_1 / p) = = \mathrm{arctg}(4/20) \approx 11°20'$, величина импульса второго осколка равна $p_2 = \sqrt{p^2 + p_1^2} = = 20.4$ кг·м/с, а его скорость $\upsilon_2 = p_2 / m_2 = = 13.6$ м/с.

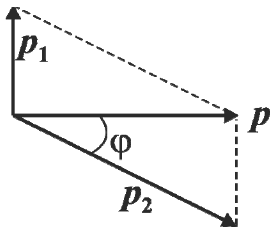


Рис. 4.3. К примеру 4.4

Ответ: $\varphi \approx 11°20'$ и $\upsilon_2 = 13.6$ м/с.

Пример 4.5. Два одинаковых шарика упруго сталкиваются друг с другом. После соударения первый шарик, имевший до удара скорость $\upsilon_1 = 5.0$ м/с, начинает двигаться под углом $\alpha = 60°$ к первоначальному направлению, а второй шарик останавливается. Найти скорость υ_1' первого шарика после соударения.

Решение

Выпишем законы сохранения импульса

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1' \qquad (4.10)$$

и энергии

$$m_1\upsilon_1^2/2 + m_2\upsilon_2^2/2 = m_1\upsilon_1'^2/2,$$

где $\boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{\upsilon}_1$, $\boldsymbol{p}_2 = m_2\boldsymbol{\upsilon}_2$ (и $\boldsymbol{\upsilon}_1, \boldsymbol{\upsilon}_2$) – импульсы (и скорости) первого и второго шариков до соударения, $\boldsymbol{p}_1' = m_1\boldsymbol{\upsilon}_1'$ (и $\boldsymbol{\upsilon}_1'$) – импульс (и ско-

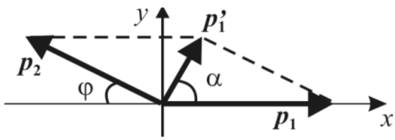


Рис. 4.4. К примеру 4.5

рость) первого шарика после соударения, массы шариков равны $m_1 = m_2$. В соответствии с выражением (4.10) построим треугольник импульсов (рис. 4.4). Пусть ось x направлена вдоль $\boldsymbol{p}_1$, а угол φ характеризует направление вектора $\boldsymbol{p}_2$.

Проецируем импульсы на оси координат и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} p_1 - p_2\cos\varphi = p_1'\cos\alpha, \\ p_2\sin\varphi = p_1'\sin\alpha, \\ m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 = m_1\upsilon_1'^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \upsilon_1 - \upsilon_2\cos\varphi = \upsilon_1'\cos\alpha, \\ \upsilon_2\sin\varphi = \upsilon_1'\sin\alpha, \\ \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = \upsilon_1'^2. \end{cases} \qquad (4.11)$$

Используя тригонометрическое тождество $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, исключаем угол φ из первого $\upsilon_2^2\cos^2\varphi = (\upsilon_1 - \upsilon_1'\cos\alpha)^2$ и второго $\upsilon_2^2\sin^2\varphi = (\upsilon_1'\sin\alpha)^2$ уравнений системы (4.11), получим

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 - 2\upsilon_1\upsilon_1'\cos\alpha + \upsilon_1'^2. \qquad (4.12)$$

Третье уравнение системы (4.11) дает $\upsilon_2^2 = \upsilon_1'^2 - \upsilon_1^2$. Приравнивая правые части двух последних выражений, имеем $\upsilon_1' = \upsilon_1 / \cos\alpha = 5/0.5 = 10$ м/с.

Ответ: $\upsilon_1' = 10$ м/с.

Пример 4.6. Человек массой $m_1 = 80$ кг, бегущий со скоростью $\upsilon_1 = 10$ м/с, догоняет тележку массой $m_2 = 100$ кг, движущуюся со скоростью $\upsilon_2 = 8$ м/с, и вскакивает на нее. С какой скоростью υ будет двигаться тележка?

Решение

Импульс бегущего человека равен $p_1 = m_1\upsilon_1$, импульс пустой тележки $p_2 = m_2\upsilon_2$, а импульс тележки с человеком на ней равен $p = (m_1 + m_2)\upsilon$.

Закон сохранения импульса $p_1 + p_2 = p$ дает уравнение $m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon$, откуда $\upsilon = (m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)/(m_1 + m_2)$. Подставляя численные значения величин, получаем $\upsilon = (800 + 800)/180 = 8.9$ м/с.

Ответ: $\upsilon = 8.9$ м/с.

Пример 4.7. Три лодки с первоначальными равными массами $M_1 = M_2 = M_3 \equiv M = 250$ кг идут друг за другом с одинаковыми скоростями $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 \equiv \upsilon = 5$ м/с. Из второй лодки одновременно в первую и третью бросают грузы массой по $m = 25$ кг со скоростью $u = 2$ м/с относительно второй лодки. Определить скорость лодок после переброски грузов.

Решение

При взаимодействии каждой лодки с соответствующими грузами выполняется закон сохранения импульса. Удобно провести рассмотрение в системе отсчета, связанной с неподвижной водой. Найдем проекции векторов скоростей и импульсов на направление исходного движения лодок. Для груза, брошенного в первую лодку, эти проекции равны $u_+ = \upsilon + u$ и $p_+ = mu_+ = m(\upsilon + u)$, а для груза, брошенного в третью лодку, они равны $u_- = \upsilon - u$ и $p_- = mu_- = m(\upsilon - u)$. До переброски грузов импульс каждой лодки равен $p = M\upsilon$. После переброски грузов первая лодка имеет массу $M + m$, скорость υ_1 и импульс $(M + m)\upsilon_1$, вторая лодка имеет массу $M - 2m$, скорость υ_2 и импульс $(M - 2m)\upsilon_2$, третья лодка имеет массу $M + m$, скорость υ_3 и импульс $(M + m)\upsilon_3$.

Таким образом, закон сохранения импульса позволяет записать следующие уравнения.

1. Для первой лодки

$$M\upsilon + m(\upsilon + u) = (M + m)\upsilon_1,$$

откуда

$$\upsilon_1 = \upsilon + u\frac{m}{M + m}, \quad \upsilon_1 \approx 5.2 \text{ м/с}.$$

2. Для второй лодки

$$M\upsilon = m(\upsilon + u) - m(\upsilon - u) + (M - 2m)\upsilon_2,$$

откуда

$$\upsilon_2 = \frac{M\upsilon - m(\upsilon + u) + m(\upsilon - u)}{M - 2m} = 5.75 \approx 5.8 \text{ м/с.}$$

3. Для третьей лодки

$$M\upsilon - m(\upsilon - u) = (M + m)\upsilon_3,$$

откуда

$$\upsilon_3 = \upsilon - u\frac{m}{M + m}, \ \upsilon_3 = 4.82 \approx 4.8 \text{ м/с.}$$

Ответ: $\upsilon_1 = 5.2$ м/с, $\upsilon_2 = 5.8$ м/с, $\upsilon_3 = 4.8$ м/с.

Задачи для аудиторной работы

А4.1. Тело массой $m = 0.165$ кг бросили под углом $\alpha = \pi / 6$ к горизонту с начальной скоростью 20 м/с. Спустя время τ тело упало на Землю. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: а) приращение импульса тела за время полета; б) среднее значение импульса $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ за время τ.

А4.2. Система состоит из двух шариков массой m_1 и m_2, которые соединены между собой невесомым недеформируемым стержнем. В момент $t = 0$ шарикам сообщили скорости $\boldsymbol{\upsilon}_1$ и $\boldsymbol{\upsilon}_2$, после чего система начала двигаться в однородном поле тяжести Земли. Найти зависимость от времени радиуса-вектора и импульса центра масс этой системы относительно его начального положения.

А4.3. Пуля массой $m = 9$ г ударяется о маятник массой $M = 1$ кг и длиной нити подвеса, равной $l = 1$ м, и застревает в нем, в результате нить отклонилась на угол $\varphi = \pi / 3$. Какая доля кинетической энергии пули перейдет в тепло?

А4.4. Два шара массой 200 и 800 г, подвешенные на двух параллельных нитях длиной 2 м, касаются друг друга. Меньший шар отводят на 90° от начального положения и отпускают. Найти скорости шаров после столкновения, считая: 1) удар абсолютно упругим; 2) удар абсолютно неупругим. Какая часть энергии пойдет на нагревание шаров?

А4.5. На подножку вагонетки, которая движется прямолинейно со скоростью 15 м/с, прыгает человек в направлении, перпендикулярном к ходу вагонетки. Масса вагонетки 250 кг. Какой станет скорость вагонетки, если масса человека 80 кг?

А4.6. Первая лодка с грузом имеет массу 125 кг, а вторая лодка – массу 100 кг. Лодки идут вдоль близких параллельных прямых навстречу друг другу с одинаковой скоростью 5 м/с. Когда лодки встречаются, из первой во вторую осторожно перекладывают груз массой 25 кг таким образом, что поперечные к начальному направлению движения компоненты импульсов лодок не возникают. Найти новые скорости лодок.

Задание на дом

В4.1. При выстреле из орудия снаряд массой 10 кг получает кинетическую энергию 1.8 МДж. Определить кинетическую энергию ствола орудия вследствие отдачи, если масса ствола орудия равна 600 кг.

В4.2. Пусть хоккейная шайба скользит вверх по наклонной плоскости. Спустя время τ шайба остановилась в верхней точке наклонной плоскости, и затем начала скользить вниз. Определить изменение импульса при достижении шайбой основания наклонной плоскости. Масса шайбы $m = 0.165$ кг, начальная скорость 20 м/с, угол наклона плоскости $\alpha = \pi / 6$, коэффициент трения скольжения шайбы $\mu = 0.05$.

В4.3. Через блок радиусом R, укрепленным на потолке комнаты, перекинута нить, на концах которой подвешены тела массой $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг (см. рис. 4.2). Массы блока и нити пренебрежимо малы, трение отсутствует. Найти закон движения $\boldsymbol{r}_C(t)$ центра масс этой системы, если в начальный момент неподвижные тела находились на одной высоте l (длина нити $2l + \pi R$).

В4.4. Два неупругих шара массой 2 и 3 кг движутся со скоростью соответственно 8 и 4 м/с. Определить увеличение внутренней энергии Q шаров при их столкновении в двух случаях: 1) меньший шар нагоняет больший; 2) шары движутся навстречу друг другу.

В4.5. Шар массой 2 кг налетает на покоящийся шар массой 8 кг. Импульс движущегося шара равен $10 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Удар шаров центральный, упругий. Определить после удара: 1) импульсы шаров; 2) изменение импульсов; 3) кинетические энергии шаров; 4) изменение кинетической энергии первого шара; 5) долю кинетической энергии, переданной первым шаром второму.

В4.6. Две лодки идут навстречу параллельным курсом. Когда лодки находятся друг против друга, с каждой лодки на встречную перебрасывают мешок массой 50 кг, в результате чего первая лодка останавливается, а вторая идет со скоростью 4 м/с в прежнем направлении. Каковы были скорости лодок до обмена мешками, если массы лодок с грузом равны 250 и 500 кг соответственно?

5. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{n}, \tag{5.1}$$

где $d\varphi$ – малый угол поворота за время dt; $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, направление которого определяется правилом буравчика.

Линейная скорость

$$\boldsymbol{\upsilon} = \omega \times \boldsymbol{r} \tag{5.2}$$

материальной точки при вращательном движении с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ отсчитывается от оси вращения.

Угловое ускорение

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{5.3}$$

Момент инерции материальной точки, вращающейся вокруг оси,

$$J = mr^2, \tag{5.4}$$

где m – масса материальной точки; r – расстояние от нее до оси вращения.

Момент инерции системы N материальных точек, вращающихся вокруг оси z:

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 , \qquad (5.5)$$

где m_i – масса *i*-й материальной точки; r_i – расстояние от нее до оси вращения.

Момент инерции твердого тела, вращающегося вокруг оси z,

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho(r) r^2 dV , \qquad (5.6)$$

где $\rho(r) = dm / dV$ – плотность тела; dm – масса элемента объема dV, расположенного на расстояни r от оси вращения; в цилиндрической системе координат $dV = 2\pi r dr dz$..

Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2 , \qquad (5.7)$$

где J – момент инерции твердого тела массой m относительно некоторой оси z; J_C – момент инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела; a – расстояние между осями. Моменты инерции простых тел приведены в табл. 5.1.

Момент импульса материальной точки

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\upsilon} . \qquad (5.8)$$

Момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг оси z:

$$L_z = J\omega . \qquad (5.9)$$

Момент силы

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} . \qquad (5.10)$$

Проекция момента силы на оси z:

$$M_z = F_{\perp} l , \qquad (5.11)$$

где $F_{\perp}$ – проекция силы на плоскость, перпендикулярную к оси z; l – плечо силы.

Закон изменения момента импульса

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}. \qquad (5.12)$$

Основной закон динамики вращательного движения тела

$$M_z = J\varepsilon\,. \qquad (5.13)$$

Закон сохранения момента импульса

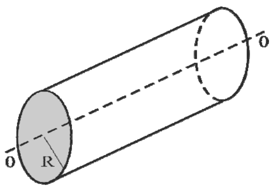
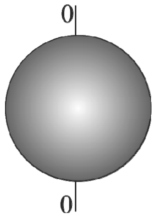
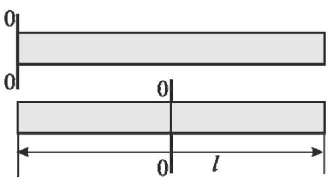
$$\boldsymbol{L} = \text{const} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{M} = 0\,. \qquad (5.14)$$

Закон сохранения момента импульса тела, вращающегося вокруг оси z:

$$L_z = J\omega = \text{const} \quad \text{при} \quad M_z = 0\,. \qquad (5.15)$$

Таблица 5.1

Моменты инерции простых тел относительно оси 00

	Обод, полый цилиндр, кольцо	$J = mR^2$
	Диск, сплошной цилиндр	$J = \frac{1}{2}mR^2$
	Сфера радиусом R	$J = \frac{2}{3}mR^2$
	Шар радиусом R	$J = \frac{2}{5}mR^2$
	Стержень	$J = \frac{1}{3}ml^2$
	Стержень	$J = \frac{1}{12}ml^2$

Элементарная работа момента силы при повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ вокруг оси z

$$dA = M_z d\varphi. \tag{5.16}$$

Мощность момента силы

$$N = M_z \omega. \tag{5.17}$$

Кинетическая энергия вращательного движения тела вокруг неподвижной оси:

$$\boldsymbol{E}_K = \frac{J\omega^2}{2}. \tag{5.18}$$

Кинетическая энергия вращательного и поступательного движения тела

$$\boldsymbol{E}_K = \frac{m\boldsymbol{\upsilon}_C^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \tag{5.19}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}_C$ – скорость центра масс тела; ω и J – угловая скорость и момент инерции вращения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Пример 5.1. Известно, что Луна обращена к Земле одной стороной и совершает полный оборот вокруг Земли за время $T_M = 27.3$ суток. Найти угловую скорость вращения Луны вокруг ее оси. Сравнить эту скорость с угловой скоростью суточного вращения Земли с периодом $T_E = 24$ ч.

Решение

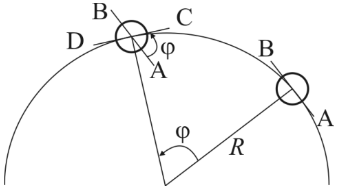


Рис. 5.1. К примеру 5.1

Луна участвует одновременно в нескольких вращательных движениях, основными из них являются вращение вокруг Земли с угловой скоростью $\omega_M = 2\pi / T_M$ и вращение вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0 (рис. 5.1). Покажем, что $\omega_0 = \omega_M$. Пусть в некоторый момент Луна находилась на своей орбите, причем плоскость, перпендикулярная радиусу R земной орбиты, содержала прямую AB. После того как Луна переместилась за время t в другое положение, измеряемое углом φ, плоскость повернулась на такой же угол φ, следовательно, угловая скорость обращения Луны по орбите вокруг Земли в точности равна угловой скорости вращения Луны вокруг своей оси:

$$\omega_M = 2\pi / T_M = 2\pi / (27.3 \cdot 24 \cdot 3600) = 2.66 \cdot 10^{-6}\ \text{с}^{-1}.$$

Угловая скорость суточного вращения Земли вокруг собственной оси равна $\omega_E = 2\pi / T_E = 2\pi / (24 \cdot 3600) = 7.27 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}$, откуда $\omega_E / \omega_M = 27.3$.

Ответ: $\omega_M = 2.66 \cdot 10^{-6}\ \text{с}^{-1}$, $\omega_E / \omega_M = 27.3$.

Пример 5.2. Катушка с намотанной нитью может катиться по поверхности стола без проскальзывания. С какой скоростью и в каком направлении будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении вправо со скоростью $\upsilon_A = 1$ см/с? Диаметр внутреннего цилиндра намотки $R_1 = 1.8$ см, диаметр внешней части обода $R_2 = 3.6$ см.

Решение

Движение катушки является суперпозицией вращательного движения вокруг оси O и горизонтального поступательного движения со скоростью υ_0 (рис. 5.2). В отсутствие проскальзывания точка B соприкосновения катушки со столом имеет нулевую скорость относительно стола. Поэтому движение катушки в каждый момент времени удобно описывать как чисто вращательное движение с угловой скоростью $\omega = \upsilon_0 / R_2$ вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку B соприкосновения с поверхностью стола. Скорость υ_A точки A схода нити с катушки равна $\upsilon_A = \omega(R_2 - R_1)$,

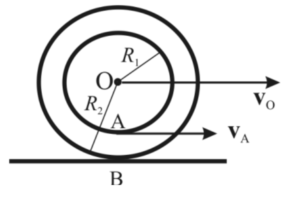


Рис. 5.2. К примеру 5.2

а скорость оси катушки O направлена вправо и равна $\upsilon_0 = \omega R_2$. Исключим ω, получим $\upsilon_0 = \upsilon_A R_2 / (R_2 - R_1) = 2$ см/с.

Ответ: $\upsilon_0 = 2$ см/с.

Пример 5.3. Записать выражение для вектора момента импульса $\boldsymbol{L}$ материальной точки массой $m =$ 0.1 кг, движущейся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ м/с в точке $\boldsymbol{r} = 1\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ м относительно начала координат.

Решение

Импульс материальной точки есть $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\upsilon} = 0.5\boldsymbol{i} + 0.4\boldsymbol{j} + 0.3\boldsymbol{k}$ кг · м/с, момент импульса равен

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} =$$

$$= (yp_z - zp_y)\boldsymbol{i} + (zp_x - xp_z)\boldsymbol{j} + (xp_y - yp_x)\boldsymbol{k}\,. \qquad (5.20)$$

Учитывая, что $x = 1$ м, $y = 2$ м, $z = 3$ м, а $p_x = 0.5$ кг · м/с, $p_y = 0.4$ кг · м/с, $p_z = 0.3$ кг · м/с, получаем $\boldsymbol{L} = -0.6\boldsymbol{i} + 1.2\boldsymbol{j} - 0.6\boldsymbol{k}$ кг · м^2/с.

Ответ: $\boldsymbol{L} = -0.6\boldsymbol{i} + 1.2\boldsymbol{j} - 0.6\boldsymbol{k}$ кг · м^2/с.

Пример 5.4. Тонкая однородная пластинка массой $m = 0.6$ кг имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти ее момент инерции относительно оси, совпадающей с одним из катетов, длина которого $a = 0.2$ м.

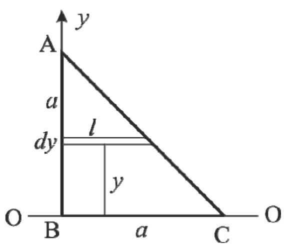


Рис. 5.3. К примеру 5.4

Решение

По определению (5.6) момент инерции есть $J = \int\limits_m r^2 dm$.

Направим ось y декартовой системы координат перпендикулярно оси вращения OO, как показано на рис. 5.3.

Тогда $r = y$ – расстояние от оси до параллельной оси тонкой полоски длиной l и шириной dy с массой $dm = \rho l dy$, где $\rho = m / S$ – плотность вещества. Площадь треугольной пластинки $S = a^2 / 2$, т. е. $\rho = 2m / a^2$, длину l найдем из пропорции $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a - y}{l} = 1$, откуда $l = a - y$. В итоге получаем $J = \int\limits_m r^2 dm = \rho \int\limits_0^a y^2 (a - y) dy = \rho \dfrac{a^4}{12} = \dfrac{1}{6} m a^2 =$ $= 0.6 \cdot 0.04 / 6 = 0.004$ кг $\cdot$ м^2.

Ответ: $J = 0.004$ кг $\cdot$ м^2.

Пример 5.5. Диск радиусом $R = 10$ см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0.5$ рад/с^2. Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорение точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения (рис. 5.4).

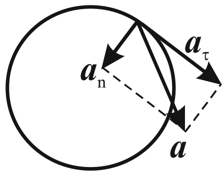


Рис. 5.4. К примеру 5.5

Решение

Нормальное ускорение точек на окружности диска $a_n = \omega^2 R$, тангенциальное ускорение $a_\tau = d\upsilon / dt = R d\omega / dt$, где угловая скорость равна $\omega = \varepsilon t$. Тогда $a_n = R \varepsilon^2 t^2 = 0.1 \cdot 0.25 \cdot 4 = 0.1$ м/с^2. Тангенциальное ускорение $a_\tau = R\varepsilon = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05$ м/с^2. Полное ускорение $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \approx$ ≈ 0.11 м/с^2.

Ответ: $a_n = 0.1$ м/с^2, $a_\tau = 0.05$ м/с^2, $a = 0.11$ м/с^2.

Пример 5.6. Две гири массой $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок массой $m = 1$ кг (рис. 5.5). Найти ускорение, с которым движутся гири, и силы натяжения нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском.

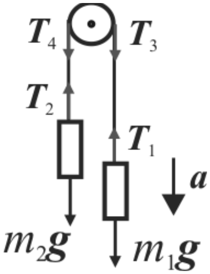


Рис. 5.5. К примеру 5.6

Решение

Блок имеет массу m, проскальзывания нитей о блок нет, и суммарный вращающий момент от сил натяжения нитей T_3 и T_4 не равен нулю. Составим уравнения динамики гирь и блока

$$\begin{cases} J\varepsilon = \boldsymbol{M}_3 + \boldsymbol{M}_4, \\ m_1\boldsymbol{a} = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1, \\ m_2\boldsymbol{a} = m_2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_2 \end{cases}$$

и спроецируем векторы первого уравнения на направление, задаваемое правилом буравчика, а векторы второго и третьего уравнения – на ось, направленную вертикально вниз:

$$\begin{cases} J\varepsilon = M_3 - M_4, \\ m_1 a = m_1 g - T_1, \\ -m_2 a = m_2 g - T_2. \end{cases}$$

Момент инерции диска радиусом r равен $J = mr^2/2$, а модули моментов сил натяжения нитей $M_3 = rT_3$ и $M_4 = rT_4$. Согласно третьему закону Ньютона $T_1 = T_3$ и $T_2 = T_4$. Угловое ускорение связано с ускорением грузов как $\varepsilon = a/r$, поэтому система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} ma/2 = T_1 - T_2, \\ m_1 a = m_1 g - T_1, \\ m_2 a = -m_2 g + T_2. \end{cases}$$

Складываем эти уравнения и получаем $(m/2 + m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g$, откуда $a = (m_1 - m_2)g/(m/2 + m_1 + m_2) = 2.8$ м/с^2.

Силы натяжения $T_1 = m_1(g - a) = 2(9.8 - 2.8) = 14$ Н, $T_2 = m_2 \times (g + a) = (9.8 + 2.8) = 12.6$ Н.

Ответ: $a = 2.8$ м/с^2, $T_1 = 14$ Н, $T_2 = 12.6$ Н.

Пример 5.7. Горизонтально расположенный деревянный стержень массой $m_2 = 0.8$ кг и длиной $l = 1.8$ м может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает пластмассовый шарик массой $m_1 = 0.003$ кг, летящий перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью $\upsilon =$ 50 м/с, и упруго отражается. Определить угловую скорость ω вращения стержня и скорость шарика сразу после удара.

Решение

Запишем закон сохранения момента импульса

$$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_1' + \boldsymbol{L}_2,$$

где $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_1'$ – моменты импульса шарика до и после удара; $\boldsymbol{L}_2$ – момент импульса стержня после удара. Спроецируем векторное уравнение и моменты на ось вращения $L_1 = -L_1' + L_2$, где $L_1 = m_1\upsilon l/2$, $L_1' = m_1\upsilon' l/2$ (υ' – скорость шарика после удара); $L_2 = J\omega$ и $J = m_2 l^2/12$, откуда

$$m_1(\upsilon + \upsilon') = m_2 l\omega/6. \tag{5.21}$$

Запишем закон сохранения энергии $m_1\upsilon^2/2 = m_1(\upsilon')^2/2 + J\omega^2/2$ в виде уравнения

$$m_1(\upsilon - \upsilon')(\upsilon + \upsilon') = m_2 l^2\omega^2/12. \tag{5.22}$$

Из уравнений (5.21) и (5.22) получаем $\omega = 2(\upsilon - \upsilon')/l$, это выражение для ω подставим в (5.21), что дает уравнение $m_1(\upsilon + \upsilon') = m_2(\upsilon - \upsilon')/3$, из которого следует $\upsilon' = (m_2 - 3m_1)\upsilon/(m_2 + 3m_1) = (0.800 - 0.009)50/0.809 = 48.89$ м/с и $\omega = 2(50 - 48.89)/1.8 = 1.24$ рад/с.

Ответ: $\upsilon' \approx 48.9$ м/с, $\omega \approx 1.24$ рад/с.

Пример 5.8. Ротор мотора снабжен тормозом. Тормоз состоит из двух дисков радиусом $R = 0.15$ м. Первый диск закреплен на торце оси ротора и вращается вместе с ним. Второй диск, лишенный возможности вращаться, соосно параллелен первому диску и может прижиматься к нему с силой $F = 100$ Н. Тормоз включают в момент, когда ротор вращается по инерции со скоростью $\omega_0 = 50$ рад/с. Момент инерции ротора вместе с укрепленным на нем диском тормоза $J = 0.628$ кг · м^2. Коэффициент трения скольжения между поверхностями дисков не зависит от относительной скорости и равен $\mu = 0.25$. Считая, что сила F равномерно распределена по поверхности дисков, определить, сколько оборотов N успеет сделать ротор до остановки.

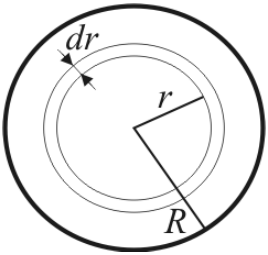


Рис. 5.6. К примеру 5.8

Решение

Число оборотов ротора N до остановки за время t найдем, исключая t из кинематических соотношений $\varphi = \omega_0 t - \varepsilon t^2 / 2$ и $\omega_0 = \varepsilon t$, тогда $\varphi = \omega_0^2 \big/ 2\varepsilon$ и $N = \varphi / 2\pi = \omega_0^2 \big/ 4\pi\varepsilon$.

Чтобы найти угловое ускорение ε, воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения $J\varepsilon = M$, где момент силы торможения рассчитывается по формуле (рис. 5.6)

$$M = \mu \int_S |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}|\, dS = \mu \int_S rf\, 2\pi r dr,$$

где $f = F / S$, $S = \pi r^2$, $dS = 2\pi r dr$, откуда $M = \mu f 2\pi \int_0^R r^2 dr = \mu 2 f \times$ $\times (\pi R^2) R / 3 = \mu 2 FR / 3$.

Таким образом, угловое ускорение $\varepsilon = 2\mu FR / 3J$, а число оборотов $N = 3J\omega_0^2 \big/ 8\mu FR = 50$.

Ответ: $N = 50$.

Пример 5.9. Космическая станция в виде практически полого цилиндра радиусом $R = 200$ м и массой $m_1 = 5000$ т вращается с угловой скоростью $\omega = 0.5$ рад/с вокруг оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно основаниям цилиндра. Предмет массой $m_2 = 100$ кг, летевший со скоростью $\upsilon = 20$ км/с по касательной к поверхности станции, захватывается специальным устройством. Определить изменение угловой скорости станции после столкновения.

Решение

Будем считать, что масса станции равномерно распределена по ее поверхности, и момент инерции станции относительно оси вращения равен $J_1 = m_1 R^2$, а момент инерции предмета равен $J_2 = m_2 R^2$. Согласно закону сохранения момента импульса $J_1\omega + L_2 = (J_1 + J_2)\omega'$, где $L_2 = Rm_2\upsilon$ – момент импульса предмета до захвата; ω' – угловая скорость станции после захвата, откуда $\omega' = (J_1\omega + m_2 R\upsilon)/(J_1 + J_2) = 0.502$ рад/с. Изменение угловой скорости равно $\Delta\omega = \omega' - \omega = 0.002$ рад/с.

Ответ: $\Delta\omega = \omega' - \omega = 0.002$ рад/с.

Пример 5.10. Горизонтальная платформа в виде однородного диска радиусом $R = 1.5$ м и массой $m_1 = 100$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $\nu = 10$ об/мин. Человек массой $m_2 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Какую работу совершает человек при этом переходе?

Решение

Считая систему «платформа–человек» замкнутой, воспользуемся законом сохранения момента импульса в проекции на ось вращения

$$L_1 + L_2 = L_1', \tag{5.23}$$

где абсолютные величины моментов импульсов относительно оси вращения равны $L_1 = J_1\omega$ (диск с $J_1 = m_1 R^2/2$, ω – начальная угловая скорость); $L_2 = J_2\omega$ (человек на краю диска с $J_2 = m_2 R^2$), $L_1' = J_1\omega'$ (ω' – конечная угловая скорость диска). Из (5.23) следует, что $\omega' = (J_1 + J_2)\omega / J_1$, т. е. $\omega' = 1.2\pi(1 + 1.2) = 2.3$ рад/с, $\nu' = 22$ об/мин.

Кинетическая энергия в начальном состоянии $E_{K1} = (J_1 + J_2)\omega^2/2 = (m_1/2 + m_2)R^2\omega^2/2 = 136$ Дж, а в конечном состоянии – $E_{K2} = J_1\omega'^2/2 = m_1 R^2\omega'^2/4 = 299$ Дж. Совершенная человеком работа равна разности этих энергий: $A_{12} = E_{K2} - E_{K1} \approx 163$ Дж.

Ответ: $\omega' = 2.3$ рад/с, $A_{12} = 163$ Дж.

Пример 5.11. В середине осени 2014 года комета диаметром 50 км прошла мимо Марса со скоростью 56 км/с на расстоянии $37 \cdot 10^3$ км. Оценить возможное изменение угловой скорости вращения Марса в результате воображаемого столкновения с кометой в экваториальной плоскости, если бы направление скорости относительно нормали к поверхности планеты составило $\alpha = 60°$ (рис. 5.7). Масса Марса $M = 6.4185 \cdot 10^{23}$ кг, радиус $R = 3389.5$ км, период суточного вращения $T = 24.6229$ ч.

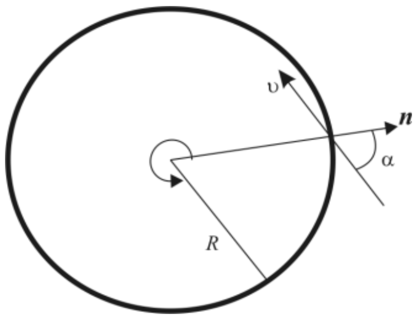


Рис. 5.7. К примеру 5.11

Решение

Угловая скорость вращения Марса до столкновения $\omega = 2\pi / T = 7.08823 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Будем считать, что комета ударила по ходу вращения планеты, поэтому в результате удара угловая скорость вращения Марса должна увеличиться. Запишем закон сохранения момента импульса $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_1'$ в проекциях на ось вращения

$$L_1 + L_2 = L_1', \tag{5.24}$$

где $L_1 = J_1\omega$ – момент импульса Марса до столкновения; $J_1 = (2/5)MR^2$ – его момент инерции; $L_2 = |\boldsymbol{R} \times m\boldsymbol{\upsilon}| = Rm\upsilon \sin(\pi - \alpha) = Rm\upsilon \sin\alpha$ – момент импульса кометы до столкновения; $L_1' = J_1'\omega'$, $J_1' = (2/5)MR^2 + mR^2$ и ω' – момент импульса, момент инерции и угловая скорость системы после столкновения. В итоге из (5.24) получаем $\omega' = (J_1\omega + Rm\upsilon \sin\alpha) / J_1'$.

Кометы в основном состоят из льда, плотность которого $\rho = 1000$ кг/м^3. Тогда, считая, что форма головы кометы приблизительно сферическая, оценим массу кометы как $m = \rho\pi D^3 / 6 = 6.55 \cdot 10^{16}$ кг. После воображаемого столкновения угловая скорость Марса стала бы равна $\omega' = (J_1\omega + Rm\upsilon \sin\alpha) / J_1' = 7.08859 \cdot 10^{-5}$ рад/с, а увеличение угловой скорости достигло бы величины $\Delta\omega = \omega' - \omega = 3.6 \cdot 10^{-9}$ рад/с. За год опережение суточного хода времени вследствие удара составило бы $\Delta t = 3.6 \cdot 10^{-9} \cdot 3.15 \cdot 10^7 \cdot 60 / 2\pi \approx 1.1$ с.

Ответ: $\Delta\omega = \omega' - \omega = 3.6 \cdot 10^{-9}$ рад/с.

Пример 5.12. Найти линейные скорости центров масс полого цилиндра, сплошного цилиндра и шара, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости h = 0.5 м, начальная скорость всех тел равна нулю. Результаты сравнить со скоростью бруска, соскользнувшего без трения с наклонной плоскости той же высоты.

Решение

Пусть массы тел m, а радиусы тел вращения R. Запишем закон сохранения энергии

$$mgh = m\upsilon^2 / 2 + J\omega^2 / 2\,, \tag{5.25}$$

где $\omega = \upsilon / R$, $J = \eta m R^2$; $\eta = 1$ – для полого цилиндра, $\eta = 1/2$ – для сплошного цилиндра, $\eta = 2/5$ – для шара, для бруска $\eta = 0$. Тогда из (5.13) получим $\upsilon = \sqrt{2gh/(1+\eta)}$, в частности:

а) полый цилиндр $\upsilon_1 = \sqrt{2gh/(1+1)} = 2.21$ м/с;

б) сплошной цилиндр $\upsilon_2 = \sqrt{2gh/(1+0.5)} = 2.56$ м/с;

в) шар $\approx 10^{10}$ $\upsilon_3 = \sqrt{2gh/(1+0.4)} = 2.65$ м/с;

г) брусок без трения $\upsilon_4 = \sqrt{2gh} = 3.13$ м/с.

Ответ: $\upsilon_1 = 2.21$ м/с; $\upsilon_2 = 2.56$ м/с; $\upsilon_3 = 2.65$ м/с; $\upsilon_4 = 3.13$ м/с.

Задачи для аудиторной работы

А5.1. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0.2$ рад/с^2. Найти полное ускорение точки на ободе колеса в момент времени 2.5 с, если скорость точки в этот момент равна 0.65 м/с.

А5.2. Тело массой 1 кг в поле силы тяжести брошено вертикально вверх с начальной скоростью 10 м/с из точки с координатами (0,2,0) м, а затем упало в ту же точку. Найти изменение момента импульса $\Delta \boldsymbol{L}$ относительно начала координат за все время движения. Ось z направлена вверх. Сопротивлением воздуха пренебречь. Учесть, что после прохождения максимальной высоты направление момента импульса изменится на противоположное.

А5.3. Три маленьких шарика массой по 10 г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 20 см и скреплены между собой невесомыми стержнями. Определить момент инерции системы относительно оси: 1) перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через его центр; 2) лежащей в плоскости треугольника и проходящей через одну из его высот и середину противоположной стороны.

А5.4. Деревянный стержень массой 6 кг и длиной 2 м может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. В нижний конец стержня попадает пуля массой 6.1 г, летевшая со скоростью 315 м/с перпендикулярно стержню и оси, и застревает в нем. Определить кинетическую энергию стержня сразу после попадания пули.

А5.5. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом 2 м, стоит человек массой 80 кг. Масса платформы равна 240 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найти, с какой угловой скоростью станет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью 2 м/с относительно платформы.

А5.6. Карандаш длиной 18 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорость будет иметь верхний конец карандаша? Считать, что трение настолько велико, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

Задание на дом

В5.1. Определить момент инерции тонкого однородного стержня длиной 30 см и массой 100 г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) его конец; 2) точку, отстоящую от конца стержня на треть его длины.

В5.2. Тонкий однородный стержень длиной 50 см и массой 0.4 кг вращается с угловым ускорением 3 рад/с^2 вокруг оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент сил.

В5.3. Вал массой 100 кг и радиусом 5 см вращался с частотой 8 об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой 40 Н, под действием которой вал остановился через 10 с. Определить коэффициент трения.

В5.4. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой 400 г, летящий в горизонтальном направлении со скоростью 20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии 80 см от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, если их суммарный момент инерции равен 6 кг $\cdot$ м^2? (Скамьей Жуковского называют горизонтальный диск, которой может свободно вращаться вокруг своей вертикальной оси).

В5.5. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой 60 кг. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы 240 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

В5.6. Пуля массой 10 г летит со скоростью 800 м/с, вращаясь около продольной оси с частотой 3000 об/с. Принимая пулю за цилиндрик диаметром 7.6 мм, определить полную кинетическую энергию пули.

6. СИЛЫ ИНЕРЦИИ. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ. РЕАКТИВНАЯ СИЛА

Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета K′ (НИСО) (рис. 6.1):

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{cor}} + m\boldsymbol{r}' \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_{\text{in}}\,, \tag{6.1}$$

где $\boldsymbol{F}_{\text{cor}} = 2m\boldsymbol{\upsilon}'\times\boldsymbol{\omega}$ – *кориолисова сила*; $\boldsymbol{F}_c = m\omega^2\boldsymbol{r}'_{\perp}$ – *центробежная сила*; $\boldsymbol{F}_{\text{in}} = -m\boldsymbol{A}$ – *поступательная сила инерции*; $\boldsymbol{F}$ – *внешняя сила*; $\boldsymbol{a}'$ – ускорение тела массой m относительно НИСО; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения НИСО; $\boldsymbol{A}$ – ускорение поступательного движениея НИСО; $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{\upsilon}'$ – радиус-вектор и скорость тела относительно НИСО, $\boldsymbol{r}'_{\perp}$ – компонента вектора $\boldsymbol{r}'$, перпендикулярная оси вращения.

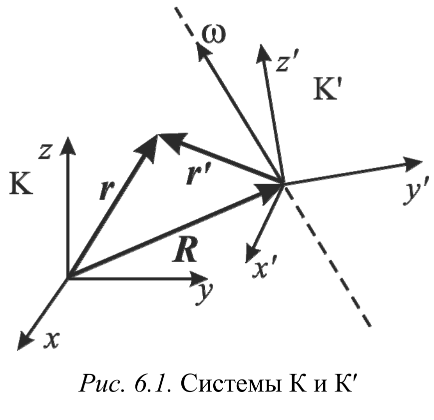


Рис. 6.1. Системы K и K′

Уравнение динамики движения тела переменной массы m (*уравнение Мещерского*):

$$m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt}, \tag{6.2}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}$ – скорость тела; $\boldsymbol{F}$ – внешняя сила; $\boldsymbol{u}$ – относительная скорость отделяющихся (при $dm/dt < 0$) или присоединяющихся (при $dm/dt > 0$) к телу частиц.

Пример 6.1. Какую мощность развивает сила Кориолиса?

Решение

Мощность силы Кориолиса $\boldsymbol{F}_{\text{cor}} = 2m\boldsymbol{\upsilon}' \times \boldsymbol{\omega}$ равна $N = \boldsymbol{F}_{\text{cor}}\boldsymbol{\upsilon}' = 2m(\boldsymbol{\upsilon}' \times \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\upsilon} = 2m(\boldsymbol{\upsilon}' \times \boldsymbol{\upsilon}')\boldsymbol{\omega} = 0$, поскольку из векторного анализа известно, что смешанное произведение векторов не изменяет своей величины при циклической перестановке сомножителей $(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}$, т. е. $(\boldsymbol{\upsilon}' \times \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\upsilon}' = (\boldsymbol{\upsilon}' \times \boldsymbol{\upsilon}')\boldsymbol{\omega} = 0$, так как $\boldsymbol{\upsilon}' \times \boldsymbol{\upsilon}' = 0$. Таким образом, сила Кориолиса не совершает работу.

Ответ: $N = 0$ Вт.

Пример 6.2. Определите скорость поезда в момент начала торможения, считая его движение равнозамедленным, если он остановился, пройдя путь $S = 200$ м, а подвешенный в вагоне отвес при торможении отклонился на угол $\alpha = 5°$ от вертикального направления (рис. 6.2).

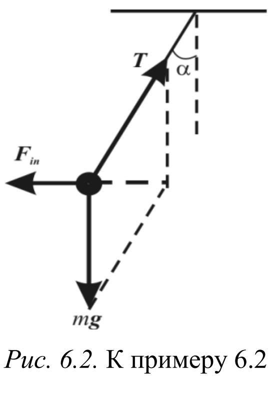


Рис. 6.2. К примеру 6.2

Решение

В неинерциальной системе отсчета на покоящееся относительно вагона тело действуют сила тяжести $m\boldsymbol{g}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$ и сила инерции $\boldsymbol{F}_{in} = -m\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{A}$ – ускорение вагона. Результирующая всех сил равна нулю, т. е. $m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} - m\boldsymbol{A} = 0$. Проецируя это уравнение на горизонтальную и вертикальную координатные оси, получаем

$$\begin{cases} -mA + T\sin\alpha = 0, \\ T\cos\alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $T = mg/\cos\alpha$, а из первого уравнения $A = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$. В кинематике было получено соотношение $s = \upsilon_0^2/2A$, т. е. $\upsilon_0 = \sqrt{2sA} = \sqrt{2sg\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 18.5$ м/с.

Ответ: $\upsilon_0 = 18.5$ м/с $= 66.7$ км/ч.

Пример 6.3. Движение частицы массой m = 10 г рассматривается в системе отсчета, вращающейся относительно инерциальной системы отсчета с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Какую работу совершают над частицей силы инерции при ее перемещении из точки, отстоящей от оси вращения на расстояние $R_1 = 1$ м, в точку, отстоящую от оси на расстояние $R_2 = 2$ м?

Решение

Как показано в примере 6.1, кориолисова сила не производит работу. В данном случае работу совершает только центробежная сила инерции, равная $\boldsymbol{F}_c = m\omega^2 \boldsymbol{r}'_\perp$, т. е.

$$A_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F}_c d\boldsymbol{r} = \int_1^2 m\omega^2 \boldsymbol{r}'_\perp d\boldsymbol{r}'_\perp = m\omega^2 \int_{R_1}^{R_2} r'_\perp dr'_\perp =$$

$$= m\omega^2 \left(R_2^2 - R_1^2\right)\Big/2 = 1.5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_{12} = 1.5$ Дж.

Пример 6.4. На широте $\varphi = 45°$ в северном полушарии из ружья горизонтально в плоскости меридиана произведен выстрел по мишени, установленной на расстоянии $l = 100$ м от снайпера (рис. 6.3). Центр мишени находится на оси ружейного ствола.

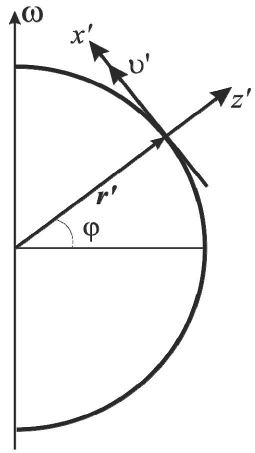


Рис. 6.3. К примеру 6.4

Приближенно считая, что пуля летит с постоянной скоростью $\upsilon' \equiv \upsilon = 500$ м/с, определить, на какое расстояние и в какую сторону отклонится пуля от центра мишени, если выстрел произведен в северном направлении. Сопротивлением воздуха пренебречь. Период вращения Земли $T = 24$ ч.

Решение

Уравнение движения для пули запишем относительно Земли, с которой связана неинерциальная система отсчета, вращающаяся с угловой скоростью $\omega = 2\pi / T = \; = 7.27 \cdot 10^{-5}$ рад/с: $m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}}$, где $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = 2m\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{\omega}$ – сила Кориолиса.

Направление координатных осей показано на рис. 6.3 (ось y направлена вертикально вверх к плоскости рисунка), т. е. $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_z \boldsymbol{k}$, $\omega_x = \omega \cos\varphi$, $\omega_z = \omega \sin\varphi$, а скорость $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon \boldsymbol{i}$.

Вычисляя векторное произведение, получаем

$$\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \upsilon & 0 & 0 \\ \omega_x & 0 & \omega_z \end{vmatrix} = -\upsilon \omega_z \boldsymbol{j}.$$

Спроецируем уравнение движения на координатные оси:

$$\begin{cases} ma_x = 0, \\ ma_y = -2m\upsilon\omega_z, \\ ma_z = -mg, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_x = 0, \\ a_y = -2\upsilon\omega_z, \\ a_z = -g. \end{cases}$$

Время полета пули t определяем, интегрируя первое из этих дифференциальных уравнений: $a_x = 0$, $\upsilon_x = \upsilon$, $l = \upsilon t$, $t_1 = l / \upsilon = 0.2$ с. Смещение в поперечном направлении найдем, интегрируя второе дифференциальное уравнение: $a_y = -2\upsilon\omega \sin\varphi$, $y_1 = a_y t_1^2 / 2 =$ $= -1.03 \cdot 10^{-3}$ м, т. е. пуля отклоняется на восток. Смещение пули по вертикали вниз (падение в поле тяжести) найдем, интегрируя третье дифференциальное уравнение: $a_z = -g$, $z_1 = -g t_1^2 / 2 = -0.196$ м.

Ответ: $y_1 = -1.03 \cdot 10^{-3}$ м, $z_1 = -0.196$ м.

Пример 6.5. Железнодорожная платформа массой $m_0 = 20.9$ т начинает двигаться под действием постоянной силы тяги F = 25 кН. Из неподвижного бункера сверху на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянная и равна $\mu = 500$ кг/с. Найти зависимости от времени скорости и ускорения платформы, если сила сопротивления движению $F_\mu = 24$ кН. При длине платформы $L = 13.3$ м найти промежуток времени t_1, в течение которого она находится под бункером, и ее массу m_1 в конце этого промежутка.

Решение

Интегрируя дифференциальное уравнение $\mu = dm / dt$ с начальным условием $m(0) = m_0$, найдем линейный закон изменения массы платформы с песком $m = m_0 + \mu t$.

В данном случае дифференциальное уравнение движения тела переменной массы найдем из второго закона Ньютона в форме закона изменения импульса $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{\upsilon})}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} + \boldsymbol{\upsilon}\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mu + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N},$$

где $m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести; $\boldsymbol{N}$ – сила реакции, остальные величины определены в условии задачи. В проекции на горизонтальное направление уравнение движения платформы принимает вид

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F - F_\mu - \upsilon\frac{dm}{dt}. \qquad (6.3)$$

Разделяя в (6.3) переменные

$$\frac{d\upsilon}{F - F_\mu - \upsilon\mu} = \frac{dt}{m_0 + \mu t}$$

и интегрируя полученные соотношения, имеем:

$$F - F_\mu - \upsilon\mu = \frac{C}{m_0 + \mu t}.$$

Постоянную интегрирования C находим из начального условия $\upsilon(0) = 0$, что дает

$$C = m_0(F - F_\mu) .$$

Таким образом, зависимость скорости от времени описывается выражением

$$\upsilon = \frac{(F - F_\mu)t}{m_0 + \mu t}, \tag{6.4}$$

дифференцируя которое найдем зависимость ускорения от времени

$$a = \frac{(F - F_\mu)m_0}{(m_0 + \mu t)^2}. \tag{6.5}$$

Далее, учитывая $\upsilon = dx / dt$, проинтегрируем (6.4) по времени и найдем зависимость пройденного расстояния от времени:

$$x(t) = \int_0^t \upsilon(\tau)d\tau = \frac{F - F_\mu}{\mu^2}\left(m_0 \ln\frac{m_0}{m_0 + \mu t} + \mu t \right). \tag{6.6}$$

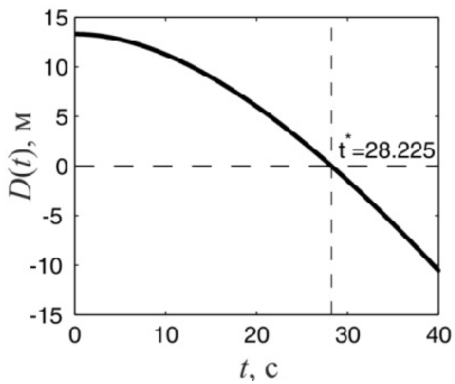


Рис. 6.4. К примеру 6.5

Из нелинейного уравнения $x(t_1) = L$ найдем время погрузки t_1. Для этого численно построим график функции $D(t) = L - x(t)$ и определим точку его пересечения с осью абсцисс (рис. 6.4). В итоге получим искомое численное решение $t_1 = 28.2$ с, а масса платформы с песком $m_1 = m_0 + \mu t_1 = 35$ т.

Ответ: $\upsilon(t)$ (см. (6.4)), $a(t)$ (см. (6.5)), $t_1 = 28.2$ с, $m_1 = 35$ т.

Пример 6.6. Стартовая масса ракеты-носителя «Протон» равна $m_0 = 705$ т, скорость истечения газов $u =$ 1000 м/с. Найти скорость ракеты через $t = 100$ с после старта, считая, что скорость изменения массы ракеты постоянна и равна $\mu = 5000$ кг/с.

Решение

Для описания реактивного движения используют уравнение Мещерского (6.2), в котором $\boldsymbol{\upsilon}$ – скорость ракеты; $\boldsymbol{u}$ – относительная скорость истечения продуктов реакции ракетного двигателя; $\boldsymbol{F}$ – результирующая всех внешних сил, а скорость изменения массы ракеты определяется конкретной моделью. В проекции на вертикальную ось имеем $ma = -mg + u\mu$, где $a = d\upsilon / dt$, $\mu = |dm/dt|$. Принимая модель линейного изменения массы $m = m_0 - \mu t$, получаем $\dfrac{d\upsilon}{dt} = -g + \dfrac{u\mu}{m_0 - \mu t}$. Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдем $\upsilon - \upsilon_0 = -gt + {}$ $+ \int_0^t \dfrac{u\mu\, dt}{m_0 - \mu t}$, откуда $\upsilon = \upsilon_0 - gt + u \ln\left(\dfrac{m_0}{m_0 - \mu t}\right)$.

Подставляя численные значения параметров с учетом начального условия $\upsilon_0 = 0$, получаем значение скорости ракеты $\upsilon = 255$ м/с.

Ответ: $\upsilon = 255$ м/с.

Задачи для аудиторной работы

А6.1. С каким наименьшим горизонтально направленным ускорением должна двигаться наклонная плоскость с углом наклона 30°, чтобы лежащее на ней тело поднималось по наклонной плоскости? Коэффициент трения между телом и плоскостью равен 0.2.

А6.2. На горизонтально расположенном диске, вращающемся вокруг вертикальной оси, на расстоянии 8 см от оси вращения лежит тело. Определить коэффициент трения между диском и телом, если при угловой скорости 5 рад/с тело начинает скользить по поверхности диска.

А6.3. Электровоз массой 100 т движется с севера на юг в северном полушарии по горизонтальному прямолинейному пути со скоростью 30 м/с на широте 60°. Определить горизонтальную составляющую силы, с которой электровоз давит на рельсы.

А6.4. Вагонетка с песком движется под действием постоянной силы 100 Н. В начальный момент времени масса вагонетки с песком равна 500 кг, а ее скорость равна нулю. В днище вагонетки имеется отверстие, через которое песок высыпается со скоростью 5 кг/с. Найти скорость и ускорение вагонетки в момент времени 10 с. Масса пустой тележки равна 100 кг.

А6.5. Ракета зависла над стартовым столом, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью 900 м/с. Найти время, в течение которого ракета может оставаться в покое, если начальная масса топлива составляет 25 % ее массы без топлива.

Задание на дом

В6.1. С каким горизонтально направленным ускорением должна двигаться наклонная плоскость с углом наклона 30°, чтобы при отсутствии трения находящееся на ней тело не перемещалось относительно плоскости?

В6.2. Нижняя полусфера радиусом 2 м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, делая 1 об/с. Внутри полусферы находится шарик массой 2 кг. Найти высоту шарика, соответствующую положению равновесия шарика относительно дна полусферы, и силу реакции полусферы.

В6.3. Какую работу совершает над частицей кориолисова сила при перемещении частицы относительно вращающейся системы отсчета из точки 1 на экваторе в диаметрально противоположную точку 2?

В6.4. В точке, расположенной на широте 60°, из ружья произведен выстрел строго вертикально вверх. Через некоторое время пуля упала на Землю. Определить, насколько сместилась упавшая пуля от точки выстрела, если ее начальная скорость 200 м/с. Сопротивление воздуха не учитывать.

В6.5. Ракета зависла над стартовым столом, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью 900 м/с. Найти массу газов, которую должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы остаться на постоянной высоте, если начальная масса ракеты с топливом равна 10 т.

7. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ГАЗА

Уравнение состояния идеального газа – *уравнение Менделеева–Клапейрона*

$$pV = \nu RT, \tag{7.1}$$

где p – давление; V – объем; T – температура; $\nu = m / \mu = N / N_A$ – число молей; m – масса; μ – молярная масса; N – число молекул газа, $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – *число Авогадро*; $R = 8.31$ Дж моль$^{-1}$К$^{-1}$ – *универсальная газовая постоянная*.

Другая форма *уравнения Менделеева–Клапейрона*

$$p = nkT, \tag{7.2}$$

где $n = N / V$ – концентрация; $k = R / N_A = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж К$^{-1}$ – *постоянная Больцмана*.

Закон Дальтона (давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений компонент этой смеси):

$$p = p_1 + p_2 + \dots = (\nu_1 + \nu_2 + ...)RT / V, \tag{7.3}$$

$$p_1 = n_1 kT, \quad n_1 = N_1 / V, \quad \nu_1 = m_1 / \mu_1;$$

$$p_2 = n_2 kT, \quad n_2 = N_2 / V, \quad \nu_2 = m_2 / \mu_2, \dots$$

Закон Бойля–Мариотта:

$$pV = \text{const}, \quad T = \text{const}. \tag{7.4}$$

Закон Гей-Люссака:

$$V / T = \text{const}, \quad p = \text{const}. \tag{7.5}$$

Закон Шарля:

$$p / T = \text{const}, \quad V = \text{const}. \tag{7.6}$$

Основное уравнение кинетической теории газов:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_d \rangle, \tag{7.7}$$

где n – концентрация молекул; $\langle \varepsilon_d \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы массой m, равная

$$\langle \varepsilon_d \rangle = m\upsilon_T^2 / 2 = (3/2)kT. \tag{7.8}$$

Средняя квадратичная (*тепловая*) *скорость молекул*:

$$\upsilon_T = \sqrt{3RT / \mu} = \sqrt{3kT / m}. \tag{7.9}$$

Число классических степеней свободы молекулы идеального газа:

$$i = i_1 + i_2 + 2i_3. \tag{7.10}$$

Число поступательных степеней свободы $i_1 = 3$. Число вращательных степеней свободы для объемной молекулы $i_2 = 3$, а для линейной молекулы $i_2 = 2$. Число колебательных степеней свободы для объемной молекулы из s атомов равно $i_3 = 3s - 6$, а для линейной молекулы – равно $i_3 = 3s - 5$.

Средняя энергия, приходящаяся на одну степень свободы:

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = (1/2)kT. \tag{7.11}$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = iN\left\langle \varepsilon_1 \right\rangle = i\nu RT / 2, \qquad (7.12)$$

где ν – число молей газа.

Степенью диссоциации α называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул.

Пример 7.1. Сколько атомов ртути содержится в воздухе объемом $V = 1$ м^3 при температуре $T = 293$ К, если парциальное давление паров ртути при этой температуре составляет $p = 133$ мПа? Молярная масса ртути $\mu = 0.2006$ кг/моль.

Решение

Из уравнения Менделеева–Клапейрона (7.1) количество молей ртути $v = m / \mu = pV / RT = 0.133 / (8.31 \cdot 293) = 5.46 \cdot 10^{-5}$ моль, а концентрация атомов ртути есть $n = vN_A / V = 5.46 \cdot 10^{-5} N_A = 3.3 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.

По санитарно-гигиеническим нормам в жилых помещениях «ПДК» ртути составляет $\rho = 0.0003$ мг/м$^{-3}$, или $n^* = \rho N_A / \mu = 3 \cdot 10^{-10} \times \times 6.02 \cdot 10^{23} / 0.2006 \approx 9 \cdot 10^{14}$ м$^{-3}$. Это означает, что в нашем случае $n / n^* \approx 3.7 \cdot 10^4 >> 1$.

Ответ: $n = 3.3 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.

Пример 7.2. В сосуде объемом $V = 3$ л находится $m_1 = 4$ мг гелия, $m_2 = 70$ мг азота и $N_3 = 5 \cdot 10^{21}$ молекул водорода. Каково давление смеси, если температура смеси $T = 300$ К? Молярные массы: гелия $\mu_1 = 0.004$ кг/моль, молекулярного азота $\mu_2 = 0.028$ кг/моль, молекулярного водорода $\mu_3 = 0.002$ кг/моль.

Решение

Из уравнения Менделеева–Клапейрона (7.1) парциальные давления газов:

$$p_1 = m_1 RT / \mu_1 V = 831 \approx 830 \text{ Па}, \quad p_2 = m_2 RT / \mu_2 V = 2077 \approx 2080 \text{ Па},$$

$$p_3 = N_3 RT / N_A V = 6902 \approx 6900 \text{ Па}.$$

Согласно закону Дальтона (7.3) давление смеси равно

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 830 + 2080 + 6900 = 9800 \text{ Па}.$$

Ответ: $p = 9800$ Па.

Пример 7.3. Сколько качаний поршневого насоса n потребуется для того, чтобы давление в баллоне объемом $V_0 = 1.5$ л уменьшить в 100 раз? Объем камеры насоса $V_1 = 0.1$ л. Изменением температуры при откачивании газа пренебречь.

Решение

Пусть начальное давление газа равно p_0. Так как увеличение объема газа происходит изотермически, то используем закон Бойля–Мариотта (7.4): $p_0V_0 = p_1(V_0 + V_1)$ – для первого качания, $p_1V_0 = p_2(V_0 + V_1)$ – для второго качания, …, $p_{n-1}V_0 = p_n(V_0 + V_1)$ – для n-го качания, откуда давления в баллоне и в камере насоса после каждого качания: $p_1 = p_0q$, $p_2 = p_1q = p_0q^2$,…, $p_n = p_{n-1}q = p_0q^n$, где $q = V_0 / (V_0 + V_1) = 0.938$. Обозначим $p_0 / p_n = \eta$. Тогда, логарифмируя $q^{-n} = \eta$, имеем $n = -\ln\eta / \ln q$ (рис. 7.1). Подставляя $\eta = 100$, получаем $n = -\ln 100 / \ln 0.938 = 71.36 \approx 71$.

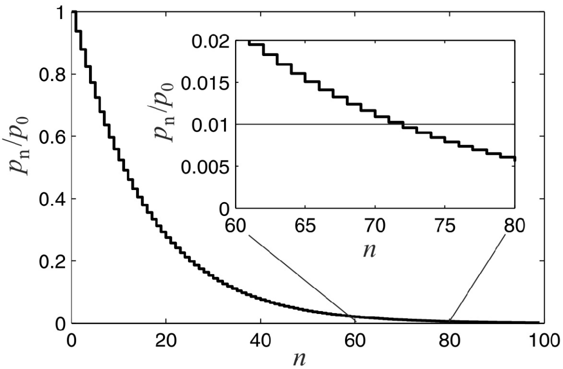


Рис. 7.1. Зависимость давления в сосуде от числа качаний поршневого насоса

Ответ: $n = 71$.

Пример 7.4. Давление в цилиндре паровой машины объемом V = 20 л после открывания клапана уменьшилось на Δp = 0.81 МПа. Какова масса Δm пара, выпущенного из цилиндра? Температуру пара считать равной $t = 100$ °C ($T = t + 273 = 293$ К). Молярная масса водяного пара $\mu = 0.018$ кг/моль.

Решение

Начальное состояние пара в цилиндре описывается уравнением Менделеева–Клапейрона $p_1 V = m_1 RT / \mu$, конечное состояние пара – уравнением $p_2 V = m_2 RT / \mu$. Вычитая второе уравнение из первого, получаем $\Delta pV = \Delta mRT / \mu$, где $\Delta p = p_1 - p_2$, $\Delta m = m_1 - m_2$, откуда $\Delta m = \Delta pV\mu / RT$ и $\Delta m = 0.81 \cdot 10^6 0.02 \cdot 0.018 / 8.31 \cdot 373 = 0.094$ кг.

Ответ: $\Delta m = 0.094$ кг.

Пример 7.5. Приняв, что воздух по массе состоит из 76 % азота, 23 % кислорода и 1 % аргона, найти массу одного моля воздуха. Молярные массы: молекулярного кислорода $\mu_2 = 0.032$ кг/моль, аргона $\mu_3 = 0.040$ кг/моль.

Решение

Парциальные давления азота (индекс 1), кислорода (индекс 2) и аргона (индекс 3), а также полное давление воздуха (без индекса) найдем из (7.1): $p_1 V = m_1 RT / \mu_1$, $p_2 V = m_2 RT / \mu_2$, $p_3 V = m_3 RT / \mu_3$ и $pV = mRT / \mu$. Складываем парциальные давления смеси газов (7.3):

$$(p_1 + p_2 + p_3)V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3} \right) RT.$$

С учетом уравнения (7.3) получаем $mRT / \mu = (m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2 +$ $+ m_3 / \mu_3)RT$, и окончательно $1 / \mu = m_1 / m\mu_1 + m_2 / m\mu_2 + m_3 / m\mu_3$. Учитывая молярные массы компонент воздуха, имеем $1 / \mu =$ $= 34.58$ моль/кг, т. е. молярная масса воздуха $\mu = 0.029$ кг/моль.

Ответ: $\mu = 0.029$ кг/моль.

Пример 7.6. При аэродинамическом торможении в атмосфере планеты температура внутри автоматического спускаемого аппарата повысилась с T_1 = 293 К до T_2 = 353 К. Какую часть воздуха необходимо выпустить, чтобы давление внутри аппарата не изменилось?

Решение

Будем считать, что процесс состоит из двух этапов: 1) изохорного повышения давления; 2) удаления из системы части газа; на втором этапе система не замкнутая. Термодинамические параметры начального состояния обозначим индексом 1, а конечного – индексом 2. Доля воздуха, которую надо выпустить через выпускной клапан, есть $\Delta m / m_1$, где $\Delta m = m_2 - m_1$, m_1 – масса воздуха внутри аппарата до срабатывания клапана; m_2 – масса воздуха после сброса давления. Конечным состоянием является состояние, при котором давление газа равно начальному $p_2 = p_1$. Для газа внутри аппарата в начальном и конечном состоянии справедливо (7.1): $p_1 V = m_1 R T_1 / \mu$ и $p_2 V = = m_2 R T_2 / \mu$, левые части равны, поэтому равны и правые части: $m_1 R T_1 / \mu = m_2 R T_2 / \mu$, т. е. тогда $\Delta m = m_1 - m_2 = m_1 (1 - T_1 / T_2)$, и доля выпускаемой части воздуха равна

$$\Delta m / m_1 = (1 - T_1 / T_2) = (1 - 293 / 353) = 0.17 .$$

Ответ: $\Delta m / m_1 = 0.17$.

Пример 7.7. Для погружения подводных лодок используют цистерны, в которые заливают забортную воду. При подъеме лодки воду из цистерн выдавливают сжатым воздухом. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки сжатым воздухом, находящимся в баллоне под давлением p_1 = 150 атм при температуре T_1 = 300 К? Баллон имеет емкость V_1 = 40 л, лодка находится на глубине h = 20 м, где температура воды T_2 = 280 К. Атмосферное давление принять равным p_0 = 1 атм, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

Решение

При открытии крана воздух вытесняет из цистерны некоторое количество воды объемом V_2 и давление в системе становится равным давлению воды на глубине $p_2 = p_0 + \rho g h$. Масса воздуха m в системе не изменяется. Запишем уравнение (7.1) для двух состояний воздуха: 1) до выпуска воздуха из баллона $p_1 V_1 = mRT_1 / \mu$ и 2) после его расширения в цистерну $p_2 (V_1 + V_2) = mRT_2 / \mu$. Исключая m, имеем $p_1 V_1 / T_1 = (p_0 + \rho g h)(V_1 + V_2) / T_2$, откуда выражаем объем вытесненной воды: $V_2 = \dfrac{p_1 V_1}{p_0 + \rho g h} \dfrac{T_2}{T_1} - V_1 \approx 1.87$ м^3.

Ответ: $V_2 = 1.87$ м^3.

Пример 7.8. Раскаленная плазма солнечной короны имеет температуру $T = 2.0 \cdot 10^6$ К. Какова средняя квадратичная скорость свободных электронов в такой плазме?

Решение

В соответствии с формулой (7.9), с учетом того, что масса электрона $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг, получаем $\upsilon_T = \sqrt{3kT / m_e} = 9.5 \cdot 10^6$ м/с.

Ответ: $\upsilon_T = 9.5 \cdot 10^6$ м/с.

Пример 7.9. Кислород массой $m = 12.0$ г находится при температуре $T = 973$ К, при этом 40 % молекул диссоциировало на атомы. Чему равна внутренняя энергия газа? Считать, что колебательные степени свободы молекул кислорода при этой температуре «заморожены» и не вносят вклад во внутреннюю энергию.

Решение

Средняя тепловая энергия двухатомной молекулы кислорода O_2 равна $\left\langle \varepsilon_{O_2} \right\rangle = (i_{O_2}/2)kT$, где $i_{O_2} = 5$, а средняя тепловая энергия свободного атома кислорода O равна $\left\langle \varepsilon_{O} \right\rangle = (i_{O}/2)kT$, $i_{O} = 3$. Пусть $N = mN_A / \mu$ – число молекул до диссоциации, а продиссоциировало αN молекул $(\alpha = 40\ \%)$, тогда внутреннюю энергию газа U найдем как полную среднюю энергию теплового движения частиц: $U = N_{O_2} \left\langle \varepsilon_{O_2} \right\rangle + N_{O} \left\langle \varepsilon_{O} \right\rangle$, где $N_{O_2} = N(1 - \alpha)$ – число недиссоциированных молекул кислорода, $N_{O} = 2N\alpha$ – число свободных атомов кислорода.

В итоге получаем $U = mN_A\left((1-\alpha)i_{O_2} + 2\alpha i_O\right)kT / 2\mu \approx 8200$ Дж.

Проверим расчетную формулу внутренней энергии по размерности:

$$[U] = [m][N_A][(1-\alpha)i_{O_2} + 2\alpha i_O][kT]/[2\mu] =$$

$$= MN^{-1}L^2MT^{-2}NM^{-2} = L^2MT^{-2}.$$

Полученная размерность совпадает с размерностью энергии (см. приложение 2).

Ответ: $U \approx$ 8.2 кДж.

Пример 7.10. При температуре $T = 1000$ К возбуждены поступательные, вращательные и колебательные степени свободы четырехатомных объемных молекул, образующих идеальный газ. Найти среднюю тепловую энергию молекулы такого газа. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения? Найти внутреннюю энергию одного моля газа.

Решение

Согласно формуле (7.10) число степеней свободы объемной молекулы из $s = 4$ атомов с шестью межатомными связями равно $i = i_1 + i_2 + 2i_3$, где $i_1 = 3$, $i_2 = 3$, $i_3 = 3s - 6 = 6$, тогда $i = 18$. Средняя энергия молекулы газа $\langle\varepsilon\rangle = (i/2)kT = 9kT = 1.2\cdot 10^{-19}$ Дж. Доля энергии, приходящаяся на поступательное движение $\eta = i_1 / i = 3/18 \approx 0.17$. Внутренняя энергия одного моля газа согласно формуле (7.12) равна $U = (i/2)N_A kT = (i/2)RT = 74\,790 \approx 75\,000$ Дж.

Ответ: $\langle\varepsilon\rangle = 1.2\cdot 10^{-19}$ Дж, $\eta = 0.17$, $U = 75$ кДж.

Пример 7.11. При какой температуре энергия теплового движения атомов гелия будет достаточной, для того чтобы преодолеть земное тяготение и покинуть земную атмосферу?

Решение

Скорость, с которой тела могут покинуть нашу планету, называется второй космической скоростью, она равна $\upsilon_2 = \sqrt{2gR} = 11.2$ км/с, где g – ускорение свободного падения; $R = 6380$ км – радиус Земли. Для получения искомой оценки примем, что средняя квадратичная скорость (7.9) теплового движения атомов гелия равна второй космической скорости, тогда $\upsilon_2^2 = 3RT/\mu$, следовательно, искомая температура по порядку величины равна $T = \mu\upsilon_2^2 \big/ 3R \approx 2 \cdot 10^4$ К.

Ответ: $T \approx 2 \cdot 10^4$ К.

Пример 7.12. На пути пучка молекул, излучаемых молекулярной «печкой» с температурой $T = 2000$ К, находится медная стенка, на которой молекулы оседают. Найти давление, испытываемое стенкой, если концентрация молекул в пучке $n = 10^{16}$ м$^{-3}$. Стенка расположена перпендикулярно пучку.

Решение

Импульс силы, действующей на стенку при абсолютно неупругом соударении одной молекулы, равен $\Delta p = F\Delta t$, где $\Delta p = p_1 - p_2$ – изменение импульса молекулы от начального импульса $p_1 = m\upsilon$ до конечного $p_2 = 0$, Δt – время соударения, υ – средняя скорость налетающих молекул, т. е. $F\Delta t = m\upsilon$. За время Δt на малую площадку стенки площади ΔS попадут молекулы из эффективного цилиндра с основанием ΔS и высотой $l = \upsilon\Delta t$. Среднее число таких молекул равно $N = nl\Delta S = n\upsilon\Delta S\Delta t$. Импульс суммарной силы $F_N = NF$ действия этих молекул равен $F_N\Delta t = Nm\upsilon = nm\upsilon^2\Delta S\Delta t$. Давление молекулярного пучка на стенку равно $p = F_N / \Delta S$, в итоге получаем $p = nm\upsilon^2$. Квадрат тепловой скорости молекул оценим с помощью формулы (7.9), т. е. $m\upsilon^2 = 3kT$, тогда $p = 3nkT \approx 8.3 \cdot 10^{-4}$ Па.

Ответ: $p = 8.3 \cdot 10^{-4}$ Па.

Пример 7.13. В соответствии с методом Штерна определения тепловой скорости атомов серебра, испускаемых нагретым источником, этот источник (разогретая серебряная нить) помещают внутрь неподвижного цилиндра *B* радиусом $R_B = 0.01$ м с тонкой продольной щелью (рис. 7.2). При этом на внутренней поверхности соосного неподвижного медного полированного цилиндра *A* радиусом $R_A = 0.1$ м напротив щели образуется узкая серебряная полоска. При вращении

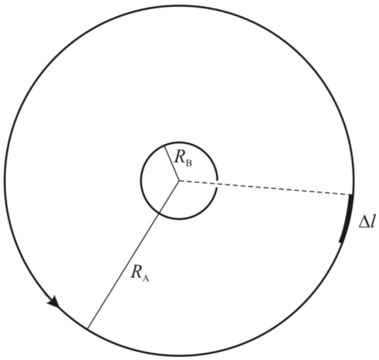


Рис. 7.2. К примеру 7.13

цилиндра A против часовой стрелки с частотой $\nu = 2400$ об/мин середина серебряной полоски на цилиндре A сместилась на $\Delta l = 3.2$ мм. Определить из этих данных тепловую скорость атомов серебра, сравнить полученный результат со средней квадратичной скоростью. Найти относительную погрешность, если температура нити равна $T = 2000$ К. Молярная масса серебра $\mu = 0.108$ кг/моль.

Решение

Расстояние от внутреннего цилиндра (см. рис. 7.2) до внешнего частица атомного пучка, имеющая скорость υ, пролетит за время $\tau = (R_A - R_B)/\upsilon$. За это время внешний цилиндр повернется на угол $\Delta\varphi = \omega\tau$, где $\omega = 2\pi\nu$, связанный с длиной отрезка дуги $\Delta l = R_A \Delta\varphi$ линейного перемещения точек этого цилиндра, тогда $\tau = \Delta l / \omega R_A$. Приравнивая правые части полученных выражений $(R_A - R_B)/\upsilon =$ $= \Delta l / \omega R_A$, находим искомую скорость атомов серебра в пучке: $\upsilon = (R_A - R_B)\omega R_A / \Delta l = 707$ м/с.

Тепловая скорость, соответствующая температуре источника атомов серебра, $\upsilon_T = \sqrt{3RT/\mu} = 680$ м/с.

Относительную ошибку измеренной тепловой скорости частиц пучка определим как $\delta\upsilon = |\upsilon - \upsilon_T|/\upsilon = 0.04$.

Ответ: $\upsilon \approx 710$ м/с, $\delta\upsilon \approx 0.04$.

Задачи для аудиторной работы

А7.1. В баллоне вместимостью 30 л находится кислород при давлении 7.3 МПа и температуре 264 К. Затем часть газа из баллона выпустили, причем температура газа повысилась до 290 К, а давление упало до 2.94 МПа. Найти количество кислорода, выпущенного из баллона.

А7.2. Давление воздуха в бутылке равно 0.1 МПа при температуре 280 К. На сколько нужно нагреть бутылку, чтобы пробка вылетела? Без нагревания пробку можно вынуть, прикладывая к ней силу 10 Н. Сечение пробки 2 см^2.

А7.3. Два цилиндра вместимостью 200 см^3 и 100 см^3 разделены подвижным поршнем, не проводящим тепло. Сначала температура газа в цилиндрах 300 К, а его давление 0.1013 МПа, затем меньший цилиндр охладили льдом до 273 К, а больший нагрели до 373 К. Какое давление установится в цилиндрах ?

А7.4. Температура в межзвездном пространстве составляет 2.7 К. Какова среднеквадратическая скорость молекул водорода при такой температуре?

А7.5. Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул водорода, содержащихся в одном моле при температур 291 К.

А7.6. Найти внутреннюю энергию двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом 2 л под давлением 0.15 МПа.

Задание на дом

В7.1. Колба вместимостью 0.5 л содержит газ при нормальных условиях. Определить число молекул газа, находящихся в колбе.

В7.2. В баллоне содержится газ при температуре 273 К. До какой температуры нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза?

В 7.3. Баллон вместимостью 20 л содержит углекислый газ массой 500 г под давлением 1.3 МПа. Определить температуру газа.

В7.4. Давление газа 1 МПа, концентрация его молекул составляет $\approx 10^{19}$ см$^{-3}$. Определить температуру газа и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа.

В7.5. Определить среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы молекулы азота, при температуре 1000 К, а также среднюю кинетическую энергию поступательного движения, среднюю кинетическую энергию вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии молекулы азота.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Вероятность того, что характеризующая молекулу случайная величина p принимает значения из дифференциально малого интервала $[p, p+dp]$, есть

$$dW(p) = \frac{dN}{N} = f(p)dp\,, \tag{8.1}$$

где а dN – число молекул, для которых величина p лежит в интервале $[p, p+dp]$; N – полное число молекул; $f(p)$ – *функция распределения* (*плотность распределения*) вероятности:

$$f(p) = \frac{dW(p)}{dp}\,. \tag{8.2}$$

Вероятность того, что случайная величина p принимает значения из конечного интервала $[a,b]$, есть

$$W(a,b) = \int_a^b f(p)dp\,. \tag{8.3}$$

Функция распределения Максвелла по значениям проекции υ_x *скорости молекул*:

$$f(\upsilon_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right), \tag{8.4}$$

где m – масса молекулы.

Функция распределения Максвелла по абсолютным значениям υ *скорости молекул* (рис. 8.1):

$$f(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right). \tag{8.5}$$

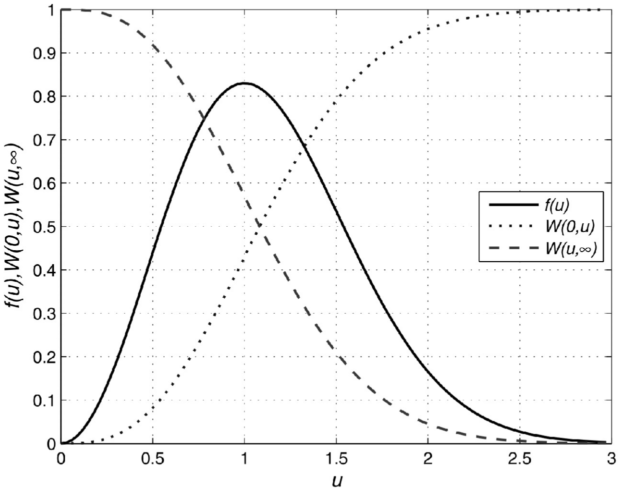


Рис. 8.1. Функция распределения вероятности $f(u)$ (сплошная линия), вероятность $W(0,u)$ (точечная линия), вероятность $W(u,\infty) = 1 - W(0,u)$ (штриховая линия) для величины $u = \upsilon / \upsilon_p = \upsilon / \sqrt{2RT / \mu}$

Средняя квадратичная (*тепловая*) *скорость молекул*:

$$\upsilon_T = \sqrt{3RT / \mu} = \sqrt{3kT / m}\ . \tag{8.6}$$

Средняя (*арифметическая*) *скорость молекул*:

$$\overline{\upsilon} = \sqrt{8RT / \pi\mu} = \sqrt{8kT / \pi m}\ . \tag{8.7}$$

Наиболее вероятная скорость молекул:

$$\upsilon_p = \sqrt{2RT / \mu} = \sqrt{2kT / m} \,. \qquad (8.8)$$

Используя наиболее вероятную скорость υ_p, можно обезразмерить выражения (8.4) и (8.5), вводя относительные скорости $u_x = \upsilon_x / \upsilon_p$, $u = \upsilon / \upsilon_p$ и представляя интегралы типа (8.3) в удобной для вычисления форме:

$$W(u_{x1},\, u_{x2}) = \int\limits_{u_{x1}}^{u_{x2}} f(u_x)du_x \,, \qquad f(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u_x^2\right), \qquad (8.9)$$

$$W(u_1, u_2) = \int\limits_{u_1}^{u_2} f(u)du \,, \qquad f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp\left(-u^2\right). \qquad (8.10)$$

Функция распределения Максвелла по значениям кинетической энергии E молекул (рис. 8.2):

$$f(E) = \left(2/\sqrt{\pi}\right)(kT)^{-3/2}\sqrt{E}\exp(-E / kT)\,, \qquad (8.11)$$

где $E = m\upsilon^2 / 2$. Перейдем к безразмерной энергии $\varepsilon = E / kT$ и представим вероятность того, что молекула газа имеет кинетическую энергию поступательного движения в интервале от E_1 до E_2, как

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon)d\varepsilon \,, \qquad f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\varepsilon}\exp(-\varepsilon)\,. \qquad (8.12)$$

Распределение Больцмана по координатам $\boldsymbol{r}$ частиц:

$$n(\boldsymbol{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{U(\boldsymbol{r})}{kT}\right), \qquad (8.13)$$

где $U(\boldsymbol{r})$ – потенциальная энергия частицы; $n(\boldsymbol{r})$ – концентрация частиц в точке $\boldsymbol{r}$; n_0 – концентрация частиц в тех точках, где $U(\boldsymbol{r}) = 0$.

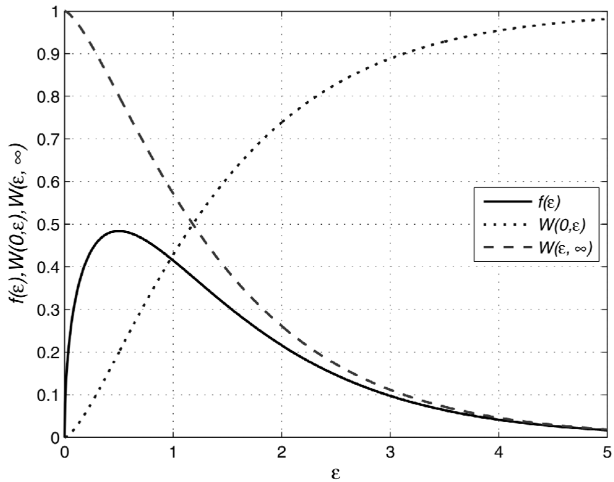


Рис. 8.2. Функция распределения вероятности $f(\varepsilon)$ (сплошная линия), вероятность $W(0,\varepsilon)$ (точечная линия) и вероятность $W(\varepsilon,\infty) = 1 - W(0,\varepsilon)$ (штриховая линия) для величины $\varepsilon = E / kT$

Барометрическая формула:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right), \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right), \ \frac{\mu}{R} = \frac{m}{k}, \tag{8.14}$$

где p и ρ – давление и плотность газа на высоте h; p_0 и ρ_0 – на поверхности Земли.

Вероятность того, что частица в некоторой среде, пройдя путь x, испытает столкновение на отрезке $[x, x + dx]$, равна $dW(x, x + dx) = f(x)dx$, где $f(x)$ – плотность распределения вероятности (рис. 8.3):

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\exp(-x / \lambda), \tag{8.15}$$

где $\lambda = 1 \big/ \left(\sqrt{2} \cdot \sigma n\right) = \tau \overline{\upsilon}$ – средняя длина свободного пробега частиц; σ – эффективное сечение столкновения частиц, равное $\sigma = \pi d^2$;

d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация; $\overline{\upsilon}$ – средняя скорость частиц; τ – среднее время свободного пробега частиц.

Вероятность частице испытать столкновение на отрезке $[x_1, x_2]$ равна

$$W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx . \tag{8.16}$$

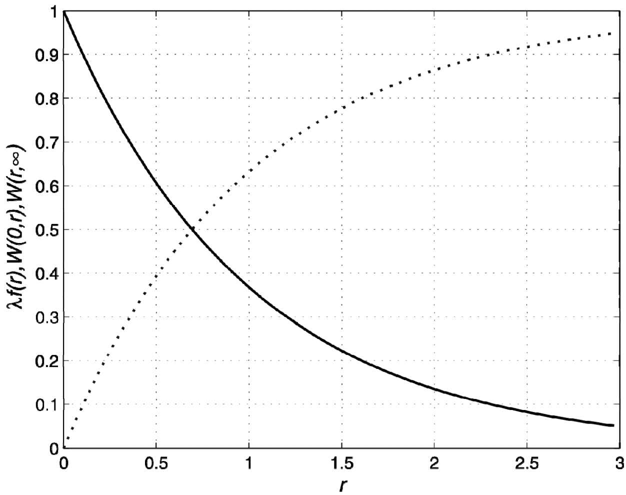


Рис. 8.3. Вероятность $W(r,\infty)$ и $\lambda f(r)$ (сплошная линия) и вероятность $W(0,r) = 1 - W(r,\infty)$ (точечная линия) (см. (8.15) и (8.16)) в зависимости от $r = x/\lambda$

Диффузия. Закон Фика

$$J_n = -D\frac{dn}{dx}S , \quad D = \frac{1}{3}\overline{\upsilon}\lambda , \tag{8.17}$$

где $J_n = dN/dt$ – поток диффузии частиц с концентрацией n через сечение площади S; dN – число диффундирующих частиц за время dt; D – коэффициент диффузии.

Внутреннее трение. Вязкость. Закон Ньютона:

$$F = -\eta \frac{d\upsilon}{dy} S, \quad \eta = \frac{1}{3} n m_0 \bar{\upsilon} \lambda, \tag{8.18}$$

где F – сила внутреннего трения жидкости или газа вдоль поверхности площади S; η – коэффициент вязкости; υ – скорость потока; m_0 – масса частиц жидкости или газа.

Теплопроводность. Закон Фурье:

$$J_Q = -\lambda_T \frac{dT}{dx} S, \quad \lambda_T = \frac{1}{3} c_V \rho \bar{\upsilon} \lambda, \tag{8.19}$$

где J_Q – поток тепловой энергии через сечение площади S; T – температура; λ_T – коэффициент теплопроводности; c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме; ρ – плотность.

Пример 8.1. При температуре $T =$ 400 К наиболее вероятная скорость молекул газа из одинаковых молекул равна 1820 м/с. Определить химическую природу этих молекул.

Решение

Из (8.8) выражаем молярную массу газа $\mu = 2RT / \upsilon_p^2 = 0.002$ кг/моль, следовательно, газ – молекулярный водород.

Ответ: $\mu = 0.002$ кг/моль, газ H_2.

Пример 8.2. Определите, какая часть молекул азота при температуре $T =$ 423 К обладает скоростями от $\upsilon_1 =$ 300 м/с до $\upsilon_2 =$ 800 м/с?

Решение

Найдем согласно (8.8) наиболее вероятную скорость: $\upsilon_p = \sqrt{2RT / \mu} = 501$ м/с, тогда границы интегрирования в (8.10) будут равны $u_1 = \upsilon_1 / \upsilon_p = 0.6$, $u_2 = \upsilon_2 / \upsilon_p = 1.6$. В соответствии с (8.2) и (8.3) искомая часть молекул равна интегралу (8.10), т.е. площади под соотвествующим участком кривой $f(u)$ на рис. 8.1. Очевидно, что

$$W(u_1,u_2)=\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx=\int_0^{u_2} f(x)dx-\int_0^{u_1} f(x)dx=W(0,u_2)-W(0,u_1),$$

тогда из графика функции $W(0,u)$ (рис. 8.1) получаем $W(0.6;\ 1.6)\approx$ $\approx W(0;\ 1.6)-W(0;\ 0.6)\approx 0.83-0.13=0.7$.

Проверим эту оценку численным интегрированием по методу прямоугольников:

$$\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx=\Delta x\sum_{n=1}^{N-1} f(x_n)\,, \qquad (8.20)$$

где $x_n=u_1+n\Delta x$, $\Delta x=(u_2-u_1)/N$, получим

$$W(u_1,u_2)=\Delta u\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{N-1} u_n^2\exp\left(-u_n^2\right).$$

Имеем $W(0.6,\ 1.6)=0.7047$ при $N=100$; $W(0.6,\ 1.6)=0.7052$ при $N=1000$. Округлим до двух значащих цифр. Таким образом, численная оценка вероятности дает $W\approx 0.71$.

Ответ: $W\approx 0.71$.

Пример 8.3. Энергия ионизации атомов водорода составляет $E_i=13.6$ эВ. Найти, при какой температуре 10 % всех атомов водорода имеет энергию поступательного движения атомов, превышающих энергию ионизации.

Решение

В безразмерных единицах $\varepsilon=E/kT$ функция распределения молекул по энергиям (8.11) имеет вид (8.12), а вероятность того, что атомы водорода имеют кинетическую энергию ε, большую некоторой энергии ε_m, дается интегралом

$$W(\varepsilon_m,\ \infty)=\int_{\varepsilon_m}^{\infty}\left(2/\sqrt{\pi}\right)\sqrt{\varepsilon}\cdot\exp(-\varepsilon)d\varepsilon\,, \qquad (8.21)$$

график этой функции приведен на рис. 8.2, из которого определим, что значение $W(\varepsilon_m, \infty) = 0.1$ достигается при энергии $\varepsilon_m \approx 3.1$. Численный расчет аналогично (8.20) дает значение $\varepsilon_m = 3.13$, а температура атомарного газа равна $T = E_i / k\varepsilon_m \approx 5.05 \cdot 10^4$ К.

Ответ: $T \approx 5.05 \cdot 10^4$ К.

Пример 8.4. Кирпичная труба высотой $h = 25$ м выпускает дым при температуре $t_1 = 58$ °С. Определить перепад давления на входе в трубу, обеспечивающий тягу. Температура наружного воздуха $t_0 = -40$ °С, давление на поверхности земли $p_0 = 760$ мм рт. ст.

Решение

Считаем, что температура газов в трубе постоянная и равна $T_1 = t_1 + 273$ К, тогда согласно барометрической формуле давление газов на высоте h внутри трубы равно

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT_1}\right),$$

где p_1 – давление воздуха в печке у входа в трубу на уровне поверхности земли; $\mu = 0.029$ кг/моль. Давление p_2' наружного воздуха на той же высоте (на срезе трубы) равно

$$p_2' = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT_0}\right),$$

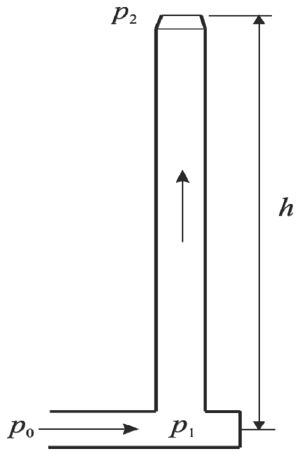


Рис. 8.4. К примеру 8.4

где $T_0 = t_0 + 273$ К. Очевидно, что $p_2 = p_2'$, тогда

$$p_1 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT_1}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT_0}\right).$$

Искомый перепад давлений внутри печи равен

$$\Delta p = p_0 - p_1 = p_0 - p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{R T_0} + \frac{\mu g h}{R T_1} \right) =$$

$$= p_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\mu g h}{R T_0} \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) \right) \right) = 109 \text{ Па.}$$

Ответ: $\Delta p = 109$ Па.

Пример 8.5. Какая часть молекул азота, находящегося при температуре $T = 273$ К и давлении $p = 0.018$ мм рт. ст., имеет длину свободного пробега, лежащую в интервале от $x_1 = 2.5$ до $x_2 = 3.5$ мм? Эффективный диаметр молекулы азота $d = 0.38$ нм. Давление 1 мм рт. ст. = 133.3 Па.

Решение

Микроскопическая длина свободного пробега – случайная величина. Искомую вероятность найдем из формулы (8.16) интегрированием (рис. 8.5):

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x}{\lambda} \right) dx = \exp(-r_1) - \exp(-r_2),$$

где $r_1 = x_1 / \lambda$, $r_2 = x_2 / \lambda$, а средняя длина свободного пробега $\lambda = 1 \big/ \left(\sqrt{2} \cdot \sigma n \right)$.

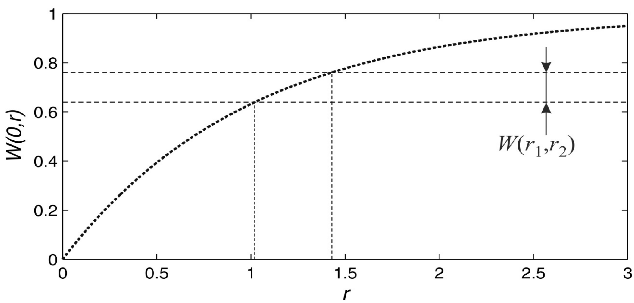


Рис. 8.5. Нахождение доли $W(r_1, r_2)$ молекул с помощью графика $W(0, r)$, рис. 8.3

Концентрация азота $n = p / kT = 6.37 \cdot 10^{20}$ м$^{-3}$; эффективное поперечное сечение молекулы азота $\sigma = \pi d^2 \approx 4.54 \cdot 10^{-19}$ м^2, т. е. $\lambda = 1 \big/ \left(\sqrt{2} \cdot \sigma n\right) = 2.45 \cdot 10^{-3}$ м и $r_1 = x_1 / \lambda = 1.02$, $r_2 = x_2 / \lambda = 1.43$, тогда $W(x_1, x_2) = 0.121$.

Ответ: $W(x_1, x_2) = 0.121$.

Пример 8.6. Расстояние между катодом и анодом в газоразрядной трубке равно $L = 15$ см. Какое давление газа p надо создать в трубке, чтобы электроны не сталкивались с молекулами по пути от катода к аноду? Температура газа $T = 300$ К; эффективный диаметр молекулы $d = 0.3$ нм. Средняя длина свободного пробега λ_1 электрона в газе в $\alpha = 5.7$ раза больше, чем λ у молекул газа (рис. 8.6).

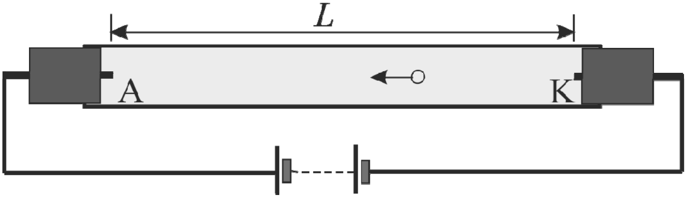


Рис. 8.6. Газоразрядная лампа

Решение

Электроны почти не сталкиваются с молекулами при малом давлении в трубке, пока $\lambda_1 > L$. С ростом давления λ и λ_1 убывают, а частота столкновений электронов с молекулами резко возрастает при таком давлении, когда $L = \lambda_1$. Это условие позволяет оценить верхнюю границу давления газа, при котором можно не учитывать столкновения электронов с молекулами. Средняя длина свободного пробега электронов равна $\lambda_1 = \alpha\lambda$, где $\lambda = 1 / \sqrt{2} \cdot \sigma n$, что дает $n = \alpha / \sqrt{2} \cdot \sigma\lambda_1$. Учитывая, что $\sigma = \pi d^2 = 2.83 \cdot 10^{-19}$ м^2, найдем давление газа в трубке $p = nkT = \alpha kT / \sqrt{2} \cdot \sigma L = 0.39$ Па.

Ответ. При давлении газа $p \le 0.39$ Па электроны почти не рассеиваются в трубке на пути от катода к аноду.

Пример 8.7. Оценить коэффициент диффузии D кислорода при давлении 1 атм и $T = 273$ К, эффективный диаметр молекулы кислорода $d = 0.36$ нм.

Решение

По формуле (8.17) коэффициент диффузии равен $D = \overline{\upsilon}\lambda / 3$. При заданных условиях ($T = 273$ К, $p = 1.013 \cdot 10^5$ Па) средняя скорость молекул кислорода $\overline{\upsilon} = \sqrt{8RT / \pi\mu} = 425$ м/с, концентрация частиц $n = p / kT$ и средняя длина их свободного пробега равна $\lambda = 1 / \sqrt{2} \cdot \sigma n = kT / \sqrt{2} \cdot \sigma p = 6.46 \cdot 10^{-8}$ м. Откуда $D = \overline{\upsilon}\lambda / 3 = 9.15 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

Ответ: $D = 9.15 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

Пример 8.8. Найти массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 100$ см^2 за время $t = 10$ с, если в направлении, перпендикулярном площадке, градиент плотности равен $\Delta\rho / \Delta x = 1.26$ кг/м^4. Температура азота $T = 300$ К, средняя длина свободного пробега молекул равна $\lambda = 10$ мкм.

Решение

Поток массы азота равен $J_m = m_0 J_n = m_0 dN / dt = dm / dt$, где $m = m_0 N$ – полная масса азота; m_0 – масса одной молекулы азота, плотность азота $\rho = m_0 n$. Согласно закону Фика (8.17) масса газа, прошедшего вследствие диффузии, равна $m = -D\dfrac{d\rho}{dx}St \approx D\left|\dfrac{\Delta\rho}{\Delta x}\right|St$, так как $d\rho / dx \approx -\left|\Delta\rho / \Delta x\right|$. Коэффициент диффузии найдем из выражения (8.17), где средняя скорость молекул $\overline{\upsilon} = \sqrt{8RT / \pi\mu} = 476$ м/с, что дает $D = \overline{\upsilon}\lambda / 3 = 1.59 \cdot 10^{-3}$ м^2/с, следовательно, масса азота, прошедшего через площадку за 10 с, $m = 2 \cdot 10^{-4}$ кг.

Ответ: $m = 2 \cdot 10^{-4}$ кг.

Пример 8.9. Самолет летит со скоростью $\upsilon = 830$ км/ч. Считая, что слой воздуха у крыла, увлекаемый вследствие вязкости, имеет толщину $\Delta y = 4$ см, найти касательную силу F, действующую на единицу площади поверхности крыла. Температура воздуха $T = 233$ К, эффективный диаметр молекулы воздуха принять равным $d = 0.3$ нм.

Решение

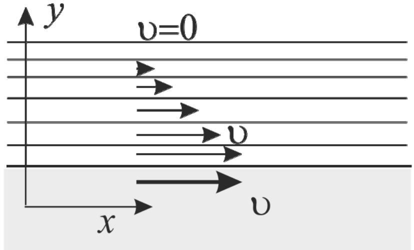


Рис. 8.7. К примеру 8.9

Согласно закону вязкости Ньютона на единицу площади поверхности крыла действует касательная сила трения (8.18), где $S = 1$ м^2, средняя скорость молекул воздуха равна $\bar{\upsilon} = \sqrt{8RT / \pi\mu} = 412$ м/с. Упростим второе выражение (8.18) $\eta = nm_0\bar{\upsilon}\lambda / 3 = \mu\bar{\upsilon} / (3\sqrt{2} \cdot \pi N_A d^2)$, так как $\mu = N_A m_0$, $\lambda = 1 / \sqrt{2} \cdot \sigma n$, $\sigma = \pi d^2$.

Проверим расчетную формулу динамической вязкости по размерности

$$[\eta] = [\mu][\bar{\upsilon}] / [N_A d^2] = MN^{-1}LT^{-1}NL^{-2} = L^{-1}MT^{-1}.$$

Полученная размерность совпадает с размерностью коэффициента динамической вязкости (коэффициента внутреннего трения) (см. приложение 2).

Подставляя в расчетную формулу численные значения заданных параметров, получаем $\eta = 1.66 \cdot 10^{-5}$ Па $\cdot$ с. Сила трения на единицу площади поверхности равна $F / S = \eta(\Delta\upsilon / \Delta y) = 0.095$ Н/м^2.

Ответ: $F / S = 0.095$ Н/м^2.

Пример 8.10 Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной $h = 0.1$ м могут свободно вращаться вокруг общей оси. Радиус внешнего цилиндра $R_2 = 0.05$ м, радиус внутреннего цилиндра $R_1 = 0.048$ м. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях:

$T_0 = 273$ К, $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Па. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 40\pi$ рад/с. Внешний цилиндр сначала неподвижен. Определите, через какое время с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет угловую скорость $\omega_2 = 2\pi$ рад/с? Масса внешнего цилиндра $m = 0.1$ кг, эффективный диаметр молекул воздуха d = 0.3 нм.

Решение

Описанная конструкция является основой ротационных вискозиметров. На внешний цилиндр действует момент силы $M = R_2 F$ внутреннего трения (8.18), вызывая угловое ускорение, которое определим из основного уравнения вращательного движения $J\varepsilon = M$, где $J = mR_2^2$ – момент инерции внешнего цилиндра. Поскольку угловое ускорение не зависит от времени, то искомое время находится из соотношения $t = \omega_2 / \varepsilon$. Найдем силу внутреннего трения (8.18): коэффициент вязкости $\eta = nm_0 \bar{\upsilon}\lambda / 3$, где $\upsilon = \sqrt{8RT / \pi\mu} = 446$ м/с, $n = p_0 / kT_0 = = 2.689 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, $\sigma = \pi d^2 = 2.83 \cdot 10^{-19}$ м^2, $\lambda = 1/\sqrt{2} \cdot \sigma n = 9.3 \cdot 10^{-8}$ м, $m_0 = \mu / N_A$, следовательно, $\eta = n\mu\upsilon\lambda / 3N_A = 1.79 \cdot 10^{-5}$ Па · с. Угловое ускорение $\varepsilon = R_2 F \big/ mR_2^2 = \eta \,|\Delta\upsilon|\, S / mR_2 \,|\Delta R|$, где $|\Delta\upsilon| = \omega_1 R_1$, $|\Delta R| = R_2 - R_1$, $S = 2\pi R_2 h$. Подставляя численные значения величин, получаем $\varepsilon = 0.32$ рад/с^2, а искомое время раскрутки $t = \omega_2 / \varepsilon = 19.5$ с.

Ответ: $t = 19.5$ с.

Пример 8.11. Для расчета отопительной системы требуется знать потерю тепла за счет теплопроводности через единицу площади S поверхности стены здания в течение суток. Толщина кирпичной стены $L_1 = 40$ см, температура стены изнутри $T_1 = 291$ К, снаружи $T_2 = 253$ К. Определите потери тепла Q через единицу площади поверхности кирпичной стены. Какой толщины L_2 должна быть деревянная стена, чтобы потеря теплоты была такой же? Какой толщины L_3 должна быть стена, изготовленная из сэндвич-панели, чтобы потеря теплоты была такой же? Коэффициенты теплопроводности: кирпичной кладки $-\lambda_{T1} = 0.7$ Вт/м · К, дерева поперек волокон – $\lambda_{T2} = 0.175$ Вт/м · К, минеральной ваты сэндвич-панели – $\lambda_{T3} = 0.054$ Вт/м · К.

Решение

Найдем потери энергии за сутки $Q = J_Q t$, где $t = 24$ ч. Поток J_Q определяется законом Фурье (8.19). Для кирпичной стены получим $J_{Q1} = \lambda_{T1}(T_1 - T_2)S / L_1 = 66.5$ Вт/м^2, где S – площадь поверхности стены. Тогда потери энергии за сутки $Q_1 = 5.75$ МДж. Найдем толщину деревянной стены из бруса с эквивалентными потерями тепла: $Q_2 = J_{Q2}t$, где $J_{Q2} = \lambda_{T2}(T_1 - T_2)S / L_2$. Считая, что $Q_2 = Q_1$, получим $\lambda_{T1} / L_1 = \lambda_{T2} / L_2$, откуда $L_2 = L_1\lambda_{T2} / \lambda_{T1} = 0.1$ м. Для сэндвич-панели с эквивалентными потерями тела: $\lambda_{T1} / L_1 = \lambda_{T3} / L_3$ и $L_3 = = L_1\lambda_{T3} / \lambda_{T1} = 0.031$ м.

Ответ: $Q_1 = 5.75$ МДж, $L_2 = 0.1$ м, $L_3 = 0.031$ м.

Задачи для аудиторной работы

А8.1. Температура водорода 550 К. Определите отношение числа молекул этого газа, скорости которых лежат в интервале от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул, компоненты скоростей которых лежат в интервале от 1500 до 1510 м/с.

А8.2. Энергия ионизации атомов калия равна 4.34 эВ. Найти, при какой температуре 20 % всех атомов калия имеют кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию, необходимую для ионизации отдельных атомов калия.

А8.3. В атмосфере находятся частицы пыли, имеющие массу $m = 8 \cdot 10^{-22}$ кг и объем $V = 5 \cdot 10^{-22}$ м^3. Найти уменьшение их концентрации на высотах $h_1 = 1.5$ м и $h_2 = 15$ м. Считать, что воздух находится при нормальных условиях.

А8.4. Определить относительную долю молекул, длина свободного пробега которых меньше 0.5λ.

А8.5. Коэффициенты диффузии и вязкости при некоторых условиях равны $D = 1.42 \cdot 10^{-4}$ м^2/с и $\eta = 8.5$ мкПа · с. Найти число молекул водорода в единице объема, его плотность, среднюю длину свободного пробега и среднюю скорость его молекул. Эффективный диаметр молекулы водорода принять равным 0.28 нм.

А8.6. Определите массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку 100 $см^2$ за минуту, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен 1 $кг/м^4$. Температура азота 300 К, давление азота 10 Па, эффективный диаметр молекулы азота принять равным 0.38 нм.

А8.7. Какое количество энергии теряет помещение за час через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы 4 $м^2$, расстояние между ними 30 см, температура внутри помещения 291 К, температура наружного воздуха 253 К. Температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур внутри помещения и наружного воздуха. Давление воздуха 1 атм. Эффективный диаметр молекулы воздуха принять равным 0.3 нм.

Задание на дом

В8.1. Определите температуру молекулярного водорода, при котором отношение числа молекул этого газа, скорости которых лежат в интервале от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул, скорости которых лежат в интервале от 1500 до 1510 м/с, равно единице.

В8.2. Определить долю W молекул, энергия которых заключена в пределах от 0 до $0.01kT$.

В8.3. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу 10^{-18} г. Во сколько раз уменьшится их концентрация при увеличении высоты на 10 м? Температура воздуха 300 К.

В8.4. Баллон вместимостью 10 л содержит водород массой 1 г. Определить среднюю длину свободного пробега молекул.

В8.5. Найти среднее число столкновений, испытываемых в течение 1 с молекулой кислорода при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы кислорода принять равным 0.36 нм.

В8.6. При нормальных условиях динамическая вязкость воздуха равна 17.2 мкПа · с. Найти для тех же условий коэффициент теплопроводности воздуха.

9. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ РАБОТА И ТЕПЛОТА. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ТЕПЛОЕМКОСТЬ. ИЗОПРОЦЕССЫ. ЦИКЛЫ. ЦИКЛ КАРНО. ЭНТРОПИЯ

Первое начало термодинамики – закон сохранения энергии в термодинамических процессах:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}. \tag{9.1}$$

Термодинамическая работа:

$$A_{12} = \int_1^2 pdV\ . \tag{9.2}$$

Изменение внутренней энергии системы:

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1. \tag{9.3}$$

Теплоемкость:

$$C = \delta Q / dT\ . \tag{9.4}$$

Молярная теплоемкость $C = c\,\mu$, где c – удельная теплоемкость.

Уравнение Майера для одного моля идеального газа:

$$C_p = C_V + R, \tag{9.5}$$

$$C_V = (\delta Q / dT)_V = dU / dT = iR / 2\ , \tag{9.6}$$

$$C_p = (\delta Q / dT)_p = (i+2)R / 2\ . \tag{9.7}$$

Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \frac{i}{2}\nu RT = \nu C_V T\ . \tag{9.8}$$

Изотермический процесс: $T = \mathrm{const}$, $pV = \mathrm{const}$,

$$A_T = Q_T = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1},\ \ \Delta U_T = 0\ . \tag{9.9}$$

Изобарический процесс: $p = \mathrm{const}$, $V/T = \mathrm{const}$,

$$A_p = p(V_2 - V_1),\ \ Q_p = \nu C_p (T_2 - T_1),\ \ \Delta U_p = \nu C_V (T_2 - T_1)\ . \tag{9.10}$$

Изохорический процесс: $V = \mathrm{const}$, $p/T = \mathrm{const}$,

$$A_V = 0,\ \ Q_V = \Delta U_V = \nu C_V (T_2 - T_1)\ . \tag{9.11}$$

Адиабатический процесс: $S = \mathrm{const}$,

$$pV^{\gamma} = \mathrm{const}\ , \tag{9.12}$$

$$TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}\ , \tag{9.13}$$

$$Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \mathrm{const}\ , \tag{9.14}$$

$$\gamma = C_p / C_V = (i+2)/i\ , \tag{9.15}$$

$$Q_S = 0,\ \ \ A_S = -\Delta U_S = \nu C_V (T_1 - T_2)\ , \tag{9.16}$$

$$A_S = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right) = \nu \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right). \tag{9.17}$$

Цикл Карно идеального газа (рис. 9.1).

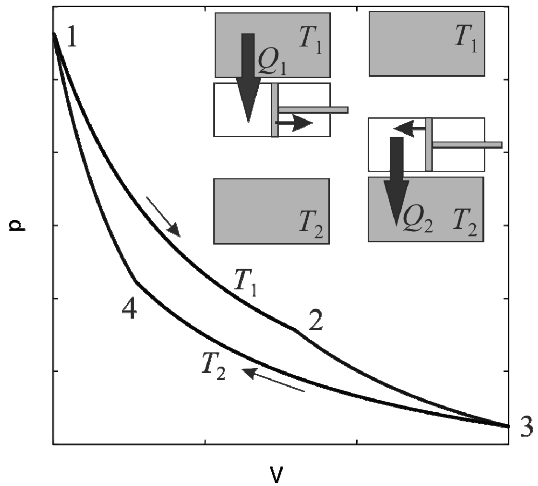


Рис. 9.1. Цикл Карно:
1–2 – изотермическое расширение газа при температуре нагревателя T_1, от нагревателя рабочему телу передается теплота Q_1; *2–3* – адиабатическое расширение газа; *3–4* – изотермическое сжатие газа при температуре холодильника T_2, от рабочего тела холодильнику передается теплота Q_2; *4–1* – адиабатическое сжатие газа до завершения цикла

Коэффициент полезного действия (КПД) η *тепловой машины*:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}, \tag{9.18}$$

где Q_1 – количество теплоты, переданной нагревателем рабочему телу; Q_2 – количество теплоты, отданной рабочим телом холодильнику; $A = Q_1 - |Q_2|$ – полная механическая работа, произведенная рабочим телом за цикл.

Коэффициент полезного действия η_K *цикла Карно*:

$$\eta_K = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{9.19}$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

Энтропия:

$$S = k \ln(\Gamma_0), \tag{9.20}$$

где Γ_0 – статистический вес макросостояния.

Изменение энтропии в равновесном процессе:

$$dS \equiv \frac{\delta Q}{T}, \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \tag{9.21}$$

Изменение энтропии идеального газа в равновесном процессе:

$$S_2 - S_1 = \nu C_V \ln \frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma}. \tag{9.22}$$

Цикл Карно в координатах энтропия – температура показан на рис. 9.2.

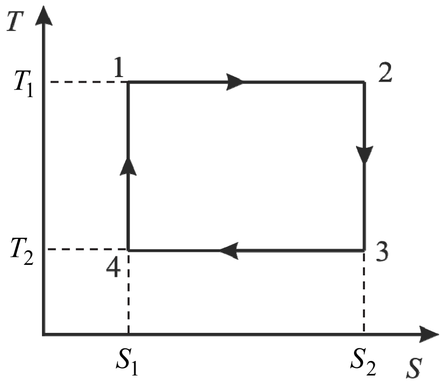


Рис. 9.2. Цикл Карно в координатах *ST*

Пример 9.1. В изотермическом процессе идеальный газ совершил работу $A_T = 1$ кДж. Затем газу сообщили еще $Q_p = 1$ кДж теплоты, но уже изобарно. Насколько увеличилась внутренняя энергия этого газа, если газ одноатомный?

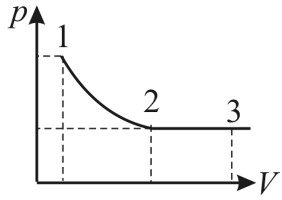


Рис. 9.3. К примеру 9.1

Решение

Пусть изотермический процесс происходит между состояниями *1* и *2* (рис.9.3), а изобарический – между состояниями *2* и *3*. Полное изменение внутренней энергии равно $\Delta U_{13} = i\frac{\nu}{2}R\Delta T_{31}$, где $\Delta T_{31} = T_3 - T_1 = T_3 - T_2$, поскольку в изотермическом процессе температура постоянная $T_1 = T_2$ и внутренняя энергия газа не изменяется. В изобарическом процессе $Q_p = Q_{23} = \nu C_P (T_3 - T_2) = \nu \frac{i+2}{2} R\Delta T_{31}$, так как $C_p = \frac{i+2}{2}R$, откуда $\frac{\nu}{2}R\Delta T_{31} = \frac{Q_{23}}{i+2}$, т. е. $\Delta U_{13} = \frac{i}{i+2}Q_{23} = 600$ Дж.

Ответ: $\Delta U_{13} = 600$ Дж.

Пример 9.2. Воздух в комнате нагрели от температуры $t_1 = 15$ °C до температуры $t_2 = 25$ °C. При этом давление воздуха не изменилось и равно давлению вне комнаты, составляющему $p = 1$ атм. Изменилась ли внутренняя энергия воздуха внутри комнаты. Объем комнаты $V =$ 40 м^3.

Решение

При нагревании часть воздуха выходит из комнаты. Согласно формуле (9.8) внутренняя энергия в начальном состоянии $U_1 = i\nu_1 RT_1 / 2$, а в конечном состоянии $U_2 = i\nu_2 RT_2 / 2$, где $T_1 = t_1 + 273 = 288$ К, $T_2 = t_2 + 273 = 298$ К.

С помощью уравнения Менделеева–Клапейрона (7.1) для начального и конечного состояния $p_1 V = \nu_1 RT_1$ и $p_2 V = \nu_2 RT_2$ найдем $U_1 = i\nu_1 RT_1 / 2 = ip_1 V_1 / 2 = ipV / 2$ и $U_2 = i\nu_2 RT_2 / 2 = ip_2 V_2 / 2 = ipV / 2$, т. е. внутренняя энергия не изменяется: $\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = 0$, так как

$p_2 = p_1 = p$, $V_2 = V_1 = V$. Считая $i = 5$, вычислим эту внутреннюю энергию воздуха в комнате: $U = ipV/2 = 10^7$ Дж.

Ответ: $\Delta U_{12} = 0$ Дж, $U = 10^7$ Дж.

Пример 9.3. В теплоизолированном сосуде при температуре $T_1 = 800$ К находится один моль углекислого газа и один моль молекулярного водорода. Происходит химическая реакция $CO_2 + H_2 = CO + H_2O + 40.1$ кДж/моль. Найти температуру газа T_2, после того как все молекулы прореагируют. Во сколько раз возрастет давление? Обозначим полное число степеней свободы молекул углекислого газа CO_2, $i_1 = 6$, водорода H_2, $i_2 = 5$, угарного газа CO $i_3 = 5$, водяного пара H_2O, $i_4 = 6$.

Решение

В результате химической реакции водорода с углекислым газом образуются угарный газ и вода, при этом выделяется некоторое количество теплоты Q, что приводит к увеличению температуры и давления смеси газов.

Поскольку сосуд хорошо теплоизолирован, то теплообмен с внешней средой отсутствует, и, так как $V = \text{const}$, работа газом не производится, $A_{12} = 0$ Дж, а выделившееся тепло идет на увеличение внутренней энергии $Q = \Delta U_{12}$, где $\Delta U_{12} = \left(\frac{i_3}{2}\nu_3 + \frac{i_4}{2}\nu_4\right)RT_2 - \left(\frac{i_1}{2}\nu_1 + \frac{i_2}{2}\nu_2\right)RT_1$, причем число молей всех компонент одинаково: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 \equiv \nu$, $Q = 40.1$ кДж. В нашем случае имеем $2Q/\nu(i_3 + i_4)R = T_2 - T_1$ и $T_2 = T_1 + 2Q/(i_3 + i_4)R \approx 1700$ К при $\nu = 1$ моль. Взяв отношение уравнений Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояния $p_1V = \nu RT_1$ и $p_2V = \nu RT_2$, получим $p_2/p_1 = T_2/T_1 = 2.07$.

Ответ: $T_2 \approx 1700$ К, $p_2/p_1 \approx 2.1$.

Пример 9.4. Для движения торпеды раньше использовался двигатель, работающий на сжатом воздухе. Оцените максимальную полезную работу, производимую двигателем, если объем сжатого воздуха $V = 200$ л, а давление p = 20 МПа. Торпеда отрегулирована на движение в воде на глубине h = 3 м. Температура сжатого воздуха и воды $T = 280$ К. Считая движение торпеды равномерным, оцените силу тяги двигателя, если радиус действия торпеды $l = 2$ км.

Решение

Процесс расширения воздуха является изотермическим, начальное давление в баллоне $p_1 = 2 \cdot 10^7$ Па, конечное давление p_2 газа в воздушных пузырях за торпедой складывается из атмосферного давления p_0 на уровне моря и гидростатического давления $\rho g h$, т. е. $p_2 = p_0 + \rho g h$, где ρ – плотность воды. Работа при изотермическом расширении газа равна $A = p_1 V_1 \ln(V_2 / V_1) = p_1 V_1 \ln(p_1 / p_2)$. Подставляя численные значения, получаем оценку максимальной полезной работы $A = 0.4 \cdot 10^7 \ln(2 \cdot 10^7 / 1.31 \cdot 10^5) \approx 2 \cdot 10^7$ Дж. Оценку силы тяги можно получить, зная радиус l действия торпеды, поскольку $A = Fl$, откуда $F = A / l \approx 10$ кН.

Ответ: $A \approx 2 \cdot 10^7$ Дж, $F \approx 10$ кН.

Пример 9.5. Автомобильная камера накачана до давления $p_1 = 220$ кПа при температуре $T_1 = 290$ К. Во время движения она нагрелась до температуры $T_2 = 330$ К и с шумом лопнула. Считая процесс, происходящий после повреждения камеры, адиабатным, определить изменение температуры вышедшего из нее воздуха. Внешнее давление $p_0 = 100$ кПа.

Решение

Рассмотрим происходящее как два последовательных термодинамических процесса: первый – изохорическое нагревание воздуха в камере; второй – адиабатическое расширение воздуха. В изохорическом процессе имеем $p_1 / T_1 = p_2 / T_2$, $p_2 = p_1 T_2 / T_1 = 250$ кПа, в адиабатическом процессе – $T_2 p_2^{(1-\gamma)/\gamma} = T_3 p_3^{(1-\gamma)/\gamma}$, где T_3, p_3 – температура и давление воздуха в конце адиабатического расширения $T_3 = T_2 p_2^{(1-\gamma)/\gamma} / p_3^{(1-\gamma)/\gamma}$ где $\gamma = 1.4$. Учитывая, что давление $p_3 = p_0$, получаем разность температур $\Delta T = T_2 - T_3 = T_2 \left(1 - (p_2 / p_0)^{(1-\gamma)/\gamma}\right) =$

$= 330(1 - 2.5^{-0.4/1.4}) = 76$ К, что подтверждается графическим решением (рис. 9.4).

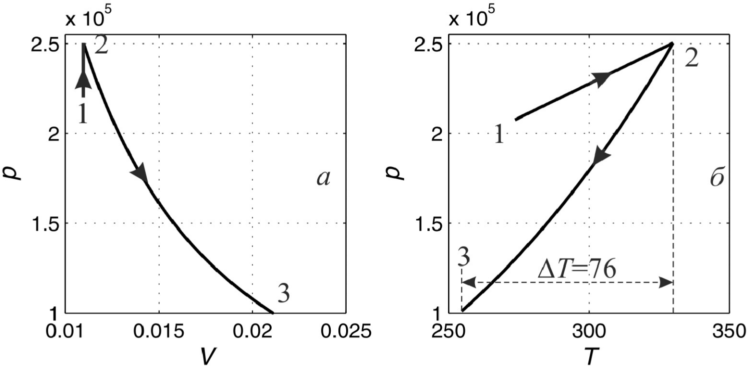


Рис. 9.4. Левая панель – диаграммы процессов в координатах «давлениие-объем», правая панель – диаграммы процессов в координатах «давление-температура»

Ответ: $\Delta T = 76$ К.

Примечание. Самые большие грузовики трудятся в карьерах, их грузоподъемность более 300 т. Например, БелАЗ-75710 имел рекордную грузоподъемность 450 т. Оцените, насколько понизится температура вышедшего газа, если лопнет шина такого грузовика.

Пример 9.6. Влажный воздух содержит 20 % пара. Принимая сухой воздух за двухатомный газ с эффективными молярной массой $\mu_1 = 0.029$ кг/моль и числом степеней свободы молекулы $i_1 = 5$, определите удельную теплоемкость влажного воздуха при постоянном объеме и отношение молярных теплоемкостей $\gamma = C_p / C_V$. У водяного пара молярная масса $\mu_2 = 0.018$ кг/моль, а число степеней свободы молекулы $i_2 = 6$.

Решение

Пусть m_1 – масса воздуха, m_2 – масса водяного пара, $m = m_1 + m_2$ – масса смеси. Удельная теплоемкость смеси воздуха и водяного пара при постоянном объеме есть $c_V = \tilde{C}_V / m$, где полная теплоемкость смеси равна $\tilde{C}_V = (i_1\nu_1 + i_2\nu_2)R/2$. Учитывая, что $\nu_1 = m_1/\mu_1$, $\nu_2 = m_2/\mu_2$, а массовая доля компонент смеси $\alpha_1 = m_1/m = 0.8$, $\alpha_2 = m_2/m = 0.2$, получим $c_V = (i_1\alpha_1/2\mu_1 + i_2\alpha_2/2\mu_2)R = 850$ Дж/(кг · К).

Полное число молей в смеси $\nu = \nu_1 + \nu_2$ позволяет определить молярную массу μ смеси, так как $\nu = m/\mu$, откуда $\mu = \mu_1\mu_2/(\alpha_1\mu_2 + \alpha_2\mu_1) = 0.0258$ кг/моль. Тогда молярные теплоемкости равны $C_V = \mu c_V$ и $C_p = C_V + R$ (уравнение Майера (9.5)), а показатель адиабаты $\gamma = (C_V + R)/C_V = 1 + R/\mu c_V = 1.38 \approx 1.4$.

Ответ: $c_V = 850$ Дж/кг·К, $\gamma \approx 1.4$.

Пример 9.7. Смешали две части водорода и одну часть кислорода (по объему). Общая масса смеси $m = 72$ г, температура $T = 290$ К. Определить молярную теплоемкость C_V и внутреннюю энергию U смеси газов. Молярные массы водорода $\mu_1 = 0.002$ кг/моль, кислорода $\mu_2 = 0.032$ кг/моль, а числа степеней свободы молекул у них одинаковы: $i = i_1 = i_2 = 5$.

Решение

Внутренняя энергия смеси идеальных газов есть сумма внутренних энергий компонент $U = U_1 + U_2$, где $U_1 = \nu_1 i_1 RT/2$, $U_2 = \nu_2 i_2 RT/2$, так что в данном случае $U = \nu C_V T$, где $C_V = iR/2 = 20.78$ Дж/моль·К – молярная теплоемкость смеси при постоянном объеме, а полное число молей смеси ν найдем с помощью закона Авогадро: «в равных объемах содержится равное количество молей газов при одинаковых термодинамических условиях». Тогда в нашем случае $\nu_1 = 2\nu_2$, а $m_1 = \nu_1\mu_1$ – масса водорода, $m_2 = \nu_2\mu_2$ – масса кислорода, причем масса смеси $m = m_1 + m_2 = 2\nu_2\mu_1 + \nu_2\mu_2$, откуда $\nu_2 = m/(2\mu_1 + \mu_2)$. Число молей смеси газов есть $\nu = \nu_1 + \nu_2 = 4 + 2 = 6$ моль. В итоге внутренняя энергия смеси $U = \nu C_V T$ = 36 149 Дж.

Ответ: $C_V = 20.8$ Дж/моль · К, $U \approx 36$ кДж.

Пример 9.8. В результате обратимого адиабатического расширения температура $m = 1$ кг азота понижается на $\Delta T = 20$ К. Определить работу, совершаемую газом при расширении. Учесть, что колебательные степени свободы молекул азота при рассматриваемых температурах не возбуждаются.

Решение

Для расчета работы адиабатического расширения удобно использовать формулу (9.16): $A_{12} = \nu C_V (T_1 - T_2)$, где $T_1 - T_2 = \Delta T$, $C_V = iR/2$, $i = 5$. Учитывая, что $v = m/\mu = 1/0.028 = 35.7$ моль и $\gamma = (i+2)/i = 1.4$, находим величину работы адиабатического расширения $A_{12} = = \nu iR\Delta T/2 = 14\,839$ Дж

Ответ: $A_{12} = 14.8$ кДж.

Пример 9.9. КПД паровой машины составляет половину КПД идеальной тепловой машины, которая работает по циклу Карно в том же интервале температур. Температура пара, поступающая из котла в паровую машину, равна $T_1 = 500$ К, температура конденсата $T_2 = 350$ К. Определить мощность паровой машины, если она за один час потребляет уголь массой $m = 200$ кг с теплотворной способностью $\lambda = 31$ МДж/кг.

Решение

Найдем КПД паровой машины $\eta = 0.5\eta_K$, $\eta_K = (T_1 - T_2)/T_1 = 0.3$, т. е. $\eta = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$. С другой стороны, $\eta = A/Q_1$, где A и Q_1 – совершенная паровой машиной работа и поглощенное ею тепло за время $t = 1$ ч. Количество теплоты $Q_1 = \lambda m$, тогда $A = \eta Q_1 = \eta\lambda m$, а мощность паровой машины равна $P = A/t = \eta\lambda m/t \approx 260$ кВт.

Ответ: $P \approx 260$ кВт.

Пример 9.10. Некоторое количество идеального газа в цилиндре под поршнем совершает цикл, состоящий из двух изобар при давлениях p_1 и p_2 и из двух изотерм при температурах T_1 и T_2. Докажите, что КПД этого цикла меньше, чем КПД цикла Карно с теми же изотермами.

Решение

Изобразим цикл на pV-диаграмме. Пронумеруем вершины, как показано на рис. 9.5.

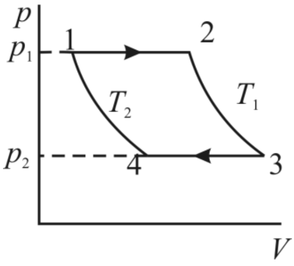


Рис. 9.5. К примеру 9.10

Каждая вершина криволинейного четырехугольника изображает макросостояние со следующими термодинамическими параметрами: *1* – p_1, T_2, V_1; *2* – p_1, T_1, V_2; *3* – p_2, T_1, V_3; *4* – p_2, T_2, V_4. Полная работа за цикл равна $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$, где работа в изопроцессах на соответствующих участках цикла дается формулами: $A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = \nu R(T_1 - T_2)$, $A_{23} = \nu R T_1 \ln(p_1 / p_2)$, $A_{34} = p_2(V_4 - V_3) = -\nu R(T_1 - T_2)$, $A_{41} = -\nu R T_2 \times$ $\times \ln(p_1 / p_2)$. Таким образом, полная работа за цикл $A = \nu R(T_1 - T_2)\ln(p_1 / p_2)$. Количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя, равно $Q_1 = Q_{12} + Q_{23}$, где $Q_{12} = \nu C_p(T_1 - T_2)$ и $Q_{23} = A_{23} = \nu R T_1 \ln(p_1 / p_2)$. КПД тепловой машины $\eta = A / Q_1$, что дает $\eta = \nu R(T_1 - T_2)\ln(p_1 / p_2) / [\nu C_p(T_1 - T_2) + \nu R T_1 \ln(p_1 / p_2)]$, или

$$\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} \frac{1}{1 + C_p(T_1 - T_2) / R T_1 \ln(p_1 / p_2)} .$$

Поскольку знаменатель второй дроби больше единицы, величина η меньше КПД машины, работающей по циклу Карно $\eta_K = (T_1 - T_2) / T_1$.

Ответ: $\eta < \eta_K$.

Пример 9.11. Смешали две порции воды: первую, имеющую массу $m_1 = 5$ кг и температуру $T_1 = 280$ К, и вторую, имеющую массу $m_2 = 8$ кг и температуру $T_2 = 350$ К. Найти: 1) температуру смеси T; 2) изменение энтропии ΔS системы при смешивании. Удельная теплоемкость воды $c = 4190$ Дж/кг · К.

Решение

1. Вторая порция воды отдает абсолютное количество теплоты $\Delta Q_2 = c m_2 (T_2 - T)$, а первая порция получает абсолютное количество

теплоты $\Delta Q_1 = cm_1(T - T_1)$. Они равны между собой: $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$, т. е. $cm_1(T - T_1) = cm_2(T_2 - T)$, откуда $T = (m_1T_1 + m_2T_2)/(m_1 + m_2) = 4200/13 = 323$ К.

2. Изменение энтропии системы при смешивании равно сумме изменения энтропий смешиваемых частей $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$, тогда

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_1}{T} = cm_1 \int_{T_1}^{T} \frac{dT}{T} = cm_1 \ln\frac{T}{T_1} > 0,$$

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q_2}{T} = cm_2 \int_{T_2}^{T} \frac{dT}{T} = cm_2 \ln\frac{T}{T_2} < 0,$$

$$\Delta S = cm_1 \ln\frac{T}{T_1} + cm_2 \ln\frac{T}{T_2} \approx 315 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: 1) $T = 323$ К; 2) $\Delta S = 315$ Дж/К.

Пример 9.12. Найти приращение энтропии двух молей идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.3$, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в $\alpha = 2$ раза, а давление уменьшилось в $\beta = 3$ раза.

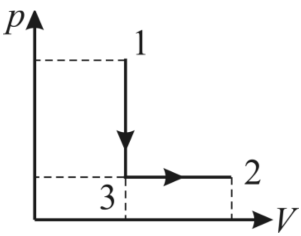


Рис. 9.6. К примеру 9.12

Решение

Энтропия является функцией состояния, следовательно, неважно, при помощи каких процессов система перешла из начального состояния 1 в конечное состояние 2. Поэтому рассмотрим показанный на рис. 9.6 квазиравновесный термодинамический процесс между состояниями 1 и 2, состоящий из последовательных изохорического процесса 13 и изобарического процесса 32.

При помощи (9.21) найдем изменение энтропии:

$$\Delta S_{12} = \Delta S_{13} + \Delta S_{32} = \int_1^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^2 \frac{\delta Q}{T} = \nu C_V \int_1^3 \frac{dT}{T} + \nu C_p \int_3^2 \frac{dT}{T},$$

$$\text{или} \quad \Delta S_{12} = \nu C_V \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right) + \nu C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_3}\right).$$

На участке 13: $p_1 / T_1 = p_2 / T_3$ и $T_3 / T_1 = p_2 / p_1 = 1/\beta$, на участке 32: $V_1 / T_3 = V_2 / T_2$ и $T_2 / T_3 = V_2 / V_1 = \alpha$, т. е. $\Delta S_{12} = \nu C_p \ln\alpha - \nu C_V \ln\beta$. Из соотношений $\gamma = C_p / C_V$ и $C_p - C_V = R$ выразим $C_V = R/(\gamma - 1)$ и $C_p = R\gamma/(\gamma - 1)$, получим $\Delta S_{12} = \nu R(\gamma\ln\alpha - \ln\beta)/(\gamma - 1) = -10.9$ Дж/К.

Ответ: $\Delta S_{12} \approx -11$ Дж/К.

Задачи для аудиторной работы

А9.1. Один моль идеального двухатомного газа сначала изохорически нагрели, а затем изобарически охладили до первоначальной температуры 300 К, уменьшив при этом объем газа в три раза. Какое количество теплоты получил газ на первом участке? Какая работа совершена газом на втором участке?

А9.2. При адиабатическом увеличении объема кислорода в 10 раз его внутренняя энергия уменьшилась на 42 кДж. Начальная температура была равна 280 К. Найдите массу кислорода.

А9.3. Сравнить конечные температуры и объемы воздуха при его сжатии в поршневом компрессоре от 1 до 5 атм: а) изотермически, б) адиабатически.

А9.4. Паровая машина мощностью 14.7 кВт потребляет за один час работы 8.1 кг угля с удельной теплотой сгорания $3.3\cdot10^7$ Дж/кг. Температуры котла 473 К и холодильника 331 К. Найти КПД этой машины и сравнить его с КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно.

А9.5. Водород массой 6.6 г изобарически расширяется от V до $2V$. Найти изменение энтропии при этом расширении.

А9.6. Энтропия моля кислорода при температуре $T_1 = 298$ К и давлении 1 атм равна $S_1 = 204.8$ Дж/К. В результате изотермического расширения объем, занимаемый газом, увеличился в два раза. Определить энтропию S_2 кислорода в конечном состоянии.

А9.7. Некоторое количество идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изохор при объемах V_1 и V_2 и из двух изотерм при температурах T_1 и T_2. Докажите, что КПД этого цикла меньше, чем у цикла Карно с теми же изотермами.

Задание на дом

В9.1. Каковы удельные теплоемкости c_V и c_P смеси газов, содержащей 10 г кислорода и 20 г азота?

В9.2. Газ, занимавший объем 12 л под давлением 100 кПа, был изобарно нагрет от температуры 300 К до температуры 400 К. Определить работу расширения газа.

В9.3. Водяной пар расширяется при постоянном давлении. Определить работу расширения, если пару передано количество теплоты, равное 4 кДж.

В9.4. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества 1 моль и находящийся под давлением 0.1 МПа при температуре 300 К, нагревают при постоянном объеме до давления 0.2 МПа. После этого газ изотермически расширился до начального давления и затем изобарно был сжат до начального объема. Определить температуру для характерных точек цикла и термический КПД цикла.

В9.5. Наименьший объем газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем газа, если объем газа в конце изотермического расширения равен 600 л, а объем газа в конце изотермического сжатия равен 189 л.

В9.6. Кислород массой 2 кг увеличил свой объем в пять раз: а) изотермически, б) адиабатически. Найти изменение энтропии в каждом из указанных процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Размерности физических величин в механике

Величина	Формула	Обозначение	Размерность	Единицы измерения
Длина		l	L	м
Масса		m	M	кг
Время		t	T	с
Скорость	$\upsilon = dx / dt$	υ	LT^{-1}	м/с
Ускорение	$a = d\upsilon / dt$	a	LT^{-2}	м/с^2
Импульс	$p = m\upsilon$	p	LT^{-1}	кг·м/с
Сила		F	LMT^{-2}	Н
Импульс силы		$F\Delta t$	LMT^{-1}	Н·с
Угол		φ	1	рад
Угловая скорость	$\omega = d\varphi / dt$	ω	T^{-1}	рад/с
Угловое ускорение	$\varepsilon = d\omega / dt$	ε	T^{-2}	рад/с^2
Момент импульса	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	L	L^2MT^{-1}	кг·м^2/с
Момент силы	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$	M	L^2MT^{-2}	кг·м^2/с^2
Момент инерции	$I = \int_m r^2 dm$	I, J	L^2M	кг·м^2
Энергия		E_K, U	L^2MT^{-2}	Дж
Работа	$A = Fx$	A	L^2MT^{-2}	Дж
Мощность	$N_F = dA / dt$	N_F	L^2MT^{-3}	Вт
Модуль объемного сжатия		k	$L^{-1}MT^{-2}$	Па
Модуль Юнга		E	$L^{-1}MT^{-2}$	Па
Модуль сдвига		G	$L^{-1}MT^{-2}$	Па

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Размерности физических величин в термодинамике и молекулярной физике

Величина	Формула	Обозначение	Размерность	Единицы измерения
Температура		T	θ	кельвин
Количество вещества	$v = m/\mu = N/N_A$	v	N	моль
Давление	$p = F/S$	p	$L^{-1}MT^{-2}$	Па
Объем		V	L^3	м^3
Плотность	$\rho = m/V$	ρ	ML^{-3}	кг/м^3
Концентрация	$n = N/V$	n	L^{-3}	м$^{-3}$
Молярная масса		μ	MN^{-1}	кг/моль
Газовая постоянная	$R = k_B N_A$	R	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$	Дж/моль·К
Постоянная Больцмана	$k_B = R/N_A$	k, k_B	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$	Дж/К
Количество теплоты		Q	L^2MT^{-2}	Дж
Теплоемкость	$C = dQ/dT$	C	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$	Дж/К
Теплоемкость молярная	$C_\mu = C/\mu$	C_μ	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$	Дж/моль·К
Теплоемкость удельная $V = \text{const}$ $p = \text{const}$	$c_m = C/m$ $c_V = (C/m)_V$ $c_p = (C/m)_p$	c_m c_V c_p	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	Дж/(кг·К)
Коэффициент диффузии	$D = \frac{1}{3}\bar{\upsilon}\lambda$	D	L^2T^{-1}	м^2/с
Коэффициент динамической вязкости	$\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{\upsilon}\lambda$	η	$L^{-1}MT^{-1}$	Па·с

Величина	Формула	Обозначение	Размерность	Единицы измерения
Коэффициент теплопроводности	$\lambda_T = \frac{1}{3}\rho c_V \overline{\upsilon}\lambda$	λ_T	$LMT^{-3}\theta^{-1}$	Вт/(м·К)
Градиент давления		grad p	$L^{-2}MT^{-2}$	Па/м
Градиент скорости		grad υ	T^{-1}	$с^{-1}$
Градиент температуры		grad T	$L^{-1}\theta$	К/м
Энтропия	$\Delta S = \Delta Q / T$	S	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$	Дж/К

ОТВЕТЫ

А1.1. $\Delta\boldsymbol{\upsilon} = -2\upsilon\boldsymbol{i}$, $|\Delta\boldsymbol{\upsilon}| = 2\upsilon$, $\Delta|\boldsymbol{\upsilon}| = 0$. **А1.2.** $\upsilon = \sqrt{u^2 + V^2 - \sqrt{2}\cdot uV}$, $\gamma = \arcsin\left(u / \sqrt{2}\cdot\upsilon\right)$. **А1.3.** $t_1 = 3.4$ с, $x_1 = 15$ м. **А1.4.** $a_\tau = 5.36$ м/с^2, $a_n = 8.20$ м/с^2; R = 39.1 м. **А1.5.** $N = 11$. **А1.6.** $\upsilon_0 = 13.6$ м/с, $a = -3.2$ м/с^2.

В1.1. $t_1 = 40$ с; $x_1 = 80$ м; $a_1 = -0.1$ м/с^2. **В1.2.** $\Delta h = 148.3$ м. **В1.3.** $\boldsymbol{\upsilon}(t) = 3At^2\boldsymbol{i} + 2Bt\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{a}(t) = 6At\boldsymbol{i} + 2B\boldsymbol{j}$. **В1.4.** $\upsilon_1 = 7$ м/с; $a_{\tau 1} = 8.5$ м/с^2. **В1.5.** $y = 2\sqrt[3]{x}$, $\upsilon_1 = 2.77$ м/с; $a_1 = 4.80$ м/с^2.

А2.1. $F_{\max 2} = 72$ Н, $F_{\max 1} = 36$ Н. **А2.2.** $F \approx 17$ кН. **А2.3.** $t = 0.41$ с. **А2.4.** $\alpha = 22.2° = 0.388$ рад. **А2.5.** $\alpha = 60.2° = 1.05$ рад. **А2.6.** $\mu = 0.1$. **А2.7.** $\upsilon_2 = 7.6$ м/с.

В2.1. $F_1 = -0.8$ Н, $F_2 = -8.0$ Н, $t_0 = 1.667$ с. **В2.2.** $a = 2$ м/с^2; 1) $T = 8$ Н; 2) $T = 2$ Н. **В2.3.** $\mu = 0.354$. **В2.4.** $\omega = 3.13$ рад/с. **В2.5.** $N = 39$ кН. **В2.6.** $\upsilon = 14$ м/с.

А3.1. $N = 26$ кВт. **А3.2.** $\upsilon_1 = \upsilon_2$; $t_2 / t_1 = \sin\alpha_1 / \sin\alpha_2 > 1$. **А3.3.** $E_{K1} = 5$ Дж; $U_1 = 15$ Дж. **А3.4.** $A \approx 5940$ Дж. **А3.5.** $\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{r} / r^3$; $A = 0.0816\alpha$.

В3.1. 1) $\langle N \rangle = 5.4$ кВт; 2) $N = 4.8t$ кВт. **В3.2.** $A = 1$ кДж. **В3.3.** $\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}}\upsilon_0 \approx 23$ м/с. **В3.4.** $A = 49$ Дж. **В3.5.** $E_K =$ $= 248$ Дж; $U_1 = 384$ Дж. **В3.6.** $\boldsymbol{F} = \alpha\left(\dfrac{-1}{y}\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{z}\right)\boldsymbol{j} - \dfrac{y}{z^2}\boldsymbol{k}\right)$, $A = -\dfrac{\alpha}{3}$.

А4.1. а) $\Delta\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{g}\tau = -3.3\boldsymbol{j}$ кг·м/с; б) $\langle \boldsymbol{p} \rangle = m\upsilon_0\cos\alpha\boldsymbol{i} = 2.86\boldsymbol{i}$ кг·м/с. **А4.2.** $\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{\upsilon}_0 t + \boldsymbol{g}t^2 / 2$, $\boldsymbol{p}_C = \boldsymbol{p}_C(0) + m\boldsymbol{g}t$. **А4.3.** $\eta = 0.99$. **А4.4.** 1) $\upsilon_1' = -3.76$ м/с, $\upsilon_2' = 2.50$ м/с, $\eta = 0$; 2) $\upsilon' = 1.25$ м/с, $\eta = 0.8$. **А4.5.** $\upsilon' = 11.4$ м/с. **А4.6.** $\upsilon_1' = 6.25$ м/с, $\upsilon_2' = 3.0$ м/с.

В4.1. $E_K = 30$ кДж. **В4.2.** $\Delta p = -0.27$ кг·м/с.

B4.3. $\boldsymbol{r}_C = -\frac{R}{3}\boldsymbol{i} + \left(l + \frac{a_C}{6}t^2\right)\boldsymbol{j}$ м. **B4.4.** 1) $Q_1 = 9.6$ Дж; 2) $Q_2 = 86.4$ Дж. **B4.5.** 1) $p_1' = -6$ кг·м/с, $p_2' = 16$ кг·м/с; 2) $\Delta p_1 = -16$ кг·м/с, $\Delta p_2 = 16$ кг·м/с; 3) $E_{K1} = 9$ Дж, $E_{K2} = 16$ Дж; 4) $\Delta E_{K1} = -16$ Дж, $\Delta E_{K2} = 16$ Дж; 5) $E_{K2} / E_{K1} = 0.64$. **B4.6.** $\upsilon_1 \approx 1.14$ м/с, $\upsilon_2 \approx 4.56$ м/с.

A5.1. $a = 0.7$ м/с^2 **A5.2** $\Delta \boldsymbol{L} = -40\boldsymbol{i}$ кг·м/с. **A5.3.** 1) $J = 4.0 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2, 2) $J = 2.0 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2. **A5.4.** $E_K \approx 0.93$ Дж. **A5.5**. $\omega = 0.4$ рад/с. **A5.6.** $\omega = 12.78$ рад/с, $\upsilon = 2.3$ м/с.

B5.1. 1) $I_1 = 0.003$ кг·м^2, 2) $I_2 = 0.001$ кг·м^2. **B5.2.** $M = 0.025$ Н·м. **B5.3.** $\mu = 0.314$. **B5.4.** $\omega_2 = 1.02$ рад/с. **B5.5** $\varphi = 2\pi / 3$ рад. **B5.6.** $E_K = 3.21$ кДж.

A6.1. $A = 8.6$ м/с^2. **A6.2.** $\mu = 0.2$. **A6.3** $F_c \approx 380$ Н. **A6.4.** $\upsilon_1 = 2.2$ м/с, $a_1 = 0.25$ м/с^2. **A6.5.** $t = 20.5$ с.

B6.1. $A = 5.65$ м/с^2. **B6.2.** $h = 1.75$ м, $N = 158$ Н. **B6.3** $A = 0$ Дж. **B6.4**. $t = 40.7$ с, $y \approx 4.04$ м. **B6.5.** $\mu = 109 \cdot \exp(-0.011 \cdot t)$ кг/с.

A7.1. $m = 2.02$ кг, $\nu = 63$ моль. **A7.2.** $\Delta T = 140$ К. **A7.3.** $p = 1.15 \cdot 10^5$ Па. **A7.4.** $\upsilon_T = 183$ м/с. **A7.5.** $\overline{\varepsilon}_2 = 2.42$ кДж. **A7.6.** $U = 750$ Дж.

B7.1. $N = 1.3 \cdot 10^{22}$. **B7.2** $T = 546$ К. **B7.3.** $T = 275$ К. **B7.4** $T = 7.25$ кК, $\overline{\varepsilon}_3 = 1.5 \cdot 10^{-19}$ Дж. **B7.5.** $\overline{\varepsilon}_1 = 0.69 \cdot 10^{-20}$ Дж, $\overline{\varepsilon}_3 = 2.07 \cdot 10^{-20}$ Дж, $\overline{\varepsilon}_2 = 1.38 \cdot 10^{-20}$ Дж, $\overline{\varepsilon} = 3.45 \cdot 10^{-20}$ Дж.

A8.1. $\eta = 0.91$. **A8.2.** $T \approx 22$ кК. **A8.3.** $n_1 / n_0 = 0.55$, $n_2 / n_0 = 0.0023$. **A8.4.** $\eta = 0.39$. **A8.5.** $n = 1.8 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, $\rho = 0.06$ кг/м^3, $\lambda = 0.16$ мкм, $\upsilon \approx 2670$ м/с. **A8.6** $m = 0.061$ кг. **A8.7.** $Q = 23$ кДж.

B8.1. $T = 586$ К. **B8.2.** $W = 7.5 \cdot 10^{-4}$. **B8.3.** $n / n_0 = 5 \cdot 10^{-11}$. **B8.4.** $\lambda = 9.5 \cdot 10^{-8}$ м. **B8.5.** $N = 6.6 \cdot 10^9$. **B8.6** $\lambda_T = 12$ мВт/К·м.

A9.1 $Q_1 = 12.5$ кДж, $A_2 = -5.0$ кДж. **A9.2.** $m = 0.38$ кг. **A9.3.** а) $T_2 / T_1 = 1$, $V_2 / V_1 = 0.2$, б) $T_2 / T_1 = 1.6$, $V_2 / V_1 = 0.31$. **A9.4.** $\eta = 0.2$, $\eta^* = 0.3$. **A9.5.** $\Delta S = 66.5$ Дж/К. **A9.6.** $S_2 = 210.6$ Дж/К.

B9.1. $c_V = 710$ Дж/кг·К, $c_p = 1.0$ кДж/кг·К. **B9.2.** $A = 400$ Дж. **B9.3.** $A = 1$ кДж. **B9.4.** $T_2 = T_3 = 600$ К, $\eta = 0.09$. **B9.5.** $V_3 = 741$ л. **B9.6.** а) $\Delta S = 836$ Дж/К, б) $\Delta S = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Чертов А. Г.* Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – Изд. 5-е. – Москва : Высшая школа, 1988.

2. *Иродов И. Е.* Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – Москва : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 432 с.

3. *Савельев И. В.* Сборник вопросов и задач по общей физике / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург : Лань, 2005. – 288 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Штыгашев Александр Анатольевич
Пейсахович Юрий Григорьевич

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 01.11.2022. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Уч.-изд. л. 7,2. Печ. л. 7,75. Изд. № 115. Заказ № 283. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20