Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. В. ЧИЧЕРИНА, В. В. ХРИСТОФОРОВ

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ, КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2025

УДК 534(075.8)+537(075.8)
Ч-722

Рецензенты:
доцент кафедры физики, техники и технологического образования НГПУ, канд. физ.-мат. наук *С. А. Погожих*;
доцент кафедры общей физики НГТУ, канд. техн. наук, *С. А. Стрельцов*

Работа подготовлена на кафедре общей физики

Чичерина Н. В.

Ч-722 Физика. Электричество и магнетизм, колебания и волны: учебное пособие / Н. В. Чичерина, В. В. Христофоров. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2025. – 150 с.

ISBN 978-5-7782-5412-1

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов заочного факультета, обучающихся по специальностям, учебные планы которых предполагают изучение физики в трех учебных семестрах. Пособие рассматривает темы, выносимые на изучение во второй части курса физики. В нем рассматриваются три крупных раздела: «Электричество», «Магнетизм», «Колебания и волны», по которым выполняется контрольная работа № 2.

УДК 534(075.8)+537(075.8)

ISBN 978-5-7782-5412-1

© Чичерина Н. В., Христофоров В. В., 2025
© Новосибирский государственный технический университет, 2025

Оглавление

Предисловие 4
1. Формы работы студентов 5
2. Формы контроля работы студента 6
3. Вопросы, выносимые на итоговое контрольное мероприятие (экзамен или зачет) 7
3.1. Раздел «Электричество» 7
3.2. Раздел «Магнетизм» 8
3.3. Раздел «Колебания и волны» 9
Рекомендуемый библиографический список 10
4. Основные определения, законы и формулы 12
4.1. Электричество 12
4.1.1. Электростатика 12
4.1.2. Постоянный электрический ток 25
4.2. Магнетизм 28
4.3. Колебания и волны 36
5. Примеры решения задач 67
6. Содержание контрольной работы № 2 130
7. Таблица вариантов задач к контрольной работе № 2 131
8. Порядок оформления и решения задач контрольной работы 132
9. Задачи контрольной работы № 2 134
10. Справочные материалы 147

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие является продолжением работы: Чичерина Н.В., Христофоров В.В. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика, изданной в 2024 г. в издательстве НГТУ.

Материал настоящего пособия соответствует второй части курса физики, изучаемого на тех специальностях заочного факультета НГТУ, для которых изучение физики предусмотрено в трех учебных семестрах.

Во второй части курса физики рассматриваются разделы «Электричество», «Магнетизм», «Колебания и волны», по которым выполняется контрольная работа № 2.

Учебное пособие содержит:

- общие указания, регламентирующие учебную работу студентов заочного отделения при изучении курса физики;
- список вопросов к итоговому контрольному мероприятию (экзамену или зачету);
- краткий теоретический материал с изложением основ теории и примеров решения задач;
- требования к оформлению и решению контрольной работы;
- темы задач контрольной работы;
- таблицу распределения задач по вариантам;
- условия задач контрольной работы;
- справочные материалы, необходимые при решении задач.

1. ФОРМЫ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Для успешного освоения второй части курса физики от студента требуется следующее.

1. Систематическая **самостоятельная работа** с учебными пособиями, конспектами лекций, задачниками.

2. Посещение и конспектирование **установочных и обзорных лекций**.

3. Обязательное посещение **консультаций**. Расписание консультаций можно найти на сайте НГТУ, в личном кабинете студента.

4. Выполнение **лабораторных работ** (во время экзаменационной сессии). В случае необходимости для студентов ИДО предусмотрена возможность выполнения **виртуальных** лабораторных работ как очно, так и в дистанционном формате. Виртуальные лабораторные работы и инструкции к ним размещены на сайте кафедры общей физики. https://ciu.nstu.ru/kaf/of/virutalne_laboratorne_rabot

5. Выполнение **контрольных работ** (одна за учебный семестр, выполняется в межсессионный период). Вариант контрольной работы определяется последней цифрой шифра (номера зачетной книжки) студента, а номера задач – по таблице вариантов. Для проверки студент представляет контрольную работу преподавателю, который назначен для проведения занятий с его учебной группой. Предусмотрена возможность присылать контрольную работу на проверку преподавателю с помощью системы DiSpace.

2. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ РАБОТЫ СТУДЕНТА

1. **Допуск-зачет за защиту контрольной работы** (в межсессионный период или во время сессии). Предусмотрена возможность защиты контрольной работы путем тестирования с помощью системы DiSpace.

2. Если на специальности обучающегося выполнение лабораторных работ предусмотрено учебным планом, то необходимо получить **допуск-зачет за выполнение и защиту лабораторных работ** (в межсессионный период или во время сессии). Имеется возможность защиты лабораторных работ путем тестирования с помощью системы DiSpace.

3. В соответствии с учебным планом обучающегося итоговая аттестация по второй части курса физики может быть **экзаменом или зачетом.** К итоговому контрольному мероприятию допускаются студенты после успешного выполнения и защиты контрольной и лабораторных работ. В случае необходимости предусмотрена возможность сдачи итогового контрольного мероприятия путем тестирования с помощью системы DiSpace.

3. ВОПРОСЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ИТОГОВОЕ КОНТРОЛЬНОЕ МЕРОПРИЯТИЕ (экзамен или зачет)

3.1. РАЗДЕЛ «ЭЛЕКТРИЧЕСТВО»

1. Электрический заряд и его свойства. Элементарный заряд. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона.

2. Электрическое поле. Напряженность поля. Напряженность поля точечного заряда. Принцип суперпозиции для вектора напряженности. Силовые линии.

3. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса. Применение теоремы Гаусса к расчету электрических полей (поле равномерно заряженной бесконечной плоскости, поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей, поле бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра), поле равномерно заряженной сферы, поле объемно заряженного шара).

4. Работа сил электрического поля при перемещении зарядов. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля.

5. Потенциал. Потенциал поля точечного заряда. Принцип суперпозиции для потенциала. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности. Взаимное расположение силовых линий и эквипотенциальных поверхностей.

6. Равновесие зарядов на проводнике. Проводники во внешнем электрическом поле. Электроемкость уединенного проводника.

7. Поляризация диэлектриков. Вектор электрического смещения. Связь вектора напряженности и вектора электрического смещения в диэлектрике. Теорема Гаусса для вектора электрического смещения.

8. Конденсаторы, плоский, сферический, цилиндрический конденсатор. Электроемкость конденсатора. Соединение конденсаторов.

9. Энергия системы зарядов. Энергия заряженного проводника. Энергия заряженного конденсатора. Энергия электрического поля. Плотность энергии электрического поля.

10. Постоянный электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводника. Параллельное и последовательное соединение проводников.

11. Электродвижущая сила. Напряжение. Закон Ома для полной цепи.

12. Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля – Ленца.

13. Законы Ома и Джоуля – Ленца в локальной (дифференциальной) форме.

14. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа.

3.2. РАЗДЕЛ «МАГНЕТИЗМ»

1. Магнитное поле. Индукция магнитного поля. Силовые линии магнитного поля. Магнитное поле равномерно движущегося заряда.

2. Закон Био – Савара – Лапласа для элемента тока. Применение закона Био – Савара – Лапласа к расчету магнитных полей (прямой и круговой ток).

3. Сила Лоренца.

4. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов.

5. Поток вектора магнитной индукции **B**. Теорема Гаусса для поля вектора **B**.

6. Теорема о циркуляции вектора **B**. Применение теоремы о циркуляции вектора **B** для расчета магнитных полей (бесконечно длинного прямого проводника, соленоида, тороида).

7. Контур с током в магнитном поле. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле.

8. Магнитное поле в веществе. Намагниченность **J**. Вектор напряженности магнитного поля H. Связь между векторами **H** и **J**.

9. Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.

10. Явление электромагнитной индукции. Правило Ленца.

11. Закон электромагнитной индукции Фарадея.

12. Полный магнитный поток (потокосцепление). Индуктивность контура.

13. Явление самоиндукции. Взаимная индукция. Энергия магнитного поля.

14. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла.

3.3. РАЗДЕЛ «КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ»

1. Гармонические колебания. Основные характеристики колебательного движения. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

2. Гармонические осцилляторы (пружинный маятник, физический и математический маятники, колебательный контур). Энергия гармонического осциллятора.

3. Сложение гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами.

4. Сложение гармонических колебаний одного направления с близкими частотами. Биения.

5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.

6. Свободные затухающие колебания (механические и электрические). Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Характеристики затухающих колебаний.

7. Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Вынужденные механические колебания, Условия резонанса.

8. Вынужденные электромагнитные колебания. Векторные диаграммы. Мощность, потребляемая в цепи переменного тока. Резонанс.

9. Волны. Основные понятия теории волн. Продольные и поперечные волны. Упругие волны, звук.

10. Гармонические волны. Уравнение плоской бегущей волны. Уравнение сферической волны.

11. Волновое уравнение. Энергия упругой волны. Вектор Умова.

12. Принцип суперпозиции волн. Стоячие волны. Уравнение стоячей волны. Собственные частоты. Координаты узлов и пучностей стоячей волны.

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК[1]

1. *Трофимова Т.И.* Курс физики. 23-е изд. – М.: Академия, 2017.

2. *Трофимова Т.И., Фирсов А.В.* Курс физики. Задачи и решения. 5-е изд. – М.: Академия, 2012.

3. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 3 томах. Том 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. 7-е изд. – СПб.: Лань, 2022.

4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. В 5 томах. Том 3. Электричество. 6-е изд. – М.: Физматлит, 2020.

5. *Иродов И.Е.* Электромагнетизм. Основные законы. 9-е изд. – М.: Лаборатория знаний, 2014.

6. *Иродов И.Е.* Волновые процессы. Основные законы. 8-е изд. – М.: Лаборатория знаний, 2020.

7. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике: учебное пособие для вузов / И.Е. Иродов. – 20-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2024.

8. *Детлаф А.В., Яворский Б.М.* Курс физики. – М.: Высшая школа, 2002.

9. *Зильберман Г.Е.* Электричество и магнетизм : учебное пособие / Г. Е. Зильберман. – ИД Интеллект, 2015.

10. *Давыдков В.В.* Курс общей физики для студентов ИДО. Ч. 2: Электростатика. Магнетизм. Колебания и волны. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.

11. *Покровский В.В.* Электромагнетизм. Методы решения задач: учебное пособие / В.В. Покровский. – 5-е изд. – М.: Лаборатория знаний, 2020.

12. *Балаш В.А.* Задачи по физике и методы их решения. – М., 1974.

[1] Для работы с теоретическим материалом кроме приведенных в списке учебников и учебных пособий могут быть использованы и другие более ранние их издания.

13. *Паршаков А.Н.* Принципы и практика решения задач по общей физике. – М., 2008.

14. *Стоцкий Л.Р*. Физические величины и их единицы. – М.: Просвещение, 1984.

15. Физика. Механика и электростатика: методические указания: решения задач по физике для 1 и 2 курсов дневной и заочной формы обучения / сост.: Л.М. Родникова, Н.Я. Усольцева, В.Б. Уткин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010.

16. Физика. Электромагнетизм: методические указания: решение задач по физике для 1 и 2 курсов дневной и заочной форм обучения / сост.: Л.М. Родникова, Н.Я. Усольцева, Н.В. Чичерина. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012.

17. *Чичерина Н.В., Христофоров В.В.* Физика, молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2024.

4. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

4.1. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

4.1.1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатика – учение о свойствах и взаимодействии электрических зарядов, неподвижных относительно избранной для их изучения инерциальной системы отсчета.

Электрический заряд – свойство тел или частиц, являющееся количественной мерой их способности к электромагнитным взаимодействиям.

В системе СИ электрический заряд измеряется в *кулонах:* 1 Кл = = 1 А·1 с (кулон является производной единицей системы СИ, так как определяется через единицу силы тока).

Фундаментальные свойства электрических зарядов

1. В природе существует два вида электрических зарядов, условно называемых *положительными и отрицательными*.

2. Электрический заряд *аддитивен*, т. е. заряд системы тел равен алгебраической (скалярной) сумме зарядов тел, входящих в систему.

3. В электроизолированной системе тел (системе, не обменивающейся зарядами с внешними телами) выполняется закон сохранения электрического заряда (1843 г., М. Фарадей): *алгебраическая сумма электрических зарядов остается неизменной при любых процессах и явлениях, протекающих внутри данной системы*: $\Sigma q_i = \text{const}$.

4. Электрический заряд *дискретен* (иными словами, электрический заряд квантуется), т. е. заряд любого тела кратен целому числу *элементарных электрических зарядов e*: $q = Ze$; e − минимальная порция электричества, свободно существующая в природе; $Z = 0, 1, 2, \ldots$

Элементарными электрическими зарядами, равными по величине и противоположными по знаку, обладают электрон ($-e$) и протон ($+e$). $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

5. Электрический заряд *релятивистски инвариантен* (его величина не зависит от выбора системы отсчета, т. е. не зависит от скорости движения заряда, от того, движется он или покоится).

6. Электрические заряды *взаимодействуют*: одноименные *точечные* заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются. Сила взаимодействия зависит от величин зарядов и расстояния между ними.

Точечный заряд – это заряженное тело, размером которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от этого тела до других заряженных тел.

Электрические заряды всегда есть в любом теле. В веществе электрические заряды могут находиться в свободном и связанном состоянии. *Свободными зарядами* называются такие, которые могут перемещаться на макроскопические расстояния (в пределах всего вещества) под действием сколь угодно малой силы. *Связанные заряды* – это такие заряды, которые могут перемещаться только на микроскопические расстояния (в пределах атомов и молекул). В зависимости от концентрации свободных зарядов все вещества подразделяются на проводники, диэлектрики (изоляторы) и полупроводники.

Проводниками называется класс веществ, в которых высока концентрация свободных носителей заряда. Используя проводники, можно отвести заряды с поверхности заряженного тела. Проводники подразделяются на два класса: 1) *проводники первого рода* (металлы) – перемещение зарядов в них не сопровождается переносом вещества (химическими превращениями); 2) *проводники второго рода* (например, электролиты) – перемещение в них зарядов сопровождается переносом вещества и ведет к химическим превращениям.

Диэлектриками, или *изоляторами* (например, стекло, пластмассы, бумага, резина, всё непременно сухое), называется класс веществ, в которых практически отсутствуют свободные заряды, заряды диэлектрика преимущественно находятся в связанном состоянии. С помощью изоляторов отвести заряды с поверхности заряженного тела невозможно.

Полупроводниками (например, германий, кремний) называется класс веществ, занимающих промежуточное положение между проводниками и диэлектриками по своим электропроводящим свойствам. Важной отличительной особенностью полупроводников является то, что концентрация свободных носителей заряда зависит от внешних воздействий (например, нагревания, освещения, механических деформаций).

Указанное деление на проводники, диэлектрики и полупроводники весьма условно, однако большое различие в концентрации свободных зарядов приводит к существенным качественным различиям в их поведении.

Электризация – процесс, в результате которого тело приобретает электрический заряд. Все вещества в обычном состоянии *электрически нейтральны*, т. е. содержат равные количества положительного и отрицательного заряда. Как правило, при электризации тело получает электрический заряд, приобретая или теряя электроны. Когда нейтральное тело получает электроны от какого-либо внешнего источника, оно приобретает отрицательный заряд. Таким образом, тело будет *заряженным отрицательно*, если обладает избыточным по сравнению с нормальным числом электронов. Когда нейтральное тело теряет электроны, оно приобретает положительный заряд. Следовательно, тело является *заряженным положительно*, если оно имеет недостаток электронов.

Закон Кулона (1785 г.)

Французский инженер Шарль Огюст Кулон (1736–1806) при помощи крутильных весов установил, что сила взаимодействия точечных зарядов пропорциональна величине зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Математическая запись закона Кулона в скалярном виде имеет вид

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{R^2},$$

где k – коэффициент, зависящий от свойств среды, в которой осуществляется взаимодействие.

Для вакуума $k_0 = 9\cdot 10^9 \ \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$, $k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12} \ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Нм}^2}$ – электрическая постоянная, относящаяся к числу фундаментальных физических констант.

В любой другой среде $k = \dfrac{k_0}{\varepsilon} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды – безразмерная величина, которая показывает, во сколько раз электрические взаимодействия в данной среде слабее, чем в вакууме.

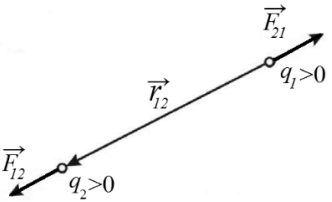
Замечание: при решении задач, в которых не указана диэлектрическая проницаемость среды, а также для воздуха следует принимать ε = 1.

С учетом сказанного выше закон Кулона приобретает вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}.$$

В векторной форме закон Кулона записывается в виде

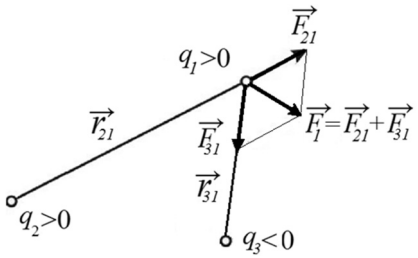
$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12},$$



где $\mathbf{F}_{12}$ – вектор силы, действующей на заряд q_2 со стороны заряда q_1; $\mathbf{r}_{12}$ – радиус-вектор, определяющий положение заряда q_2 в системе отсчета заряда q_1.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Принцип суперпозиции сил в электростатике



Если на точечный заряд действует система зарядов, то результирующая сила равна их векторной сумме $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i$.

Если рассматривается взаимодействие неточечных зарядов, то рассматриваемые заряды разбивают

на элементарно малые элементы, каждый из которых уже можно считать точечным зарядом. Затем применяют к полученной системе точечных зарядов закон Кулона и принцип суперпозиции.

Для непрерывного распределения зарядов в пространстве вводят понятия линейной, поверхностной и объемной плотности зарядов.

а) Если заряды расположены на некотором малом отрезке длиной dl линии, то величина λ, равная отношению заряда dq этого отрезка к его длине $\lambda = \frac{dq}{dl}$, называется *линейной плотностью заряда*, [λ] = Кл/м.

При однородной плотности заряда заряд на отрезке l определяется выражением $q = \lambda l$.

б) Если заряды распределены на некоторой поверхности, то величина σ, равная отношению заряда dq этой малой поверхности к ее площади dS $\sigma = \frac{dq}{dS}$, называется *поверхностной плотностью заряда,* $[\sigma] = \text{Кл/м}^2$.

При однородной плотности заряда заряд на площади S определяется выражением $q = \sigma S$.

в) Если заряд распределен в объеме, то величина ρ, равная отношению заряда dq малого объема к его величине dV, $\rho = \frac{dq}{dV}$, называется *объемной плотностью заряда*, $[\rho] = \text{Кл/м}^3$.

При однородной плотности заряда заряд, распределенный в объеме V, определяется выражением $q = \rho V$.

Электрическое поле

Бесконтактное взаимодействие электрических зарядов на расстоянии объясняется тем, что электрический заряд создает в окружающем пространстве электрическое поле. Любой другой электрический заряд, помещенный в электрическое поле, испытывает на себе его действие. Понятие поля ввел Майкл Фарадей (1791–1867) около 1830 г.

Электрическое поле – силовое поле, посредством которого осуществляется взаимодействие между электрическими зарядами. Электрическое поле создается электрическими зарядами и обнаруживается по действию на них. Электрическое поле неподвижных зарядов называется *электростатическим*.

Силовой векторной характеристикой электрического поля служит величина, называемая *напряженностью поля* **E**.

Вектор напряженности поля **E** в точке равен отношению силы **F**, действующей на точечный пробный (малый по величине) заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, \qquad \text{единица измерения} \quad [E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Направление вектора **E** совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд, помещенный в данную точку поля. Величина вектора напряженности не зависит от величины пробного заряда, так как с ростом заряда пропорционально увеличивается и сила.

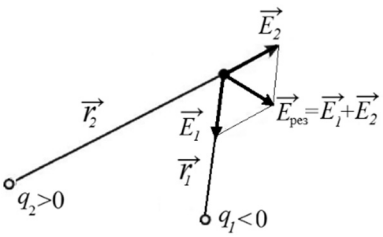
Зная напряженность поля в некоторой точке, можно рассчитать силу, которая будет действовать на заряд, помещенный в эту точку: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$.

Напряженность поля **E**, созданного точечным зарядом q в точке, положение которой задается радиусом-вектором **r**, определяется выражениями:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}, \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q|}{r^2}.$$

Напряженность в некоторой точке электрического поля, созданного системой зарядов, равна векторной сумме напряженности полей, которые создавал бы каждый заряд системы в отдельности в данной точке (*принцип суперпозиции полей*):

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i.$$



Для наглядного изображения поля используются *силовые линии*.

Свойства силовых линий

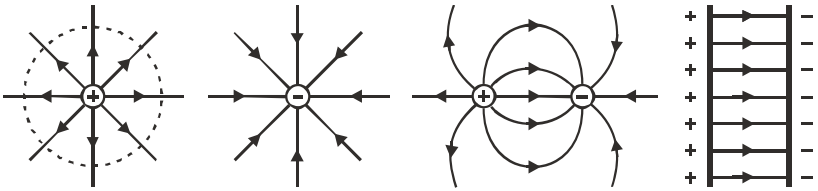
- Касательная к силовой линии совпадает с вектором напряженности в данной точке. Направление линии совпадает с направлением ***E***.

• Линии электростатического поля начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном или уходят в бесконечность.

• Линии непрерывны. Если бы была точка разрыва, то в ней напряженность была бы не определена.

• Линии не пересекаются. В противном случае напряженность не однозначна.

• Густота линий пропорциональна модулю вектора напряженности.



На рисунках I и II показаны силовые линии уединенных зарядов, на рисунке III – силовые линии поля диполя (системы равных по величине и противоположных по знаку зарядов), на рисунке IV – силовые линии однородного поля плоского конденсатора.

Основная задача электростатики заключается в нахождении значения напряженности поля **E** в любой точке пространства по величине и местоположению зарядов, создающих поле. Эта задача может быть решена либо с помощью *принципа суперпозиции*, либо с помощью *теоремы Гаусса*. Кроме того, можно вначале определить потенциал поля в, а затем, используя связь потенциала и напряженности, найти **E**.

Принципом суперпозиции удобно пользоваться, когда рассматривается система небольшого числа дискретных зарядов. В случае непрерывного распределения зарядов и симметричной картины поля удобнее пользоваться теоремой Гаусса.

Теорема Гаусса формулируется следующим образом: поток вектора напряженности через любую произвольно выбранную замкнутую поверхность S равен отношению алгебраической суммы зарядов $\sum q_i$, заключенных внутри этой поверхности, к произведению электрической постоянной и диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_0\varepsilon$:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\sum_i q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Алгоритм применения теоремы Гаусса

- Нарисовать картину силовых линий, исходя из симметрии в расположении зарядов.
- Выбрать замкнутую поверхность так, чтобы она проходила через изучаемую точку, охватывала заряды и ее элементы были либо параллельны, либо перпендикулярны силовым линиям.
- Из соображений симметрии выразить поток Ф через напряженность.
- Найти суммарный заряд внутри поверхности $\sum q_i$.
- Подставить полученные выражения в уравнение для теоремы Гаусса $\Phi = f(E) = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon}$.
- Выразить из полученного уравнения напряженность.

Работа электростатического поля по перемещению электрического заряда q не зависит от формы траектории и определяется только начальным и конечным положением заряда (электростатическое поле является потенциальным):

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\boldsymbol{l} = U(\boldsymbol{r}_1) - U(\boldsymbol{r}_2),$$

где $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия заряда q; $U(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r})$, а функция $\varphi(\mathbf{r})$ называется потенциалом поля $\left(\text{измеряется в вольтах, В} = \dfrac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \right)$.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q}.$$

Потенциал электростатического поля – это скалярная, энергетическая характеристика поля, равная отношению потенциальной энергии заряда q, помещенного в данную точку поля, к его величине. Значение потенциала в данной точке зависит от выбора точки нулевого потенциала, т. е. определяется с точностью до константы. В то же время разность потенциалов между двумя точками поля от выбора точки отсчета не зависит.

Используя потенциал, можно найти работу электростатического поля по перемещению заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Потенциал точечного заряда q на расстоянии r от него равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r} \quad \text{при условии, что} \quad \varphi_\infty = 0.$$

Потенциал электрического поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов системы в отдельности (*принцип суперпозиции для потенциала*):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \varphi(\mathbf{r}_i).$$

Связь напряженности и потенциала. Напряженность – силовая характеристика поля, а потенциал – энергетическая. Эти две характеристики электростатического поля связаны друг с другом:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z\right);$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Вектор напряженности направлен в сторону наибольшего уменьшения потенциала, модуль напряженности равен быстроте изменения потенциала вдоль этого направления.

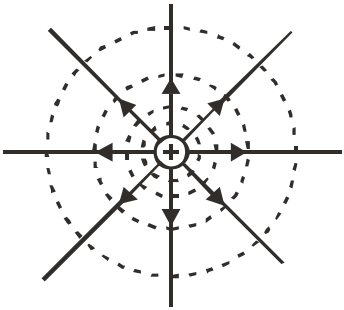
$$\varphi = -\int(\mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}), \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}.$$

Для наглядного изображения электрического поля наряду с *силовыми линиями* используют *эквипотенциальные поверхности.*

Эквипотенциальные поверхности являются поверхностями равного потенциала и имеют следующие свойства:

- в каждой точке эквипотенциальной поверхности потенциал одинаков;
- поверхность непрерывна и не имеет начала;
- разные поверхности с отличающимися потенциалами друг с другом не пересекаются;
- силовые линии перпендикулярны (ортогональны) эквипотенциальным поверхностям. Перемещение вдоль эквипотенциальной поверхности соответствует $d\varphi = 0$, тогда и проекция **E** на это направление перемещения равна нулю, значит, вектор **E** перпендикулярен эквипотенциальной поверхности в точке их пересечения.

На рисунке показана картина силовых линий (сплошные линии) и эквипотенциальных поверхностей точечного (пунктирные линии) положительного заряда.



Энергия заряда во внешнем поле

Электрический заряд q в точке с потенциалом φ обладает потенциальной энергией

$$W_p = q\varphi.$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 равна

$$W_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} + \text{const}.$$

Потенциальная энергия взаимодействия системы точечных зарядов будет определяться выражением

$$W_p = \frac{1}{2}\sum q_i \varphi_i,$$

где φ_i – потенциал всех зарядов (кроме q_i) в точке расположения заряда q_i.

Из последнего выражения вытекает, что заряженный проводник с зарядом q и потенциалом φ, одинаковым во всех точках проводника, обладает потенциальной энергией:

$$W_p = \frac{1}{2} q\varphi.$$

Для любого заряженного проводника потенциал проводника пропорционален его заряду. *Электроемкостью проводника* называется скалярная физическая величина, равная коэффициенту пропорциональности между зарядом проводника и его потенциалом. Электроемкость характеризует способность проводника накоплять электрические заряды.

Уединенный проводник обладает электроемкостью, равной:

$$C = \frac{q}{\varphi}, \qquad [C] = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф}.$$

Энергия заряженного проводника определяется выражением

$$W_p = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

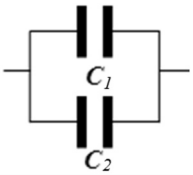
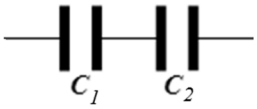
Электрическое поле проводников часто является открытым (его силовые линии распространяются на бесконечность). Потенциал проводников, следовательно, и их емкость зависят от их взаимного расположения по отношению к другим зарядам, проводникам и диэлектрикам. Этой особенности лишены конденсаторы. Поле заряженного конденсатора в основном локализовано в пространстве между его обкладками.

Конденсатор (от лат. *condensare* – сгущать, собирать) – система из двух проводников (обкладок, на которых могут накопляться заряды противоположных знаков), разделенных слоем диэлектрика.

Емкость конденсатора равна

$$C = \frac{q}{U},$$

где q – заряд обкладки конденсатора; U – разность потенциалов между обкладками.

Емкость параллельно соединенных конденсаторов	$C = \sum C_i$	
Емкость последовательно соединенных конденсаторов	$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$	

Энергия электрического поля, запасенная конденсатором, равна

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Энергия заряженных тел – это энергия их электрического поля. Ее можно записать через характеристики поля:

$$W = \int_V \omega dV,$$

где V – объем поля; ω – объемная плотность энергии, которая выражается через векторы напряженности **E** электрического поля и электрическое смещение $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$.

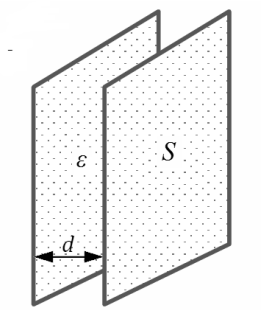
$$\omega = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Емкость конденсаторов различной формы

Емкость *плоского конденсатора* равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot S}{d},$$

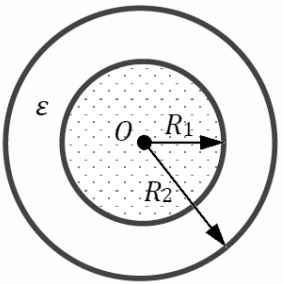
где S – площадь пластины конденсатора; d – расстояние между пластинами; ε – диэлектрическая проницаемость среды между пластинами конденсатора.



Емкость *сферического конденсатора* равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

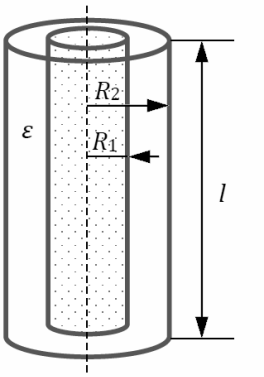
где R_1, R_2 – радиусы обкладок конденсатора; ε – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между обкладками.



Емкость *цилиндрического конденсатора*

$$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{l}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}},$$

где R_1, R_2 – радиусы обкладок конденсатора; l – их длина; ε – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между обкладками.



4.1.2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Электрический ток представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц. Исторически за направление тока принимается направление движения положительных носителей заряда.

Количественной мерой электрического тока служит сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt}, \qquad [I] = \text{А}.$$

Ток считается постоянным, если его величина и направление не меняются с течением времени.

Для характеристики распределения электрического тока через поперечное сечение проводника вводят векторную физическую величину – *плотность тока* $\mathbf{j}$.

$$\mathbf{j} = qnv, \quad j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad [j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2},$$

где n – концентрация носителей заряда q; v – дрейфовая скорость их движения.

Тогда сила тока определяется потоком вектора плотности тока через поверхность S:

$$I = \int\limits_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int\limits_S j_n dS = j_n S = \frac{dq}{dt}.$$

Плотность тока в некоторой точке определяется напряженностью электрического поля в этой точке (закон Ома для однородного (нет источников тока) участка цепи в дифференциальной форме):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где $\mathbf{j}$ – плотность тока; $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля; σ – удельная проводимость проводника.

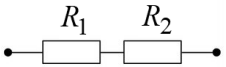
Разность потенциалов на концах однородного проводника определяется как

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Электрическое *сопротивление* проводника

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения проводника; ρ – удельное сопротивление проводника, $\rho = 1/\sigma$.

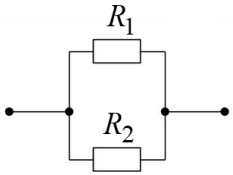


Общее сопротивление R последовательно соединенных сопротивлений (резисторов) равно

$$R = R_1 + R_2 .$$

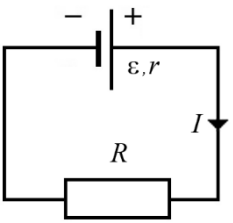
Общее сопротивление R параллельно соединенных двух сопротивлений (резисторов) равно

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \left(\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$



Закон Ома для однородного участка цепи в интегральной форме:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$



Закон Ома для замкнутой цепи в интегральной форме:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

Здесь ε – ЭДС (электродвижущая сила) источника тока; r – внутреннее сопротивление источника тока; R – внешнее сопротивление цепи.

Закон Ома для незамкнутого неоднородного участка цепи в интегральной форме:

$$I = \frac{\varepsilon + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R + r}.$$

Если внешнее сопротивление замкнутой цепи равно нулю (нагрузка не подключается), то в цепи протекает ток короткого замыкания

$$I_{\text{КЗ}} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Расчет разветвленных цепей существенно упрощается, если использовать *правила, сформулированные Кирхгофом*.

Правило I (*правило узлов*): алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum I_i = 0.$$

Узлом называется точка цепи, в которой сходится не менее трех проводников.

Ток, входящий в узел, принято считать положительным, исходящий из узла – отрицательным.

Правило II (*правило контуров*): в любом произвольно выбранном замкнутом контуре разветвленной электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения равна сумме ЭДС.

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon.$$

При составлении уравнений направление обхода контура выбирается произвольно. Произведение силы тока и сопротивления считается положительным, если направление силы тока совпадает с направлением обхода, в противном случае – считается отрицательным. ЭДС считается положительной, если она действует на положительные носители тока в направлении обхода, отрицательной – если наоборот.

Закон Джоуля – Ленца в интегральной форме

Количество теплоты, выделяющееся во всей замкнутой цепи, равно

$$Q_{\varepsilon} = \varepsilon I t.$$

Количество теплоты, выделяющееся на участке цепи, равно

$$Q = UIt = I^2 Rt = \frac{U^2}{R} t.$$

Закон Ома для замкнутой цепи можно записать в виде

$$IR + Ir = \varepsilon,$$

где IR – падение напряжения во внешней цепи; Ir – падение напряжения внутри источника. Умножив левую и правую часть данного выражения на I, получим

$$I^2R + I^2r = \varepsilon I.$$

Это выражение называется *уравнением баланса мощностей в цепи*, где $I^2R = P_{\text{пол}}$ – полезная мощность, выделяющаяся на внешнем сопротивлении; $I^2r = P_{\text{пот}}$ – мощность потерь, выделяющаяся на внутреннем сопротивлении источника; $\varepsilon I = P$ – полная мощность, развиваемая источником.

Проанализируем зависимость полезной мощности цепи от сопротивления нагрузки. Для этого воспользуемся законом Ома для замкнутой цепи:

$$P_{\text{пол}} = I^2R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}.$$

Исследовав данную функцию на максимум (предлагается выполнить самостоятельно), можно убедиться, что *наибольшая полезная мощность выделяется на нагрузке при условии* $R = r$.

Коэффициент полезного действия цепи η равен

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{P} = \frac{I^2R}{I\varepsilon} = \frac{IR}{\varepsilon} = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{R}{R+r}.$$

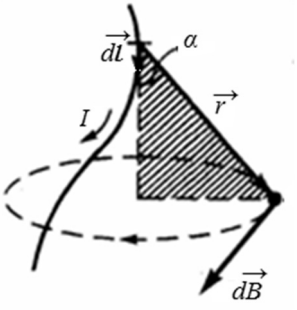
4.2. МАГНЕТИЗМ

Закон Био – Савара – Лапласа

Индукция магнитного поля, создаваемого элементом проводника $d\mathbf{l}$ с током I, равна

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{l},\mathbf{r}]}{r^3},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; **r** – радиус-вектор, проведенный от элемента проводника в точку, в которой определяется индукция магнитного поля $d\mathbf{B}$.



Вектор $d\mathbf{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\mathbf{l}$ и **r**, направлен таким образом, чтобы из его конца кратчайшее вращение вектора $d\mathbf{l}$ до совмещения с вектором **r** казалось происходящим против часовой стрелки (правило буравчика, или правило правого винта).

Модуль вектора $d\mathbf{B}$ определяется выражением

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 \mu \cdot I}{4\pi} \frac{dl \sin\alpha}{r^2},$$

где α – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и **r**.

Принцип суперпозиции

Вектор индукции **B** магнитного поля, порождаемого несколькими источниками (движущимися зарядами, токами), в любой точке поля равен геометрической (векторной) сумме индукций полей $\mathbf{B}_i$, создаваемых каждым отдельным источником в данной точке:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{B} = \int d\mathbf{B}_i.$$

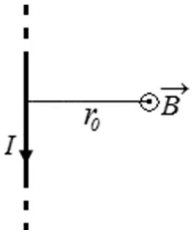
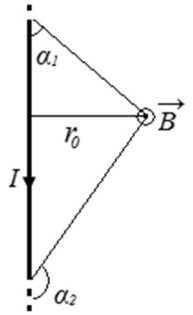
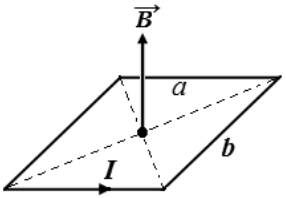
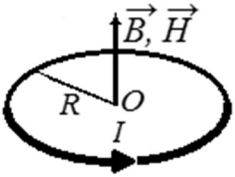
Для однородной изотропной среды магнитная индукция **B** связана с напряженностью магнитного поля **H** соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

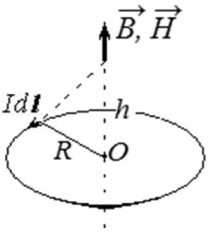
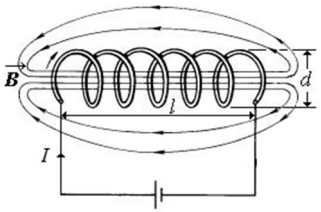
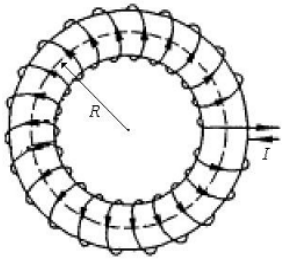
где μ – относительная магнитная проницаемость среды.

Совместное применение закона Био – Савара – Лапласа и принципа суперпозиции позволяет вычислить магнитную индукцию для любых систем токов (см. таблицу).

Индукция B и напряженность H магнитного поля, $[B] = \text{Тл}$, $[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}}$

Система	Рисунок	B, H
Бесконечный прямолинейный проводник с током I		$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r_0}$; $H = \frac{I}{2\pi r_0}$
Отрезок прямого провода с током I		$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$ $H = \frac{I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$
Прямоугольная рамка с током I Магнитное поле в центре рамки		$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ $H = \frac{1}{4\pi} \frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$
Круговой виток с током I Магнитное поле в центре витка		$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}$ $H = \frac{I}{2R}$

Окончание таблицы

Система	Рисунок	*B*, *H*
Круговой виток с током *I* Магнитное поле на оси витка, на расстоянии *h* от его центра		$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}}$, $B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2\pi IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}}$. $\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}}$, $H = \frac{1}{4\pi}\frac{2\pi IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}}$
Соленоид Магнитное поле внутри соленоида: в точках на его оси, удаленных от концов		Если $l >> d$, $B = \mu_0\mu nI$, $H = nI$, где $n = \frac{N}{l}$
Тороид Магнитное поле внутри тороида		$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2NI}{R}$ $H = \frac{NI}{2\pi R}$

Примечание. *Соленоид* – это цилиндрическая катушка длиной l и диаметром d, состоящая из большого числа витков проволоки, образующих винтовую линию.

Тороид – кольцевая катушка, имеющая форму тора. Магнитное поле целиком локализовано внутри тороида.

Вектор магнитного момента $\mathbf{p}_m$ плоского контура с током I определяется как $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}$, где вектор $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, численно равный площади, охватываемой контуром и направленный по нормали к плоскости контура так, чтобы из конца вектора $\mathbf{p}_m$ ток казался протекающим против часовой стрелки.

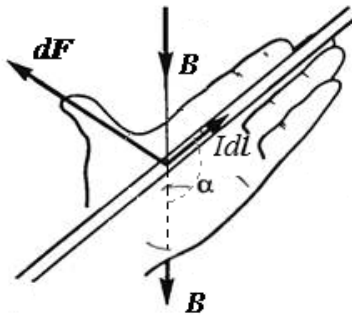
Сила Ампера

Сила Ампера – это сила, с которой магнитное поле **B** действует на элемент тока ***I*dl**,

$$d\mathbf{F} = [I\mathbf{dl}, \mathbf{B}].$$

Модуль силы Ампера определяется выражением $dF = I \cdot B \cdot dl \sin\alpha$, где α – угол между векторами ***I*dl** и **B**.

Направление вектора силы Ампера $d\mathbf{F}$ задается векторным произведением векторов ***I*dl** и **B**.



При практическом определении направления силы Ампера может быть также использовано *правило левой руки*. Если левую ладонь расположить так, чтобы перпендикулярная к проводнику составляющая вектора магнитной индукции **B** входила в ладонь, четыре вытянутых пальца были направлены по направлению тока в проводнике, то отогнутый под прямым углом большой палец покажет направление силы, действующей на элемент тока ***I*dl**.

Закон Ампера для магнитного взаимодействия в однородной изотропной среде двух элементов проводников $\mathbf{dl}_1$ и $\mathbf{dl}_2$ с токами I_1 и I_2:

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{[I_2\mathbf{dl}_2, [I_1\mathbf{dl}_1, \mathbf{r}_{12}]]}{r_{12}^3},$$

где $d\mathbf{F}_{12}$ – сила, действующая на $I_2\mathbf{dl}_2$ со стороны $I_1\mathbf{dl}_1$.

Сила, действующая на элемент ***dl*** прямолинейного проводника с током I_1 со стороны длинного проводника с током I_2, расположенного параллельно первому на расстоянии d, равна

$$dF = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{d} dl.$$

На участок проводника l_1 с током I_1 со стороны длинного проводника с током I_2, расположенного параллельно первому на расстоянии d, действует сила, равная

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2 I_1 I_2}{d} l_1 .$$

Проводники с токами I_1 и I_2, текущими в одном направлении, притягиваются, а с токами I_1 и I_2, текущими в противоположном направлении, – отталкиваются.

Сила Лоренца

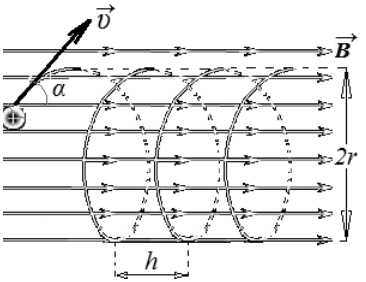
На электрический заряд q, движущийся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ в магнитном поле **B**, действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q[\boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{B}].$$

Направление вектора силы Лоренца **F** задается векторным произведением векторов $\boldsymbol{\upsilon}$ и **B**. При практическом определении направления силы Лоренца может быть использовано также *правило левой руки*. Если левую ладонь расположить так, чтобы линии вектора магнитной индукции **B** входили в ладонь, четыре вытянутых пальца были направлены по направлению движения *положительного заряда*, то отогнутый под прямым углом большой палец покажет направление силы Лоренца.

В однородном магнитном поле заряд движется по винтовой линии радиусом r и шагом винта h,

$$r = \frac{m}{|q|} \frac{v \sin\alpha}{B}, \quad h = \frac{2\pi}{B} \frac{m}{|q|} v \cos\alpha .$$



Здесь α − угол между вектором скорости заряда и вектором индукции магнитного поля.

Если скорость заряда перпендикулярна силовым линиям магнитного поля $(\alpha = \pi/2)$, то заряд движется по окружности радиусом

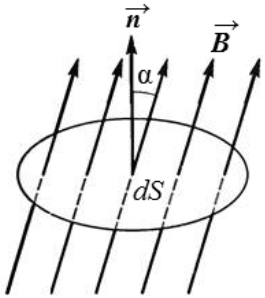
$$r = \frac{m}{|q|} \frac{v}{B} .$$

Если заряд q движется со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ одновременно в электрическом и магнитном поле, то сила, действующая на заряд, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\boldsymbol{\upsilon},\ \mathbf{B}].$$

Магнитный поток

Элементарным магнитным потоком $d\Phi$ через площадку dS называется скалярная физическая величина, определяемая выражением



$$d\Phi = \mathbf{B}d\mathbf{S} = B\cos\alpha dS,$$

где α – угол между единичной нормалью $\mathbf{n}$ к площадке dS и вектором индукции магнитного поля $\mathbf{B}$.

Магнитный поток Φ через поверхность S равен

$$\Phi = \int\limits_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = \int\limits_S B\cos\alpha dS.$$

Для однородного магнитного поля B = const магнитный поток равен

$$\Phi = BS\cos\alpha.$$

Закон электромагнитной индукции

В 1831 г. М. Фарадей обнаружил, что *в замкнутом проводящем контуре возникает электрический ток при изменении магнитного потока, ограниченного этим контуром*. Данный ток принято называть индукционным.

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре индуцируется ЭДС *индукции* ε_i. Примечательно, что ε_i не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока Φ, а определяется лишь быстротой его изменения – $d\Phi/dt$. Изменение знака производной $d\Phi/dt$ приводит к изменению направления возникающего индукционного тока.

Количественный анализ результатов экспериментов позволил Фарадею сформулировать *закон электромагнитной индукции*, в соответ-

ствии с которым можно рассчитывать величину ЭДС, возникающей в контуре:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Знак «−» в законе Фарадея определяется *правилом Ленца*: индукционный ток в контуре всегда имеет такое направление, что создаваемый им магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную данным контуром, уменьшает те изменения магнитного потока, которые вызвали появление индукционного тока.

Если замкнутый контур состоит из N витков, то под магнитным потоком понимают полный магнитный поток (потокосцепление) Ψ сквозь поверхности, ограниченные всеми N витками:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i .$$

Возникновение ЭДС индукции в контуре в результате изменения тока в этом контуре называется явлением *самоиндукции*. ЭДС самоиндукции равна

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi_s}{dt} = -L\frac{dI}{dt},$$

где $\Phi_s = LI$, L – индуктивность контура. [L] = Гн, генри.

Индуктивность соленоида ($l >> d$):

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2}{l}S = \mu_0\mu n^2 lS = \mu_0\mu n^2 V,$$

где n − плотность намотки витков ($n = N/l$); S − площадь витка; V − объем соленоида ($V = Sl$).

Плотность энергии магнитного поля равна

$$\omega = \frac{\mathbf{BH}}{2} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

Энергия магнитного поля в общем случае определяется выражением

$$W = \int_V \omega dV.$$

В случае однородного поля энергия магнитного поля

$$W = \omega V.$$

Энергия магнитного поля в соленоиде равна

$$W = \frac{1}{2} LI^2.$$

4.3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Колебания (или осцилляции) − процессы, при которых какая-либо величина через равные последовательные промежутки времени многократно принимает одни и те же (или приблизительно одни и те же) значения.

Если выведенная из положения равновесия и предоставленная самой себе система способна совершать колебания, то ее называют *колебательной системой.*

В зависимости от физической природы колебательного процесса различают колебания: механические, электромагнитные, химические, термодинамические и другие.

Свободными (*или собственными*) *колебаниями* называют колебания, которые происходят в системе в отсутствие переменных внешних воздействий и возникают вследствие какого-либо начального отклонения системы от состояния ее устойчивого равновесия. Примерами таких колебаний служат колебания боксерской груши, выведенной из равновесия однократным ударом, колебания груза на пружине или колебания шарика, подвешенного на нити.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колебательная система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Примеры – раскачивание качелей периодическим внешним воздействием, колебания моста при проходе строевым шагом колонны солдат.

Гармонические колебания

Гармоническими называются колебания, происходящие по закону косинуса или синуса:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_{02}),$$

где $x(t)$ – значение колеблющейся величины в момент t; $|A|$ – амплитуда колебаний (максимальное значение, которое может принимать колеблющаяся величина x); выражения, стоящие под знаком синуса или косинуса, $(\omega t + \varphi_{01})$ или $(\omega t + \varphi_{02})$, называются фазой колебаний; φ_0 – начальная фаза колебаний; ω – циклическая частота колебаний, являющаяся быстротой изменения фазы, $\omega = \dfrac{d(\omega t + \varphi_0)}{dt}$.

Для описания гармонических колебаний наряду с перечисленными характеристиками используют следующие параметры: T – период колебаний, промежуток времени, за который совершается одно полное колебание; ν –частота колебаний, равная отношению количества колебаний N к тому промежутку времени t, за который они произошли.

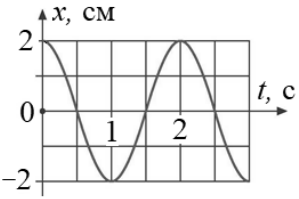
Период, частота и циклическая частота колебаний связаны между собой:

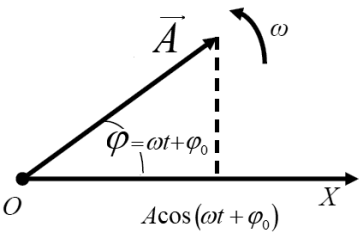
$$T = \frac{1}{\nu}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Гармоническое колебание может быть представлено в трех формах: *аналитической, графической и векторной*.

В *аналитической форме* колебание задается в виде тригонометрического выражения $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, в котором записываются численные значения амплитуды, циклической частоты и начальной фазы. Например: $x(t) = 6\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ см.

В *графической форме* представления колебание задается в виде графика зависимости колеблющейся величины от времени. По графику можно определить физические величины, характеризующие колебательный процесс (период, амплитуду, начальную фазу).





В *векторной форме* колебание представляется в виде вектора, длина которого пропорциональна амплитуде колебаний. Сам вектор вращается в плоскости чертежа с угловой скоростью ω, вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через начало вектора амплитуды. Первоначальный угол отклонения вектора от горизонтали соответствует начальной фазе колебаний φ_0.

Величина проекции вектора на ось x будет изменяться со временем по закону $A\cos(\omega t+\varphi_0)$, это выражение и есть значение колеблющейся по гармоническому закону косинуса величины $x(t)$.

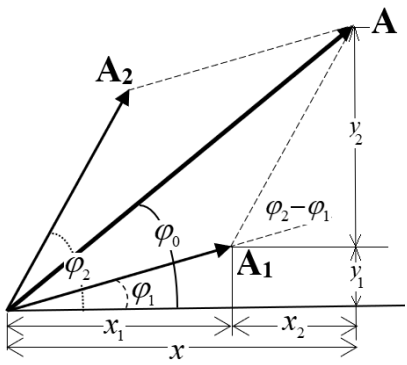
Сложение гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами

Пусть некоторая точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одного направления, имеющих равные частоты:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2).$$

Найдем сумму этих колебаний, используя *метод векторных диаграмм*.

Так как векторы $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ вращаются с одинаковой угловой скоростью ω, то разность фаз $(\varphi_2-\varphi_1)$ между ними не меняется с течением времени, следовательно, и результирующий вектор **A** будет вращаться с той же угловой скоростью, модуль результирующего вектора **A** будет оставаться постоянным.



Проекция вектора **A**, равная $(x=x_1+x_2)$, будет изменяться по гармоническому закону:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Амплитуда A и начальная фаза φ_0 результирующего колебания могут быть найдены из геометрических соображений.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\right).$$

Таким образом, сумма двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты является гармоническим колебанием того же направления и той же частоты, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний.

Интерес представляют два частных случая:

- складываются *синфазные колебания*: $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $A = A_1 + A_2$;
- складываются *колебания в противофазе*: $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm(2n+1)\pi$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $A = |A_1 - A_2|$.

Сложение гармонических колебаний одного направления с близкими частотами. Биения

Если частоты складываемых колебаний различны, то на векторной диаграмме векторы $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ будут вращаться с разными угловыми скоростями, при этом их взаимное расположение будет изменяться. В результате с течением времени будет меняться и величина результирующего вектора амплитуды. Возникнет колебание негармонического характера.

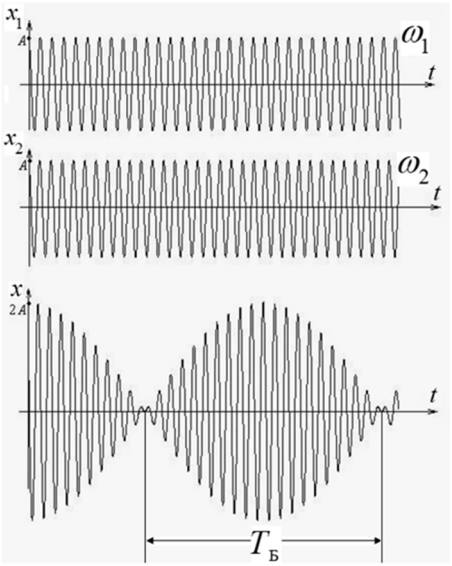
Определенный интерес представляет ситуация, когда частоты складываемых колебаний мало отличаются друг от друга.

Для упрощения математических выкладок рассмотрим колебания, амплитуды которых равны между собой и равны A, начало отсчета времени выберем таким образом, чтобы начальные фазы колебаний равнялись нулю.

$$x(t) = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t).$$

$$x(t) = A\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Из полученного выражения можно видеть, что результирующий процесс описывается произведением двух косинусов. Циклическая частота первого косинуса очень мала $\left(\text{по условию } \omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \right.$ $\left. \Rightarrow \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \ll \omega_1(\omega_2)\right)$, циклическая частота второго – близка к циклическим частотам складываемых колебаний $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2\right)$.



Это позволяет трактовать результирующий процесс как колебание с частотой, равной $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$, амплитуда которого медленно изменяется по закону $\left|2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\right|$. Такие колебания принято называть *биениями*.

Частота $\omega_1 - \omega_2$, с которой изменяется амплитуда результирующего колебания, называется *частотой биений*. Величина $T_Б = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ называется *периодом биений*.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

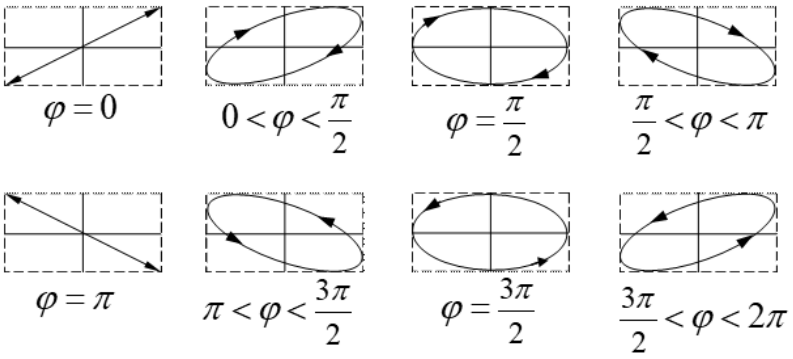
$$x = A\cos(\omega_1 t) \quad \text{и} \quad y = B\cos(\omega_2 t + \varphi).$$

Точка движется одновременно вдоль двух осей – x и y. В общем случае траектория ее движения не является линией и представляет собой довольно сложную кривую, лежащую в плоскости xOy, в пределах прямоугольника со сторонами $2A \times 2B$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда частоты складываемых колебаний равны $(\omega_1 = \omega_2 = \omega)$: $x = A\cos(\omega t)$, $y = B\cos(\omega t + \varphi)$. Исключив время из этой системы уравнений, можно получить уравнение траектории в координатной форме:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi.$$

Найденное уравнение есть общее уравнение эллипса, длина и ориентация полуосей которого зависят от амплитуд складываемых колебаний и фазового сдвига между ними. При фазовом сдвиге $\varphi = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots$ эллипс вырождается в отрезок.

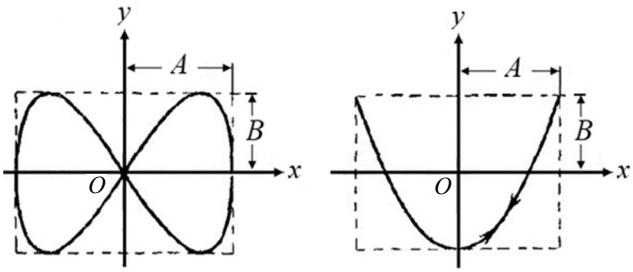


Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения представляет собой довольно сложную кривую. Если частоты складываемых колебаний

относятся друг к другу как целые числа, траектория результирующего движения будет *замкнутой кривой*. Такие кривые называют *фигурами Лиссажу*.

Метод фигур Лиссажу позволяет по форме наблюдаемой фигуры определить отношение частот складываемых колебаний. Если одна из частот складываемых колебаний известна, тогда вторую легко найти. Для этого достаточно подсчитать число пересечений фигуры с осью Ox (n_x) и осью Oy (n_y). Отношение частот складываемых колебаний связано с числом пересечений формулой $\nu_x / \nu_y = n_y / n_x$.

Например, для фигур Лиссажу, представленных на рисунке, колебания по оси Oy совершаются с частотой, в два раза большей частоты колебаний вдоль оси Ox. Для первой фигуры фазовый сдвиг равен $\pi/2$ радиан, для второй – 0.



Гармонические осцилляторы

Гармонический осциллятор – колебательная система, способная совершать гармонические колебания.

Для определенности будем полагать, что колебания такой системы описываются законом косинуса:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Если взять первую и вторую производную от величины смещения, то можно видеть, что и они совершают гармонические колебания:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

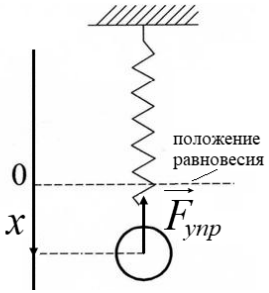
Очевидно, что для гармонического осциллятора поведение описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x, \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

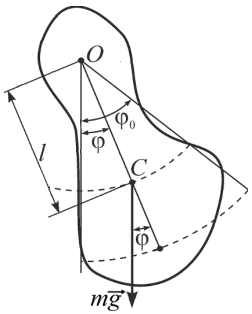
Рассмотрим некоторые простейшие системы, являющиеся гармоническими осцилляторами.

Пружинный маятник – груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине жесткостью k. При отклонении груза из положения равновесия вдоль оси x на груз действует возвращающая сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$. Запишем второй закон Ньютона для этого маятника в проекциях но ось Ox:



$$ma = -kx, \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

Сравнивая полученное для пружинного маятника уравнение движения с дифференциальным уравнением гармонических колебаний, можно видеть, что эти уравнения являются подобными. Следовательно, пружинный маятник совершает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, которой соответствует период $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.



Физический маятник – твердое тело, способное совершать колебания относительно неподвижной оси, не проходящей через его центр масс.

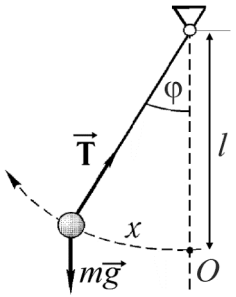
При отклонении маятника из положения равновесия возникает возвращающий вращательный момент $M = -mgl\sin\varphi$, где m – масса маятника; l – расстояние от точки подвеса до центра масс маятника. Применив основной закон динамики вращательного движения, получим

$$I\varepsilon = -mgl\sin\varphi, \quad \Rightarrow I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi.$$

В случае малых углов отклонения $(\sin\varphi \approx \varphi)$ получим

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi, \quad \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgl}{I}\varphi.$$

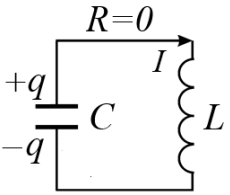
Следовательно, физический маятник совершает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$, которой соответствует период $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$.



Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити. При выведении маятника из положения равновесия он совершает колебания в вертикальной плоскости в поле силы тяжести. Математический маятник является частным случаем физического. Учитывая, что момент инерции материальной точки относительно точки подвеса равен $I = ml^2$, для периода колебаний математического маятника получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Идеальный колебательный контур (контур Томсона) – состоит из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L. Для возбуждения колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряды $\pm q$. Активное сопротивление такого контура равно нулю ($R = 0$).



Применим для этого контура второй закон Кирхгофа:

$$IR + U_C = \varepsilon_{si}, \Rightarrow IR + \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt},$$

$$R = 0, \quad I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2}, \quad \Rightarrow \; L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0, \quad \Rightarrow \; \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Сравнив полученное уравнение с дифференциальным уравнением гармонических колебаний, делаем вывод, что заряд на обкладках конденсатора в идеальном колебательном контуре изменяется по гармоническому закону. Частота этих колебаний равна $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, период $T = 2\pi\sqrt{LC}$. С такой же частотой и периодом в контуре Томсона совершают колебания напряжение на обкладках конденсатора, сила тока и ЭДС самоиндукции.

Энергия гармонического осциллятора

Гармонический осциллятор обладает энергией, за счет которой и совершает колебания. В процессе колебаний механических гармонических осцилляторов происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. В идеальном колебательном контуре в процессе электромагнитных колебаний происходят переходы энергии электрического поля, сосредоточенного в конденсаторе, в энергию магнитного поля, связанного с катушкой индуктивности, и обратно.

В качестве примера механического гармонического осциллятора рассмотрим пружинный маятник. Выводы, полученные ниже, будут справедливы для любого гармонического осциллятора. Мы рекомендуем проделать соответствующие преобразования для других гармонических осцилляторов самостоятельно.

Найдем выражения для кинетической, потенциальной и полной энергии данной колебательной системы.

Колебания пружинного маятника описываются уравнением гармонических колебаний $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Выражение для скорости можно найти следующим образом: $v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Циклическая частота колебаний определяется выражением $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Тогда в произвольный момент выражения для кинетической и потенциальной энергии имеют вид:

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(-\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\right)^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

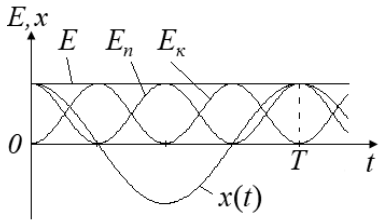
$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{k\left(A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\right)^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

так как $k = \omega_0^2 m \Rightarrow E_{\text{п}} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной энергии.

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\left(\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \text{const}.$$



Из полученного выражения можно видеть, что полная механическая энергия идеального пружинного маятника не меняется с течением времени. Этот результат вполне ожидаем, колебательная система идеальная, в ней не действуют диссипативные силы, следовательно, превращения механической энергии в другие виды энергии нет.

Кинетическая и потенциальная энергии изменяются со временем. При прохождении маятником положения равновесия кинетическая энергия достигает максимального значения, потенциальная энергия обращается в нуль, при максимальном отклонении от положения равновесия кинетическая энергия равна нулю, потенциальная максимальна. Колебания потенциальной и кинетической энергии происходят в противофазе. Частота колебаний кинетической и потенциальной энергии в два раза больше, чем частота колебаний смещения маятника.

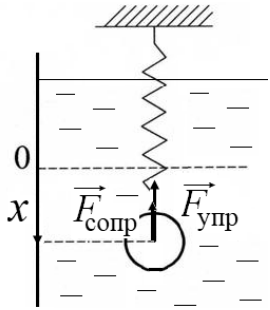
Затухающие свободные колебания

В реальных колебательных системах существуют механизмы, приводящие к потерям энергии колебаний. В механических системах – это трение, в электрических – активное сопротивление и излучение электромагнитных волн. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних источников, полная энергия колебаний будет уменьшаться, будет уменьшаться и амплитуда колебаний, следовательно, колебания будут затухать.

В качестве примеров систем, в которых происходят затухающие колебания, рассмотрим пружинный маятник, совершающий колебания в вязкой среде, и колебательный контур с активным сопротивлением.

Затухающие колебания пружинного маятника

Если груз вывести из положения равновесия, то на него со стороны пружины будет действовать возвращающая сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$. При движении в среде существенную роль играет вязкое трение (сопротивление), силы которого направлены в сторону, противоположную скорости, и пропорциональны ей по величине $F_{\text{сопр}} = -kv$.



Применим второй закон Ньютона для описания движения данного маятника:

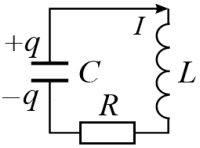
$$ma_x = F_{x\,\text{упр}} + F_{x\,\text{сопр}}; \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -rV_x - kx \;\Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Введем обозначения: $\delta = \dfrac{r}{2m}$, и тогда $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$, где δ – *коэффициент затухания*; $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, ω_0 – по-прежнему *собственная частота незатухающих колебаний маятника*. Полученное однородное

дифференциальное уравнение второго порядка называется *дифференциальным уравнением затухающих колебаний*.

Затухающие колебания в реальном колебательном контуре



Реальный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C, катушки индуктивностью L и активного сопротивления R. Для возбуждения колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряды $\pm q$.

Применив для такого контура второй закон Кирхгофа (сумма падений напряжения на элементах контура равна сумме ЭДС, действующих в рассматриваемом контуре), получим:

$$IR + U_C = \varepsilon_{si}, \quad U_C = \frac{q}{C}, \quad \varepsilon_{si} = -L\frac{dI}{dt}, \quad I = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow$$

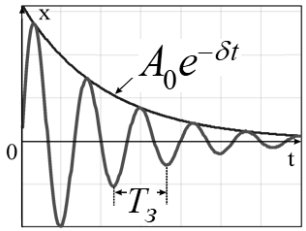
$$\frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Введем обозначения: $\frac{R}{2L} = \delta$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, тогда $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$

Таким образом, и для этой колебательной системы мы вновь получили дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Это означает, что в реальном колебательном контуре могут происходить затухающие колебания.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний может иметь два решения: *периодическое и непериодическое*.

1. *Периодическое решение* (при условии $\delta < \omega_0$) имеет вид



$$x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_з t + \varphi),$$

где $\omega_з = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

Можно видеть, что это решение уже не является гармоническим, так как амплитуда

колебаний уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону: $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$.

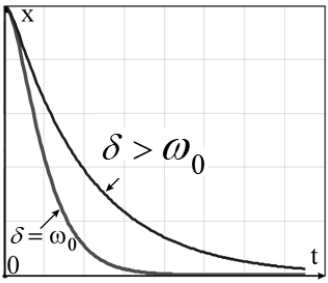
Частота затухающих колебаний оказывается меньше частоты собственных незатухающих колебаний, причем тем меньше, чем больше коэффициент затухания в системе.

Период затухающих колебаний будет определяться выражением $T_з = \frac{2\pi}{\omega_з} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$. Подставляя в данную формулу выражения для собственной частоты и коэффициента затухания, можно получить частные выражения для периода и частоты колебаний конкретных колебательных систем.

2. *Апериодическое решение* (при условии $\delta \geq \omega_0$) имеет вид

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t},$$

где $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.



Если затухание велико $(\delta \geq \omega_0)$, колебаний не возникает, происходит апериодическое возвращение системы в положение равновесия.

Случай, когда $\delta = \omega_0$, называется *критическим*.

Далее будем рассматривать периодические затухающие колебания.

Характеристики затухающих колебаний

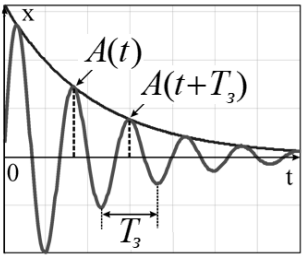
δ – *коэффициент затухания*. Анализируя выражение для амплитуды затухающих колебаний, можно сделать вывод о том, что чем больше коэффициент затухания, тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний. Следовательно, коэффициент затухания характеризует быстроту затухания колебаний с течением времени.

Найдем промежуток времени τ, за который амплитуда колебаний уменьшилась в e раз, т. е. $\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e.$

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+\tau)}} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta t} e^{-\delta\tau}} = \frac{1}{e^{-\delta\tau}} = e^{+\delta\tau}.$$

Очевидно, что $\delta\tau = 1, \quad \delta = \frac{1}{\tau}.$

Таким образом, коэффициент затухания δ есть величина, обратная времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз. Время τ называют *временем релаксации*.



Еще одна характеристика затухающих колебаний – *логарифмический декремент затухания*, обозначается данная величина λ.

Логарифмический декремент затухания равен натуральному логарифму относительного уменьшения амплитуды колебаний за время, равное одному периоду колебаний:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_з)}.$$

Получим связь δ и λ:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_з)} = \ln \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T_з)}} = \ln \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta t} e^{-\delta T_з}} =$$

$$= \ln \frac{1}{e^{-\delta T_з}} = \ln e^{+\delta T_з} = \delta T_з \ln e = \delta T_з.$$

Учитывая связь между коэффициентом затухания и временем релаксации, можно получить и другие формулы, устанавливающие связь между характеристиками затухающих колебаний: $\lambda = \delta T_з = \frac{T_з}{\tau} = \frac{1}{N_e}.$

Здесь N_e – число колебаний, совершаемых системой за время релаксации. Таким образом, логарифмический декремент затухания обратен тому количеству колебаний N_e, за которое амплитуда уменьшается в *e* раз.

Энергия затухающих колебаний

Энергию колебательной системы при затухающих колебаниях можно рассчитать с помощью тех же формул, которые были записаны и для идеального осциллятора. Только необходимо учесть, что амплитуда колебаний такого осциллятора уменьшается с течением времени.

Полная энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды. Напомним, для механического идеального осциллятора полная энергия определяется выражением $E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$. Амплитуда колебаний реального осциллятора уменьшается с течением времени по закону $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$, следовательно, и полная энергия осциллятора будет уменьшатся с течением времени.

$$E = \frac{m\left(A_0 e^{-\delta t}\right)^2 \omega^2}{2} = \frac{mA_0\omega^2 (e^{-\delta t})^2}{2} = \frac{mA_0\omega^2}{2} e^{-2\delta t} = E_0 e^{-2\delta t}.$$

Можно видеть, что полная энергия колебаний осциллятора уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону. При этом быстрота уменьшения энергии осциллятора выше быстроты уменьшения амплитуды колебаний (степень экспоненты больше в два раза).

Найдем время τ_E, за которое энергия затухающих колебаний уменьшается в *e* раз. $\frac{E(t)}{E(t+\tau_E)} = e.$

Учтем, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды.

$$\frac{E(t)}{E(t+\tau_E)} = \frac{\left(A_0 e^{-\beta t}\right)^2}{\left(A_0 e^{-\beta(t+\tau_E)}\right)^2} = \frac{A_0^2 e^{-2\delta t}}{A_0^2 e^{-2\delta t} e^{-2\delta\tau_E}} = e^{+2\delta\tau_E} = e^1; \Rightarrow$$

$$2\delta\tau_E = 1; \Rightarrow \tau_E = \frac{1}{2\delta}, \quad \tau_E = \frac{\tau}{2}.$$

Теперь определим то приращение фазы периодических затухающих колебаний, которое происходит за это время:

$$[\omega_з(t+\tau_E)+\varphi]-[\omega_з t+\varphi]=\omega_з t+\omega_з\tau_E+\varphi-\omega_з t-\varphi=$$

$$=\omega_з\tau_E=\frac{\omega_з}{2\delta}=Q.$$

Введенная таким образом физическая величина Q называется *добротностью*. В англоязычных ресурсах для добротности используют название *Quality factor*.

Добротность равна приращению фазы колебаний осциллятора, за которую энергия его затухающих колебаний уменьшается в e раз. Из полученной формулы видно, что добротность колебательной системы обратно пропорциональна быстроте затухания собственных колебаний системы. Добротность характеризует способность системы к сохранению энергии колебаний. Степень идеальности (*Quality factor*) имеет прямое влияние на коэффициент потерь энергии за время одного колебательного периода. Чем меньше величина Q, тем выше потери энергии в колебательной системе. Данная величина является основной характеристикой всех колебательных систем, но сделать прямые измерения этой величины невозможно, ведь ее можно только вычислить, используя различные формулы, связывающие ее с другими характеристиками затухающих колебаний:

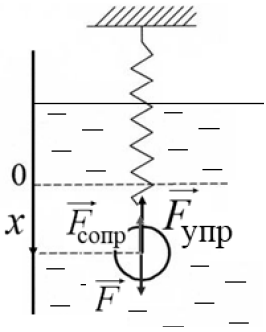
$$Q=\frac{\omega_з}{2\delta}=\frac{2\pi}{2\delta T_з}=\frac{\pi}{\delta T_з}=\frac{\pi}{\lambda}.$$

Вынужденные колебания

Один из способов получить незатухающие колебания в реальных колебательных системах – оказать на нее внешнее периодическое «силовое» воздействие, т. е. компенсировать потери энергии затухающих колебаний за счет работы внешней силы.

В качестве примера такой системы рассмотрим поведение пружинного маятника в вязкой среде под действием внешней периодической гармонической силы.

На груз действуют следующие силы: сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$; сила вязкого трения (сопротивления) $F_{\text{сопр}} = -rv$ и внешняя гармоническая сила $F = F_0 \cos(\omega t)$.



Запишем закон движения этого маятника (второй закон Ньютона):

$$ma_x = F_{\text{упр}\,x} + F_{\text{сопр}\,x} + F_x,$$

$$ma_x = -kx - rv + F_0 \cos(\omega t),$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t).$$

Введем стандартные обозначения: $\delta = \frac{r}{2m}$ и $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Получим дифференциальное уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$. Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка называется *дифференциальным уравнением вынужденных колебаний.*

Общее решение этого уравнения можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения (уравнения затухающих колебаний) и частного решения данного неоднородного уравнения:

$$x_{\text{об.неодн}} = x_{\text{об.одн}} + x_{\text{частн.неодн}}.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

его периодическое решение (см. выше) – $x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_з t + \varphi)$, $\omega_з = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

С течением времени эта составляющая вынужденных колебаний убывает. Следовательно, наступит такой момент, после которого этим слагаемым можно будет пренебречь. Это время $(t_{уст})$ называется *временем установления вынужденных колебаний*. Колебания, происходящие после этого момента, называются *установившимися.*

Мы будем рассматривать только установившиеся колебания, следовательно, для таких колебаний общее решение неоднородного уравнения равно его частному решению.

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

здесь A – амплитуда установившихся вынужденных колебаний; φ – фазовый сдвиг между колебаниями внешней периодической силы $F = F_0\cos(\omega t)$ и смещением маятника $x(t)$ при установившихся вынужденных колебаниях.

Под воздействием внешней гармонической силы осциллятор будет совершать гармоническое колебание с циклической частотой ω, равной циклической частоте внешней вынуждающей силы.

Амплитуда A и сдвиг фаз φ этих колебаний зависят как от параметров осциллятора (ω_0, δ), так и от частоты внешнего воздействия ω:

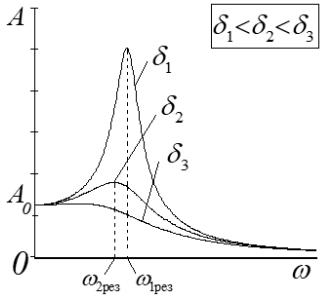
$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Зависимость амплитуды A от частоты ω является нелинейной. Очевидно, что функция, описывающая зависимость амплитуды от частоты $A(\omega)$, испытывает экстремум и при определенной частоте внешнего воздействия резко возрастает. Это явление называется *резонансом*. Частота вынужденных колебаний, при которой возникает такое явление, называется *резонансной частотой* $\omega_{рез}$. Для нахождения резонансной частоты необходимо исследовать функцию $A(\omega)$ на максимум (*предлагается проделать самостоятельно*).

Резонансная частота $\omega_{рез}$ и соответствующая ей *резонансная амплитуда* $A_{рез}$ будут определяться выражениями:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \qquad A_{рез} = \frac{F_0 / m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

На графике представлена характерная зависимость амплитуды установившихся вынужденных колебаний в зависимости от частоты внешнего воздействия при различных значениях коэффициента затухания. Обратите внимание, что значение коэффициента затухания δ достаточно сильно влияет на амплитуду при резонансе: чем больше потери, тем меньше резонансная амплитуда, и наоборот: чем слабее затухание, тем ярче проявляется резонанс.



Чтобы оценить относительное изменение амплитуды при резонансе, необходимо знать величину амплитуды на двух частотах: на резонансной частоте и на частоте, достаточно далекой от резонансной. В качестве такой «далекой» частоты удобно выбрать $\omega \to 0$.

Найдем амплитуду вынужденных колебаний при бесконечно малой частоте внешнего воздействия: $A_0 = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - 0^2\right)^2 + (2\delta \cdot 0)^2}} = \dfrac{F_0 / m}{\omega_0^2}$.

Теперь найдем относительную высоту резонансного пика:

$$\frac{A_{рез}}{A_0} = \frac{F_0 / m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \frac{\omega_0^2}{F_0 / m} = \frac{\omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

При условии $\delta << \omega_0$ получим $\dfrac{A_{рез}}{A_0} = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = Q.$

Можно видеть, что относительная высота резонансного пика равна добротности Q колебательной системы. Следовательно, *добротность* Q выступает удобной *характеристикой высоты резонансного пика*.

Таким образом, помимо способности системы к сохранению энергии добротность также характеризует и резонансные свойства колебательной системы: *чем больше добротность системы, тем сильнее проявляется резонанс* при вынужденных колебаниях.

При достаточно высокой добротности смещения отдельных частей колебательной системы могут превысить пределы допустимых деформаций, что может привести к разрушению системы. Например, вращение винтов, валов с определенной частотой может вызвать резонансные колебания корпусов самолетов, судов и других машин. Поэтому для предотвращения таких явлений необходимо следить, *чтобы резонансные частоты вибраций всех частей машин существенно* отличались от частот колебаний, которые могут быть возбуждены при работе различными режимами их двигателей.

Волны

В современном понимании понятие волнового процесса очень широко и многозначно. Волновые процессы могут иметь различную физическую природу и проявляются в очень широком круге явлений.

В самом общем смысле волна представляет собой *процесс распространения в пространстве изменений* (*возмущений*) *состояния вещества или поля*. Чаще всего изменения носят характер колебаний. Эти колебания *возбуждаются источником волны*, поэтому являются вынужденными. Волны способны распространяться и удаляться от места их возникновения или колебаться внутри ограниченных объемов пространства. Волны *не вызывают переноса частиц вещества*, а вовлекают в колебательный процесс всё новые и новые частицы, следовательно, *волна переносит энергию и информацию*.

В настоящем разделе мы будем рассматривать только механические волны в упругой среде. Упругая среда – это среда, между частицами которой существуют силы упругого взаимодействия, препятствующие ее деформации. Примеры *упругих сред*: *газы, жидкости и твердые тела*.

В упругой среде колебательный процесс утрачивает локальный характер: если вызвать колебания одной частицы среды, то в результате взаимодействия между частицами в колебательное движение с некоторым запаздыванием начнут вовлекаться и соседние частицы, и далее – по цепочке. Возмущение, сообщенное какой-либо точке среды, побежит по ней с некоторой скоростью.

Итак, *упругая волна – это процесс распространения механических колебаний в упругой среде*. Примеры упругих волн: сейсмические волны, возникающие при землетрясениях, звуковые или акустические волны, волны на поверхности жидкостей, волны на струне.

Различают волны *продольные* и *поперечные*.

Если колебания частиц среды, возбужденные волной, происходят *вдоль* направления распространения волны, волна называется *продольной*. Продольные волны связаны с объемной деформацией упругой среды, следовательно, могут распространяться в любой среде – твердой, жидкой, газообразной.

Если же колебания происходят *поперек* направления распространения волны, то волна называется *поперечной*. Поперечные упругие волны возникают только в твердых телах, в которых возможны упругие деформации сдвига.

Если колебания частиц среды происходят по гармоническому закону, то такая волна называется *гармонической*.

Поверхность, разделяющая область пространства, в которой волна уже есть, от области пространства, в которой волны еще нет, называется

фронтом волны (или *волновым фронтом*). Волновой фронт *перемещается в пространстве*.

Поверхность, проходящая по положениям равновесия точек, которые колеблются в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновая поверхность *не перемещается в пространстве*. Волновую поверхность можно провести через любую точку среды, охваченной волновым процессом. Поэтому можно построить любое количество волновых поверхностей.

По геометрической форме волновой поверхности выделяют волны *плоские, сферические и цилиндрические*.

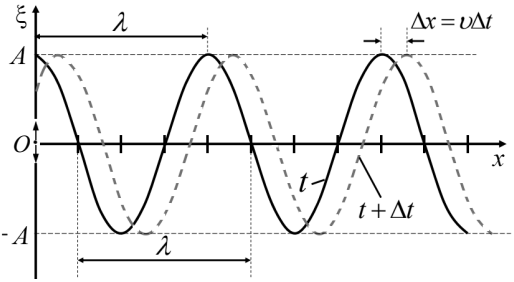
Обратите внимание на то, что вся энергия, создаваемая источником волны, в случае плоской волны всё время проходит через поверхность одной и той же площади. В отсутствие затухания амплитуда в плоской волне не должна меняться, что не соблюдается в других типах волн.

Уравнение плоской бегущей гармонической волны

Для вывода уравнения бегущей волны рассмотрим плоскую гармоническую волну, бегущую в некотором направлении.

Проведем ось *Ox*, в направлении распространения волны, начало оси совместим с положением источника колебаний, совершающего колебания по гармоническому закону $\xi(0,\ t) = A\cos(\omega t)$.

В точке с произвольной координатой x частицы среды будут повторять колебания источника, включаясь в колебательный процесс с некоторым запаздыванием по времени и соответственно по фазе $(-\alpha)$. Это запаздывание тем больше, чем больше расстояние x: $\xi(x,\ t) = A\cos(\omega t - \alpha)$. Найдем величину такого фазового сдвига.



Если точка находится на расстоянии x от источника, то колебания «доберутся» до нее с запаздыванием по времени на величину $\tau = x / v$, здесь v – скорость распространения волны.

Тогда уравнение колебаний точек среды можно записать в виде

$$\xi(x,\ t) = A\cos(\omega(t-\tau)) = A\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right).$$

Если использовать стандартное обозначение *волнового числа* $k = \frac{\omega}{v}$, колебания произвольной точки, находящейся на расстоянии x от источника, будут описыватmся уравнением

$$\xi(x,\ t) = A\cos(\omega t - kx).$$

Полученное уравнение называется уравн*ением плоской бегущей гармонической волны*.

Согласно данному уравнению смещение при колебаниях любой интересующей нас точки среды совершается по гармоническому закону с амплитудой A, равной амплитуде колебаний источника колебаний. Это возможно только в идеализированной ситуации, когда нет затухания колебаний в среде.

Мы можем также видеть, что полученная функции обладает временной и пространственной периодичностью. *Фаза волны* – аргумент косинуса $(\omega t - kx)$ – зависит от времени и координаты.

Периодичность во времени характеризуется периодом T – временем, за которое совершается одно колебание частиц среды. Период колебаний частиц среды равен периоду колебаний источника и связан с частотой его колебаний следующими соотношениями: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$.

Пространственный период рассматриваемой функции называется *длиной волны* и обозначается λ:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = Tv.$$

Из последнего выражения следует, что, с одной стороны, длина волны может быть определена как расстояние между точками среды, которые совершают колебания с разностью фаз в 2π, и, с другой стороны, длина волны есть расстояние, которое волна проходит за один период T.

Фазовая скорость волны

Фазовой скоростью волны $v_{\text{ф}}$ называют скорость распространения в пространстве математической поверхности постоянной (фиксированной) фазы волны.

Фаза волны определяется выражением $\varphi = (\omega t - kx) = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Пусть фаза имеет фиксированное значение, $\varphi = \text{const}$. Следовательно, $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{const}$. Продифференцировав записанное равенство, получим

$$0 = \omega\left(dt - \frac{dx}{v}\right) \quad => \quad \text{v} = \frac{dx}{dt},$$

т. е. скорость распространения фиксированной фазы волны и есть скорость распространения монохроматической волны.

Фазовая скорость может быть различной для волн разных частот.

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Такое явление называется *дисперсией волн*. Среды, в которых имеет место дисперсия, называют *дисперсионными* (или *диспергирующими*) средами.

Реальная волна не может быть представлена одним гармоническим уравнением, а является суммой группы (пакета) гармонических волн.

В этом случае, кроме фазовой скорости, вводят *групповую скорость* волнового пакета.

Волновое уравнение

Волновым уравнением называют дифференциальное уравнение, описывающее процесс распространения волн в среде. Найдем это уравнение.

Рассмотрим простейший случай – плоскую бегущую гармоническую волну, распространяющуюся вдоль оси x:

$$\xi = A\cos(\omega t - kx).$$

Продифференцируем дважды записанное уравнение по времени и координате:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(\omega t - kx);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kx).$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) \Big/ \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) = \frac{k^2}{\omega^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Учитывая, что $v = \frac{\omega}{k}$, можем записать уравнение $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Это дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными и является *волновым уравнением для одномерного случая.*

В общем случае *волновое уравнение* принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad \Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнение любой волны является частным решением данного волнового уравнения. Примером такого решения является уравнение плоской гармонической волны.

Если изменение некоторой физической величины любой природы (*механической, тепловой, электрической, магнитной*...) *описывается волновым уравнением, то это означает, что физическая величина распространяется в пространстве со скоростью v в виде волнового процесса*.

Скорость упругих волн в различных средах

Скорость распространения упругих волн является их важной характеристикой. Она определяется инертными и упругими свойствами среды, в которой распространяются волны.

Скорость распространения *продольных* упругих волн *в газах* $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, где γ – показатель адиабаты, $\gamma = c_p / c_v$; P – давление газа; ρ – плотность газа.

Скорость распространения *продольных* упругих волн *в жидкостях* $v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$, где k – модуль объемного сжатия; ρ – плотность жидкости.

Скорость распространения *продольных* упругих волн *в твердых телах* $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E – модуль Юнга; ρ – плотность среды.

Скорость распространения *поперечных* упругих волн *в твердых телах* $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, где G – модуль сдвига; ρ – плотность среды.

Для твердых тел модуль сдвига G всегда меньше модуля Юнга E. Поэтому скорость распространения продольной волны всегда больше скорости распространения поперечной волны в одной и той же твердой среде.

На этом различии в скоростях распространения продольной и поперечной составляющих сейсмических волн основан метод определения эпицентра очагов землетрясений.

Скорость распространения *поперечных* упругих волн *на однородной струне* $v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho S}}$, где T – сила натяжения струны; ρ – плотность материала струны; S – площадь поперечного сечения струны.

Энергия упругой волны

Упругая волна переносит энергию. Эта энергия складывается из кинетической энергии колеблющихся частиц и потенциальной энергии деформированных участков среды. Количественной характеристикой процесса переноса энергии является физическая величина, называемая *потоком энергии.*

Поток энергии – это отношение энергии, переносимой волной через некоторую поверхность, к тому времени, за которое эта энергия перенесена.

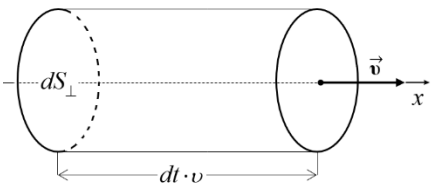
$$\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

Плотность потока энергии определяется вектором **j**, модуль которого (интенсивность I) равен отношению потока энергии к площади той поверхности, через которую энергия переносится в перпендикулярном к ней направлении.

$$|\mathbf{j}| = I = \frac{d\Phi}{dS_\perp} = \frac{dW}{dtdS_\perp}.$$

Зная **j**, поток энергии Ф, который переносится волной через поверхность S, можно найти следующим образом: $\Phi = \dfrac{dW}{dt} = \int\limits_S \mathbf{j}d\mathbf{S}$.

Рассмотрим волну, которая распространяется вдоль оси x с фазовой скоростью v. За время dt участок волнового фронта $dS_\perp$ переместится на расстояние $dt \cdot v$.



Это означает, что волна приведет в колебательное движение частицы среды в объеме цилиндра

с высотой $dt \cdot v$ и основанием $dS_\perp$. Обозначим через $\omega_{эн}$ объемную плотность энергии колебаний частиц. Если предположить, что плотность энергии всюду одинакова, то $dW = \omega_{эн} dV = \omega_{эн} dt \cdot v dS_\perp$. Тогда

$$|\mathbf{j}| = \frac{dW}{dt \cdot dS_\perp} = \frac{\omega_{эн} \cdot dt \cdot v \cdot dS_\perp}{dt \cdot dS_\perp} = \omega_{эн} v,$$

или в векторной форме: $\mathbf{j} = \omega_{эн} \cdot v$.

Вектор **j** называется *вектором Умова*. Он перпендикулярен фронту волны, сонаправлен со скоростью распространения волны; указывает направление распространения (переноса) энергии и по модулю равен плотности потока энергии.

Плотность энергии $\omega_{эн}$ можно выразить через энергию каждой частицы и количество частиц в единице объема (*n*-концентрацию):

$$\omega_{эн} = n \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{(n \cdot m)\omega^2 A^2}{2} = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2},$$

где $n \cdot m = \rho$ – плотность среды.

Стоячие волны

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды являются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы, если бы каждая из волн распространялась по отдельности. Это утверждение определяется *принципом суперпозиции* волн.

Рассмотрим частный случай суперпозиции – наложение двух плоских гармонических *встречных* волн одинаковой частоты и амплитуды. Запишем уравнения, описывающие эти две волны:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx) \text{ и } \xi_2 = A\cos(\omega t + kx).$$

Результирующее колебание будет их суммой:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx);$$

$$\xi = A\left[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)\right];$$

$$\xi = 2A\cos(kx)\cos(\omega t);$$

$$\xi = A(x)\cos(\omega t), \text{ где } A(x) = 2A\cos(kx).$$

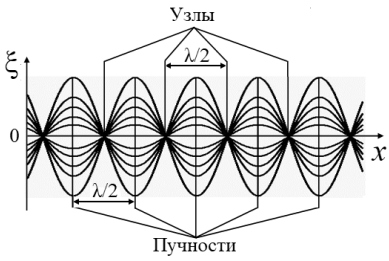
Полученное выражение называется уравнением *стоячей волны*. Оно показывает, что частицы упругой среды, охваченные двумя волновыми процессами, совершают гармонические колебания с той же частотой ω, что и у встречных волн. Амплитуда этих колебаний имеет периодическую зависимость от координаты *x*.

В точках, координаты которых отвечают условию $kx = \pm n\pi$, где $n = 0, 1, 2, 3...$, $\cos kx = \pm 1$, следовательно, амплитуда колебаний частиц среды максимальна и равна $2A$. Такие точки называются *пучностями стоячей волны*. Координаты пучностей определяются соотношением

$$x_{\text{пучн}} = \pm\frac{n\pi}{k} = \pm\frac{n\lambda}{2}.$$

В точках, отвечающих условию $kx = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, амплитуда равна нулю, в этих точках частицы среды не колеблются вовсе. Такие точки называют *узлами стоячей волны*. Координаты узлов определяются соотношением

$$x_{\text{узла}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$



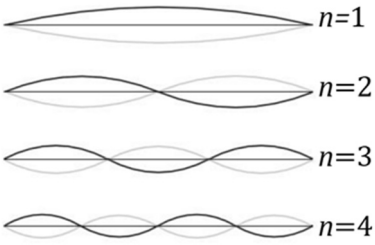
Из формул для координат узлов и координат пучностей следует, что расстояние между соседними узлами, как и расстояние между соседними пучностями, равно половине длины волны бегущих волн λ/2.

Пучности и узлы сдвинуты относительно друг друга на четверть волны и остаются на одном месте (их координаты не зависят от времени). Именно поэтому волну, возникающую в результате суперпозиции встречных волн одинаковой частоты, называют *стоячей.*

Рассмотрим уравнение для амплитуды стоячей волны $A(x) = 2A\cos(kx) = 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$. Косинус, входящий в данный сомножитель, меняет знак при переходе через нулевое значение. Следовательно, фаза колебаний по разные стороны от узла стоячей волны отличается на π (колебания происходят в противофазе). Точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (в одной фазе).

Стоячие волны на струне

В закрепленной с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний могут установиться стоячие волны. В местах закрепления струны должны располагаться узлы. Чтобы колебания были устойчивыми (на струне «встала» волна), необходимо, чтобы на длине струны укладывалось целое число половин длин волн $\lambda/2$:



$$l = n\frac{\lambda}{2}, \text{ где } n = 1, 2, 3...$$

Это, в свою очередь, означает, что на струне длиной l могут возникать стоячие волны лишь определенных частот:

$$\nu_n = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu}{2l}n, \text{ где } n = 1, 2, 3...$$

Эти частоты называются *собственными частотами* струны, или *частотами нормальных колебаний*. Колебания с такими частотами называют *гармониками* (колебание с частотой, соответствующей $n = 1$, называют первой гармоникой, $n = 2$ – второй гармоникой и т. д.).

Колебания струны примечательны тем, что для струны по классическим представлениям получается *дискретный ряд* характеризующих колебания величин. В классической физике такая дискретность скорее исключение. Забегая вперед, скажем, что для квантовых процессов дискретность будет являться скорее правилом, а не исключением.

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

Пример 1

Два точечных заряда в вакууме взаимодействуют на расстоянии 11 см с такой же силой, как в скипидаре на расстоянии 7,4 см. Определить диэлектрическую проницаемость скипидара.

Дано	**СИ**	**Решение**
$r_1 = 11$ см	$r_1 = 11 \cdot 10^{-2}$ м	Для решения задачи запишем закон Кулона для двух случаев взаимодействия точечных зарядов:
$r_2 = 7,4$ см	$r_2 = 7,4 \cdot 10^{-2}$ м	$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{\lvert q_1\rvert\lvert q_2\rvert}{{r_1}^2};$$
$F_1 = F_2$		$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{\lvert q_1\rvert\lvert q_2\rvert}{{r_2}^2}.$$
$\varepsilon_1 = 1$		
$\varepsilon_2 = ?$		

По условию $F_1 = F_2$, следовательно, $\varepsilon_1 r_1^2 = \varepsilon_2 r_2^2$. Тогда для диэлектрической проницаемости скипидара получим

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Проверка по размерности очевидна: диэлектрическая проницаемость – величина безразмерная.

Выполним вычисления:

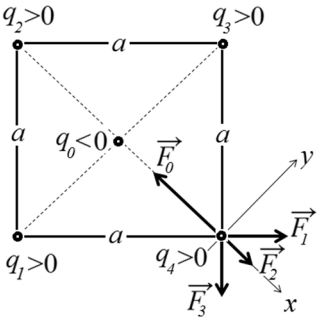
$$\varepsilon_2 = 1\left(\frac{11 \cdot 10^{-2}}{7,4 \cdot 10^{-2}}\right)^2 \approx 2,2.$$

Ответ: $\varepsilon_2 \approx 2,2.$

* В примерах равенство числа значащих цифр в исходных данных и в ответе не соблюдается.

Пример 2

В вершинах квадрата находятся равные положительные заряды q, а в центре – отрицательный заряд $q_0 = -2{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл. Какой должна быть величина положительных зарядов, чтобы вся система находилась в равновесии?

Дано	**Решение**
$q_0 = -2{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл $\Sigma \vec{F} = 0$ $q = ?$	

Из соображений симметрии очевидно, что заряд q_0, помещенный в центре квадрата, будет находиться в равновесии при любом значении равных зарядов q, расположенных в вершинах квадрата. Поэтому для ответа на вопрос задачи необходимо исследовать условия равновесия зарядов, находящихся в вершинах квадрата. Эти заряды находятся в одинаковых условиях. Поэтому ответ на вопрос можно получить исходя из равновесия любого из них, например, q_4.

На заряд q_4 действуют четыре силы: $\mathbf{F}_1$ – со стороны заряда q_1, $\mathbf{F}_2$ – со стороны заряда q_2, $\mathbf{F}_3$ – со стороны заряда q_3 и $\mathbf{F}_0$ – со стороны заряда q_0. В соответствии с принципом суперпозиции результирующая сила, действующая на q_4, будет равна их векторной сумме. Равновесие заряда q_4 означает, что эта векторная сумма сил равна нулю:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_0 = 0. \qquad (1)$$

Пусть сторона квадрата равна a, тогда по закону Кулона модули сил, действующих на заряд q_4, будут определяться выражениями:

$$F_1 = F_3 = k\frac{|q|^2}{a^2}, \qquad F_2 = k\frac{|q|^2}{2a^2} \quad \text{и} \quad F_0 = k\frac{2|q||q_0|}{a^2}. \qquad (2)$$

Выберем ось Ox вдоль диагонали квадрата, запишем условие равновесия (1) с учетом (2) в проекции на эту ось:

$$k\frac{|q|^2}{a^2}\cos 45° + k\frac{|q|^2}{2a^2} + k\frac{|q|^2}{a^2}\cos 45° - k\frac{2|q||q_0|}{a^2} = 0.$$

Проведя серию математических преобразований, получим:

$$k\frac{|q|^2}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{|q|^2}{2a^2} + k\frac{|q|^2}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{2} - k\frac{2|q||q_0|}{a^2} = 0;$$

$$|q|\sqrt{2} + \frac{|q|}{2} = 2|q_0|;$$

$$q = \frac{4|q_0|}{2\sqrt{2}+1}.$$

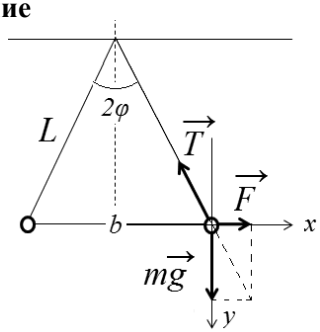
Проверка по размерности очевидна: [q] = Кл.
Выполним вычисления:

$$q = \frac{4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-9}}{2\sqrt{2}+1} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}.$$

Ответ: $q \approx 2{,}6 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Пример 3

Два шарика одинакового радиуса и массы подвешены в общей точке на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой общий заряд необходимо сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной T = 98 мН? Расстояние от центра шариков до точки подвеса L = 10 см, масса каждого шарика m = 5 г.

Дано	**СИ**	**Решение**
$T = 98$ мН	$T = 98 \cdot 10^{-3}$ Н	
$L = 10$ см	$L = 0{,}1$ м	
$m = 5$ г	$m = 5 \cdot 10^{-3}$ кг	
$Q - ?$		

После сообщения шарикам общего заряда Q заряд поделился между ними поровну, следовательно, заряд каждого шарика равен $q = \frac{1}{2}Q$. В силу электростатического отталкивания шарики будут отклоняться от вертикали на некоторый угол 2φ, так что сумма действующих сил (на каждый из шариков) станет равной нулю. На каждый из шариков действуют три силы: $m\vec{g}$ – сила тяжести; **T** – сила натяжения нити; **F**– сила электростатического (кулоновского) отталкивания.

Уравнение равновесия шарика под действием приложенных сил:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F} = 0. \qquad (1)$$

Выберем оси: горизонтальную Ox и вертикальную Oy. Запишем условие равновесия (1) в проекциях на выбранные оси:

$$\begin{cases} x: & -T\sin\varphi + F = 0; \\ y: & -T\cos\varphi + mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T\sin\varphi = F; \\ T\cos\varphi = mg. \end{cases} \qquad (2)$$

Применяя основное тригонометрическое тождество из (2), получаем

$$F^2 + (mg)^2 = T^2. \qquad (3)$$

Силу электростатического отталкивания можно найти по закону Кулона:

$$F = k\frac{q^2}{b^2} = k\frac{Q^2}{4b^2}. \qquad (4)$$

Расстояние между шариками b найдем из геометрических соображений:

$$\frac{b}{2L}=\frac{F}{T} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{2LF}{T}. \tag{5}$$

Решая совместно уравнения (3), (4) и (5), получаем

$$Q=\frac{4L}{T}\sqrt{\frac{(T^2-(mg)^2)^{\frac{3}{2}}}{k}}.$$

Проведем проверку по размерности:

$$[Q]=\frac{\text{м}}{\text{Н}}\sqrt{\frac{(\text{Н}^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}}=\frac{\text{м}}{\text{Н}}\sqrt{\frac{\text{Н}^3\cdot\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}}=\frac{\text{м}}{\text{Н}}\frac{\text{Н}\cdot\text{Кл}}{\text{м}}=\text{Кл}.$$

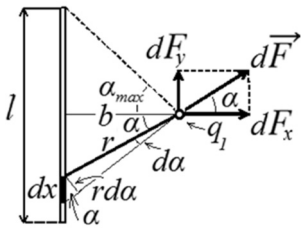
Выполним вычисления:

$$Q=\frac{4\cdot 0{,}1}{98\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{((98^2-(5\cdot 9{,}8)^2)10^{-6})^{\frac{3}{2}}}{9\cdot 10^9}}\approx 1{,}06\cdot 10^{-6}\ \text{Кл}.$$

Ответ: $Q\approx 1{,}06\cdot 10^{-6}$ Кл.

Пример 4

Тонкий стержень длиной l = 15 см равномерно заряжен с линейной плотностью λ = 1 мкКл/м. На расстоянии b = 10 см от стержня находится заряд q_1 = 5 нКл. Заряд q_1 равноудален от концов стержня. Определить силу взаимодействия точечного заряда и заряженного стержня.

Дано	**СИ**	**Решение**
$l = 15$ см	$l = 0{,}15$ м	
$\lambda = 1$ мкКл/м	$\lambda = 10^{-6}$ Кл/м	
$b = 10$ см	$b = 0{,}1$ м	
$q_1 = 5$ нКл	$q_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл	
$F = ?$		

В задаче идет речь о взаимодействии точечного и протяженного заряда, поэтому применять непосредственно закон Кулона нельзя. Для решения задачи разделим стержень на бесконечно малые элементы длиной dx. Заряд, приходящийся на этот элемент $dq = \lambda dx$, можно считать точечным зарядом. Тогда модуль силы взаимодействия зарядов q_1 и dq может быть найден по закону Кулона:

$$dF = k\frac{q_1 dq}{r^2} = k\frac{q_1 \lambda dx}{r^2}, \qquad (1)$$

где r – расстояние от заряда dq до q_1.

Сила взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда может быть найдена исходя из принципа суперпозиции:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}. \qquad (2)$$

Для различных элементов dx направление и величина силы $d\mathbf{F}$ меняются, поэтому для нахождения векторной суммы (2) удобно разложить $d\mathbf{F}$ на две проекции − горизонтальную dF_x и вертикальную dF_y. Тогда выражение (2) запишется в виде

$$\mathbf{F} = \int dF_x \cdot \mathbf{e}_x + \int dF_y \cdot \mathbf{e}_y. \qquad (3)$$

При движении вдоль стержня второе слагаемое $\int dF_y \cdot \mathbf{e}_y$ в данной сумме обращается в нуль. Следовательно, результирующая сила будет направлена вдоль горизонтальной оси, и ее модуль будет определяться выражением

$$F = \int dF_x. \qquad (4)$$

Из геометрических соображений (см. рисунок к задаче) найдем dF_x :

$$\frac{dF_x}{dF} = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad dF_x = dF\frac{b}{r}.$$

Используя (1), получаем

$$dF_x = k\frac{q_1\lambda dx}{r^2}\frac{b}{r}. \tag{5}$$

По рисунку

$$r = \frac{b}{\cos\alpha}; \quad dx = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{bd\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (5), а затем в (4), имеем:

$$F = \int k\frac{q_1\lambda}{b}\cos\alpha d\alpha.$$

Положение заряда dq на стержне определяется углом α, который меняется в пределах от $(-\alpha_{\max})$ до $(+\alpha_{\max})$. Следовательно,

$$F = \int\limits_{-\alpha_{\max}}^{+\alpha_{\max}} k\frac{q_1\lambda}{b}\cos\alpha d\alpha = 2\int\limits_{0}^{+\alpha_{\max}} k\frac{q_1\lambda}{b}\cos\alpha d\alpha = 2k\frac{q_1\lambda}{b}\sin\alpha_{\max}. \tag{6}$$

Из рисунка видно, что

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{l/2}{\sqrt{\frac{l^2}{4}+b^2}} = \frac{l}{\sqrt{l^2+4b^2}}.$$

Таким образом, для силы взаимодействия точечного заряда q_1 и заряженного стержня получим

$$F = 2k\frac{q_1\lambda}{b}\frac{l}{\sqrt{l^2+4b^2}}.$$

Проведем проверку по размерности:

$$[F] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \frac{\text{Кл} \cdot \text{Кл}}{\text{м} \cdot \text{м}} \frac{\text{м}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

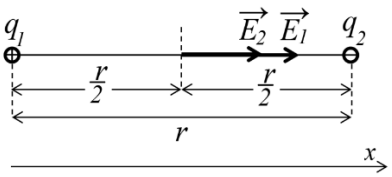
Выполним вычисления:

$$F = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-9} 10^{-6}}{0{,}1} \frac{0{,}15}{\sqrt{0{,}15^2 + 4 \cdot 0{,}1^2}} = 0{,}54 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 0{,}54 \cdot 10^{-3}$ Н.

Пример 5

Найти напряженность E электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами $q_1 = 8$ нКл и $q_2 = -6$ нКл. Расстояние между зарядами $r = 10$ см; $\varepsilon = 1$.

Дано	**СИ**	**Решение**
$q_1 = 8$ нКл	$q_1 = 8 \cdot 10^{-9}$ Кл	
$q_2 = -6$ нКл	$q_2 = -6 \cdot 10^{-9}$ Кл	
$r = 10$ см	$r = 0{,}1$ м	
$\varepsilon = 1$		
$E - ?$		

Для ответа на вопрос задачи применим принцип суперпозиции: напряженность электрического поля, созданного системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, созданных каждым зарядом по отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2,$$

где $\mathbf{E}_1$ – напряженность поля, созданного зарядом q_1 в рассматриваемой точке; $\mathbf{E}_2$ – напряженность поля, созданного зарядом q_2 в рассматриваемой точке.

От векторного уравнения перейдем к скалярному, записав данное выражение в проекции на ось *x*:

$$E = E_1 + E_2 . \qquad (1)$$

Учитывая, что заряды q_1 и q_2 точечные, для E_1 и E_2 имеем:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_1|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_2|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим результирующую напряженность в рассматриваемой точке поля:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{4\left(|q_1|+|q_1|\right)}{r^2} = \frac{\left(|q_1|+|q_1|\right)}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Проверим полученную формулу по размерности:

$$[E] = \frac{\text{Кл}}{\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\,\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

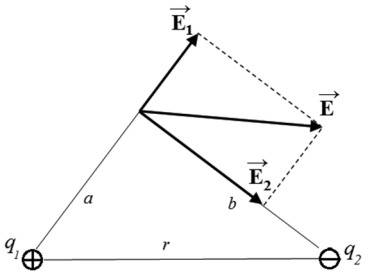
Выполним вычисления:

$$E = \frac{(8+6)10^{-9}}{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1^2} \approx 50{,}4\cdot 10^3 \ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Ответ: $E \approx 50{,}4\cdot 10^3 \ \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

Пример 6

Два точечных заряда $q_1 = 7{,}5$ нКл и $q_2 = -14{,}7$ нКл расположены на расстоянии r = 5,0 см. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстоянии a = 3,0 см от положительного заряда и b = 4,0 см от отрицательного заряда.

Дано	**СИ**	**Решение**
$q_1 = 7{,}5$ нКл	$q_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл	
$q_2 = -14{,}7$ нКл	$q_2 = -14{,}7 \cdot 10^{-9}$ Кл	
$r = 5{,}0$ см	$r = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ м	
$a = 3{,}0$ см	$a = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ м	
$b = 4{,}0$ см	$b = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ м	
$E - ?$		

Для решения поставленной задачи применим принцип суперпозиции: напряженность электрического поля, созданного системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, созданных каждым зарядом по отдельности:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}i.$$

В данной задаче источниками поля являются два точечных заряда, следовательно,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 ,$$

где $\mathbf{E}_1$ – напряженность поля, созданного зарядом q_1 в рассматриваемой точке; $\mathbf{E}_2$ – напряженность поля, созданного зарядом q_2 в рассматриваемой точке.

Из условия задачи можно видеть, что угол между векторами $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ прямой ($r^2 = a^2 + b^2$), поэтому для нахождения модуля E результирующей напряженности может быть использована теорема Пифагора:

$$E = \sqrt{{E_1}^2 + {E_2}^2} . \qquad (1)$$

Учитывая, что заряды q_1 и q_2 точечные, для E_1 и E_2 имеем:

$$E_1 = k \frac{q_1}{a^2}, \qquad E_2 = k \frac{q_2}{b^2}, \qquad (2)$$

где $k = 9 \cdot 10^9$ Н$\cdot$м^2/Кл^2.

Подставляя выражения (2) в (1) и преобразуя его, находим искомую величину E:

$$E = \sqrt{\left(k\frac{q_1}{a^2}\right)^2 + \left(k\frac{q_2}{b^2}\right)^2};$$

$$E = k\sqrt{\left(\frac{q_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{b^2}\right)^2}. \qquad (3)$$

Проверим полученную формулу по размерности:

$$[E] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}\sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^4}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Кл}}{\text{Кл}^2\cdot\text{м}^2} = \text{Н/Кл}.$$

Проведем вычисления:

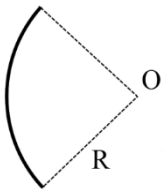
$$E = 9\cdot10^9\sqrt{\left(\frac{7{,}5\cdot10^{-9}}{\left(3\cdot10^{-2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{14{,}7\cdot10^{-9}}{\left(4\cdot10^{-2}\right)^2}\right)^2} \approx$$

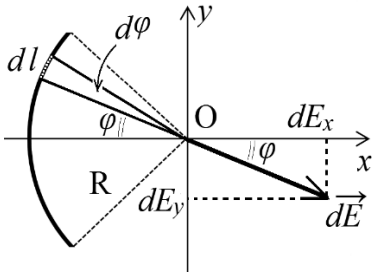
$$\approx \frac{9\cdot10^9\cdot10^{-9}}{10^{-4}}\sqrt{0{,}694+0{,}844} \approx 110 \text{ кН/Кл}.$$

Ответ: $E \approx 110$ кН/Кл.

Пример 7

По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом R = 10,0 см, равномерно распределен заряд q = 20 нКл. Используя принцип суперпозиции, определить напряженность электростатического поля, создаваемого заряженной нитью в центре кривизны дуги, если длина нити равна четверти длины окружности.



Дано	**СИ**	**Решение**
R = 10,0 см	$R = 10^{-2}$ м	
q = 20 нКл	$q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл	
$E - ?$		

Выделим на нити бесконечно малый элемент $dl = Rd\varphi$, так чтобы заряд $dq = \lambda dl = \lambda Rd\varphi$, приходящийся на этот элемент, можно было считать точечным. $\lambda = \dfrac{2q}{\pi R}$ – линейная плотность заряда нити (по условию заряд q распределен на нити, длина которой равна четверти окружности). Такой точечный заряд будет создавать в точке O поле напряженностью

$$dE = k\frac{dq}{R^2} = k\frac{\lambda Rd\varphi}{R^2} = k\frac{2q}{\pi R}\frac{Rd\varphi}{R^2} = k\frac{2qd\varphi}{\pi R^2}. \qquad (1)$$

Результирующая напряженность поля, создаваемого заряженной нитью, может быть найдена исходя из принципа суперпозиции:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}. \qquad (2)$$

Для различных элементов dl направление вектора напряженности $d\mathbf{E}$ задается углом φ, поэтому для нахождения векторной суммы (2) удобно разложить $d\mathbf{E}$ на две составляющие: горизонтальную $dE_x = dE\cos\varphi$ и вертикальную $dE_y = dE\sin\varphi$. Выбор направления осей определяется симметрией задачи. Тогда выражение (2) запишется в виде

$$\mathbf{E} = \int dE_x \cdot \mathbf{e}_x + \int dE_y \cdot \mathbf{e}_y. \qquad (3)$$

Очевидно, что при интегрировании вдоль нити второе слагаемое в данной сумме обращается в нуль. Следовательно, результирующая напряженность будет направлена вдоль горизонтальной оси, и ее модуль

будет определяться выражением (пределы интегрирования определяются из условия задачи):

$$E = \int dE_x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} dE\cos\varphi = 2\int\limits_{0}^{+\frac{\pi}{4}} dE\cos\varphi. \qquad (4)$$

Подставляя (1) в (4) для напряженности поля нити, получаем

$$E = 2\int\limits_{0}^{+\frac{\pi}{4}} k\frac{2q}{\pi R^2}\cos\varphi\cdot d\varphi = 2k\frac{2q}{\pi R^2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = k\frac{2\sqrt{2}\cdot q}{\pi R^2}. \qquad (5)$$

Проведем проверку по размерности:

$$[E] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

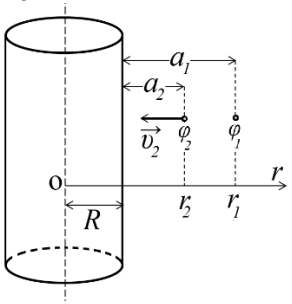
Выполним вычисления:

$$E = 9\cdot 10^9\frac{2\sqrt{2}\cdot 2\cdot 10^{-8}}{3{,}14\cdot 10^{-4}} \approx 1{,}6\cdot 10^6\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Ответ: $E \approx 1{,}6\cdot 10^6\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

Пример 8

Электрическое поле создано бесконечной цилиндрической поверхностью радиусом $R = 10$ см, равномерно заряженной с линейной плотностью $\lambda = 2$ нКл/см. Какую линейную скорость получит электрон под действием сил поля, приблизившись к цилиндру с расстояния $a_1 = 50$ см до расстояния $a_2 = 20$ см? Начальная скорость электрона равна нулю.

Дано	**СИ**	**Решение**
$R = 10$ см	$R = 0{,}10$ м	
$\lambda = 2$ нКл/см	$\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м	
$a_1 = 50$ см	$a_1 = 0{,}50$ м	
$a_2 = 20$ см	$a_2 = 0{,}20$ м	
$v_2 - ?$		

Для решения задачи воспользуемся законом сохранения энергии:

$$W_{k_1} + W_{p_1} = W_{k_2} + W_{p_2}, \qquad (1)$$

где $W_{k_1} = \dfrac{mv_1^2}{2}$ и $W_{k_2} = \dfrac{mv_2^2}{2}$ – кинетические энергии электрона в точках 1 и 2, $W_{p_1} = q\varphi_1$ и $W_{p_2} = q\varphi_2$ – потенциальные энергии электрона в тех же точках.

Учитывая, что электрон в начальный момент покоился, получаем:

$$q\varphi_1 = \frac{mv_2^2}{2} + q\varphi_2, \quad \frac{mv_2^2}{2} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad v_2 = \sqrt{\frac{2q(\varphi_1 - \varphi_2)}{m}}. \qquad (2)$$

Разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ можно найти исходя из уравнения связи напряженности электростатического поля и потенциала:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 E_r dr. \qquad (3)$$

В этой задаче поле создается бесконечной заряженной цилиндрической поверхностью. Поле имеет радиальную симметрию. Вектор напряженности направлен вдоль оси r. В соответствии с теоремой Гаусса – Остроградского снаружи цилиндрической заряженной поверхности напряженность поля равна

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), найдем разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln\frac{R + a_2}{R + a_1}.$$

Полученное выражение для разности потенциалов подставим в (3) и найдем скорость электрона в точке 2:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2q\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\dfrac{R + a_2}{R + a_1}}{m}} = \sqrt{\frac{q\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon m}\ln\frac{R + a_2}{R + a_1}}. \qquad (5)$$

Выполним проверку по размерности:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{Кл}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{Кл}^2\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

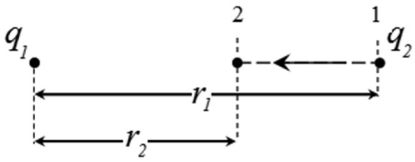
Проведем вычисления:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\left(-1{,}6\cdot10^{-19}\right)\cdot2\cdot10^{-7}}{3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot9{,}11\cdot10^{-31}}\ln\frac{0{,}3}{0{,}6}} \approx 2{,}96\cdot10^7 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v_2 \approx 2{,}96\cdot10^7 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Пример 9

Два шарика малых размеров с зарядами $q_1 = 6{,}7$ нКл и $q_2 = 13{,}3$ нКл расположены на расстоянии $r_1 = 40$ см. Какую работу необходимо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $r_2 = 25$ см?

Дано	СИ	Решение
$q_1 = 6,7$ нКл	$q_1 = 6,7 \cdot 10^{-9}$ Кл	
$q_2 = 13,3$ нКл	$q_2 = 13,3 \cdot 10^{-9}$ Кл	
$r_1 = 40$ см	$r_1 = 0,40$ м	
$r_2 = 25$ см	$r_2 = 0,25$ м	
$A_{12} - ?$		

Способ 1. Для удобства решения задачи будем полагать, что один из шариков, например первый, неподвижен, а второй перемещается под действием внешних сил из положения 1 в положение 2. Тогда заряд q_1 можно рассматривать как источник электрического поля, в котором перемещается заряд q_2.

Работа внешних сил A_{12} и работа сил поля $A_{\text{поля}}$ в соответствии с третьим законом Ньютона связаны соотношением

$$A_{12} = -A_{\text{поля}}. \qquad (1)$$

Работа сил поля $A_{\text{поля}}$ по перемещению заряда q_2 в поле заряда q_1 определяется выражением

$$A_{\text{поля}} = q_2(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (2)$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы начальной и конечной точки.

По условию заряд q_1 можно считать точечным, следовательно,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = kq_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad (3)$$

где $k = 9 \cdot 10^9$ Н$\cdot$м^2/Кл^2.

Решая совместно уравнения (3), (2), и (1), получаем выражения для искомой величины A_{12}:

$$A_{12} = -q_2 kq_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);$$

$$A_{12} = kq_1q_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right);$$

$$A_{12} = k\,\frac{q_1q_2(r_1 - r_2)}{r_1r_2}. \qquad (4)$$

Проверим полученную формулу по размерности:

$$[A_{12}] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}\,\frac{\text{Кл}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

Проведем вычисления:

$$A_{12} = 9\cdot10^9\,\frac{6{,}7\cdot10^{-9}\cdot13{,}3\cdot10^{-9}(0{,}4-0{,}25)}{0{,}4\cdot0{,}25} \approx 1{,}2\cdot10^{-6}\ \text{Дж}.$$

Способ 2. До сближения потенциальная энергия взаимодействия зарядов $W_1 = k\,\frac{q_1q_2}{r_1}$, после сближения $W_2 = k\,\frac{q_1q_2}{r_2}$, при условии, что $W_\infty = 0$.

Работа внешних сил A_{12} идет на изменение энергии:

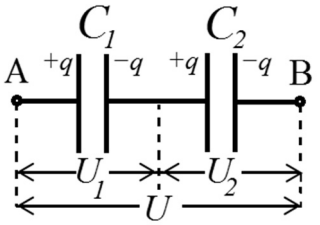
$$A_{12} = W_2 - W_1 = kq_1q_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = k\,\frac{q_1q_2(r_1 - r_2)}{r_1r_2}.$$

Полученное выражение совпадает с (4).

Ответ: $A_{12} \approx 1{,}2$ мкДж.

Пример 10

Разность потенциалов между точками A и B равна U = 6 В. Емкость первого конденсатора $C_1 = 2$ мкФ, емкость второго $C_2 = 4$ мкФ. Найти заряды q_1 и q_2 и разность потенциалов U_1 и U_2 на обкладках каждого конденсатора.

Дано	**СИ**	**Решение**
$C_1 = 2$ мкФ $C_2 = 4$ мкФ $U = 6$ В	$C_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф $C_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф	
$q_1 - ?\quad q_2 - ?$ $U_1 - ?\quad U_2 - ?$		

На обкладках последовательно соединенных конденсаторов после подключения к источнику постоянного напряжения U появляются заряды, одинаковые по величине и противоположные по знаку. Следовательно, заряд на всех конденсаторах будет одинаковым:

$$q_1 = q_2 = q.$$

Напряжение U, приложенное между точками A и B, распределяется между конденсаторами в соответствии с их емкостью:

$$U = U_1 + U_2, \quad \text{где} \quad U_1 = \frac{q}{C_1} \quad \text{и} \quad U_2 = \frac{q}{C_2}.$$

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \tag{1}$$

По найденному значению эквивалентной емкости C (1) можно найти заряды конденсаторов:

$$q_1 = q_2 = q = CU. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), для зарядов конденсаторов получаем

$$q_1 = q_2 = q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U. \tag{3}$$

Проверка по размерности:

$$[q] = \frac{\Ф \cdot \Ф}{\Ф} \text{В} = \Ф \cdot \text{В} = \text{Кл}.$$

Проведем вычисления:

$$q_1 = q_2 = q = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-12}}{(2+4)10^{-6}} 6 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Зная заряд на обкладках конденсатора, найдем разность потенциалов на каждом из них:

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{U}{C_1} = U \frac{C_2}{C_1 + C_2};$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{U}{C_2} = U \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Проверка по размерности очевидна: $[U]$ = В.
Выполним вычисления:

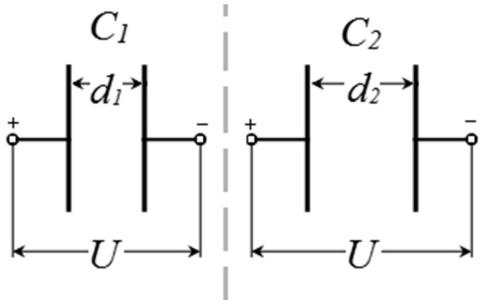
$$U_1 = 6 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{(2+4)10^{-6}} = 4 \text{ В}; \quad U_1 = 6 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(2+4)10^{-6}} = 2 \text{ В}.$$

Ответ: $q_1 = q_2 = q = 8 \cdot 10^{-6}$ Кл; $U_1 = 4$ В; $U_1 = 2$ В.

Пример 11

Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора, присоединенного к источнику постоянного напряжения U = 200 В, равно $d_1 = 5{,}0$ мм. Площадь пластин конденсатора $S = 200$ см^2. Найти работу по раздвиганию пластин до расстояния $d_2 = 10$ мм в двух случаях: а) конденсатор в процессе раздвигания пластин все время соединен с источником; б) конденсатор перед раздвиганием пластин отключили от источника.

Дано	**СИ**	**Решение**
$U = 200$ В $d_1 = 5{,}0$ мм $d_2 = 10$ мм $S = 200$ см^2 а) U = const б) q = const $A_а - ?$ $A_б - ?$	$d_1 = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ м $d_2 = 10 \cdot 10^{-3}$ м $S = 2 \cdot 10^{-2}$ м^2	а) Конденсатор в процессе раздвигания пластин все время соединен с источником, это означает, что напряжение на обкладках конденсатора не меняется, а заряды меняются. q_1 – заряд на обкладках конденсатора до раздвигания пластин, q_2 – после.



Изменение энергии конденсатора происходит как за счет механической работы внешних сил по раздвиганию пластин конденсатора $A_а$, так и за счет работы источника $A_{ист}$ по перемещению зарядов, т. е.

$$W_2 - W_1 = A_а + A_{ист}, \qquad (1)$$

где W_1 – энергия конденсатора до раздвигания пластин; W_2 – энергия конденсатора после раздвигания пластин.

В данном случае (U = const) для энергии конденсатора удобно использовать выражения

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}, \quad W_2 = \frac{C_2 U^2}{2}, \qquad (2)$$

где C_1 – емкость конденсатора до раздвигания пластин; C_2 – емкость конденсатора после раздвигания пластин.

Работа по перемещению зарядов, совершаемая источником, может быть найдена следующим образом:

$$A_{\text{ист}} = U(q_2 - q_1) = C_2U^2 - C_1U^2. \qquad (3)$$

Подставив (1) и (2) в (3), с учетом выражения для емкости плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ получим выражение для искомой величины $A_{\text{а}}$:

$$A_{\text{а}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2 (d_2 - d_1)}{2 d_1 d_2}.$$

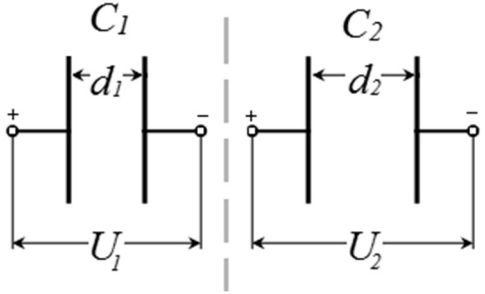
Проверим полученную формулу по размерности:

$$[A_{\text{а}}] = \frac{\Ф \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}^2 \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \Ф \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \cdot \text{В}^2 = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж}.$$

Выполним вычисления:

$$A_{\text{а}} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 200^2 (10 - 5) 10^{-3}}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \approx 350 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}.$$

б) Конденсатор перед раздвиганием пластин отключили от источника, это означает, что напряжение на обкладках конденсатора меняется ($U \neq \text{const}$), а заряд остается постоянным ($q = \text{const}$).



Для решения этой задачи будем использовать также энергетический подход. Механическая работа, совершаемая внешними силами при раздвигании пластин, идет на изменение энергии конденсатора, т. е.

$$A_{\text{б}} = W_2 - W_1, \tag{4}$$

где W_1 – энергия конденсатора до раздвижения пластин; W_2 – энергия конденсатора после раздвигания пластин.

В данном случае (q = const) и для энергии конденсатора удобно использовать выражения:

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1}, \quad W_2 = \frac{q^2}{2C_2}, \tag{5}$$

где C_1 – емкость конденсатора до раздвигания пластин; C_2 – емкость конденсатора после раздвигания пластин.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_2}. \tag{6}$$

В данной ситуации заряд, сообщенный обкладкам конденсатора до раздвигания пластин, сохраняется, и его величина определяется выражением

$$q = C_1 U. \tag{7}$$

Из уравнений (4), (5), (6) и (7) найдем искомую величину $A_{\text{б}}$:

$$A_{\text{б}} = \frac{(C_1 U)^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right); \quad A_{\text{б}} = \frac{(\varepsilon_0 \varepsilon S)^2 U^2}{2{d_1}^2}\left(\frac{d_2 - d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon S}\right);$$

$$A_{\text{б}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2 (d_2 - d_1)}{2{d_1}^2}.$$

Проверка по размерности аналогична случаю а).

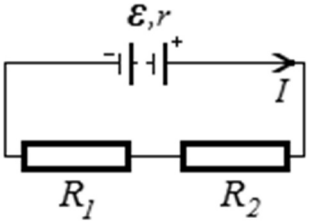
Выполним вычисления:

$$A_б = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 200^2 (10-5) 10^{-3}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} \approx 710 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_a \approx 350 \cdot 10^{-9}$ Дж; $A_б \approx 710 \cdot 10^{-9}$ Дж.

Пример 12

К элементу с ЭДС $\varepsilon = 10$ В присоединены последовательно два резистора $R_1 = 1$ Ом и $R_2 = 3$ Ом. Ток в цепи равен $I = 2$ А. Найти внутреннее сопротивление источника и падение напряжения в нем.

Дано	**Решение**
$\varepsilon = 10$ В $R_1 = 1$ Ом $R_2 = 3$ Ом $I = 2$ А	
$r - ?$ $U_r - ?$	

Для решения задачи будем использовать закон Ома для замкнутой цепи: $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$.

Внешнее сопротивление R представляет собой два последовательно соединенных резистора, следовательно, $R = R_1 + R_2$.

С учетом этого для сопротивления источника получим

$$r = \frac{\varepsilon}{I} - (R_1 + R_2). \qquad (1)$$

Проверка по размерности очевидна: [r] = Ом.

Выполним вычисления:

$$r = \frac{10}{2} - (1+3) = 1 \text{ Ом}.$$

Падение напряжение на источнике $U_r = Ir$. С учетом (1) получим

$$U_r = \varepsilon - I(R_1 + R_2). \qquad (2)$$

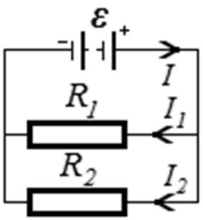
Проверка по размерности очевидна: $[U_r] = \text{В}$.
Выполним вычисления:

$$U_r = 10 - 2(1+3) = 2 \text{ В}.$$

Ответ: r = 1 Ом, U_r = 2 В.

Пример 13

К элементу с ЭДС ε = 2 В присоединены параллельно две проволоки длиной l = 1 м и площадью поперечного сечения $S = 1$ мм^2 каждая. Определить ток элемента, если одна проволока медная, а другая алюминиевая. Сопротивлением источника пренебречь.

Дано	**СИ**	**Решение**
ε = 2 В l = 1 м $S = 1$ мм^2 $r = 0$	$S = 10^{-6}$ м^2	
$I - ?$		

Для решения поставленной задачи будем использовать закон Ома для замкнутой цепи: $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$. Так как по условию сопротивлением источника можно пренебречь, то $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$.

Внешнее сопротивление R представляет собой две параллельно соединенные проволоки, следовательно, $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, где $R_1 = \rho_1 \dfrac{l}{S}$ – сопротивление первой проволоки; ρ_1 – удельное сопротивление меди, $\rho_1 = 17 \cdot 10^{-9}$ Ом · м; $R_2 = \rho_2 \dfrac{l}{S}$ – сопротивление второй проволоки; ρ_2 – удельное сопротивление алюминия, $\rho_2 = 25 \cdot 10^{-9}$ Ом · м.

Решая совместно записанные уравнения, для силы тока элемента получаем:

$$I = \frac{\varepsilon(\rho_1 + \rho_2)S}{\rho_1 \rho_2 l}.$$

Проверим полученную формулу по размерности:

$$[I] = \frac{\text{В} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{Ом}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{А}.$$

Выполним вычисления: $I = \dfrac{2(17+25)10^{-9} \cdot 10^{-6}}{17 \cdot 25 \cdot 10^{-18}} \approx 198$ А.

Ответ: $I \approx 198$ А.

Пример 14

Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через 15 минут, если только вторая, то через 30 минут. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить последовательно? Параллельно?

Дано	**СИ**	**Решение**
$t_1 = 15$ мин $t_2 = 30$ мин	$t_1 = 900$ с $t_2 = 1800$ с	Так как для всех четырех случаев, рассматриваемых в задаче, сетевое напряжение не изменяется, то удобно применять закон Джоуля – Ленца в форме
$t_3 - ?$ $t_4 - ?$		$$Q = \frac{U^2}{R} t,$$

где Q – энергия, выделяющаяся на электрическом устройстве (кипятильнике), в нашем случае она идет на нагревание одинакового количества воды; U – сетевое напряжение; R – электрическое сопротивление кипятильника; t – время, за которое выделяется количество теплоты Q.

Для первого случая (включена первая секция кипятильника) имеем

$$Q = \frac{U^2}{R_1} t_1 . \tag{1}$$

Для второго случая (включена вторая секция кипятильника)

$$Q = \frac{U^2}{R_2} t_2 . \tag{2}$$

Последовательное соединение секций кипятильника

$$Q = \frac{U^2}{R_3} t_3 , \tag{3}$$

где

$$R_3 = R_1 + R_2 . \tag{4}$$

Параллельное соединение секций кипятильника

$$Q = \frac{U^2}{R_4} t_4 , \tag{5}$$

где

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} . \tag{6}$$

Для нахождения t_3 выразим из уравнений (1) и (2) R_1 и R_2, подставим в (4), а затем в (3).

$$R_1 = \frac{U^2 t_1}{Q}; \quad R_2 = \frac{U^2 t_2}{Q};$$

$$R_3 = \frac{U^2}{Q} (t_1 + t_2);$$

$$Q = \frac{U^2 t_3 Q}{U^2 (t_1 + t_2)};$$

$$t_3 = t_1 + t_2 . \qquad (7)$$

Для нахождения t_4 выразим из (5) R_4. Затем полученные выражения для R_1, R_2 и R_4 подставим в (6).

$$R_4 = \frac{U^2 t_4}{Q}, \quad R_1 = \frac{U^2 t_1}{Q}, \quad R_2 = \frac{U^2 t_2}{Q}.$$

$$\frac{Q}{U t_4} = \frac{Q}{U t_1} + \frac{Q}{U t_2};$$

$$\frac{1}{t_4} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2};$$

$$t_4 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}. \qquad (8)$$

Выполним вычисления:

$$t_3 = 900 + 1800 = 2700 \text{ с},$$

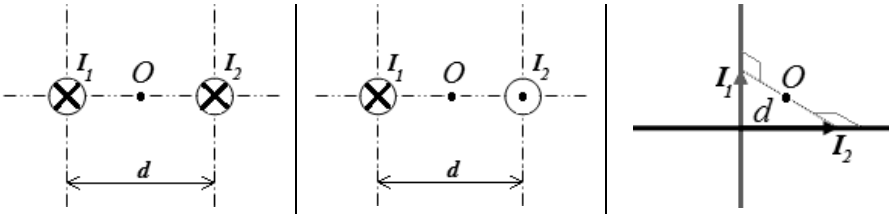
$$t_4 = \frac{900 \cdot 1800}{900 + 1800} = 600 \text{ с}.$$

Ответ: t_3 = 2700 с = 45 мин; t_4 = 600 с = 10 мин.

Пример 15

По двум бесконечно длинным прямым проводам, находящимся на расстоянии d = 5 см друг от друга в воздухе, текут токи силой I = 10 А каждый. Определить индукцию B поля, создаваемого токами в точке O, лежащей посередине между проводами, для случаев: а) провода параллельны, токи текут в одном направлении; б) провода параллельны, токи

текут в противоположных направлениях; в) провода перпендикулярны и лежат в параллельных плоскостях; направление токов указано на рисунке.



а *б* *в*

Дано

$I_1 = I_2 = 10$ А

$d = 5$ см $= 0{,}05$ м

$\mu = 1$ (воздух)

$B - ?$

Решение

Для решения поставленной задачи применим принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2, \qquad (1)$$

где $\mathbf{B}_1$ – индукция магнитного поля, создаваемого током I_1; $\mathbf{B}_2$ – индукция магнитного поля, создаваемого током I_2.

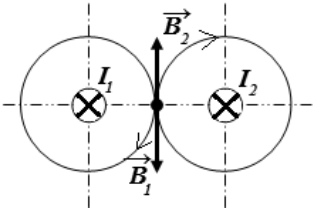
Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечным прямым проводником с током I, на расстоянии r от оси проводника вычисляется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r_0}.$$

В данной задаче во всех трех случаях абсолютные значения индукций B_1 и B_2 одинаковы (точки выбраны на равных расстояниях от проводников, по которым текут равные токи), так как

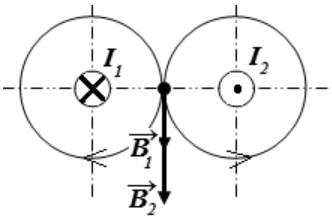
$$r_0 = \frac{d}{2}, \quad \text{то} \quad B_i = \frac{\mu_0 \mu I}{\pi d}. \qquad (2)$$

а) На рисунке покажем силовые линии магнитного поля токов I_1 и I_2 (окружности, проходящие через точку O). Направление силовых линий задается правилом правого винта. Векторы магнитной индукции направлены по касательной к силовым линиям.



В данном случае векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ противоположно направлены, следовательно,

$$\mathbf{B}_\text{а} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = 0.$$



б) Векторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ сонаправлены, следовательно,

$$\mathbf{B}_\text{б} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = 2\mathbf{B}_1,\ B_\text{б} = 2B_1 = \frac{2\mu_0\mu I}{\pi d}.$$

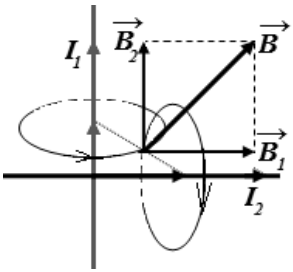
Проверим полученную формулу по размерности:

$$[B_\text{б}] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Вб}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Проведем вычисления:

$$B_\text{б} = \frac{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 10}{\pi\cdot 0{,}05} = 0{,}16\cdot 10^{-3}\ \text{Тл}.$$

в) Векторы индукций магнитных полей $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$, создаваемых токами в точке, лежащей на середине общего перпендикуляра, взаимно перпендикулярны, следовательно, модуль результирующей индукции магнитного поля можно найти по теореме Пифагора:



$$B_\text{в} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = B_1\sqrt{2} = \frac{\mu_0\mu I\sqrt{2}}{\pi d}.$$

$$B_\text{в} = \frac{\mu_0\mu I\sqrt{2}}{\pi d}.$$

Проверка по размерности аналогична случаю б).
Проведем вычисления:

$$B_{\text{в}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1{,}41}{\pi \cdot 0{,}05} = \frac{56{,}4 \cdot 10^{-7}}{0{,}05} = 0{,}113 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

Ответ: $B_{\text{а}} = 0$; $B_{\text{б}} = 0{,}16 \cdot 10^{-3}$ Тл; $B_{\text{в}} = 0{,}113 \cdot 10^{-3}$ Тл.

Пример 16

По двум параллельным бесконечно длинным проводникам текут одинаковые токи в противоположных направлениях I = 50 А. Проводники находятся на расстоянии a = 9 см друг от друга. Определить индукцию магнитного поля в точке, отстоящей от одного проводника на расстоянии $r_1 = 4$ см и от другого – на расстоянии $r_2 = 12$ см.

Дано

I = 50 А

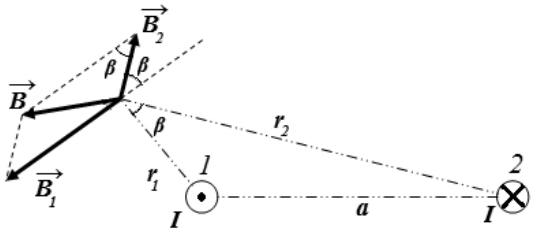
$a = 9 \text{ см} = 9 \cdot 10^{-2}$ м

$r_1 = 4 \text{ см} = 4 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 12 \text{ см} = 12 \cdot 10^{-2}$ м

B – ?

Решение



Для решения поставленной задачи применим принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 .$$

Модуль результирующего вектора магнитной индукции B может быть найден с использованием теоремы косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos\beta} . \qquad (1)$$

Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечным прямым проводником с током I, на расстоянии r_0 от оси проводника вычисляется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r_0}.$$

Для нашего случая $\mu = 1,$ следовательно,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}. \tag{2}$$

Так как $a^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\beta,$ следовательно,

$$\cos\beta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{2r_1 r_2}. \tag{3}$$

Подставляя выражения (3) и (2) в (1), получаем:

$$B = \sqrt{\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r_1^2} + \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r_2^2} - 2\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r_1 r_2}\frac{\left(r_1^2 + r_2^2 - a^2\right)}{2r_1 r_2}};$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - 2\frac{1}{r_1 r_2}\frac{\left(r_1^2 + r_2^2 - a^2\right)}{2r_1 r_2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{r_2^2 + r_1^2 - \left(r_1^2 + r_2^2 - a^2\right)}{r_1^2 r_2^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{r_1^2 r_2^2}} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r_1 r_2}.$$

$$B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r_1 r_2}.$$

Проверка по размерности:

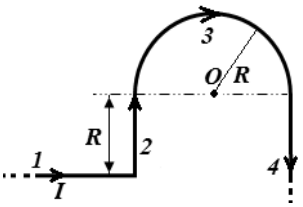
$$[B] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Проведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-7} \cdot 50 \cdot 3}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 4} = 18{,}75 \cdot 10^{-5} = 0{,}19 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

Ответ: $B = 0{,}19 \cdot 10^{-3}$ Тл.

Пример 17



Проводник, изображенный на рисунке, состоит из четырех участков: два из них полубесконечные прямые *1* и *4*, участок прямого провода *2* длиной R = 10 см и проводник в виде полуокружности *3* радиусом R = 10 см. По проводнику течет ток I = 1 А. Определить напряженность магнитного поля в центре полуокружности.

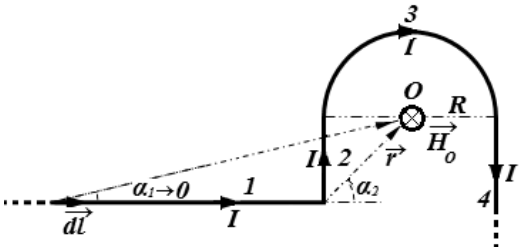
Дано

I = 1 А

R = 0,1 м

H – ?

Решение



Для решения поставленной задачи применим принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 + \mathbf{H}_4 .$$

Вектор $\mathbf{H}_1$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа «к нам», векторы $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_3$ и $\mathbf{H}_4$ – перпендикулярно плоскости чертежа

«от нас». Следовательно, искомую величину вектора напряженности магнитного поля в точке *O* можно найти следующим образом:

$$H_O = H_2 + H_3 + H_4 - H_1 . \qquad (*)$$

Напряженность магнитного поля, созданного отрезком прямого провода, определяется выражением:

$$H = \frac{I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

С учетом геометрических соотношений задачи получим:

$$H_1 = \frac{I}{4\pi r_0}\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{I}{4\pi R}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \qquad (1)$$

$$H_2 = \frac{I}{4\pi r_0}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{I}{4\pi R}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \qquad (2)$$

$$H_4 = \frac{I}{4\pi r_0}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi\right) = \frac{I}{4\pi R}. \qquad (3)$$

Третий участок проводника представляет собой половину кругового витка, следовательно:

$$H_3 = \frac{1}{2}H_{\text{витка}} = \frac{1}{2}\frac{I}{2R} = \frac{I}{4R}. \qquad (4)$$

Подставляя выражения (1), (2), (3), (4) в (*), получаем:

$$H_O = \frac{I}{4\pi R}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{I}{4R} + \frac{I}{4\pi R} - \frac{I}{4\pi R}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$H_O = \frac{I}{4\pi R}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi + 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{I}{4\pi R}\left(\sqrt{2} + \pi\right).$$

$$H_O = \frac{I}{4\pi R}\left(\sqrt{2} + \pi\right).$$

Проверка по размерности очевидна: $[H_O] = \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Проведем вычисления:

$$H_O = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1}\left(\sqrt{2} + \pi\right) = 3{,}625 = 3{,}7 \ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Ответ: $H_O = 3{,}7 \ \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Пример 18

Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов U = 3000 В, попадает в однородное магнитное поле, силовые линии которого перпендикулярны скорости его движения, и начинает вращаться с частотой $\nu = 10^9$ Гц. Определить значение силы Лоренца, действующей на протон.

Дано

$U = 3 \cdot 10^3$ В

$\vec{v} \perp \vec{B}$

$B = \text{const}$

$\nu = 10^9$ Гц

$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг

$q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$F_{\text{Л}} - ?$

Решение

По условию задачи протон, прежде чем попасть в магнитное поле, проходит ускоряющую разность потенциалов. Для нахождения скорости протона воспользуемся законом сохранения энергии. Работа электрического поля равна изменению кинетической энергии протона:

$$A_{\text{эл}} = \Delta W_{\text{кин}};$$

$$q_p U = \frac{m_p v^2}{2} - 0.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{2 q_p U}{m_p}}. \qquad (1)$$

В магнитном поле на движущийся протон действует сила Лоренца. Величина силы Лоренца определяется выражением

$$F_{\text{Л}} = qvB\sin\alpha.$$

В нашем случае $\vec{v} \perp \vec{B}$, $q = q_p$, следовательно,

$$F_{\text{Л}} = q_p vB. \qquad (2)$$

Чтобы найти величину индукции магнитного поля, воспользуемся выражением для силы Лоренца:

$$F_{\text{Л}} = q_p vB,$$

вторым законом Ньютона:

$$F_{\text{Л}} = m_p a,$$

и выражением для центростремительного ускорения, с которым протон движется по окружности:

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega v = 2\pi\nu v.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем:

$$q_p vB = m_p 2\pi\nu v,$$

следовательно,

$$B = \frac{2\pi\nu m_p}{q_p}. \qquad (3)$$

Подставляя (1) и (3) в (2), получаем выражение для силы Лоренца, действующей на протон:

$$F_{\text{Л}} = q_p\sqrt{\frac{2q_pU}{m_p}}\,\frac{2\pi\nu m_p}{q_p} = 2\pi\nu\sqrt{2q_pm_pU}.$$

$$F_{\text{Л}} = 2\pi\nu\sqrt{2q_pm_pU}.$$

Проведем проверку по размерности:

$$\left[F_{\text{Л}}\right] = \text{Гц}\sqrt{\text{Кл}\cdot\text{кг}\cdot\text{В}} = \frac{1}{\text{с}}\sqrt{\text{Кл}\cdot\text{кг}\,\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}} =$$

$$= \frac{1}{\text{с}}\sqrt{\text{кг}\cdot\text{Дж}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}} = \sqrt{\text{Н}^2} = \text{Н}.$$

Выполним вычисления:

$$F_{\text{Л}} = 6,28\cdot 10^9\sqrt{2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 1,67\cdot 10^{-27}3\cdot 10^3} =$$

$$= 79,52\cdot 10^{-13} = 7,95\cdot 10^{-12}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F_{\text{Л}} = 7,95\cdot 10^{-12}$ Н.

Пример 19

Циклотрон предназначен для ускорения протонов до энергии $E = 8\cdot 10^{-13}$ Дж. Определить наибольший радиус орбиты, по которой движется протон, если индукция магнитного поля равна 1 Тл.

Дано

$E_{k\max} = 8\cdot 10^{-13}$ Дж

$B = 1$ Тл

$m_p = 1,67\cdot 10^{-27}$ кг

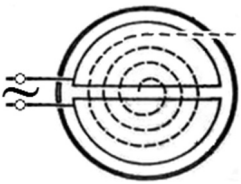
$q_p = 1,6\cdot 10^{-19}$ Кл

$R_{\max} - ?$

Решение

Циклотрон состоит из ускорительной камеры, помещенной в магнитное поле.

В центре камеры помещается источник заряженных частиц.



Ускорительная камера разделена на две половинки (дуанты). Дуанты присоединены к источнику переменного напряжения. Частота напряжения подбирается таким образом, чтобы за время движения заряженных частиц по дуге окружности (за счет действия магнитного поля) направление электрического поля сменилось на противоположное. Тогда, проходя зазор между дуантами, частица каждый раз

ускоряется. Процесс повторяется до тех пор, пока частица не наберет нужную скорость (энергию). Затем она выводится на мишень.

Таким образом, движение частицы в циклотроне можно рассматривать как чередование этапов разгона (в зазоре между дуантами) и движения по дуге окружности в магнитном поле с постоянной скоростью. Каждый следующий этап соответствует большей скорости (энергии) и соответственно большему радиусу орбиты.

Максимальная кинетическая энергия связана с максимальной скоростью соотношением

$$E_{k\max} = \frac{m v_{\max}^2}{2}.$$

Тогда скорость протона, соответствующая этой энергии,

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{k\max}}{m}}, \qquad (1)$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-13}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = \sqrt{9{,}58 \cdot 10^{14}} \approx 3{,}1 \cdot 10^{7} \text{ м/с}.$$

Так как $v_{\max}$ на порядок меньше скорости света, релятивистскими эффектами пренебрегаем. Для вычисления наибольшего радиуса орбиты протона, движущегося в магнитном поле, воспользуемся формулой

$$r = \frac{m}{|q|}\frac{v}{B},$$

полученной с использованием второго закона Ньютона и выражения для силы Лоренца. Тогда в нашем случае

$$r_{\max} = \frac{m}{|q|}\frac{v_{\max}}{B}. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получаем выражение для наибольшего радиуса орбиты протона в циклотроне:

$$r_{\max} = \frac{m}{|q|}\frac{\sqrt{2E_{k\max}}}{B\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{2E_{k\max}m}{B^2|q|^2}}.$$

Проверим полученную формулу по размерности:

$$[r_{\max}] = \sqrt{\frac{\text{Дж}\cdot\text{кг}}{\text{Тл}^2\cdot\text{Кл}^2}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}{\left(\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{Кл}\cdot\text{м}}\right)^2\text{Кл}^2}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}^2\cdot\text{с}^2}} =$$

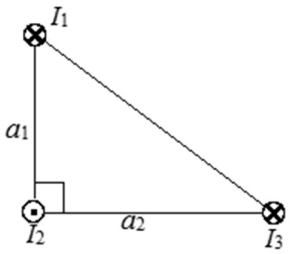
$$= \sqrt{\frac{1}{\text{Н}}\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\text{м}^2} = \sqrt{\frac{1}{\text{Н}}\text{Н}\cdot\text{м}^2} = \text{м}.$$

Выполним вычисления:

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{2\cdot 8\cdot 10^{-13}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}}{1^2(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}} = \sqrt{\frac{16\cdot 1{,}67\cdot 10^{-40}}{2{,}56\cdot 10^{-38}}} \approx 0{,}32 \text{ м}.$$

Ответ: $r_{\max} \approx 0{,}32$ м.

Пример 20



Три прямых проводника с токами расположены параллельно друг другу, как показано на рисунке. Проводники с токами I_1 = 10 А и I_2 = 30 А бесконечно длинные, а проводник с током I_3 = 40 А имеет длину l = 2 м. Расстояние между проводниками a_1 = 30 см и a_2 = 40 см. Определить силу, действующую на проводник с током I_3.

Дано

I_1 = 10 А
I_2 = 30 А
I_3 = 40 А
l = 2 м
a_1 = 0,3 м
a_2 = 0,4 м

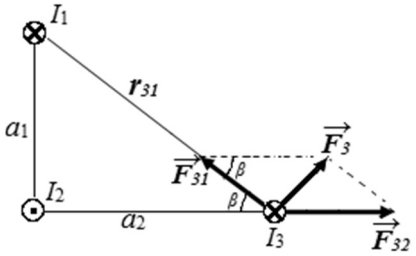
$\vec{F}_3$ – ?

Решение

Для решения поставленной задачи применим принцип суперпозиции сил:

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32},$$

где $\mathbf{F}_{31}$ – сила Ампера, действующая на проводник с током I_3 со стороны тока I_1; $\mathbf{F}_{32}$ – сила Ампера, действующая на проводник с током I_3 со стороны тока I_2.



Модуль силы F_3 может быть найден с использованием теоремы косинусов:

$$F_3 = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2 - 2F_{31}F_{32}\cos\beta}. \qquad (1)$$

Сила, действующая на участок проводника длиной l с током I со стороны длинного проводника с током I^*, расположенного параллельно первому на расстоянии d от него, определяется выражением

$$F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I\cdot I^*}{d}l.$$

Следовательно, для модулей сил F_{31} и F_{32} имеем:

$$F_{31} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_3I_1}{r_{31}}l; \qquad F_{32} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_3I_2}{a_2}l, \qquad (2)$$

где

$$r_{31} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ ; \qquad (3)$$

$\cos\beta$ можно найти из пространственного треугольника токов:

$$\cos\beta = \frac{a_2}{r_{31}} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}. \qquad (4)$$

Подставляя выражения (2), (3) и (4) в (1), получаем

$$F_3 =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_3I_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}l\right)^2 + \left(\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_3I_2}{a_2}l\right)^2 - 2\left(\frac{\mu_0\mu}{4\pi}2I_3l\right)^2 \frac{I_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\frac{I_2}{a_2}\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}} =$$

$$= \frac{\mu_0\mu I_3 l}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{a_2}\right)^2 - 2\frac{I_1I_2}{\left(a_1^2+a_2^2\right)}1} =$$

$$= \frac{\mu_0\mu I_3 l}{2\pi a_2}\sqrt{\frac{(I_2a_2 - I_1a_2)^2 + (I_2a_1)^2}{a_1^2+a_2^2}}.$$

Выполним проверку по размерности:

$$[F_3] = \frac{\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{А}^2\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2}} = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}^2}{\text{м}} = \frac{\frac{\text{Вб}}{\text{А}}\text{А}^2}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}\cdot\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{м}} =$$

$$= \text{Тл}\cdot\text{м}\cdot\text{А} = \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{Кл}\cdot\text{м}}\,\text{м}\,\frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{Н}.$$

Проведем вычисления:

$$F_3 = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot1\cdot40\cdot2}{2\pi\cdot0,4}\sqrt{\frac{(30\cdot0,4-10\cdot0,4)^2+(30\cdot0,3)^2}{0,09+0,16}} =$$

$$= 9633,3\cdot10^{-7} = 0,96\cdot10^{-3}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F_3 = 0,96\cdot10^{-3}$ Н.

Пример 21

В магнитное поле, меняющееся по закону $B = B_0 \cos \omega t$, где $B_0 = 0{,}1$ Тл, $\omega = 4$ рад/с, помещена квадратная рамка со стороной $a = 50$ см, причем нормаль к рамке образует с направлением поля угол 45°. Определить ЭДС индукции, возникающую в рамке через 5 с.

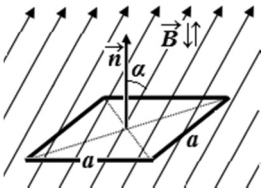
Дано

$B = B_0 \cos \omega t$
$B_0 = 0{,}1$ Тл
$\omega = 4$ рад/с
$a = 0{,}50$ м
$\alpha = 45°$
$t_1 = 5$ с

$\varepsilon_1 - ?$

Решение

В замкнутом неподвижном контуре возникает электродвижущая сила при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур. Значение ЭДС определяется законом Фарадея:



$$\varepsilon_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Магнитный поток, пронизывающий рамку, определяется выражением

$$\Phi = BS\cos\alpha.$$

В нашем случае $S = a^2$, $\alpha = 45°$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $B = B_0 \cos \omega t$.

Следовательно, зависимость магнитного потока от времени будет задаваться выражением

$$\Phi(t) = (B_0 \cos \omega t)a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 B_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\varepsilon_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{a^2 B_0 \omega \sqrt{2}}{2} \sin \omega t.$$

Тогда для момента t_1 имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{a^2 B_0 \omega \sqrt{2}}{2} \sin \omega t_1 .$$

Выполним проверку по размерности:

$$[\varepsilon_1] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Тл}}{\text{с}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \text{В}.$$

Проведем вычисления:

$$\varepsilon_1 = \frac{0,25 \cdot 0,1 \cdot 4 \cdot 1,414}{2} \sin(4 \cdot 5) = 0,0707 \sin(20 \text{ рад}) =$$

$$= 0,0707 \cdot 0,913 = 0,0645 = 65,4 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

Ответ: $\varepsilon_1 = 65,4 \cdot 10^{-3}$ В.

Пример 22

На соленоид длиной l = 20 см и площадью поперечного сечения $S = 30$ см^2 надета катушка с числом витков $N_к$ = 10. Соленоид имеет $N_с$ = 320 витков, и по нему течет ток I_1 = 3 А. Какая средняя ЭДС индуцируется в надетой на соленоид катушке при изменении тока в соленоиде до I_2 = 1 А за время Δt = 1 мс?

Дано

l = 0,2 м
$S = 30 \cdot 10^{-4}$ м^2
$N_к$ = 10
$N_с$ = 320
I_1 = 3 А
I_2 = 1 А
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ с

$\langle \varepsilon_i \rangle$ – ?

Решение

Индукция магнитного поля, создаваемого «бесконечным» соленоидом на его оси:

$$B = \mu_0 \mu \frac{N_с}{l} I. \qquad (1)$$

Это магнитное поле пронизывает катушку, надетую на соленоид, создавая магнитный поток через ее поперечное сечение:

$$\Phi_к = N_к B S. \qquad (2)$$

Согласно закону электромагнитной индукции в катушке возникает ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_к}{dt}. \qquad (3)$$

Среднее значение ЭДС индукции за время Δt определяется выражением

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} |\varepsilon_i|\, dt. \qquad (4)$$

С учетом (1), (2) и (3) получим:

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \left|\frac{d\Phi_к}{dt}\right| dt;$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{\Delta t}\left|\int_{B_1}^{B_2} d(N_к BS)\right| = \frac{N_к S}{\Delta t}\left|\int_{B_1}^{B_2} dB\right| = \frac{N_к S}{\Delta t}\,\frac{\mu_0 \mu N_с}{l}\left|\int_{I_1}^{I_2} dI\right|;$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{N_к S}{\Delta t}\,\frac{\mu_0 \mu N_с}{l}\,|I_2 - I_1|;$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\mu_0 \mu N_с N_к S}{l \Delta t}|I_2 - I_1|.$$

Выполним проверку по размерности:

$$\left[\langle \varepsilon_i \rangle\right] = \frac{\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\,\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{с}}\,\text{А} = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{с}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{В}.$$

Проведем вычисления:

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 320\cdot 10\cdot 30\cdot 10^{-4}}{0{,}2\cdot 10^{-3}}|1-3| =$$

$$= 120\ 57{,}6\cdot 10^{-5} = 120{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{В}.$$

Ответ: $\langle \varepsilon_i \rangle = 120{,}6\cdot 10^{-3}$ В.

Пример 23

Плоский виток провода расположен перпендикулярно однородному магнитному полю. Когда виток повернулся на угол 180°, по нему прошел заряд 7,2 мкКл. На какой угол повернется виток, если по нему пройдет заряд 1,8 мкКл?

Дано

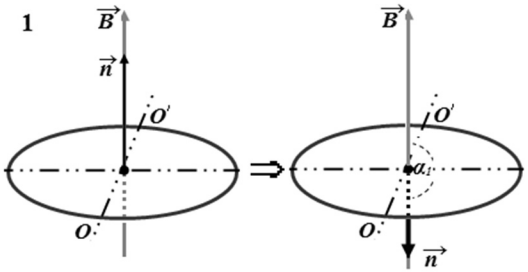
$\alpha_1 = 180°$

$Q_1 = 7{,}2 \cdot 10^{-6}$ Кл

$Q_2 = 1{,}8 \cdot 10^{-6}$ Кл

$\alpha_2 - ?$

Решение



1. В начальный момент виток неподвижен, поток вектора **B** через плоскость витка $\Phi_0 = BS$. Затем виток повернули на угол $\alpha_1 = 180°$.

$$\Phi_1 = -BS.$$

$$\Delta\Phi_1 = \Phi_1 - \Phi_0 = -2BS.$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции получим

$$|\varepsilon_1| = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{2BS}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Согласно закону Ома по витку пройдет индукционный ток I_1:

$$I_1 = \frac{|\varepsilon_1|}{R}. \qquad (2)$$

По определению электрического тока

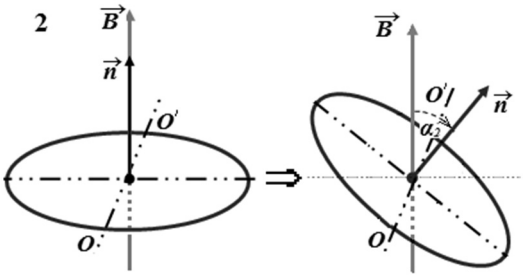
$$I_1 = \frac{Q_1}{\Delta t}, \qquad (3)$$

где Q_1 – заряд, прошедший по витку за время Δt.

Решая совместно систему уравнений (1), (2), (3), получаем

$$\frac{2BS}{\Delta t} = \frac{Q_1 R}{\Delta t} \Rightarrow 2BS = Q_1 R. \qquad (4)$$

2. Из начального положения виток повернули на угол α_2.



$$\Phi_2 = BS\cos\alpha_2 .$$

Следовательно, магнитный поток изменится на величину

$$\Delta\Phi_2 = \Phi_2 - \Phi_0 = BS\cos\alpha_2 - BS = BS(\cos\alpha_2 - 1).$$

По аналогии с (4) получим

$$BS(1-\cos\alpha_2) = Q_2 R. \qquad (5)$$

Решая совместно систему уравнений (4) и (5), получаем

$$1-\cos\alpha_2 = 2\frac{Q_2 R}{Q_1 R} \Rightarrow 1-\cos\alpha_2 = 2\frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \cos\alpha_2 = \frac{Q_1 - 2Q_2}{Q_1}.$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{Q_1 - 2Q_2}{Q_1}\right).$$

Проверка по размерности очевидна. Проведем вычисления:

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{7{,}2 - 2\cdot 1{,}8}{7{,}2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°.$$

Ответ: $\alpha_2 = 60°$.

Пример 24

Железнодорожные рельсы изолированы друг от друга и от земли и соединены через вольтметр. Каково показание прибора, если по рельсам проходит поезд со скоростью $v = 20$ м/с? Вертикальную составляющую магнитного поля Земли принять равной $B_{\text{вз}} = 50$ мкТл, а расстояние между рельсами равно $l = 1{,}54$ м. Самоиндукцией пренебречь.

Дано

$v = 20$ м/с

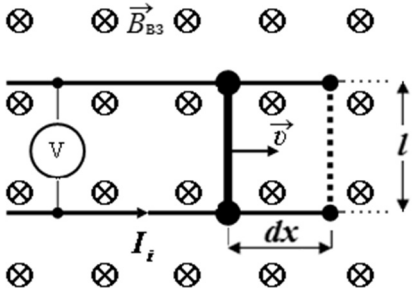
$B_{\text{вз}} = 50 \cdot 10^{-6}$ Тл

$l = 1{,}54$ м

ε_i – ?

Решение

Рассмотрим контур, образованный парой рельс, участком цепи с вольтметром и колесной парой.



При движении проводника (колесной пары) по рельсам в магнитном поле Земли магнитный поток, пронизывающий данный контур, изменяется. В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея в этом контуре возникнет ЭДС индукции, которую покажет включенный в цепь вольтметр:

$$|\varepsilon_i| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|. \qquad (1)$$

Магнитный поток, пронизывающий контур, изменяется за счет увеличения площади контура dS:

$$dS = ldx, \qquad (2)$$

где dx – расстояние, пройденное движущимся поездом за время dt:

$$dx = vdt. \qquad (3)$$

Тогда

$$d\Phi = B_{\text{вз}} dS, \qquad (4)$$

Решая совместно систему уравнений (1), (2), (3), (4), получаем

$$\varepsilon_i = \frac{B_{\text{в}3} l v dt}{dt} = B_{\text{в}3} l v.$$

Проверка по размерности:

$$[\varepsilon_i] = \text{Тл} \cdot \text{м} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} = \text{В}.$$

Вычисления:

$$\varepsilon_i = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}54 \cdot 20 = 1540 \cdot 10^{-6} = 1{,}54 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

Ответ: $\varepsilon_i = 1{,}54 \cdot 10^{-3}$ В.

Пример 25

В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл движется прямой проводник длиной $l = 40$ см. Найти разность потенциалов, возникающую на концах проводника в двух случаях: а) проводник движется с постоянной скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно линиям поля и оси проводника; б) проводник вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с, ось вращения проходит через один из его концов и совпадает с направлением магнитного поля.

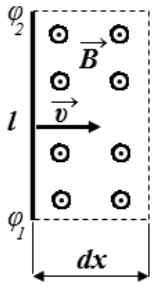
Дано
$B = 0{,}5$ Тл
$l = 0{,}4$ м
$v = 5$ м/с
$\omega = 5$ рад/с

а) $(\varphi_1 - \varphi_2) - ?$
б) $(\varphi_1 - \varphi_2) - ?$

Решение

а) Проводник движется с постоянной скоростью v перпендикулярно линиям поля и оси проводника.

На электрические заряды, перемещающиеся вместе с проводником в магнитном поле, действует сила Лоренца. Она приводит к перераспределению свободных носителей вдоль проводника. Сила Лоренца в данном случае является сторонней силой, и в проводнике возникает ЭДС индукции. Разность потенциалов, возникающая на концах проводника, будет равна ЭДС:



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varepsilon_i . \qquad (1)$$

Для нахождения ЭДС индукции применим закон Фарадея:

$$|\varepsilon_i| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|. \quad (2)$$

Проводник, двигаясь в магнитном поле, пересекает магнитный поток:

$$d\Phi = BdS, \quad (3)$$

где dS – площадь, пересекаемая движущимся проводником:

$$dS = ldx, \quad (4)$$

dx – расстояние, пройденное движущимся проводником за время dt:

$$dx = vdt. \quad (5)$$

Решая совместно систему уравнений (1), (2), (3), (4) и (5), получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Blvdt}{dt} = Blv.$$

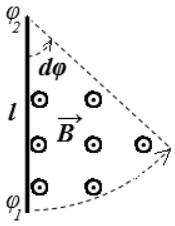
Выполним проверку по размерности:

$$[\varphi_1 - \varphi_2] = \text{Тл} \cdot \text{м}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}} = \text{В}.$$

Проведем вычисления:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 5 = 1\ \text{В}.$$

б) Проводник вращается с постоянной угловой скоростью ω, ось вращения проходит через один из его концов и совпадает с направлением магнитного поля.



Для решения задачи проведем аналогичные рассуждения:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = |\varepsilon_i| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|. \quad (6)$$

Проводник, двигаясь в магнитном поле, пересекает магнитный поток:

$$d\Phi = BdS, \quad (7)$$

где dS – площадь, пересекаемая движущимся проводником:

$$dS = \frac{\pi l^2}{2\pi} d\varphi = \frac{l^2}{2} d\varphi, \tag{8}$$

$d\varphi$ – угол, выраженный в радианах, на который повернулся проводник за время dt:

$$d\varphi = \omega \cdot dt. \tag{9}$$

Решая совместно систему уравнений (6), (7), (8) и (9), для разности потенциалов получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Bl^2 \omega dt}{2dt};$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Bl^2 \omega}{2}.$$

Осуществим проверку по размерности:

$$[\varphi_1 - \varphi_2] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 \frac{1}{\text{с}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} = \text{В}.$$

Выполним вычисления:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}16 \cdot 5}{2} = 0{,}2 \text{ В}.$$

Ответ: а) $\varphi_1 - \varphi_2 = 1$ В; б) $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}2$ В.

Пример 26

Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N = 2000$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $I = 5$ А магнитный поток $\Phi = 6$ мкВб. Определить индуктивность L соленоида и энергию W магнитного поля соленоида.

Дано	**Решение**
$N = 2000$ $I = 5$ А $\Phi = 6 \cdot 10^{-6}$ Вб	По определению индуктивность L является коэффициентом пропорциональности между током в контуре и потокосцеплением ψ:
$L - ?$ $W - ?$	$$L = \frac{\psi}{I}. \quad (1)$$

С другой стороны, потокосцепление ψ может быть найдено через магнитный поток и число витков:

$$\psi = \Phi N. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), для индуктивности соленоида получаем

$$L = \frac{\Phi N}{I}. \quad (3)$$

Проверка по размерности очевидна:

$$[L] = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \text{Гн}.$$

Подставив численные значения, для индуктивности получим

$$L = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 2000}{5} = 2400 \cdot 10^{-6} = 2{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Для нахождения энергии магнитного поля соленоида воспользуемся выражением

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (4)$$

Используя полученное выражение для индуктивности (3), для энергии магнитного поля в соленоиде получаем

$$W = \frac{\Phi N I}{2}.$$

Проведем проверку по размерности:

$$[W] = \text{Вб} \cdot \text{А} = \text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{А} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \text{А}^2 = \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А} = \text{В} \cdot \text{Кл} = \text{Дж}.$$

Выполним вычисления:

$$W = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 2000 \cdot 5}{2} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Ответ: $L = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ Гн, $W = 30 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Пример 27

Складываются два колебания одинакового направления, выраженные уравнениями $x_1 = A_1 \cos([2\pi / T][t + \tau_1])$, $x_2 = A_2 \cos([2\pi / T][t + \tau_2])$, где $A_1 = 3$ см, $A_2 = 2$ см, $\tau_1 = 1/6$ с, $\tau_2 = 1/3$ с, $T = 2$ с. Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний и записать уравнение результирующего колебания.

Дано	**СИ**	**Решение**
$x_1 = A_1 \cos([2\pi / T][t + \tau_1])$ $x_2 = A_2 \cos([2\pi / T][t + \tau_2])$ $A_1 = 3$ см $A_2 = 2$ см $\tau_1 = 1/6$ с $\tau_2 = 1/3$ с $T = 2$ с	$A_1 = 0{,}03$ м $A_2 = 0{,}02$ м	Преобразуем оба уравнения к канонической форме: $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Получим: $x_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{T} \tau_1\right)$, $x_2 = A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{T} \tau_2\right)$.
Векторная диаграмма $x(t) = ?$		

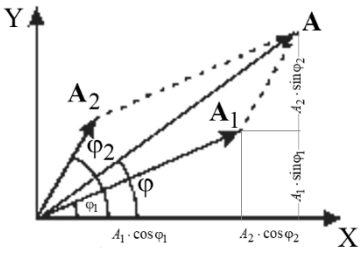
Отсюда видно, что оба складываемых гармонических колебания имеют одинаковую циклическую частоту:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ с}^{-1} \approx 3{,}14 \text{ с}^{-1}.$$

Начальные фазы φ_1 первого и φ_2 второго колебания соответственно равны:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\tau_1 = \frac{2\pi}{2}\frac{1}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ рад} = 30°;$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T}\tau_2 = \frac{2\pi}{2}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ рад} = 60°.$$



Построим векторную диаграмму для момента $t = 0$. Изобразим векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ длиной $A_1 = 3$ см и $A_2 = 2$ см под углами $\varphi_1 = 30°$ и $\varphi_2 = 60°$ к оси Ox и вектор, равный их сумме: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$.

Результирующее колебание будет происходить с той же частотой ω.

Амплитуду результирующего колебания можно найти, используя теорему косинусов:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Проверка по размерности очевидна: $[A] = \sqrt{\text{м}^2} = \text{м}$.

Начальную фазу результирующего колебания найдем из геометрических соображений:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Проведем вычисления:

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos(60° - 30°)}\cdot 10^{-2} = 4{,}48\cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3\sin 30° + 2\sin 60°}{3\cos 30° + 2\cos 60°} = \operatorname{arctg}(0{,}898) = 0{,}735 \text{ рад}.$$

Подставляя найденные числовые значения в общую форму канонического уравнения гармонических колебаний, для результирующего колебания получаем уравнение $x(t) = 4{,}84 \cdot 10^{-2} \cos(3{,}14t + 0{,}735)$ м.

Ответ: $x(t) = 4{,}84 \cdot 10^{-2} \cos(3{,}14t + 0{,}735)$ м.

Пример 28

Тонкий однородный обруч радиусом 60 см подвешен на вбитый в стену гвоздь и совершает колебания в плоскости, параллельной стене. Определить период таких колебаний.

Дано

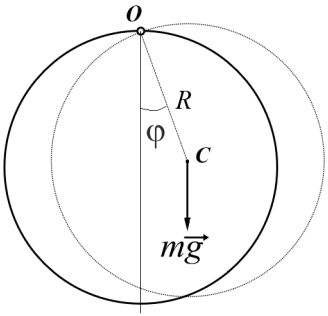
$R = 0{,}6$ м

T –?

Решение

При малых углах отклонения колебания обруча можно рассматривать как колебания физического маятника.

Период колебаний физического маятника определяется выражением



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

где I – момент инерции обруча относительно точки подвеса O; m – масса обруча; l – расстояние от точки подвеса обруча до его центра масс. В нашем случае $l = R$.

Момент инерции обруча можно найти по теореме Штейнера:

$$I = I_0 + ml^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

Тогда для периода колебаний обруча получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Проведем проверку по размерности:

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{м/с}^2}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с}.$$

Выполним вычисления:

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}6}{9{,}8}} \approx 2{,}20 \text{ с}.$$

Ответ: $T \approx 2{,}20$ с.

Пример 29

Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 25$ мГн, конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 1{,}0$ Ом. Амплитуда заряда на пластинах конденсатора $Q_m = 1{,}0$ мКл. Определить: 1) период колебаний контура; 2) логарифмический декремент затухания колебаний в контуре; 3) уравнение зависимости напряжения на обкладках конденсатора от времени.

Дано

$L = 25$ мГн
$C = 10$ мкФ
$R = 1{,}0$ Ом
$Q_m = 1{,}0$ мКл

$T - ?$
$\lambda - ?$
$U(t) - ?$

Решение

1. Период затухающих колебаний в реальном колебательном контуре равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

где ω_0 – циклическая частота собственных незатухающих гармонических колебаний контура $\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$;

δ – коэффициент затухания колебаний $\left(\delta = \frac{R}{2L}\right)$.

Тогда для периода получим

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{4L^2}^2}}. \qquad (1)$$

Выполним проверку по размерности:

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\text{Гн}\cdot\text{Ф}} - \frac{\text{Ом}}{\text{Гн}^2}^2}} = \left(\frac{1}{\text{Гн}\cdot\text{Ф}} - \frac{\text{Ом}}{\text{Гн}^2}^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{Кл}}{\text{В}}} - \left(\frac{\text{В}}{\text{А}\frac{\text{Вб}}{\text{А}}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\text{с}\cdot\text{с}} - \left(\frac{1}{\text{с}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \text{с}.$$

Выполним вычисления:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{2{,}5\cdot10^{-2}\cdot1\cdot10^{-5}} - \frac{1^2}{4(2{,}5\cdot10^{-2})^2}}} = 3{,}14\cdot10^{-3}\ \text{с}.$$

2. Логарифмический декремент затухания колебаний по определению равен натуральному логарифму отношения двух соседних амплитуд:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)}.$$

При этом амплитудой затухающих колебаний называется величина, равная

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t}.$$

Подставляя, получим

$$\lambda = \delta T = \frac{R}{2L}T.$$

Проведем проверку по размерности. Ожидаемо, что логарифмический декремент затухания – величина безразмерная.

$$[\lambda]=\frac{\text{Ом}\cdot\text{с}}{\text{Гн}}=\frac{\text{В}}{\text{А}}\,\text{с}\,\frac{\text{А}}{\text{Вб}}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{Вб}}=\frac{\text{Вб}}{\text{Вб}}=1\ \text{(безразмерная величина)}.$$

Проведем вычисления: $\lambda=\dfrac{1\cdot 3{,}14\cdot 10^{-3}}{2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2}}=0{,}063.$

3. Амплитуда напряжения на конденсаторе U_m связана с амплитудой заряда на обкладках:

$$U_m=\frac{Q_m}{C}.$$

Следовательно, напряжение на конденсаторе изменяется по закону:

$$U(t)=\frac{Q_m}{C}e^{-\delta t}\cos\omega t=\frac{Q_m}{C}e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega t. \qquad (2)$$

Проверка по размерности очевидна: $[U]=\dfrac{\text{Кл}}{\Phi}$=В.

Подставив численные значения, найдем:

$$U_m=\frac{1\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^{-5}}=100\ \text{В};\qquad \delta=\frac{1}{2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2}}=20\ \text{с}^{-1};$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{2{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 1\cdot 10^{-5}}-20^2}=2\cdot 10^3\ \frac{1}{\text{с}}.$$

Тогда уравнение зависимости напряжения на обкладках конденсатора от времени будет иметь вид

$$U(t)=100e^{-20t}\cos(2\cdot 10^3 t)\ \text{В}.$$

Ответ: $T=3{,}14\cdot 10^{-3}$ с, $\lambda=0{,}063$, $U(t)=100e^{-20t}\cos(2\cdot 10^3 t)$ В.

Пример 30

Грузик массой 250 г, подвешенный на пружине жесткостью 10 Н/м, совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления 0,01 кг/с. Амплитудное значение вынуждающей силы составляет F_0 = 0,01 Н. Определить коэффициент затухания δ и резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$.

Дано

$m = 250 \cdot 10^{-3}$ кг
$k = 10$ Н/м
$r = 0{,}01$ кг/с
$F_0 = 0{,}01$ Н

δ – ?
$A_{\text{рез}}$ – ?

Решение

На груз действуют силы:

- сила упругости

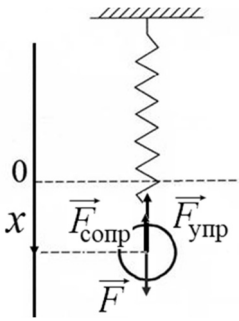
$$F_{\text{упр}} = -kx,$$

- сила сопротивления

$$F_{\text{сопр}} = -rv,$$

- внешняя гармоническая сила

$$F = F_0 \cos(\omega t).$$



Запишем закон движения данного маятника (второй закон Ньютона):

$$ma_x = F_{\text{упр}\,x} + F_{\text{сопр}\,x} + F_x,$$

$$ma_x = -kx - rv + F_0 \cos(\omega t),$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t).$$

Полученное уравнение соответствует дифференциальному уравнению вынужденных колебаний: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\cos(\omega t).$

Для нашего случая

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \delta = \frac{r}{2m}. \tag{1}$$

Проверка по размерности: $[\delta] = \dfrac{\text{кг/с}}{\text{кг}} = \dfrac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$.

Вычислим коэффициент затухания: $\delta = \dfrac{0,01}{2 \cdot 250 \cdot 10^{-3}} = 0,02 \text{ с}^{-1}$.

Амплитуда вынужденных колебаний определяется выражением: $A = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}$. Резонансная частота $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$.

Тогда амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $A_{\text{рез}} = \dfrac{F_0 / m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$. Подставляя в эту формулу выражения (1) для собственной частоты колебаний и коэффициента затухания, получаем выражение для резонансной амплитуды колебаний маятника, о котором идет речь в данной задаче:

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0 / m}{2\dfrac{r}{2m}\sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{r}{2m}\right)^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{r}{2m}\right)^2}}. \tag{2}$$

Проведем проверку по размерности:

$$[A_{\text{рез}}] = \frac{\text{Н}}{\dfrac{\text{кг}}{\text{с}}\sqrt{\dfrac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{кг}} - \left(\dfrac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{кг}}\right)^2}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2}{\dfrac{\text{кг}}{\text{с}}\sqrt{\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} - \left(\dfrac{1}{\text{с}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\dfrac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{с}}\sqrt{\dfrac{1}{\text{с}^2} - \left(\dfrac{1}{\text{с}}\right)^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}\sqrt{\left(\dfrac{1}{\text{с}}\right)^2}} = \text{м}.$$

Выполним вычисления:

$$A_{\text{рез}} = \frac{0{,}01}{0{,}01\sqrt{\dfrac{10}{250\cdot 10^{-3}} - \left(\dfrac{0{,}01}{2\cdot 250\cdot 10^{-3}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{40 - 4\cdot 10^{-4}}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{40}} \approx 0{,}158 \text{ м}.$$

Ответ: $\delta = 0{,}02 \text{ с}^{-1}$, $A_{\text{рез}} \approx 0{,}158$ м.

Пример 31

Шарик массой 50 г подвешен на пружине жесткостью 20 Н/м в некоторой вязкой среде. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой 25 рад/с шарик совершает в этой среде установившиеся колебания. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\frac{3}{4}\pi$. Найти добротность для свободных затухающих колебаний шарика в этой среде.

Дано

$m = 50\cdot 10^{-3}$ кг

$k = 20$ Н/м

$\omega = 25$ рад/с

$\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ рад

$Q - ?$

Решение

Добротность колебательной системы характеризует способность системы к сохранению энергии колебаний.

Добротность равна приращению фазы колебаний колебательной системы, за которую энергия ее затухающих колебаний уменьшается в *e* раз.

$$Q = \frac{\omega_з}{2\delta}. \qquad (1)$$

Частота свободных затухающих колебаний определяется выражением

$$\omega_з = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \qquad (2)$$

С учетом (2) добротность колебательной системы может быть определена по формуле

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\delta}, \qquad (3)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота колебаний пружинного маятника; δ – коэффициент затухания. Коэффициент затухания δ можно найти из фазочастотной характеристики для установившихся вынужденных колебаний.

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \Rightarrow \quad \delta = \operatorname{tg}\varphi \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega}.$$

Подстановка выражений для собственной частоты и коэффициента затухания в формулу для добротности (3) делает ее громоздкой. Поэтому найдем численные значения указанных величин, а затем с использованием найденных значений определим добротность.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{20}{50 \cdot 10^{-3}}} = 20 \text{ рад/с}, \qquad \delta = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{25^2 - 400}{2 \cdot 25} = 4{,}5 \text{ с}^{-1}.$$

$$Q = \frac{\sqrt{400 - 4{,}5^2}}{2 \cdot 4{,}5} \approx 2{,}17.$$

Ответ: $Q \approx 2{,}17$.

Пример 32

Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью v = 20 м/с. Две точки, лежащие на этой прямой на расстояниях x_1 = 12 м и x_2 = 15 м от источника волн, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 0{,}75\pi$. Найти длину волны λ, написать уравнение волны и найти смещение

указанных точек в момент t_1 = 1,2 с, если амплитуда колебаний источника A = 0,1 м.

Дано

Y = 20 м/с
x_1 = 12 м
x_2 = 15 м
$\Delta\varphi = 0{,}75\pi$
t_1 = 1,2 с
A = 0,1 м

λ – ?
$\xi(x,\ t)$ – ?
$\xi(x_1,\ t_1)$ – ?
$\xi(x_2,\ t_1)$ – ?

Решение

Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз 2π. Точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi$. Следовательно,

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda},$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1). \qquad (1)$$

Проведем проверку по размерности: $[\lambda] = \frac{\text{рад}}{\text{рад}}\text{м} = \text{м}$.

Выполним вычисления: $\lambda = \frac{2\pi}{0{,}75\pi}(15-12) = 8$ м.

Общий вид уравнения плоской волны в отсутствие затухания –

$$\xi(x,\ t) = A\cos(\omega t - kx). \qquad (2)$$

Для записи уравнения волны в условиях данной задачи нам необходимо определить циклическую частоту ω и волновое число k.

Циклическая частота – быстрота изменения фазы колебаний во времени $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{\lambda}{v} \Rightarrow \omega = 2\pi\frac{v}{\lambda}$.

Проверка по размерности: $[\omega] = \text{рад}\frac{\text{м/с}}{\text{м}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Вычисления:

$$\omega = 2\pi\frac{20}{8} = 5\pi\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \qquad (3)$$

Волновое число – быстрота изменения фазы колебаний по координате в пространстве $k = \frac{d\varphi}{dx}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Размерность очевидна: $[k] = \frac{\text{рад}}{\text{м}}$.

Вычисления:

$$k = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad \frac{\text{рад}}{\text{м}}. \tag{4}$$

Подставляя найденные величины (3) и (4) в уравнение волны (2), с учетом заданного значения амплитуды колебаний источника получаем

$$\xi(x,\ t) = 0{,}1\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{4}x\right) \text{ м}. \tag{5}$$

Чтобы найти смещение ξ указанных точек, достаточно подставить в уравнение волны (5) значения x_1 и x_2 и t_1:

$$\xi_1 = 0{,}1\cos\left(5\pi \cdot 1{,}2 - \frac{\pi}{4}12\right) = 0{,}1\cos(6\pi - 3\pi) = 0{,}1\cos(3\pi)(\ ) = -0{,}1 \text{ м}.$$

$$\xi_2 = 0{,}1\cos\left(5\pi \cdot 1{,}2 - \frac{\pi}{4}15\right) = 0{,}1\cos(6\pi - 3{,}75\pi) =$$

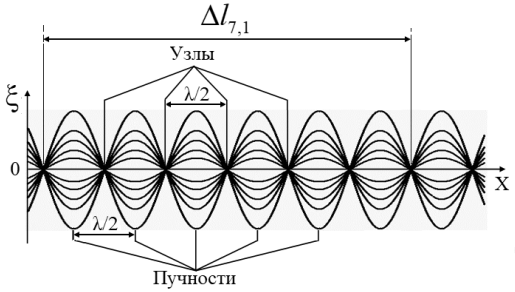
$$= 0{,}1\cos(2{,}25\pi) = 0{,}1\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}07 \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda = 8$ м, $\xi(x,\ t) = 0{,}1\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{4}x\right)$ м, $\xi_1 = -0{,}1$ м, $\xi_2 \approx 0{,}07$ м.

Пример 33

Определить длину бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первым и седьмым узлом равно 60 см.

Дано	**Решение**
$\Delta l_{7,1} = 0,6$ м	
λ – ?	



Узлы стоячей волны – это точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, пучности – точки, в которых амплитуда колебаний максимальна. В стоячей волне расстояния между двумя соседними пучностями или двумя соседними узлами одинаковы и равны половине длины бегущей волны.

По условию задачи задано расстояние между первым и седьмым узлом, очевидно, что $\Delta l_{7,1} = 6\dfrac{\lambda}{2} = 3\lambda$.

Следовательно,

$$\lambda = \frac{\Delta l_{7,1}}{3}, \quad [\lambda] = \text{м}.$$

Выполним вычисления: $\lambda = \dfrac{0,6}{3} = 0,2$ м.

Ответ: $\lambda = 0,2$ м.

6. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

Содержание		Номера задач
1	Закон Кулона. Напряженность. Суперпозиция полей	201–210
2	Потенциал, разность потенциалов. Работа перемещения зарядов в электростатическом поле	211–220
3	Электрическая емкость. Конденсаторы	221–230
4	Постоянный ток	231–240
5	Магнитное поле. Магнитная индукция. Закон Био – Савара – Лапласа. Принцип суперпозиции	241–250
6	Сила Лоренца. Сила Ампера	251–260
7	Магнитный поток. Закон электромагнитной индукции. ЭДС самоиндукции	261–270
8	Гармонические колебания. Сложение колебаний	271–280
9	Затухающие колебания. Вынужденные колебания. Явление резонанса. Переменный ток	281–290
10	Волновые процессы. Бегущие и стоячие волны	291–300

7. ТАБЛИЦА ВАРИАНТОВ ЗАДАЧ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2

Вариант[2]	Номера задач									
1	201	211	221	231	241	251	261	271	281	291
2	202	212	222	232	242	252	262	272	282	292
3	203	213	223	233	243	253	263	273	283	293
4	204	214	224	234	244	254	264	274	284	294
5	205	215	225	235	245	255	265	275	285	295
6	206	216	226	236	246	256	266	276	286	296
7	207	217	227	237	247	257	267	277	287	297
8	208	218	228	238	248	258	268	278	288	298
9	209	219	229	239	249	259	269	279	289	299
10	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300

[2] Номер варианта определяется последней цифрой шифра (номера зачетной книжки) студента.

8. ПОРЯДОК ОФОРМЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа выполняется в обычной школьной тетради, на обложке которой приводятся сведения по следующему образцу.

Контрольная работа № 2 по физике
студента II курса ЗО ИДО НГТУ
специальность: №_____
Иванова Петра Ивановича (ФИО – без сокращений)
шифр 30675231
Вариант № 1

2. Контрольная работа выполняется ручкой. В работе допускается использование чернил синего, фиолетового или черного цвета. Графики и рисунки аккуратно выполняются остро отточенным карандашом с использованием линейки и циркуля.

3. При оформлении контрольной работы **условия задач записываются полностью, без сокращений**. **Каждая задача оформляется с новой страницы.** Для замечаний преподавателя следует оставлять поля не менее 30 мм.

4. Решение задачи необходимо начинать с **внимательного чтения условия**. При первом же чтении следует определить, на какую тему, о каком конкретном процессе или состоянии идет речь, каким законам он подчиняется, какими параметрами его можно охарактеризовать.

5. Далее следует записать краткое условие задачи: что «дано», что «найти». Все величины необходимо выражать в единицах **СИ**.

6. Для того чтобы представить взаимодействие тел, их расположение, динамику процессов, следует **сделать чертеж (схему или рисунок)**, отражающий процессы и явления, описываемые задачной ситуацией. Если рассматриваемые явления характеризуются векторными величинами, то на чертеже необходимо показать соответствующие

векторы. Удобно если графическая схема отражает процессы и явления в динамике, например, можно сделать два рисунка: один, соответствующий началу явления, другой – окончанию.

7. Следующий шаг – необходимо записать уравнения или формулы законов, описывающих процессы и явления, о которых идет речь в задаче. **Составление системы уравнений, полностью отражающих конкретную ситуацию, физический процесс, является основной трудностью при решении задачи.**

- Исходные уравнения следует записывать в векторной форме (если речь идет о векторных уравнениях), а затем в скалярной форме.
- Если при решении задачи применяется формула, не выражающая основной закон (например, закон Кулона, закон Ома) или являющаяся хорошо известным следствием этих законов, то ее необходимо вывести.
- Символическую запись законов, используемых для решения задачи, необходимо сопровождать краткими пояснениями, расшифровкой буквенных обозначений, формулировкой законов и условий, гарантирующих выполнение этих законов.

8. Вывод расчетной формулы следует **осуществлять в общем виде**. Решить задачу в общем виде – это значит выразить искомую величину через те величины, которые заданы в условии задачи или справочных таблицах.

9. Полученную расчетную формулу необходимо **проверить по размерности**. Получение адекватных единиц измерения искомой величины служит одним из важнейших показателей правильности решения задачи.

10. **Вычислять искомую величину** нужно **с учетом правил приближенных вычислений**. Правила приближенных вычислений можно найти на стр. 14–15 в пособии: Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие / Н. В. Чичерина, В. В. Христофоров. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2024. – 92.

11. После получения численного значения рекомендуется **оценить реальность** (правдоподобность) **результата** исходя из здравого смысла (встречаются ли в действительности такие численные значения искомой величины).

12. Последний этап решения – **записать ответ**.

9. ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

201. Два одинаковых положительных заряда $q = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ Кл находятся в воздухе на расстоянии L = 8,0 см друг от друга. Определить напряженность электростатического поля: а) в точке O, находящейся на середине отрезка, соединяющего заряды; б) в точке A, расположенной на расстоянии r = 5,0 см от каждого заряда.

202. Два положительных точечных заряда q и $9q$ закреплены на расстоянии L = 100 см. Где между ними, какой по величине и знаку заряд надо поместить, чтобы он находился в устойчивом равновесии?

203. Отрицательный заряд $q_1 = -5q$ и положительный $q_2 = +2q$ закреплены на расстоянии r = 100 см друг от друга. Где на линии, соединяющей заряды, следует поместить заряд Q, чтобы он находился в равновесии?

204. Два отрицательно заряженных шарика, расположенных на расстоянии L = 4,8 мкм, взаимодействуют с силой $F = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ Н. Найти число «избыточных» электронов на каждом шарике. Шарики принять за материальные точки.

205. Два равных по величине положительных заряда $q_1 = q_2 = 3{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл расположены в вершинах острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника на расстоянии L = 2,0 см. Определить, с какой силой оба заряда действуют на третий заряд $q_3 = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл, находящийся в вершине прямого угла треугольника. Ответ пояснить рисунком.

206. Три одинаковых заряда $q_1 = q_2 = q_3 =$ 2,0 нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 10,0 см. Определить силу, действующую на один из этих зарядов.

207. В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые положительные заряды q = 3,0 нКл. Какой по величине и знаку заряд Q

необходимо поместить в центр квадрата, чтобы вся система зарядов находилась в равновесии?

208. Определить напряженность электростатического поля в центре шестиугольника со стороной a, в вершинах которого расположены: а) равные заряды одного знака; б) заряды, равные по модулю, но чередующиеся по знаку.

209. В вершинах шестиугольника со стороной a = 0,1 м расположены точечные заряды q, $2q$, $3q$, $4q$, $5q$ и $6q$ (q = 0,10 мкКл). Найти силу, действующую на точечный заряд q, лежащий в центре шестиугольника. Ответ пояснить рисунком.

210. Два шарика массой m = 1,0 г каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены. Длина каждой нити L = 10,0 см. Какие одинаковые заряды необходимо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол $\alpha = 60°$?

211. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом R = 10 см. Он заряжен с линейной плотностью заряда λ = 300 нКл/м. Какую работу необходимо совершить, чтобы перенести заряд q = 5,0 нКл из центра кольца в точку A, расположенную на оси кольца на расстоянии L = 20 см от его центра?

212. Положительные заряды q_1 = 3,0 мкКл и q_2 = 20 нКл находятся в вакууме на расстоянии L_1 = 1,5 м друг от друга. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния L_2 = 1,5 м.

213. Поле образовано бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 300$ нКл/м^2. Определить разность потенциалов двух точек поля, отстоящих от плоскости на расстояния r_1 = 5,0 см и r_2 = 10,0 см.

214. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом R = 10 см. Он заряжен с линейной плотностью заряда λ = 800 нКл/м. Определить потенциал φ в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии h =10,0 см от его центра.

215. На расстоянии r_1 = 4,0 см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд q = 0,66 нКл. Под действием поля заряд приближается к нити до расстояния r_2 = 2,0 см. При этом совершается работа $A = 50 \cdot 10^{-7}$ Дж. Найти линейную плотность заряда λ на нити.

216. Тонкий стержень согнут в полукольцо. Стержень заряжен с линейной плотностью заряда λ = 133 нКл/м. Какую работу необходимо совершить, чтобы перенести заряд q = 6,7 нКл из центра кольца в бесконечность?

217. Равномерно заряженная бесконечно протяженная плоскость с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 4{,}0 \cdot 10^{-5}$ Кл/м^2 и точечный заряд $q = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии L_1 = 50 см. Какую работу необходимо совершить, чтобы сблизить их до расстояния L_2 = 20 см?

218. На тонком кольце радиусом R = 10 см равномерно распределен заряд q = 2,0 мкКл. Какую наименьшую скорость необходимо сообщить находящемуся в центре кольца маленькому шарику массой m = 10 мг с зарядом q_0 = – 3,0 нКл, чтобы он мог удалиться из центра кольца на бесконечность?

219. В однородное электрическое поле напряженностью E = 200 В/м влетает (вдоль силовой линии) электрон со скоростью $v_0 = 2{,}0 \cdot 10^6$ м/с. Определить расстояние L, которое пройдет электрон до точки, где его скорость будет равна половине начальной.

220. Шарик массой m = 0,2 г и зарядом q = +10 нКл перемещается из точки поля с потенциалом $\varphi_1 = 5{,}0 \cdot 10^3$ В в точку с потенциалом φ_2 = 0 В. Найти скорость шарика в первой точке, если во второй точке она стала равной v_2 = 1,0 м/с.

221. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вынуть диэлектрик из плоского конденсатора, если напряжение на обкладках поддерживается постоянным и равным U = 500 В. Площадь каждой пластины S = 50 см^2, расстояние между пластинами d = 5,0 мм, а диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε = 2,0.

222. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вынуть диэлектрик из плоского конденсатора, если заряд на обкладках поддерживается постоянным и равным q = 6,0 мкКл. Площадь каждой пластины S = 100 см^2, расстояние между пластинами d = 3,0 мм, а диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε_1 = 2,0.

223. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы увеличить расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора, заряженного разноименными зарядами $|q|$ = 0,20 мкКл, на величину Δx = = 0,20 мм. Площадь каждой пластины конденсатора S = 400 см^2.

224. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами плоского вакуумного конденсатора с площадью пластин $S = 100$ см^2 каждая от расстояния $x_1 = 0{,}010$ м до расстояния $x_1 = 0{,}020$ м? Напряжение между пластинами поддерживается постоянным и равным $U = 220$ В.

225. Площадь каждой пластины плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}10$ м^2, расстояние между ними $d = 5{,}0$ мм. Какое напряжение было приложено к пластинам, если известно, что при разряде конденсатора выделилось $Q = 4{,}19$ мДж тепла?

226. Плоский конденсатор, заполненный жидким диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 3{,}0$, зарядили, затратив при этом энергию $W_1 = 10$ мкДж. Затем конденсатор отсоединили от источника, слили диэлектрик и разрядили. Определить энергию W_2, которая выделилась при разрядке.

227. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, и на его пластины подано некоторое напряжение. Его энергия при этом $W = 70$ мкДж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если работа, которая была совершена против сил электрического поля, $A = 20$ мкДж.

228. Обкладки конденсатора с неизвестной емкостью C_1, заряженного до напряжения $U_1 = 80$ В, соединяют с заряженным до напряжения $U_2 = 16$ В конденсатором емкостью $C_2 = 60$ мкФ. Определить емкость C_1, если напряжение на конденсаторах после их соединения равно $U = 20$ В. Конденсаторы соединяются обкладками, имеющими одноименные заряды.

229. Обкладки конденсатора с неизвестной емкостью C_1, заряженного до напряжения $U_1 = 80$ В, соединяют с заряженным до напряжения $U_2 = 16$ В конденсатором емкостью $C_2 = 60$ мкФ. Определить емкость C_1, если напряжение на конденсаторах после их соединения равно $U = 20$ В. Конденсаторы соединяются обкладками, имеющими разноименные заряды.

230. Конденсатор емкостью $C_1 = 10$ мкФ заряжен до напряжения $U_1 = 10$. Определить заряд на обкладках этого конденсатора после того как параллельно ему был подключен другой, не заряженный, конденсатор емкостью $C_2 = 20$ мкФ.

231. Элемент сначала замкнут на внешнее сопротивление R_1 = 2,0 Ом, а затем – на внешнее сопротивление R_2 = 0,5 Ом. Найти ЭДС элемента и его внутреннее сопротивление, если известно, что в каждом из этих случаев мощность, развиваемая во внешней цепи, одинакова и равна $P_1 = P_2 =$ 2,54 Вт.

232. Внешняя цепь постоянного тока потребляет мощность P = 0,75 Вт. Определить силу тока в цепи, если ЭДС источника ε = 2,0 В, а внутреннее сопротивление r = 1,0 Ом.

233. К батарее, ЭДС которой ε = 2,0 В и внутреннее сопротивление r = 0,5 Ом, присоединили проводник. Исследовать, при каком сопротивлении проводника мощность, выделяемая в нем, максимальна. Найти эту мощность.

234. Максимальная сила тока генератора равна $I_{\max}$ = 3,0 А, ЭДС генератора равна ε = 6,0 В. Найти наибольшее количество теплоты, которое может быть выделено на внешнем сопротивлении за Δt = 0,1 с.

235. Наибольшая мощность, которая может выделяться во внешней цепи некоторого источника, $P_{\max}$ = 9,0 Вт. Сила тока при этом I = 3,0 А. Найти ЭДС ε и внутреннее сопротивление r этого источника.

236. ЭДС батареи равна ε = 18,0 В. КПД батареи равен η = 0,90 при силе тока I = 4,5 А. Чему равно внутреннее сопротивление батареи?

237. На концах проводника длиной L = 6,0 м поддерживается разность потенциалов U = 120 В. Каково удельное сопротивление проводника, если плотность тока в нем $j = 5{,}0 \cdot 10^8$ А/м^2?

238. Между точками с постоянной разностью потенциалов U = 100 В включили сопротивление R_1 = 2,0 кОм и вольтметр, соединенные последовательно. Показания вольтметра U_1 = 80 В. Когда сопротивление заменили на другое, вольтметр показал U_2 = 40 В. Определить второе сопротивление.

239. К источнику с ЭДС ε = 12,0 В присоединена нагрузка. Напряжение на нагрузке U = 8,0 В. Определить КПД источника.

240. ЭДС батареи ε = 12,0 В. При силе тока I = 4,0 А коэффициент полезного действия составляет η = 0,60. Определить внутреннее сопротивление батареи.

241. Два круговых витка расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что центры этих витков совпадают. Радиус

каждого витка R = 2,0 см, а токи в витках $I_1 = I_2 =$ 5,0 А. Найти напряженность магнитного поля в центре этих витков.

242. По квадратной рамке со стороной a = 5,0 см течет ток I = 10,0 А. Какова магнитная индукция в точке пересечения диагоналей квадрата?

243. Два круговых витка расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что центры этих витков совпадают. Радиусы витков R_1 = 2,5 см и R_2 = 4,5 см, токи в витках соответственно I_1 = = 3,0 А и I_2 = 5,0 А. Найти индукцию магнитного поля в центре этих витков.

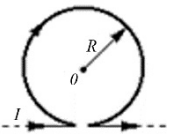
244. По проводнику, изогнутому в виде окружности, течет ток. Напряженность магнитного поля в центре окружности H_1 = 50 А/м. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Определить напряженность магнитного поля в центре этого квадрата.

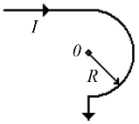
245. Два бесконечно длинных прямых проводника с токами I_1 = 30 А и I_2 = 40 А располагаются под прямым углом в параллельных плоскостях, расстояние между которыми d = 20 см. Найти напряженность магнитного поля в точке, лежащей на середине общего перпендикуляра к проводникам.

246. Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводу течет ток I = 100 А. Вычислить напряженность магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе внутреннего угла и удаленной от вершины на расстояние d = 100 см.

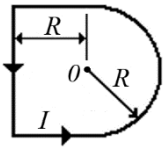
247. По двум бесконечно длинным параллельным проводам текут токи I_1 = 50 А и I_2 = 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами d = 50 см. Определить индукцию магнитного поля в точке, удаленной на расстояние r_1 = 30 см от первого и r_2 = 40 см от второго провода.

248. Бесконечно длинный тонкий проводник с током I = 100 А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R = 20,0 см. Определить магнитную индукцию поля, создаваемого этим током в точке O.





249. Проводник с током I = 40 А лежит в плоскости и имеет форму, показанную на рисунке. Радиус изогнутой части проводника R = 20,0 см. Определить магнитную индукцию поля, создаваемого этим током в точке O.



250. Проводник с током $I = 20$ А лежит в плоскости и имеет форму, показанную на рисунке. Радиус изогнутой части проводника $R = 40{,}0$ см. Определить напряженность магнитного поля, создаваемого этим током в точке O.

251. Между полюсами электромагнита создается однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}08$ Тл. В поле помещают прямой проводник с током $I = 10$ А и длиной $L = 0{,}5$ м так, что на него действует максимальная сила. Затем проводник поворачивают на некоторый угол φ так, что сила, действующая на проводник, уменьшается в два раза. Определить угол φ и силу, действующую на проводник в первом случае.

252. Прямоугольная проволочная рамка со сторонами $l_1 = 10{,}0$ см и $l_2 = 5{,}0$ см расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что ее ближайшая сторона l_1, параллельная проводу, находится на расстоянии $d = 2{,}0$ см от него. Определить силу, действующую на рамку, если токи, текущие по проводу и рамке, соответственно равны $I_1 = 100$ А, $I_2 = 1{,}0$ А.

253. Квадратная рамка со стороной $a = 15$ см, по которой течет ток $I = 50$ А, расположена в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}10$ Тл так, что силовые линии поля перпендикулярны плоскости рамки. Найти силу: а) действующую на одну сторону рамки; б) – на рамку в целом.

254. Квадратная проволочная рамка со стороной $a = 20$ см расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи $I = 10$ А. Определить силу, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном длине ее стороны.

255. Шины генератора представляют собой две параллельные медные полосы длиной $L = 2{,}00$ м каждая, отстоящие друг от друга на расстояние $d = 10$ см. Определить силу взаимного отталкивания шин в случае короткого замыкания, когда по ним течет ток $I = 10$ А.

256. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 600$ В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}30$ Тл и начал двигаться по окружности. Найти ее радиус.

257. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 600$ В, влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное $B = 1{,}12$ мТл и электрическое $E = 190$ В/м поле перпендикулярно к ним.

Определить отношение заряда иона к его массе, если ион в этих полях движется прямолинейно.

258. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 300$ В, движется параллельно прямолинейному длинному проводу на расстоянии $d = 4{,}0$ мм от него. Какая по величине сила подействует на электрон, если по проводнику пустить ток $I = 5{,}0$ А?

259. Протон и α-частица, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Во сколько раз радиус кривизны R_1 траектории α-частицы больше радиуса кривизны R_2 траектории протона?

260. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0{,}10$ Тл возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 100$ кВ/м. Заряженная частица движется перпендикулярно каждому из полей, не отклоняясь от прямолинейной траектории. Определить скорость частицы.

261. Квадратная проволочная рамка со стороной $a = 5{,}0$ см и сопротивлением $R = 10$ мОм находится в однородном магнитном поле $B = 40$ мТл. Нормаль к плоскости рамки составляет угол $\alpha = 30°$ с линиями магнитной индукции. Определить заряд Q, который пройдет по рамке, если магнитное поле выключить.

262. Медный провод диаметром $d = 1{,}0$ мм согнут в виде квадрата со стороной $a = 4{,}0$ см, и концы его замкнуты. Эта рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}20$ Тл так, что ее плоскость перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить заряд, который потечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, можно вытянуть в линию. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м.

263. Прямой провод длиной $l = 40$ см движется в однородном магнитном поле со скоростью $v = 5{,}0$ м/с перпендикулярно линиям поля и оси провода. Появившаяся при этом разность потенциалов на концах провода равна $U = 0{,}60$ В. Определить индукцию магнитного поля.

264. В магнитное поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл помещен круговой проводящий виток сопротивлением $R = 250$ Ом. Площадь витка $S = 16$ см^2. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости витка. Какой заряд Q пройдет по витку при исчезновении магнитного поля?

265. На соленоид длиной $l = 20$ см и площадью поперечного сечения $S = 30$ см^2 надет проволочный виток того же сечения. Соленоид

имеет $N = 320$ витков, и по нему идет ток $I = 3{,}0$ А. Какая средняя ЭДС индуцируется в надетом на соленоид витке при уменьшении в соленоиде тока до нуля в течение $\Delta t = 1{,}0$ мс?

266. Катушка, состоящая из $N = 400$ витков проволоки, помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}02$ Тл. Ось катушки параллельна силовым линиям магнитного поля. Какой заряд Q пройдет по катушке при исчезновении магнитного поля? Сопротивление катушки $R = 15$ Ом, диаметр витка $d = 5{,}0$ см.

267. Соленоид содержит $N = 800$ витков. Сечение сердечника (из немагнитного материала) $S = 10$ см^2. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией $B = 8{,}0$ мТл. Определить среднее значение ЭДС самоиндукции, которая возникает на зажимах соленоида, если сила тока уменьшается практически до нуля за время $\Delta t = 0{,}8$ мс.

268. Короткая катушка, содержащая $N = 10$ витков диаметром $d = 4{,}0$ см, помещена в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 0{,}02$ Тл. Ось катушки параллельна линиям поля. Сопротивление катушки $R = 10{,}0$ Ом. Какой заряд пройдет по катушке при ее повороте относительно оси, проходящей через ее диаметр на угол $\delta = 90°$?

269. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}05$ Тл, вращается стержень длиной $L = 1$ м с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Ось вращения перпендикулярна стержню, проходит через конец стержня и параллельна магнитному полю. Найти разность потенциалов, возникающую на концах стержня.

270. В соленоиде сечением $S = 5{,}0$ см^2 создан магнитный поток $\Phi = 20$ мкВб. Определить объемную плотность ω энергии магнитного поля соленоида. Сердечник отсутствует.

271. Определить начальную фазу колебаний тела, если через 0,25 с от начала движения смещение было равно половине амплитуды. Колебания происходят по закону косинуса с периодом $T = 6$ с. Построить график колебаний в пределах двух периодов.

272. Точка совершает гармонические колебания по закону косинуса, период колебаний $T = 4$ с, амплитуда колебаний $A = 50$ мм, начальная фаза равна $\varphi_0 = 0$. Записать уравнение движения точки, построить график. Найти скорость точки в момент, когда ее смещение от положения равновесия равно $x = 25$ мм?

273. Материальная точка совершает колебания по закону косинуса с нулевой начальной фазой. Амплитуда колебаний равна $A = 20$ см, циклическая частота колебаний составляет $\omega = 2\pi/3$ рад/с. Масса матери-

альной точки равна $m = 10$ г. Найти возвращающую силу и полную энергию в момент, равный $t_1 = 1{,}0$ с.

274. Складываются два гармонических колебания $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$ одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 =$ 5 с и амплитудами $A_1 = A_2 =$ 2 см. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = \pi / 2$ и $\varphi_2 = \pi / 3$. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Записать уравнение получившегося колебания. Построить векторную диаграмму.

275. Колебательный контур состоит из катушки, индуктивность которой равна $L = 10$ мГн, и конденсатора емкостью $C = 25$ нФ. В начальный момент заряд на обкладках конденсатора максимален и равен $q_0 = 2{,}5$ мкКл. Написать уравнения (с числовыми коэффициентами) изменения разности потенциалов $U(t)$ на обкладках конденсатора и тока в цепи $I(t)$.

276. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, равна $W = 30$ мкДж; максимальная сила, действующая на тело, равна $F_{\max} = 1{,}5$ мН. Записать уравнение движения этого тела, если период колебаний $T = 2$ с и начальная фаза $\varphi_0 = \pi / 3$.

277. Уравнение изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре с течением времени имеет вид $U(t) = 50\cos(10^4 \pi t)$ В. Емкость конденсатора $C = 0{,}1$ мкФ. Найти период T колебаний, индуктивность L контура, закон изменения со временем тока $I(t)$ в цепи.

278. В открытую с обоих концов U-образную трубку с площадью поперечного сечения $S = 0{,}4$ см^2 быстро вливают ртуть массой $m = 200$ г. Определить период T колебаний ртути. Плотность ртути составляет $\rho = 13\ 600$ кг/м^3.

279. Движение точки задано уравнениями $x(t) = A_1\cos(\omega t)$ и $y(t) = A_2\sin(\omega t)$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 1$ см. Найти явное уравнение траектории и скорость точки, построить траекторию, указав направление движения точки.

280. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями: $x(t) =$

$= 2\sin(\pi t)$ см и $y(t) = 1\cos(\pi[t + 0{,}5])$ см. Найти уравнение траектории материальной точки и построить ее на чертеже.

281. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = = 0,405 мкФ, катушки с индуктивностью L = 10 мГн и сопротивлением R = 2,0 Ом. Найти, во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора и энергия, запасенная в контуре, за время одного периода.

282. Тело массой m = 10 г подвешено на пружине и совершает затухающие колебания в среде. За одну минуту колебательная система потеряла 80 % своей энергии. Определить: а) коэффициент затухания колебаний; б) коэффициент сопротивления среды.

283. Чему равен логарифмический декремент затухания λ и добротность системы Q, если амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в e^2 раз за 50 колебаний?

284. Частота свободных затухающих колебаний некоторой системы ω = 100 рад/с, резонансная частота ω_p = 99,2 рад/с. Определить добротность Q этой системы.

285. Амплитуды смещения вынужденных колебаний некоторой колебательной системы при частотах вынуждающей силы 200 и 300 Гц равны между собой. Найти частоту ν_p, соответствующую резонансу смещения.

286. В электрическом колебательном контуре совершаются затухающие колебания с частотой $\nu_з$ = 500 Гц. Определить: а) коэффициент затухания β колебаний в системе; б) частоту ν_0 собственных незатухающих колебаний. Резонансная (по напряжению) частота для данного контура составляет ν_p = 495 Гц.

287. Гиря массой m = 250 г подвешена к пружине жесткостью k = = 10 Н/м и совершает затухающие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания равен λ = 0,005. Определить число полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в 3 раза. За какое время произойдет это уменьшение?

288. В контуре с добротностью Q = 50 возбуждаются затухающие колебания. Через сколько времени энергия, запасенная в контуре, уменьшится в 2 раза? Собственная частота незатухающих колебаний ν_0 = 5,5 кГц.

289. Механическая система, имеющая период собственных колебаний T_0, в условиях действия диссипативных сил изменяет период колебаний до значения $T_3 = T_0\sqrt{1{,}01}$. Найти логарифмический декремент затухания системы.

290. Логарифмический декремент затухания колебаний маятника составляет $\lambda = 0{,}0055$. Определить число полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы энергия колебаний уменьшилась втрое.

291. Закрытая с одного конца труба издает основной тон, соответствующий частоте $\nu_1 = 130{,}5$ Гц. Какова длина трубы? Трубу открыли. Какую частоту ν_2 имеет основной тон теперь? Скорость распространения звука в воздухе принять равной $v = 340$ м/с.

292. Найти разность фаз колебаний двух точек, отстоящих от источника колебаний на расстояниях $l_1 = 10$ м и $l_2 = 16$ м. Период колебаний составляет $T = 0{,}04$ с; скорость распространения волны $v = 300$ м/с.

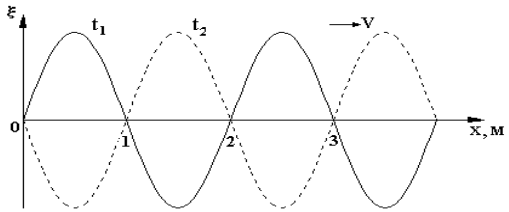
293. Уравнение колебаний источника волн имеет вид $y(t) = 0{,}1\cos(0{,}5\pi t)$ м. Найти: 1) уравнение волны, распространяющейся вдоль оси x, если скорость волны $v = 900$ м/с; 2) величину смещения точки, отстоящей от источника на расстояние $x = 300$ м в момент $t = 2$ с.

294. Определить частоту звуковых колебаний в стали, если расстояние между ближайшими точками звуковой волны, отличающимися по фазе на $\pi/2$, равно 2 м. Скорость распространения звуковых волн в стали $v = 5000$ м/с.

295. Найти наименьшую частоту собственных колебаний столба воздуха в трубе длиной $l = 170$ см, если: а) труба закрыта с одного конца; б) труба закрыта с обоих концов. Скорость звука $v = 340$ м/с. Считать, что открытые концы трубы являются пучностями смещения, а закрытые – узлами.

296. Источник волн совершает колебания по закону косинуса с нулевой начальной фазой и амплитудой $A = 0{,}025$ м. Найти смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстояние $l = \lambda/6$, для момента $t = T/3$.

297. Плоская волна распространяется с некоторой скоростью v вдоль оси x. На рисунке изображены зависимости смещения частиц среды ξ из положения равновесия для моментов $t_1 = 0{,}2$ с и $t_2 = 0{,}6$ с. Найти длину волны λ, период колебаний частиц T и скорость волны v.



298. Найти смещение x от положения равновесия, скорость v и ускорение a точки, находящейся на расстоянии 50 м от источника колебаний, в момент 1 с. Скорость распространения колебаний $v = 100$ м/с, уравнение колебаний источника $x(t) = 5\cos(5\pi t)$ см. Затуханием колебаний пренебречь.

299. Найти длину волны колебаний, если расстояние между первой и четвертой пучностью стоячей волны составляет 15 см.

300. Уравнение бегущей плоской звуковой волны в системе СИ имеет вид $\xi(t,\ x) = 50 \cdot 10^{-6} \cos(1700t - 5x)$. Найти: а) отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны; б) амплитуду колебаний скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны.

10. СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Основные единицы международной системы единиц (СИ) и измеряемые ими величины

Измеряемая величина	Единица	Определение
Длина	метр (м)	Метр есть длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени 1 299 792458 с
Масса	килограмм (кг)	Килограмм равен постоянной Планка, поделенной на $6{,}626070040 \times 10^{-34}$ м$^2 \cdot$ с$^{-1}$
Время	секунда (с)	Секунда есть время, равное 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133
Сила электрического тока	ампер (А)	Ампер есть сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н
Термодинамическая температура	кельвин (К)	Кельвин есть единица термодинамической температуры, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды
Количество вещества	моль (моль)	Моль есть количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг
Сила света	кандела (кд)	Сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср

Множители и приставки для образования кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка		
	Наименование	Обозначение	
		русское	международное
1 000 000 000 000 000 000 000 000 =10^{24}	иотта	И	Y
1 000 000 000 000 000 000 000 =10^{21}	зета	З	Z
1 000 000 000 000 000 000 =10^{18}	экса	Э	E
1 000 000 000 000 000 = 10^{15}	пэта	П	P
1 000 000 000 000 = 10^{12}	тера	Т	T
1 000 000 000 = 10^{9}	гига	Г	G
1 000 000 = 10^{6}	мега	М	M
1 000 = 10^{3}	кило	к	k
100 = 10^{2}	(гекто)*	г	h
10 = 10^{1}	(дека)	да	da
0,1 = 10^{-1}	(деци)	д	d
0,01 = 10^{-2}	(санти)	с	c
0,001 = 10^{-3}	милли	м	m
0,000 001 = 10^{-6}	микро	мк	μ
0,000 000 001 = 10^{-9}	нано	н	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	пико	п	p
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	фемто	ф	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	атто	а	a
0,000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-21}	зепто	з	z
0,000 000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-24}	иокто	и	y

* Приставки в скобках следует применять только в названиях уже устоявшихся единиц (сантиметр, гектар, декалитр).

Некоторые физические постоянные

Наименование	Обозначение	Значение
Атомная единица массы	1 а.е.м. = m_u	$m_u \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя электрона	m_e	$m_e \approx 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ кг $m_e \approx 5{,}458 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.
Масса покоя протона	m_p	$m_p \approx 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг $m_p \approx 1{,}007$ а.е.м.
Элементарный заряд	e	$e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Заряд электрона	$q_e = -e$	$q_e \approx -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Заряд протона	$q_p = e$	$q_p \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Удельный заряд электрона	q_e / m_e	$q_e / m_e \approx -1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Удельный заряд протона	q_p / m_p	$q_p / m_p \approx 0{,}959 \cdot 10^{8}$ Кл/кг
Электрическая постоянная	ε_0	$\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Постоянная Кулона (электростатическая постоянная)	k	$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) \approx 9 \cdot 10^{9}$ Н · м^2/Кл^2
Магнитная постоянная	μ_0	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Скорость света в вакууме	c	$c \approx 2{,}998 \cdot 10^{8}$ м/с

Чичерина Наталья Витальевна
Христофоров Валерий Владимирович

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ, КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 12.05.2025. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 8,83. Печ. л. 9,5. Изд. № 212/24. Заказ № 131. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20