Решение нелинейных уравнений

Пусть дана некоторая функция $f(x)$ и требуется найти все или некоторые значения x, для которых $f(x)=0$.

Значение x^*, при котором $f(x^*) = 0$, называется *корнем* (или *решением*) уравнения.

Относительно функции $f(x)$ часто предполагается, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня.

В процессе приближенного отыскания корней уравнения обычно выделяют два этапа: ***локализация*** (или ***отделение***) *корня* и ***уточнение*** *корня*.

Локализация корня

Локализация корня заключается в определении отрезка $[a, b]$, содержащего один и только один корень.

Не существует универсального алгоритма локализации корня. В некоторых случаях отрезок локализации может быть найден из физических соображений. Иногда удобно бывает локализовать корень с помощью построения графика или таблицы значений функции $y = f(x)$.

На наличие корня на отрезке $[a, b]$ указывает различие знаков функции на концах отрезка.

Уточнение корня

На этапе уточнения корня вычисляют приближенное значение корня с заданной точностью.

Приближенное значение корня уточняют с помощью различных итерационных методов.

Метод половинного деления

Пусть из предварительного анализа известно, что корень уравнения находится на отрезке $[a_0, b_0]$, т. е. $x^*[a_0, b_0]$, так, что $f(x^*) = 0$.

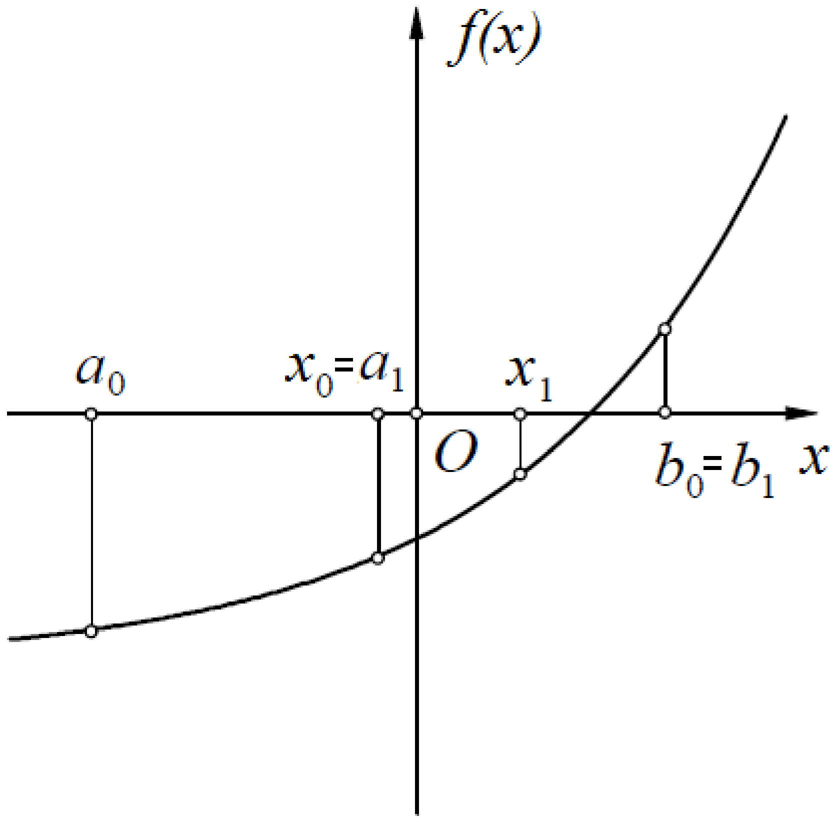
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a_0, b_0]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, т.е.

$f(a_0)f(b_0) < 0$.

Разделим отрезок $[a_0, b_0]$ пополам. Получим точку $x_0 = (a_0+b_0)/2$.

Вычислим значение функции в этой точке: $f(x_0)$. Если $f(x_0) = 0$, то x_0 – искомый корень, и задача решена.

В противном случае находим знаки $f(x)$ на концах отрезков $[a_0, x_0]$ и $[x_0, b_0]$. Тот из них на концах которого $f(x)$ имеет значения разных знаков принимают за новый отрезок $[a_1, b_1]$, и вычисляют следующее приближение $x_1 = (a_1+b_1)/2$.



Погрешность метода

После каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое, а после n итераций в 2^n раз:

$b_\mathrm{n} - a_\mathrm{n} = (b_0 - a_0) / 2^n$

Поскольку корень принадлежит отрезку $[a_n, b_n]$, а x_n – середина этого отрезка, то величина $|x^* - x_n|$ всегда будет меньше половины длины этого отрезка: $|x^* - x_n| < (b_\mathrm{n} - a_\mathrm{n})/2$, следовательно $|x^* - x_n| < (b_0 - a_0) / 2^n$.

Критерий окончания

При заданной точности приближения ε вычисления заканчиваются, когда будет выполнено неравенство $b_\mathrm{n} - a_\mathrm{n} < 2\varepsilon$ или неравенство $n > \log_2((b_0 - a_0)/\varepsilon) - 1$.

Таким образом, количество итераций можно определить заранее. За приближенное значение корня берется величина x_n.

Сходимость метода

В отличие от большинства других методов уточнения, метод половинного деления сходится всегда, т.е. обладает безусловной сходимостью.

С каждым шагом погрешность приближенного значения уменьшается в два раза, т.е. $|x^{*}- x_{n}| < |x^{*}- x_{n\text{-}1}| /2$.

Поэтому данный метод является методом с линейной сходимостью.

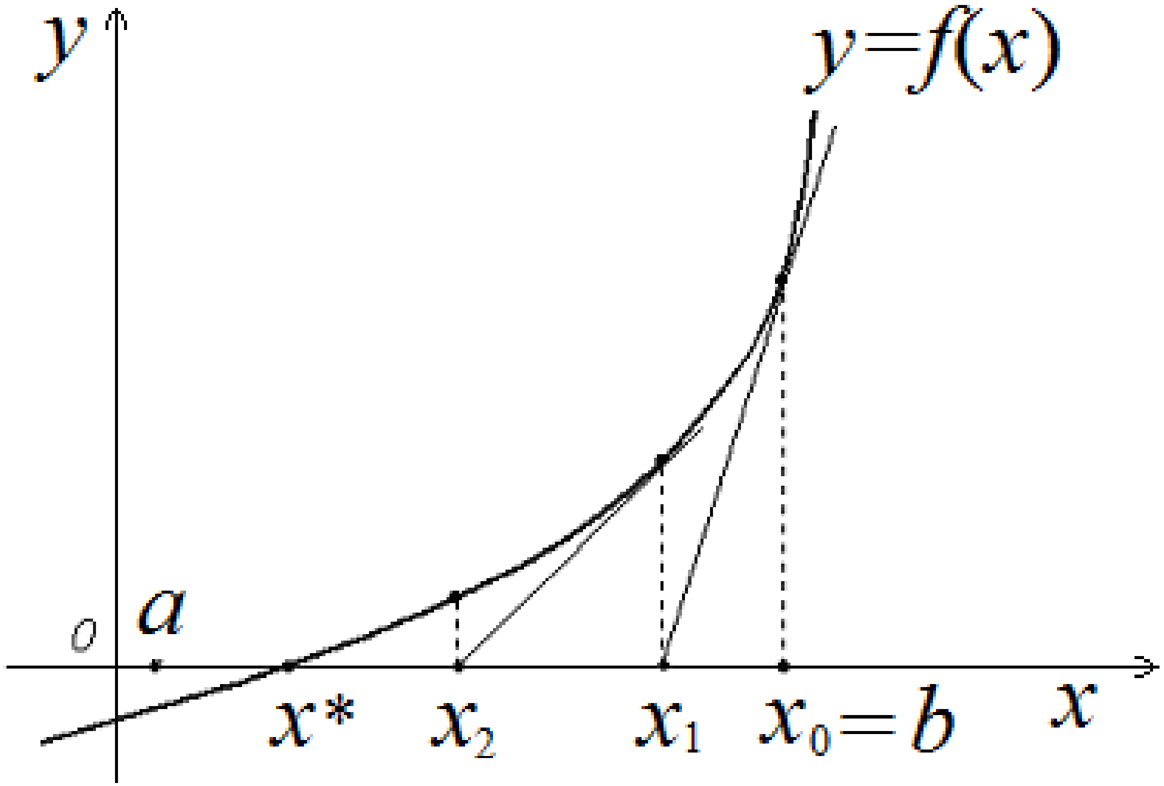
Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть корень $x^* \in [a, b]$, так, что $f(a)f(b) < 0$. Предполагаем, что функция $f(x)$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. А ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют свой знак на $[a, b]$.

Примем за x_0 тот конец отрезка в котором $f(x)$ имеет тот же знак что и $f''(x)$. Уравнение касательной к $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ будет иметь вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Первое пересечение получим, взяв абсциссу точки пересечения этой касательной с осью OX: $x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$. Аналогично поступим с точкой $(x_1, f(x_1))$, затем с точкой $(x_2, f(x_2))$, и т. д. в результате получим последовательность приближений:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n) .$$



y
y=f(x)
0
a
x
x*
x2
x1
x0=b

Для метода Ньютона справедлива следующая оценка погрешности:

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2$$

где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b}\left|f''(x)\right|, m_1 = \min\limits_{a \le x \le b}\left|f'(x)\right|$

Критерий окончания

При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство:

$$\frac{M_2}{2m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2 < \varepsilon \qquad \text{или} \qquad \left|x_n - x_{n-1}\right| < \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$$

Можно использовать упрощенное условие: $\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$

Сходимость метода

Сходимость метода Ньютона зависит от выбора начального приближения. Если в качестве x_0 выбрать тот из концов отрезка, для которого $f(x)\,f''(x) \geq 0$ то итерации сходятся.

Метод секущих

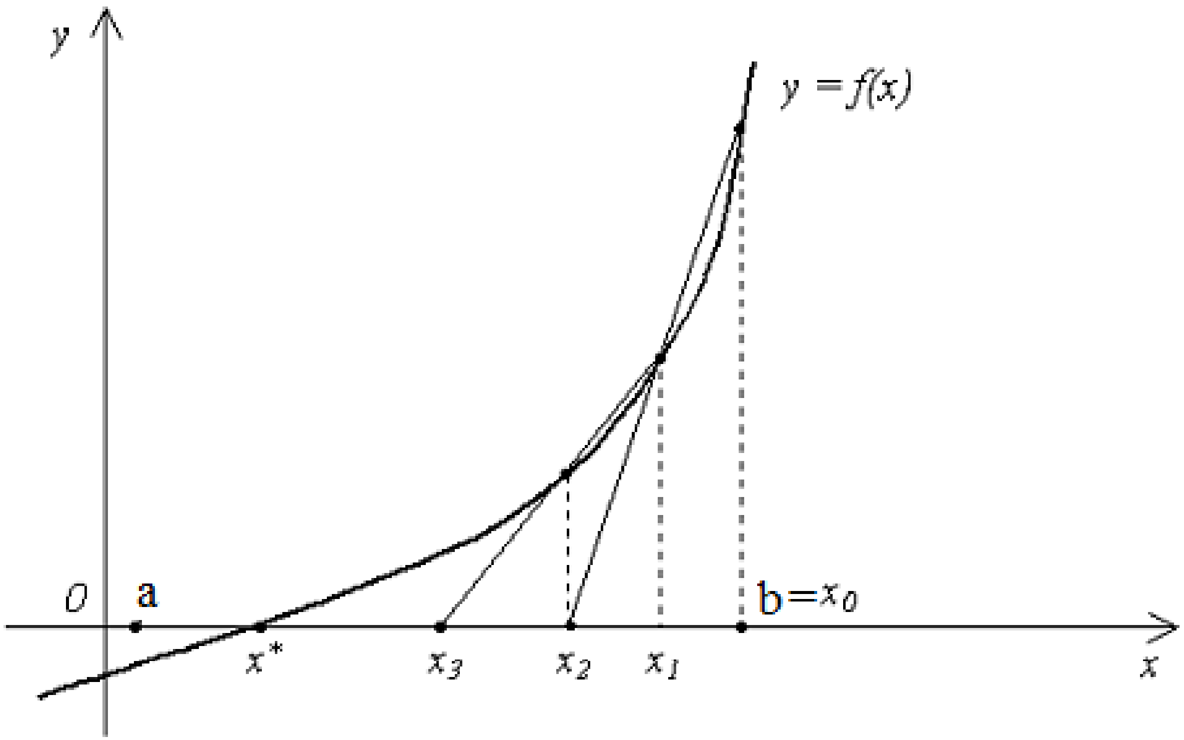
Метод секущих является модификацией метода Ньютона. Начальное приближение x_0 выбирают также как в методе Ньютона, а значение производной в расчетной формуле заменяют приближением:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

В результате итерационная формула метода имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Это означает, что касательные заменены секущими:

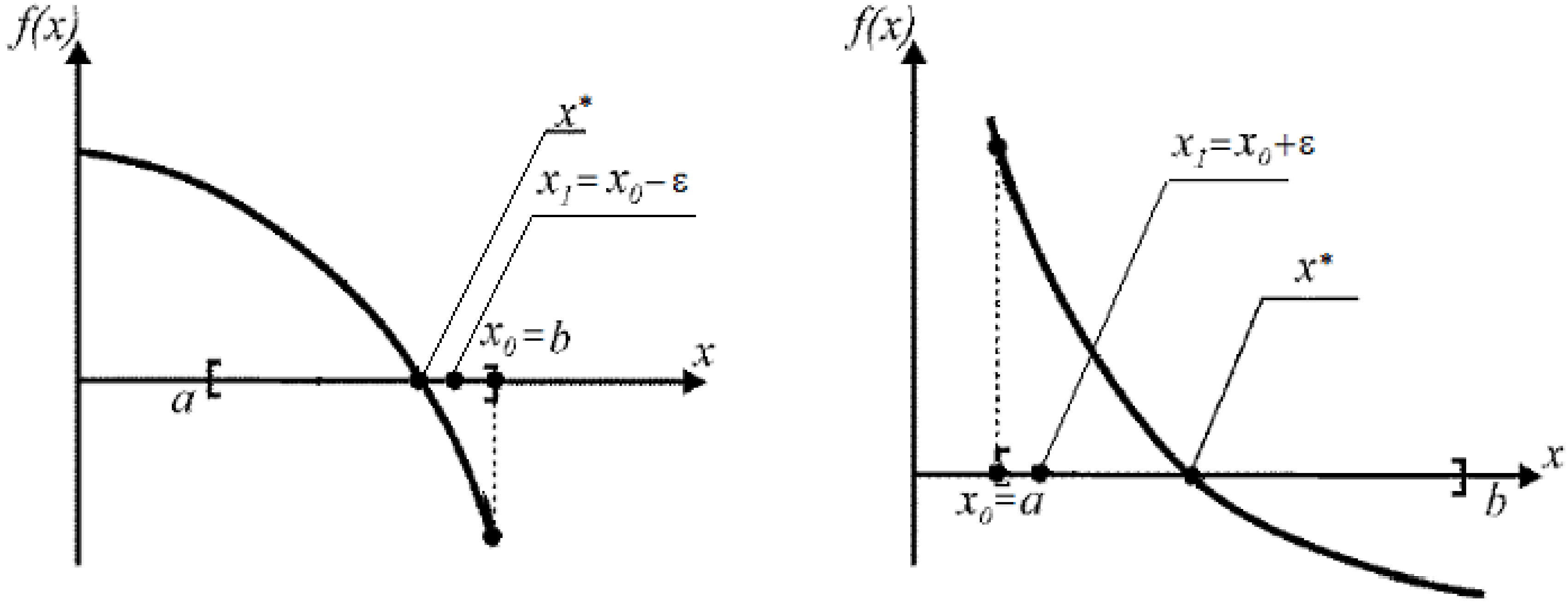


Метод секущих является двухшаговым методом, для вычисления приближения x_{n+1} необходимо вычислить два предыдущих приближения x_n и x_{n-1}, и, в частности, на первой итерации надо знать два начальных значения x_0 и x_1.

В качестве второго начального приближения x_1 можно выбрать

$$x_1 = x_0 \pm \varepsilon$$

в зависимости от того, какой из концов интервала выбран в качестве x_0 .



Сходимость метода

Условия сходимости метода секущих аналогичны условиям сходимости метода Ньютона. Порядок сходимости метода

$$p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$$

Это означает, что метод секущих сходится медленнее, чем метод Ньютона, в котором p=2. Но в методе Ньютона на каждой итерации надо вычислять и функцию, и производную, а в методе секущих – только функцию. Поэтому при одинаковом объеме вычислений в методе секущих можно сделать примерно вдвое больше итераций.

Критерий окончания

При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство: $\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$

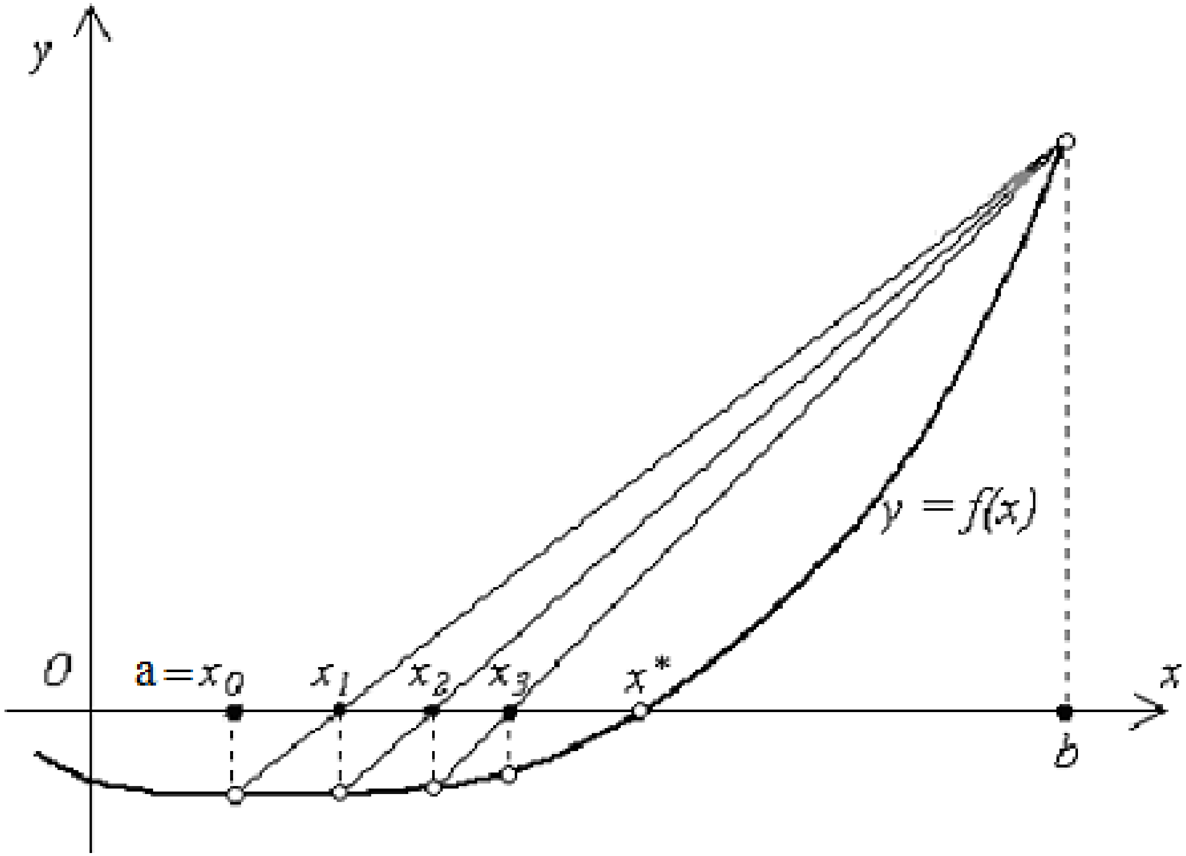
Метод хорд (ложного положения)

Метод хорд представляет собой еще одну модификацию метода Ньютона.

Пусть известно, что корень x^* уравнения $f(x) = 0$ находится на отрезке $[a, b]$ и выполняется условие $f(b)f''(b) \geq 0$, тогда $x_0 = a$. Будем проводить из точки $(b, f(b))$ прямые через расположенные на графике функции точки с координатами $(x_n, f(x_n))$.

Абсцисса точки пересечения такой прямой с осью OX есть очередное приближение x_{n+1}.

Геометрическая иллюстрация метода



Прямые на этом рисунке заменяют касательные в методе Ньютона. Эта замена основана на приближенном равенстве

$$f'(x_n) \approx \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}$$

Заменим в расчетной формуле Ньютона производную $f'(x_n)$ правой частью приближенного равенства. В результате получим расчетную формулу метода ложного положения:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

Погрешность метода

Погрешность найденного решения оценивается соотношением:

$$\left| x_n - x^* \right| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1} \left| x_n - x_{n-1} \right|,$$

где $M_1 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f'(x) \right|, m_1 = \min\limits_{a \le x \le b} \left| f'(x) \right|$

Сходимость и критерий окончания

Метод ложного положения обладает линейной сходимостью.

Критерий окончания итераций метода ложного положения:

$$\left| x_n - x_{n-1} \right| < \varepsilon$$

Метод простых итераций

Для применения этого метода исходное нелинейное уравнение $f(x) = 0$ заменяют эквивалентным:

$$x = \varphi(x)$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ расположен единственный корень. Примем за x_0 любое значение из интервала $[a, b]$. Вычислим значение функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$ и найдем уточненное значение $x_1 = \varphi(x_0)$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Сходимость

Если функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, b]$ и $\left|\varphi'(x)\right| < 1, x \in [a, b]$

то процесс итераций сходится с любой точностью при любом начальном значении x_0 из интервала $[a, b]$.

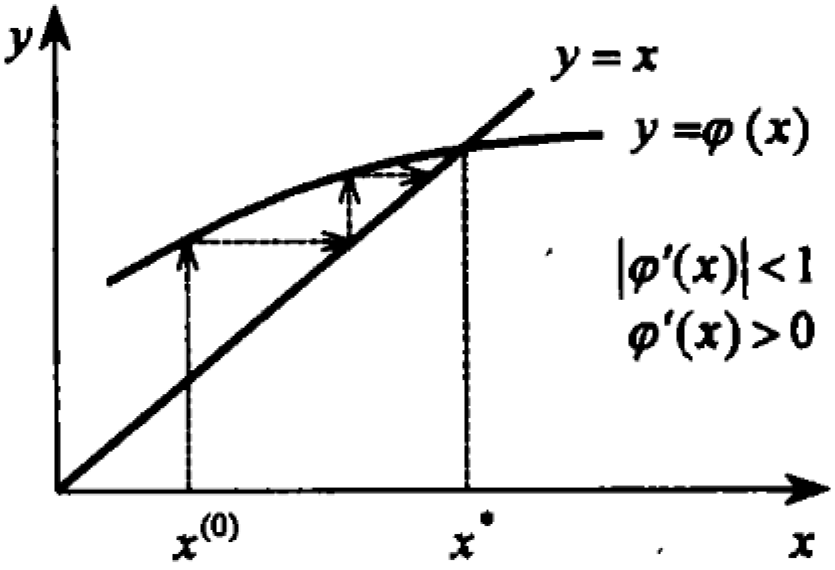
Геометрическая иллюстрация метода

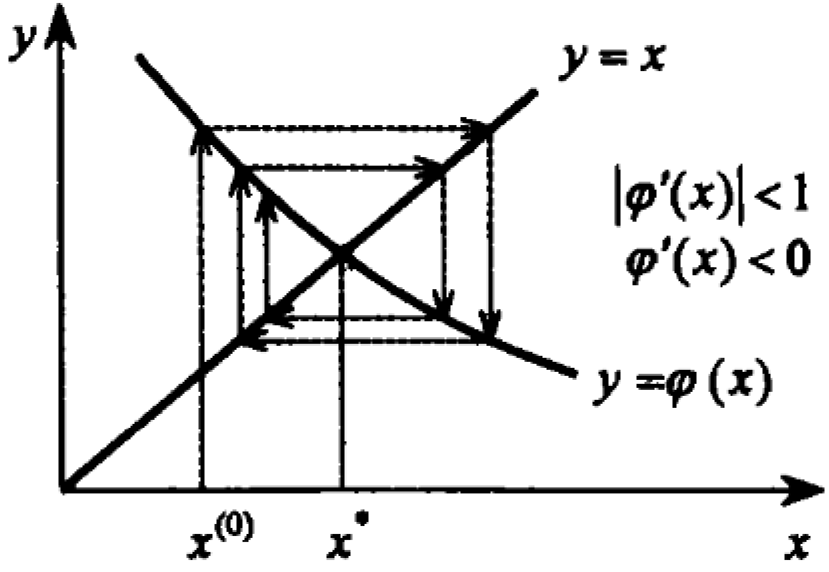
Корнем исходного нелинейного уравнения является абсцисса точки пересечения линии $y=\varphi(x)$ с прямой $y=x$.

Из графиков можно увидеть, что в методе простых итераций возможны как сходящиеся, так и расходящиеся итерационные процессы. Скорость сходимости зависит от абсолютной величины $\varphi'(x)$.

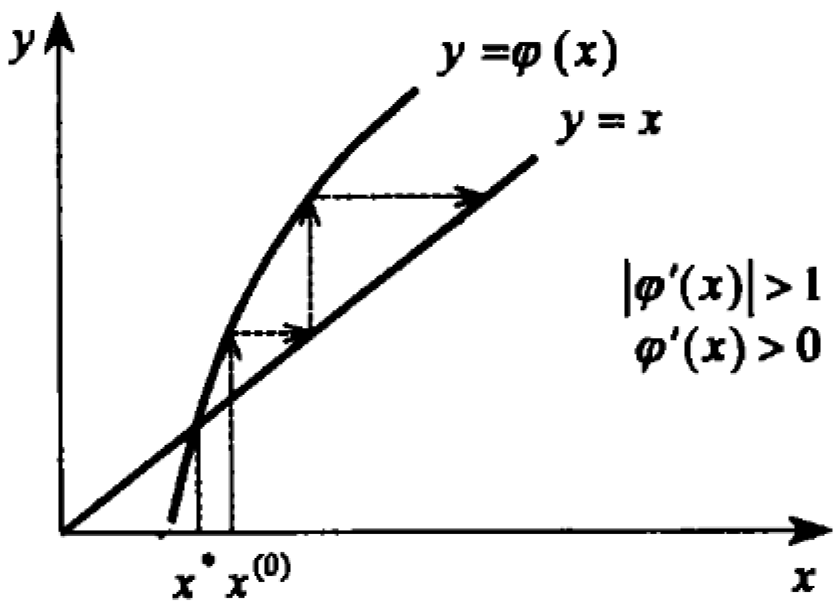
Поэтому выбор способа сведения исходного уравнения к виду $x=\varphi(x)$ является важным.

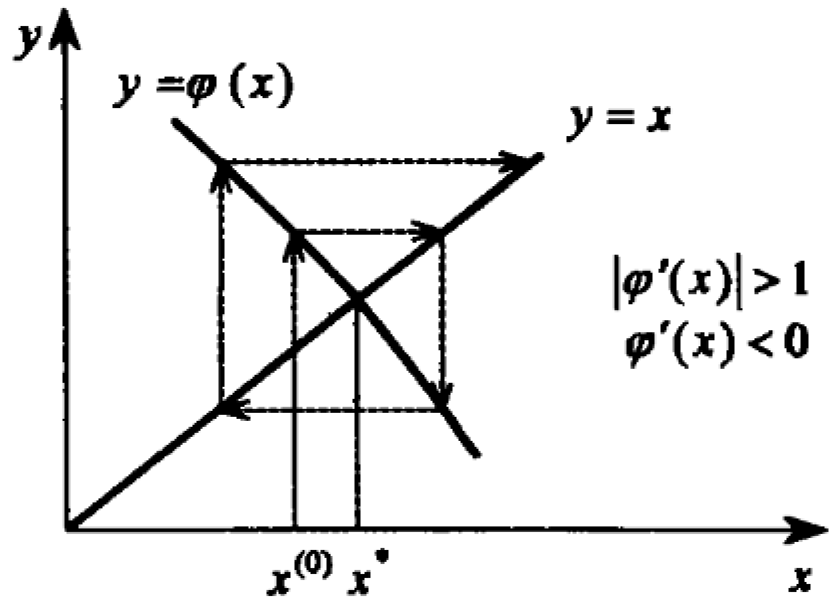
сходится





расходится





Пример

Привести уравнение $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, где $x \in [1,\ 2]$ к виду $x = \varphi(x)$

Решение 1

$x = x^3 - 1;$

$\varphi(x) = x^3 - 1;$

$\varphi'(x) = 3x^2;$

$\varphi'(1) = 3,\ \varphi'(2) = 12;$

$\varphi'(x) > 1,\ x \in [1,\ 2].$

Метод итераций расходится.

Решение 2

$x = \sqrt[3]{x+1};$

$\varphi(x) = (x^3 - 1)^{1/3};$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}};$$

$$\varphi'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1,\ \ \varphi'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} < 1;$$

Метод итераций сходится.

Для метода простых итераций справедлива следующая оценка погрешности:

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right|, \text{ где } \quad q = \max_{a \le x \le b}\left|\varphi'(x)\right|$$

Критерий окончания

При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство:

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Если $q \le 0.5$ можно использовать упрощенное условие:

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$$

Если функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a,b]$ и $0 < m < f'(x) < M$ на $[a,b]$, то сведение уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$ осуществляют следующим образом:

$$f(x) = 0$$

$$\lambda f(x) = 0$$

$$x = x + \lambda f(x)$$

$$x = \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = x + \lambda f(x),$$

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$$

Если в качестве константы λ взять $\lambda = -\dfrac{1}{M}$, то

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 - \frac{1}{M} f'(x) < 1 - \frac{m}{M} < 1,$$

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 - \frac{1}{M} f'(x) > 1 - \frac{M}{M} = 0$$

То есть $0 < \varphi'(x) < k = 1 - \dfrac{m}{M} < 1$.

Задание

1. Локализовать корни (выбрать начальные приближения) заданного нелинейного уравнения $f(x)=0$ с помощью построения графика $f(x)$ в MathCAD (либо microsoft mathematics и т.п.).

2. С использованием современных высокоуровневых языков программирования разработать программную реализацию трех методов уточнения корней:

- Ньютона,
- простых итераций,
- метода заданного в таблице вариантов.

3. Произвести вычисления с различной точностью: 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}. Сравнить количество шагов, которое потребуется каждому методу для достижения заданной точности.

4. Подготовить отчет о проделанной работе, включающий:
- график функции,
- начальные приближения (с обоснованием),
- результаты вычислений (значения корней, количество итераций),
- выводы,
- тексты программ.

Таблица вариантов

№ вар.	$f(x)$	Метод
1	$x^2-20\sin(x)-5$	Половинного деления
2	2^x-5x^2+10	Секущих
3	$-x^4+15x^2+12x-10$	Хорд (ложного положения)
4	$2x^4-24x^2-x+8$	Половинного деления
5	e^x-4x^2-3x	Секущих
6	$-x^2+7x-4\cdot\ln(x)-7$	Хорд (ложного положения)
7	x^3-x^2-7x+5	Половинного деления
8	$x^2-5\cdot x\cdot\sin(x)+x+1$	Секущих