

Способы решения систем линейных уравнений делятся на две группы:

1. Прямые (точные) методы, которые всегда гарантируют получение решения, *если оно существует*, за конечное число операций.

Их недостатком является эффект накопления вычислительной погрешности, заметный при больших n .

2. Итерационные методы, дающие решение как предел бесконечной последовательности приближений.

Они не накапливают погрешности, позволяют вычислить решение с заданной точностью, но не всегда сходятся и могут применяться лишь для систем определенных классов.

Точные методы.

Метод Гаусса

Метод Гаусса, его еще называют методом Гауссовых исключений, состоит в том, что систему приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{array} \right.$$

Решение полученной системы, находят по рекуррентным формулам:

$$x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}, x_i = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left(\beta_i - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j \right), (i = n-1, n-2, \dots, 1)$$

Существует несколько вычислительных схем метода, рассмотрим одну из них - *схему единственного деления*.

Из линейной алгебры известно, что если к некоторой строке системы уравнений прибавить любую линейную комбинацию любых других строк этой системы, то решение системы не изменится. Под линейной комбинацией строк понимается сумма строк, каждая из которых умножается на некоторое число.

Произвольно выберем в первом столбце ненулевой элемент, если необходимо, переставим эту строку первой, теперь нужно добиться того, чтобы в остальных строках коэффициенты при x_1 равнялись нулю. Для этого прибавим к этим строкам первую, умноженную на $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}, m = 2, \dots, n$.

Поступим аналогично с коэффициентами при остальных переменных. Алгоритм можно записать следующим образом:

$$\alpha_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \beta_j^{(0)} = b_j, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n;$$

$$\alpha_{ml}^{(k+1)} = \alpha_{ml}^{(k)} - \frac{\alpha_{mk}^{(k)}}{\alpha_{kk}^{(k)}} \alpha_{kl}^{(k)}$$

$$\beta_m^{(k+1)} = \beta_m^{(k)} - \frac{\alpha_{mk}^{(k)}}{\alpha_{kk}^{(k)}} \beta_k^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n-1; m = k+1, \dots, n; l = k, \dots, n.$$

Если какой-то ведущий элемент α_{kk} не равен нулю, но близок к нему, то в процессе вычислений может происходить сильное накопление погрешностей. Для предотвращения этой ситуации разработаны модификации метода Гаусса - *схемы с выбором главного элемента*.

Выбор главного элемента *по столбцам*: в качестве ведущего элемента выбирают максимальный по модулю коэффициент α_{ik} при неизвестной x_k в уравнениях с номерами $i=k, \dots, n$. Затем уравнение, соответствующее выбранному коэффициенту с номером i меняют местами с уравнением k для того, чтобы главный элемент занял место коэффициента $\alpha_{kk}^{(k)}$.

Аналогичным образом выглядит схема с выбором главного элемента *по строкам*. В этом случае переставляются столбцы матриц; т.е. изменяется порядок исключения неизвестных.

В качестве начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ обычно выбирают β или 0, т.е. $x_i^{(0)} = \beta_i$ или $x_i^{(0)} = 0, i = 1, \dots, n$.

Очередное $(k+1)$ -ое приближение вычисляется по формуле:

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}; i = 1, \dots, n.$$

Сходимость метода

Достаточным условием сходимости метода является выполнение неравенства: $\|\alpha\| < 1$,

где $\|\alpha\|$ каноническая норма матрицы α .

В качестве нормы можно использовать:

m -норму (максимальная сумма модулей по строке): $\|\alpha\|_m = \max_i \sum_j |\alpha_{ij}|$

l -норму (максимальная сумма модулей по столбцу): $\|\alpha\|_l = \max_j \sum_i |\alpha_{ij}|$

Таким образом процесс итерации сходится если выполняется одна из групп условий:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{l=i+1}^n |a_{il}|, i = 1, 2, \dots, n;$$

ИЛИ

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1}^{j-1} |a_{ij}| + \sum_{l=j+1}^n |a_{lj}|, j = 1, 2, \dots, n.$$

Оценка погрешности:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Следовательно метод имеет первый порядок сходимости.

Условия окончания итерационного процесса

Если требуется найти решение с точностью ε , то итерационный процесс следует закончить как только выполнится неравенство:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \frac{1 - \|\alpha\|}{\|\alpha\|} \varepsilon$$

Если $\|\alpha\| < \frac{1}{2}$, то можно пользоваться более простым критерием:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$$

При условии выборе нулевого начального приближения возможно заранее определить требуемое число итераций помощью следующей оценки погрешности:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|\alpha\|^k \|x^{(0)}\| + \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|\beta\|$$

Сходимость метода Зейделя обычно выше, чем у метода Якоби. Однако бывают системы, сходящиеся при решении методом Якоби и расходящиеся по методу Зейделя. Бывают ситуации прямо противоположные, хотя достаточные условия сходимости в обоих методах одинаковые.

Однако если A – вещественная, симметричная положительно определенная матрица, тогда метод Зейделя сходится при любых начальных приближениях.

Критерий окончания итерационного процесса аналогичен методу Якоби.

Задание

1. Разработать алгоритмы решения СЛАУ методами указанными в таблице вариантов.
2. Реализовать алгоритмы с использованием современных высокоуровневых языков программирования.
3. Решить систему из таблицы вариантов с помощью полученной реализации точного метода.
4. Проверить условия сходимости и при необходимости преобразовать систему уравнений так, чтобы гарантировать сходимость итерационного процесса.
5. Решить преобразованную систему с помощью реализации итерационного метода с различными значениями заданной точности: 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} . Сравнить результаты с точным решением.
6. Попытаться решить исходную (без преобразований (кроме, возможно, перестановки первой и второй строк, убирающей ноль с главной диагонали)) систему итерационным методом.
7. Подготовить отчет о проделанной работе, включающий:
 - псевдокод алгоритмов;
 - исходные данные (СЛАУ, начальные приближения, точность);
 - результаты вычислений (корни, количество итераций (для итерационного метода));
 - выводы;
 - тексты программ.

Таблица вариантов

№ вар.	СЛАУ $Ax=b$	Методы
1	$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 15 \\ 15 & 0 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$	Гаусса без выбора главного элемента, простой итерации.
2	$A := \begin{pmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 3 & 3 & 13 \\ 11 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 26 \\ 38 \\ 30 \end{pmatrix}$	Гаусса без выбора главного элемента, Зейделя.
3	$A := \begin{pmatrix} 2 & 15 & 1 \\ 12 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 16 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 35 \\ 25 \\ 53 \end{pmatrix}$	Гаусса с выбором гл. эл. по столбцу, простой итерации.
4	$A := \begin{pmatrix} 5 & 30 & 6 \\ 3 & 4 & 20 \\ 10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 41 \\ 27 \\ 13 \end{pmatrix}$	Гаусса с выбором гл. эл. по столбцу, Зейделя.
5	$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 14 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 3 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 31 \end{pmatrix}$	Гаусса с выбором гл. эл. по строке, простой итерации.
6	$A := \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 11 \\ 10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \\ 14 \end{pmatrix}$	Гаусса с выбором гл. эл. по строке, Зейделя.
7	$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$	Гаусса с выбором гл. эл. по всей матрице, простой итерации.