Интерполяция сплайнами
и
численное дифференцирование

Интерполяция сплайнами

Сплайном степени m называется функция $S_m(x)$, обладающая следующими свойствами:

1. функция непрерывна на отрезке $[x_0, x_n]$ вместе со своими производными до некоторого порядка p;

2. на каждом частичном отрезке $[x_i , x_{i+1}]$ функция совпадает с некоторым алгебраическим многочленом степени m .

Разность между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке $[x_0, x_n]$ производной $(m - p)$ называют дефектом сплайна.

Кусочно-линейная функция является сплайном первой степени с дефектом, равным единице.

Кубический сплайн

Для аппроксимации зависимости $y = f(x)$ будем использовать функцию $\varphi(x)$, которая на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1,...,n$ принимает значение $\varphi_i(x)$.

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$$

где a_i, b_i, c_i, d_i - коэффициенты сплайна, определяемые из дополнительных условий:

1. равенство значений $\varphi_i(x)$ и аппроксимируемой функции $f(x)$ в узлах:

$$\varphi_i(x_{i-1}) = y_{i-1},$$

$$\varphi_i(x_i) = y_i$$

2. непрерывность первой и второй производных от сплайнов в узлах:

$$\varphi_i'(x_i) = \varphi_{i+1}'(x_i)$$

$$\varphi_i''(x_i) = \varphi_{i+1}''(x_i)$$

Кроме перечисленных условий, необходимо задать граничные условия, т.е. в точках x_0, x_n :

$$\varphi_1''(x_0) = 0,$$

$$\varphi_n''(x_n) = 0.$$

Построим систему уравнений для определения коэффициентов кубических сплайнов.

Условия равенства $\varphi_i(x)$ и $f(x)$ примут вид:

$$a_i = y_{i-1} \qquad (1)$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \qquad (2)$$

где $h_i = x_{i\text{-}1} - x_i$

Продифференцируем дважды сплайн по переменной *x*:

$$\varphi'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$$

$$\varphi''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$$

и из условий непрерывности производных в точке x_i получим следующие соотношения:

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \qquad (3)$$

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \qquad (4)$$

из граничных условий на основании выражения для второй производной получим, что

$$c_1 = 0 \qquad (5)$$

$$c_n + 3d_n h_n = 0 \qquad (6)$$

Полученные соотношения (1 – 6) представляют собой полную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i , b_i , c_i , d_i

Прежде чем решать эту систему, ее преобразуют так, чтобы неизвестными была только одна группа коэффициентов c_i, $i = 2,\ldots n$, т.к. c_i =0.
В результате преобразований получают систему из (n-1) уравнения:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left[\frac{(y_i - y_{i-1})}{h_i} - \frac{(y_{i-1} - y_{i-2})}{h_{i-1}}\right], \quad i = 2,\ldots n$$

При условии постоянного шага т.е. $h_i = h_{i\text{-}1} = h$, для всех $i=2,\ldots n$, систему можно упростить:

$$hc_{i-1} + 4hc_i + hc_{i+1} = \frac{3}{h}\left(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}\right), \qquad i = 2,\ldots n$$

Коэффициенты b_i и d_i вычисляются после нахождения c_i по следующим формулам, с учетом, что c_{n+1}=0.

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \qquad\qquad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{(c_{i+1} + 2c_i)h_i}{3}$$

Пример вычисления коэффициентов c_i

x_i , i=0,…,4	0	1	2	3	4
f_i , i=0,…,4	1	3	1	4	2

$$h = x_i - x_{i-1} = 1, i = 1, \dots, 4$$

$$c_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4h & h & 0 \\ h & 4h & h \\ 0 & h & 4h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{h}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) \\ \frac{3}{h}\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) \\ \frac{3}{h}\left(y_4 - 2y_3 + y_2\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(1-6+1) \\ 3(4-2+3) \\ 3(2-8+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4c_2 \quad +c_3 \qquad\qquad &= -12 \\ c_2 \quad +4c_3 \quad +c_4 &= 15 \\ c_3 \quad +4c_4 &= -15 \end{aligned}$$

$$c_2 = \text{-}4.554$$

$$c_3 = 6.214$$

$$c_4 = \text{-}5.304$$

Численное дифференцирование

Производная функции есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении к нулю приращения аргумента.

$$\frac{dy(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{где} \quad \Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$$

При численном нахождении производной отношение бесконечно малых приращений функций и аргумента заменяют отношением конечных разностей. Очевидно, что чем меньше будет приращение аргумента, тем точнее численное значение производной.

Первая производная

Приращение аргумента задается тремя способами, откладывая $\Delta x=h$ вправо, влево и в обе стороны от исследуемой точки. Соответственно получается три двухточечных метода численного дифференцирования:

$$\frac{dy(x)}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad y'(x_i) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h},$$

$$\frac{dy(x)}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad y'(x_i) = \frac{y_i-y_{i-1}}{h},$$

$$\frac{dy(x)}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad \text{или} \quad y'(x_i) = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}.$$

Вторая производная

Вторая производная вычисляется как первая производная от первой производной. Расчетная формула имеет вид:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)\approx\frac{y'_{i+1}-y'_{i-1}}{2h}=\frac{\frac{y_{i+2}-y_i}{2h}-\frac{y_i-y_{i-2}}{2h}}{2h}=\frac{y_{i+2}-2y_i+y_{i-2}}{4h^2}$$

где $h=x_{i+1}-x_i$,

или $$\frac{d^2y(x)}{dx^2}\approx\frac{y_{i+2}-2y_i+y_{i-2}}{\tilde{h}^2},$$

где $\tilde{h}=x_{i+2}-x_i$

Задание

1. Для функции заданной таблицей значений согласно таблице вариантов выполнить расчеты коэффициентов кубического сплайна.
2. Для рассчитанных сплайнов построить графики в MathCAD (либо microsoft mathematics и т.п.).
3. С использованием современных высокоуровневых языков программирования для произвольной таблицы значений функции разработать программную реализацию построения
- кубического сплайна;
- первой и второй производной.

   Сравнить результаты работы программы с графиками построенными в п. 2.
4. Подготовить отчет о проделанной работе, включающий:
- исходные данные (таблицу значений функции);
- результаты вычислений (коэффициенты сплайнов, графики));
- результаты работы программ (графики, с выделением точек таблицы);
- тексты программ.

Таблица вариантов

№ вар.	$f(x)$					
1	x_i	1	2	3	4	5
	f_i	4	2	8	1	-1
2	x_i	-2	-1	0	1	2
	f_i	7	9	0	9	7
3	x_i	2	4	6	8	10
	f_i	0	3	1	3	7
4	x_i	-4	-2	0	2	4
	f_i	-11	-5	0	3	9
5	x_i	-3	-2	-1	0	1
	f_i	5	1	8	1	9
6	x_i	-2	-1	0	1	2
	f_i	3	0	10	0	3
7	x_i	2	4	6	8	10
	f_i	7	3	1	3	0