Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Сформулируем задачу Коши: найти решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ с начальными условиями (x_0,y_0), т.е. известно значение $y(x_0)=y_0$.

При использовании численных методов значения непрерывной функции $y(x)$, являющейся решением уравнения, вычисляются на конечном дискретном множестве значений аргумента: $x_0<x_1<\ldots<x_N$.

Методы, которые сводят решение к набору рекуррентных соотношений, позволяющих по предыдущим уже вычисленным значениям $y(x)$ найти следующие называют **ЯВНЫМИ** .

НЕЯВНЫМИ называют методы, в которых для определения значения y_{n+1} требуется решить в общем случае нелинейное, зависящее от вида функции $f(x,y)$ уравнение относительно y_{n+1}.

ОДНОШАГОВЫМИ называют методы, в которых для вычисления y_{n+1} требуется знать только одно предыдущее значение – y_n.

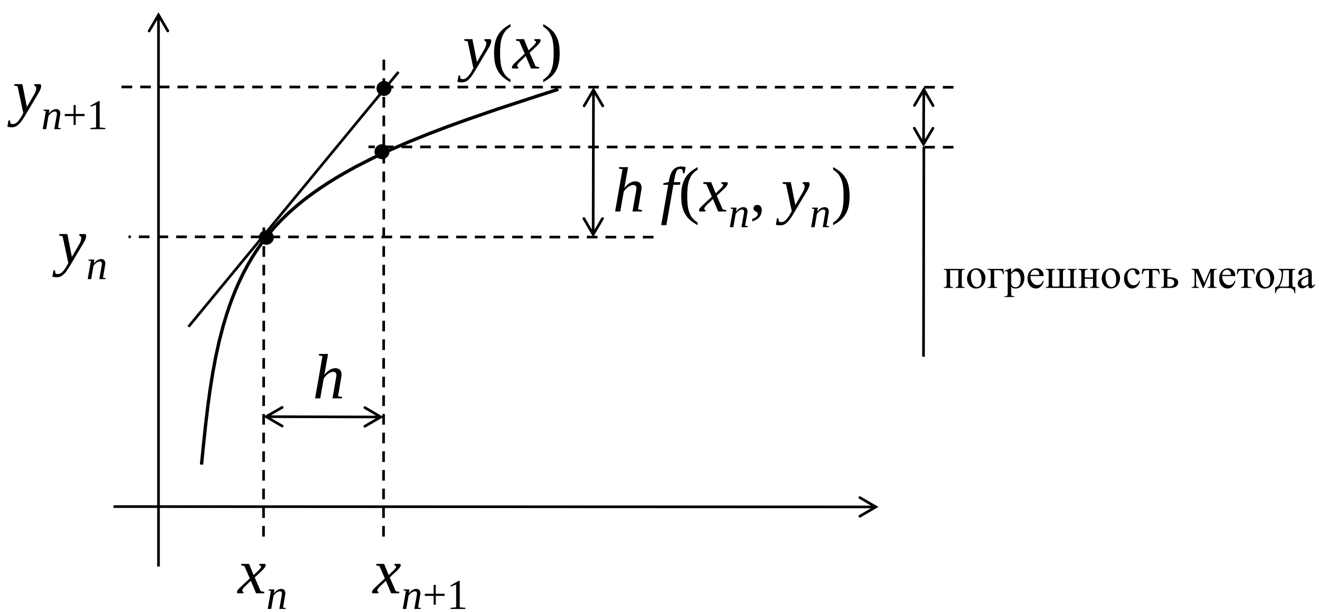
Если для вычисления y_{n+1} требуется знать несколько предыдущих значений y_n, $y_{n-1},\ldots,$ y_{n-m}, то такие методы называют **МНОГОШАГОВЫМИ**.

Метод Эйлера

Это наиболее простой метод, полученное с помощью него решение в точке x_{n+1} совпадает с разложением $y(x)$ в окрестности этой точки в ряд Тейлора до членов порядка h, где $h = x_{n+1} - x_{n}$.

Расчетная формула выглядит так: $y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n)$.

Суть метода можно пояснить графически:



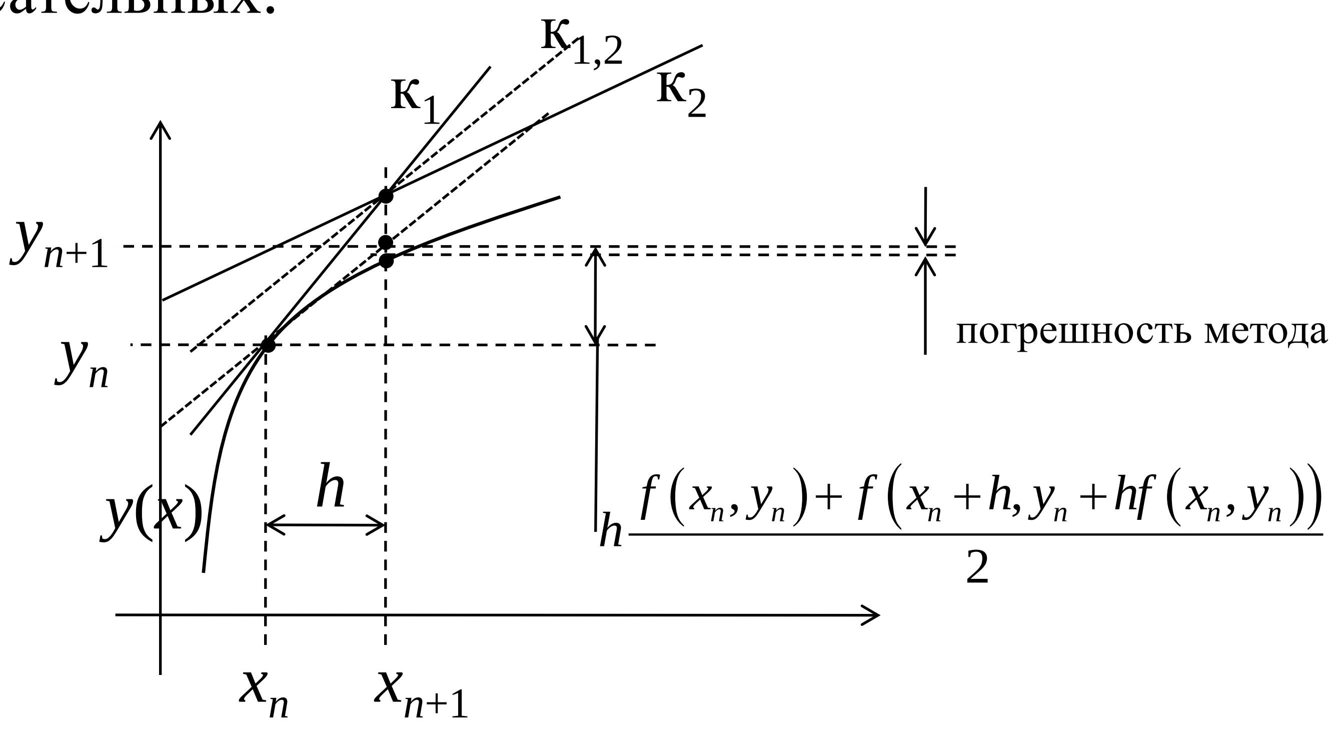
Исправленный метод Эйлера

Это модификация метода Эйлера, увеличивающая порядок точности метода относительно шага до второго.

Расчетная формула выглядит так:

$$y_{n+1} = y_m + h\frac{f\left(x_n, y_n\right) + f\left(x_n + h, y_n + hf\left(x_n, y_n\right)\right)}{2}$$

Графически это можно показать как усреднение угла наклона касательных:



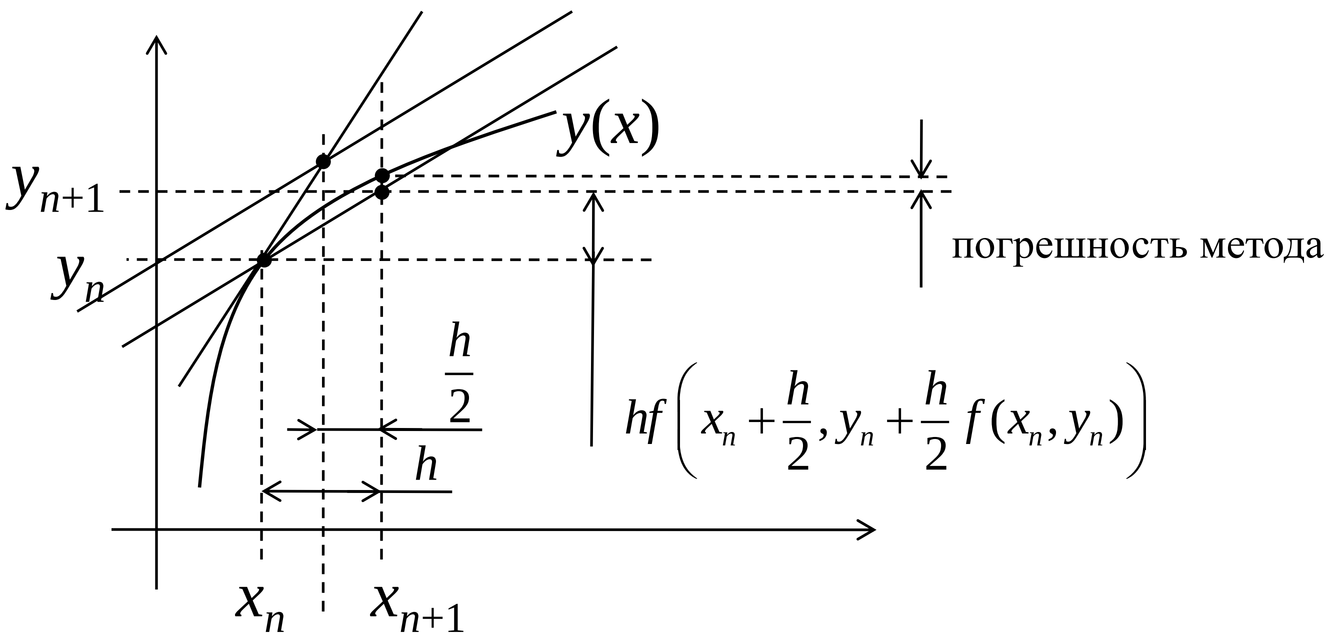
Модифицированный метод Эйлера

Это другая модификация метода Эйлера, также увеличивающая порядок точности метода относительно шага до второго.

Расчетная формула выглядит так:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$$

Графически это можно показать как вычисление угла наклона касательной в точке $x_n + \frac{h}{2}$:



Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Перечисленные методы являются частными случаями методов Рунге-Кутты различного порядка точности, это одношаговые явные методы. Наиболее часто на практике применяется метод четвертого порядка.

Его расчетная формула выглядит так:

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2),$$

$$k_3 = f(x_n + h/2, y_n + hk_2/2),$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Метод Рунге–Кутты Мерсона

В этой модификации метода присутствует механизм автоматического изменения шага сетки, основанный на контроле точности вычислений.

Алгоритм метода можно записать так:

Шаг 1. Вычисляются k_i:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3)$$

$$k_5 = hf(x_n + h, y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4)$$

Шаг 2. Находится оценка локальной ошибки

$$\delta_{n,4} = \frac{1}{30}(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5)$$

Шаг 3. Если выполняется неравенство $\left|\delta_{n,4}\right| \geq \varepsilon \left|y_n\right|$,

где ε заданная точность

то шаг уменьшается в 2 раза и управление передается на шаг 1.

Шаг 4. Вычисляется решение $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5$

Шаг 5. Если выполняется неравенство $\left|\delta_{n,4}\right| \leq \frac{\varepsilon\left|y_n\right|}{32}$,

то шаг увеличивается в 2 раза.

Шаг 6. Выполняется переход к следующей точке.

Многошаговый метод Адамса

Пусть нам известно приближенное решение в четырех первых точках x_0, x_1, x_2, x_3. Тогда в этих точках $f(x,y)$ можно рассматривать как функцию одного аргумента – x: $f(x,y)=F(x)$.

Заменим $F(x)$ интерполяционным многочленом и вычислим y_{n+1} проинтегрировав его на отрезке $(x_n;x_{n+1})$, для постоянного шага h получим:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x)dx = \frac{h}{24}\left(55F_n - 59F_{n-1} + 37F_{n-2} - 9F_{n-3}\right)$$

После получения y_{n+1} вычислим $F_{n+1}= f(x_{n+1},y_{n+1})$ и перейдем к следующей точке $(n+2)$.

Для вычисления первых приближений можно воспользоваться одним из одношаговых методов.

Методы Адамса различных порядков

Ниже представлены формулы для методов Адамса от второго до пятого порядков. Метод k-го порядка требует предварительного вычисления решения в k точках.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(3F_n - F_{n-1}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(23F_n - 16F_{n-1} + 5F_{n-2}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(55F_n - 59F_{n-1} + 37F_{n-2} - 9F_{n-3}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\left(1901F_n - 2774F_{n-1} + 2616F_{n-2} - 1274F_{n-3} + 251F_{n-4}\right)$$

Задание

1. С использованием современных высокоуровневых языков программирования для задачи Коши заданной в таблице вариантов разработать программную реализацию следующих методов:
- Эйлера,
- Рунге–Кутты Мерсона,
- методов указанных в таблице вариантов.
2. Требования программе.
- Решение выводится в виде графика (кусочно-линейная аппроксимация).
- Координата *x* конечной точки задается пользователем.
- Для метода Рунге–Кутты Мерсона задается точность, для остальных методов значение шага.
- Для метода Рунге–Кутты Мерсона на графике должны отображаться точки.
- Должна быть возможность просматривать одновременно (в одной системе координат) результаты нескольких методов и точное решение (приводится в таблице вариантов).
3. С помощью разработанной программы выполнить вычисления каждым из методов при различных значениях шага (точности). Сравнить полученные результаты.
4. Подготовить отчет о проделанной работе, включающий:
- результаты вычислений (графики решения, полученные разными методами, при различной величине шага (точности));
- выводы;
- тексты программ.

Таблица вариантов

№ вар.	$f(x, y)$	$(x_0; y_0)$	x_n	Точное решение	Методы
1	$3-y-x$	0; 0	10	$4-x-4e^{-x}$	1. Исправленный Эйлера. 2. Адамса 5-го порядка.
2	$\sin(x)-y$	0; 10	20	$-0.5\cos(x)+0.5\sin(x)+\frac{21}{2}e^{-x}$	1. Модифицированный Эйлера. 2. Адамса 3-го порядка.
3	$-y-x^2$	0; 10	5	$-x^2+2x-2+12e^{-x}$	1. Рунге-Кутты 4 порядка. 2. Адамса 4-го порядка.
4	$y-yx$	0; 5	6	$5e^{-\frac{1}{2}x(-2+x)}$	1. Исправленный Эйлера. 2. Адамса 4-го порядка.
5	$(y-y^2)x$	0; 3	4	$\frac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x^2}}$	1. Модифицированный Эйлера. 2. Адамса 2-го порядка.
6	$(x-x^2)y$	0; 1	5	$e^{-\frac{1}{6}x^2(-3+2x)}$	1. Рунге-Кутты 4 порядка 2. Адамса 5-го порядка.
7	$1-y+x$	1; 15	10	$x+14e^{1-x}$	1. Исправленный Эйлера. 2. Адамса 3-го порядка.