

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ (аппроксимация)

- замена некоторой функции другой близкой к ней, но более простой и удобной.

Задачи аппроксимации

Пусть значения $f(x)$ известны в точках $x_0, \dots, x_n$ требуется **восстановить значения между этими точками**.

Способ, при котором требуется точное совпадение приближающей функции и $f(x)$ в точках $x_0, \dots, x_n$, называют **интерполяцией**.

Задачи аппроксимации

Если требуется вычислить значение $f(x)$ вне интервала, на котором расположены известные точки $x_0, \dots, x_n$, то говорят об **экстраполяции**.

Задачи аппроксимации

Пусть результаты измерения некоторой величины содержат случайные отклонения, требуется подобрать функцию наилучшим образом отражающую выявленные зависимости.

Такую задачу называют
**сглаживание экспериментальных
зависимостей.**

Задачи аппроксимации

Методы аппроксимации функций используются при численном решении дифференциальных уравнений и вычислении интегралов.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Требуется построить функцию $\varphi(x)$ по известным значениям $f(x_i)$, такую, что значения $\varphi(x)$ легко вычисляются при любом значении $x \in [x_0, x_n]$ и при этом $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$.

Обычно $\varphi(x)$ ищется в виде линейной комбинации *некоторых базисных функций* $\varphi_i(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x)$$

Интерполяционный многочлен

Если в качестве базисных функций выбрать степенные функции $1, x, x^2, \dots, x^n$, то $\varphi(x)$ будет многочленом степени n :

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Для определения a_i требуется решить систему уравнений $\varphi(x_i) = f(x_i); i=0, \dots, n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Определитель этой системы является ненулевым определителем Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{j>i\geq 0}^n (x_j - x_i) \neq 0$$



Решение системы существует и единственно.



Для таблицы значений функции содержащей $(n+1)$ точек существует единственный интерполяционный многочлен степени n .

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Искомый многочлен записывается в виде

$$L(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x), \text{ где многочлен } l_i(x) \text{ — многочлен степени } n,$$

$$\text{удовлетворяющий условию } l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Согласно теореме о разложении многочлена по корням все x_j за исключением x_i должны быть корнями многочлена l_i .



$$l_i(x) = C_i (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

Найдем C_i исходя из условия равенства единице при $i=j$:

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Таким образом, интерполяционный многочлен в форме Лагранжа будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \end{aligned}$$

Пример

Для таблицы значений $y(x)$

x	-1	0	1	2
y	4	2	0	1

построим интерполяционный многочлен
в форме Лагранжа:

$$L(x) = 4 \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} + 2 \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(1)(-1)(-2)} \\ + 1 \frac{(x+1)x(x-1)}{(3)(2)(1)}$$

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

использует разделенные разности.

Разделенные разности *нулевого* порядка совпадают со значениями функции.

Пусть $x_i < x_j < x_k$ последовательность трех известных точек.

Разделенные разности *первого* порядка определяются соотношениями:

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

Разделенные разности *второго* порядка определяются через разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i; x_j; x_k) = \frac{f(x_i; x_j) - f(x_j; x_k)}{x_i - x_k}$$

Разделенная разность *порядка n* определяется соотношением:

$$f(x_i; x_j; x_k; \dots; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(\textcolor{red}{x}_i; x_j; x_k; \dots; x_{n-1}) - f(\textcolor{red}{x}_j; x_k; \dots; x_n)}{x_i - x_n}$$

Если функция задана таблицей значений в четырех точках: x_0, x_1, x_2, x_3 , то разделенные разности удобно вычислять в следующем порядке:

$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$	$f(x_0; x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$
$f(x_1)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	
$f(x_2)$	$f(x_2; x_3)$		
$f(x_3)$			

Вывод формулы интерполяционного многочлена в форме Ньютона:

$$1. \quad f(x; x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x; x_0)$$

$$2. \quad f(x; x_0; x_1) = \frac{f(x; x_0) - f(x_0; x_1)}{x - x_1}$$


$$f(x; x_0) = f(x_0; x_1) + (x - x_1) f(x; x_0; x_1)$$

подставляя 2 в 1 получаем:

$$3. \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x; x_0; x_1)$$

Продолжая дальше в итоге получим:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \dots + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_n) \end{aligned}$$

Основное преимущество формы Ньютона в сравнении с формой Лагранжа – отсутствие необходимости перестраивать весь многочлен при добавлении новой точки в таблицу.

Интерполяция сплайнами

Сплайном степени m называется функция $S_m(x)$, обладающая следующими свойствами:

1. функция непрерывна на отрезке $[x_0, x_n]$ вместе со своими производными до некоторого порядка p ;
2. на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция совпадает с некоторым алгебраическим многочленом степени m .

Величину $(m - p)$ называют дефектом сплайна.

Кубический сплайн

Обозначим $f(x_i)$ через y_i и будем для каждого интервала $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, \dots, n$ искать функцию

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3.$$

Коэффициенты сплайнов a_i , b_i , c_i , d_i определим из условий:

I равенство значений $\varphi_i(x)$ и $f(x)$ в узлах:

$$\varphi_i(x_{i-1}) = y_{i-1}; \varphi_i(x_i) = y_i.$$

II Непрерывность производных:

$$\varphi_i'(x_i) = \varphi_{i+1}'(x_i); \quad \varphi_i''(x_i) = \varphi_{i+1}''(x_i).$$

III Необходимо задать два дополнительных условия, их называют **граничными**: $\varphi_1''(x_0) = 0$, $\varphi_n''(x_n) = 0$.

Построим систему уравнений для определения коэффициентов, обозначив $x_{i-1} - x_i$ через h_i

Из **I**:

$$a_i = y_{i-1} \quad (1)$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \quad (2)$$

из **II**:

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \quad (3)$$

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \quad (4)$$

из граничных условий на основании выражения для второй производной получим, что

$$c_1 = 0 \quad (5)$$

$$c_n + 3d_n h_n = 0 \quad (6)$$

Приведение системы к трехдиагональному виду

Из (4) получим $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$ (7)

Объединим (1), (2) и (7):

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{(c_{i+1} + 2c_i)h_i}{3} \quad (8)$$

Подставим (7) и (8) в (3):

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_ic_{i+1} = 3 \left[\frac{(y_i - y_{i-1})}{h_i} - \frac{(y_{i-1} - y_{i-2})}{h_{i-1}} \right],$$

$$i = 2, \dots, n$$

При условии постоянного шага т.е. $h_i = h_{i-1} = h$, для всех $i=2, \dots, n$, систему можно упростить:

$$hc_{i-1} + 4hc_i + hc_{i+1} = \frac{3}{h}(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}),$$
$$i = 2, \dots, n$$

Коэффициенты b_i и d_i вычисляются после нахождения c_i с учетом, что $c_{n+1}=0$.

Пример вычисления коэффициентов c_i

$x_i, i=0,...,4$	0	1	2	3	4
$y_i, i=0,...,4$	1	3	1	4	2

$$h = x_i - x_{i-1} = 1, i = 1, \dots, 4$$

$$c_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4h & h & 0 \\ h & 4h & h \\ 0 & h & 4h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{h}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ \frac{3}{h}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ \frac{3}{h}(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{pmatrix}$$

Сглаживание методом наименьших квадратов (МНК)

Сущность МНК, для табличной функции состоит в том, чтобы отыскать такую аналитическую зависимость *из некоторого класса функций*, для которой сумма квадратов отклонений по всем точкам таблицы была бы минимальной.

Для многочлена k -й степени

$$P_k(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$$

сумма квадратов отклонений представляет собой неотрицательную функцию

$$F(a_0, \dots, a_k) = \sum_{i=0}^n (a_k x_i^k + \dots + a_1 x_i + a_0 - y_i)^2$$

Наилучшие коэффициенты многочлена должны давать минимум функции F .



Задача отыскания
коэффициентов сводится к
решению системы
уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a_0} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial a_k} = 0 \end{cases}$$

Дифференцируя F по каждой переменной, получаем систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k = d_0 \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \dots + c_{k+1} a_k = d_1 \\ \dots \\ c_k a_0 + c_{k+1} a_1 + c_{k+2} a_2 + \dots + c_{2k} a_k = d_k \end{array} \right.$$

где $c_m = \sum_{i=0}^n x_i^m, m = 0, \dots, 2k;$

$$d_j = \sum_{i=0}^n f_i x_i^j, j = 0, \dots, k.$$

Применять сглаживание нужно осмотрительно. В некоторых случаях резко выделяющиеся точки могут характеризовать существенные качественные изменения, происходящие в исследуемом объекте. Сглаживая экспериментальные данные, можно легко утратить информацию о таких явлениях.