Литература

Методы решения статистических задач (без углубленных доказательств):

В.Е. ГМУРМАН

Теория вероятностей и математическая статистика

Доказательства:

Н.И. Чернова

Лекции по математической статистике.

Проверка гипотез о математических ожиданиях нормальных СВ при известных дисперсиях

Сравнение с заданным значением *m*

$$H_0 : m_x = m$$

Если H_0 верна, то контрольная величина:

$$Z = \frac{m_x^* - m}{\sqrt{D[m_x^* - m]}} = \frac{m_x^* - m}{\sqrt{D[m_x^*]}} =$$

$$= \frac{m_x^* - m}{\sqrt{\dfrac{D[X]}{N}}} = \frac{(m_x^* - m)\sqrt{N}}{\sigma_x}$$

где N - объем выборки,

имеет стандартное нормальное распределение.

Для **сравнения двух выборочных средних**

Т.е. проверки гипотезы $H_0 : m_x = m_y$

$$Z = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{D[m_x^* - m_y^*]}} = \frac{m_x^* - m_y^*}{\sqrt{\frac{D[X]}{N_x} + \frac{D[Y]}{N_y}}}$$

N_x – объем выборки X,
N_y – объем выборки Y.

Критическую область выбирают в зависимости от вида конкурирующей гипотезы:

$$H_1 : m_x \neq m_y$$ - двусторонняя;

$$H_1 : m_x > m_y$$ - правосторонняя;

$$H_1 : m_x < m_y$$ - левосторонняя.

Поиск критических точек для двусторонней области

При заданном α правую критическую точку можно найти как квантиль стандартного нормального закона уровня $1-\alpha/2$, левая критическая точка противоположна правой по знаку.

$$z_{прав.кр.} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Оценка параметров распределения

(*по экспериментальным данным*)

Точечные оценки

Точечная оценка неизвестного параметра a представляет собой функцию выборки

$$\tilde{a}(X_1, ..., X_n)$$

реализация которой *могла бы рассматриваться* как приближение этого параметра.

Требования к оценкам

1. Состоятельность;
2. несмещенность;
3. эффективность.

Выборочное среднее как оценка математического ожидания: $\tilde{m}_x = m_x^*$

1. Согласно ***“Закону больших чисел”*** является состоятельной оценкой.

2. Является несмещенной.

3. Если X имеет нормальное распределение, то оценка является эффективной.

Выборочная дисперсия как оценка дисперсии: $\widetilde{D}_x = D_x^*$

1. является состоятельной, по***“Закону больших чисел”*** так как

$$D_x^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(m_x^*\right)^2,$$

2. является смещенной оценкой, так как:

$$M\left[D_x^*\right] = \frac{n-1}{n} D_x$$

По этой причине в качестве оценки обычно используют **исправленную** выборочную дисперсию:

$$\widetilde{D}_x = \frac{n}{n-1} D_x^*$$

Получение оценок. Метод моментов:

для параметров, которые выражаются через моменты, оценки получают заменяя теоретические моменты на выборочные.

Метод наибольшего правдоподобия

Функцией правдоподобия называют функцию параметра *a* определяемую соотношением:

$$L(x_1,...,x_N;a) = P(X_1 = x_1;a)\cdot...\cdot P(X_N = x_N;a)$$

для дискретного или

$$L(x_1,...,x_N;a) = f(x_1;a)\cdot...\cdot f(x_N;a)$$

для непрерывного распределения.

Эту функцию *следует рассматривать как* ***вероятность*** того что СВ X_i примут значения $x_1,\ldots,x_N$, при условии что параметр распределения равен a.

В качестве оценки берется значение при котором функция правдоподобия достигает максимума, которое находят решая уравнение или систему уравнений если параметров несколько.

Пример: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (0 < x < \infty)$

Найти оценку параметра λ методом наибольшего правдоподобия.

Строим функцию правдоподобия. Логарифмируем и дифференцируем.

$$L = \lambda^N e^{-\lambda \sum_{i=1}^{N} x_i} \Rightarrow \frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{N}{\lambda} - \sum_{i=1}^{N} x_i \Rightarrow$$

Выражаем параметр из уравнения.

$$\Rightarrow \lambda = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} x_i} = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} = \frac{1}{m_x^*}.$$

Убеждаемся, что вторая производная отрицательна.

$$\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -\frac{N}{\lambda^2}$$

Доверительные оценки

позволяют выбрать значение параметра с учетом ***вероятности*** *ошибки*.

Доверительные оценки

Пусть $\underline{a}(X_1, ..., X_N)$ и $\overline{a}(X_1, ..., X_N)$

такие функции выборки, что $P\left[\underline{a} < a < \overline{a}\right] = \gamma.$

Т.е. интервал $(\underline{a}; \overline{a})$ покрывает истинное значение параметра с вероятностью γ.

Тогда $(\underline{a}; \overline{a})$ называют **доверительной оценкой** параметра *a* с мерой надежности (***доверительной вероятностью***) γ.

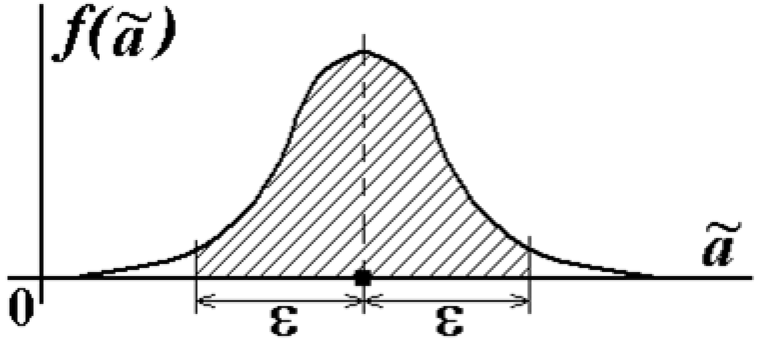
Получение доверительных оценок

Если имеется несмещенная оценка $\tilde{a}$,

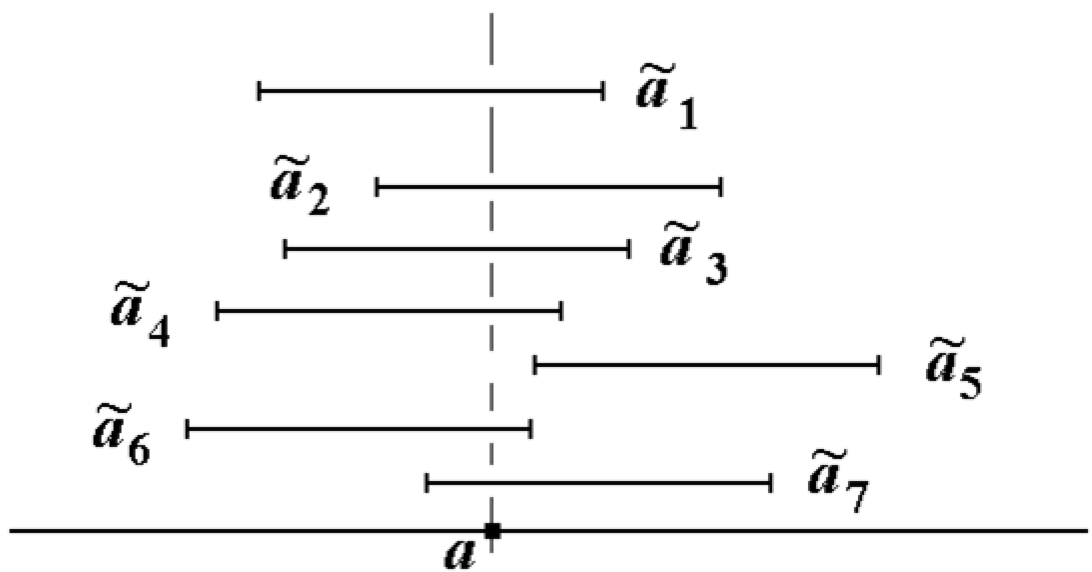
то для построения доверительного интервала с мерой надежности γ необходимо найти такое ε, при котором

$P\left(\left|\tilde{a}-a\right|<\varepsilon\right)=\gamma,$ тогда $\left(\tilde{a}-\varepsilon;\tilde{a}+\varepsilon\right)$

будет искомым интервалом.



***a* – (неизвестное истинное значение парамтра)**



Построение доверительного интервала для математического ожидания нормальной СВ при известной дисперсии.

В качестве точечной оценки возьмем выборочное среднее m^*_x. Согласно ЦПТ закон распределения выбранной оценки будет нормальным. Параметры распределения оценки $m_x, \sigma_x / \sqrt{N}$, так как

$$M\left[m_x^*\right] = m_x,$$

$$D\left[m_x^*\right] = \frac{D_x}{N},$$ где N – объем выборки.

Тогда при заданной доверительной вероятности

$$P\left[\left|m_x - m_x^*\right| < \varepsilon\right] = \gamma$$

ε можно найти из соотношений

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma_x}\right) = \gamma \qquad (1)$$

или

$$2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma_x}\right) - 1 = \gamma \qquad (2),$$

где Φ – нормированная функция Лапласа, Φ^* – функция распределения стандартной нормальной величины.

Связь между двусторонней критической областью и доверительным интервалом

Если для некоторого уровня значимости α найдены критические значения $-z_{кр}, z_{кр}$

То гипотезу $H_0 : m_x = m$ не отвергают, когда

$$-z_{кр} < \frac{(m_x^* - m)\sqrt{N}}{\sigma_x} < z_{кр}$$

С другой стороны

$$m_x^* - z_{кр}\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} < m < m_x^* + z_{кр}\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Будет доверительным интервалом с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$

Очевидно, что

$$z_{кр} = z_{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad \text{так как} \quad 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$$

Полученное соотношение устанавливает связь между тремя величинами:

1) доверительная вероятность γ,
2) объем выборки N,
3) величина доверительного интервала $\delta=2\varepsilon$ (**точность оценки**), где

$$\varepsilon = z_{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}},$$

Оно позволяет ответить вопрос о минимальном N, необходимом для построения доверительного интервала с заданными γ и δ.

Проверка гипотез о математических ожиданиях нормальных СВ при **неизвестных** дисперсиях

Критерий Стьюдента (t-критерий)

$$H_0 : m_x = m$$

Если H_0 верна, то контрольная величина:

$$T = \frac{(m_x^* - m)\sqrt{n}}{\sqrt{\widetilde{D}_x}},$$

где n - объем выборки,

$\widetilde{D}_x$ - исправленная выборочная дисперсия,

имеет распределение Стьюдента с $r = n-1$ степенями свободы.

Распределение Стьюдента

с r степенями свободы

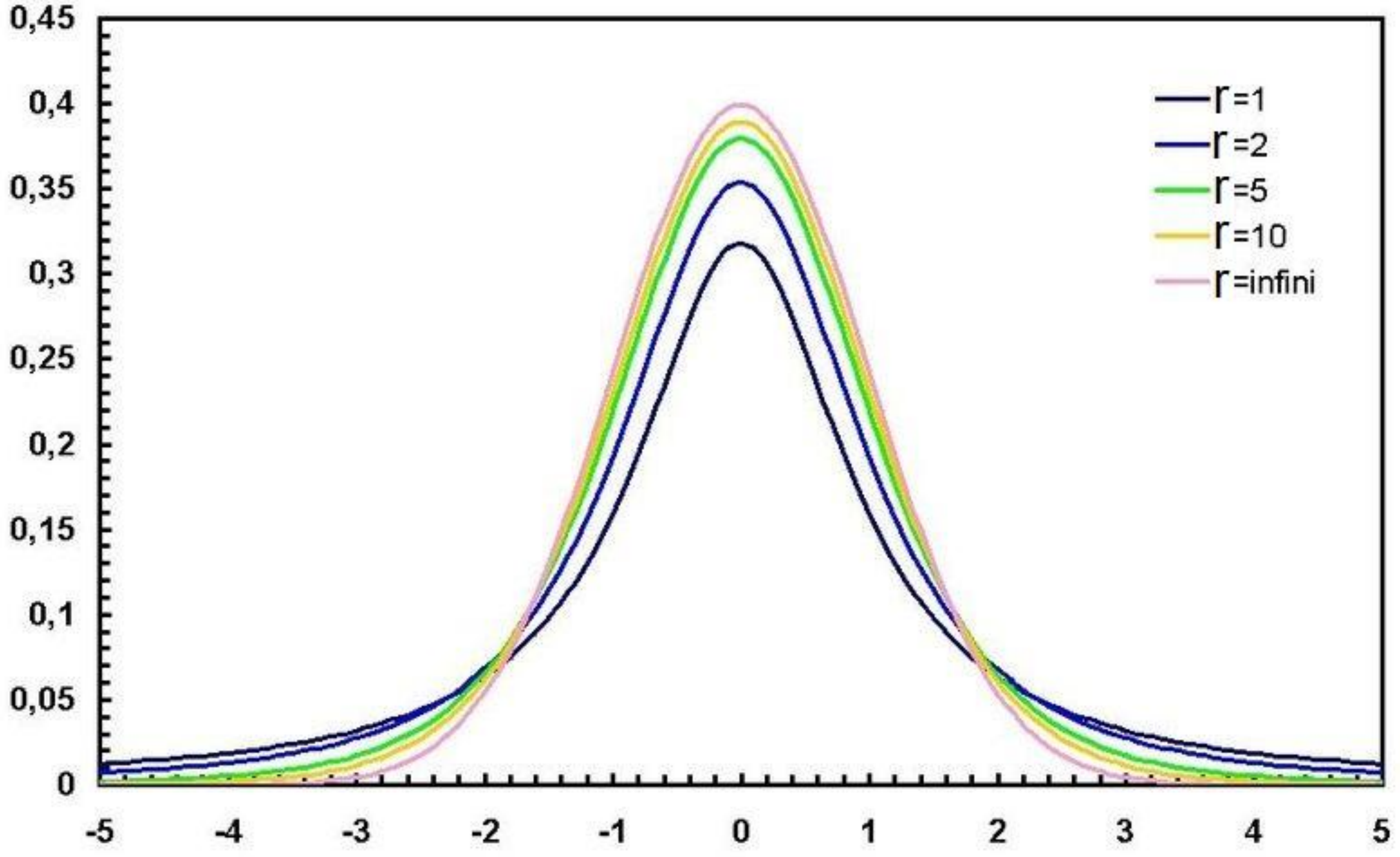
имеет СВ равная $$\frac{Z_0}{\sqrt{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} Z_i^2}},$$

где Z_i – независимые стандартные нормальные СВ.

Или с использованием распределения хи квадрат

$$\frac{Z_0}{\sqrt{\frac{\chi_r^2}{r}}}$$

Плотность распределения Стьюдента



В пределе при r→∞ приближается к стандартному нормальному.

Величину $T = \dfrac{(m_x^* - m)\sqrt{n}}{\sqrt{\widetilde{D}_x}}$ можно представить как

$$\frac{(m_x^* - m)\sqrt{n}}{\sigma_x \sqrt{\dfrac{\widetilde{D}_x}{\sigma_x^2}}}$$ или $$\frac{Z}{\sqrt{\dfrac{\widetilde{D}_x}{\sigma_x^2}}},$$ где Z – стандартная нормальная СВ.

По теореме Фишера величина $\dfrac{(n-1)\widetilde{D}_x}{\sigma_x^2}$

или $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2}{\sigma_x^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i - m_x^*}{\sigma_x}\right)^2$

имеет распределение χ^2 с $r = (n-1)$ степенями свободы.

Данное соотношение можно использовать для проверки гипотезы о величине дисперсии.

Проверка гипотез о дисперсиях нормальных СВ

Критерий Фишера (F-критерий)

$$H_0 : D_x = D_y$$

Контрольная величина: $F = \dfrac{\widetilde{D}_x}{\widetilde{D}_y}$, где

$\widetilde{D}_x, \widetilde{D}_y$ - исправленные выборочные дисперсии

(большую дисперсию выбирают в качестве числителя).

Если H_0 верна, F имеет распределение Фишера с $r_1 = n_1$-1 и $r_2 = n_2$-1 степенями свободы, где n_1 и n_2 - объемы выборок.

Критическую область выбирают в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Распределение Фишера

с r_1, r_2 степенями свободы – это распределение СВ

$$\frac{\chi_1^2(r_1)/r_1}{\chi_2^2(r_2)/r_2},\ \text{где}$$

χ_1^2, χ_2^2 - независимые СВ имеющие распределение χ^2 с r_1, r_2 степенями свободы соответственно.

Плотность распределения Фишера