Численное интегрирование

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и

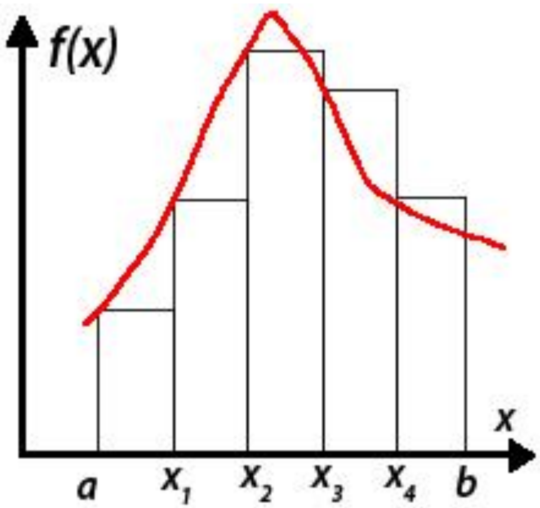
требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Метод прямоугольников

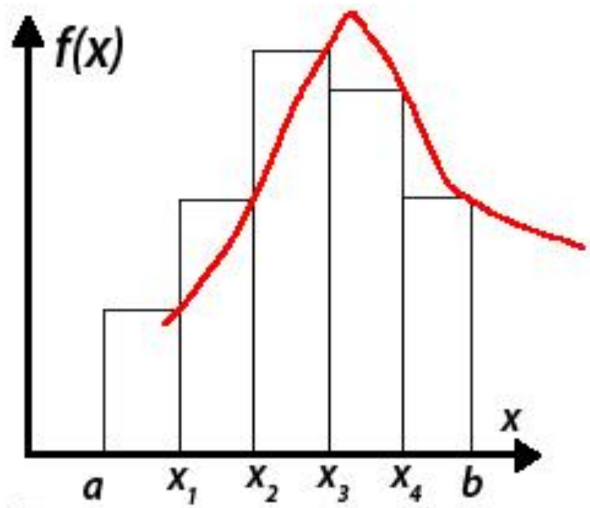
На каждом интервале $(x_i;x_{i+1})$,
где $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$.
$f(x)$ ***аппроксимируют константой***.

Как правило используют
постоянный шаг $x_{i+1}-x_i=\mathbf{h}$.

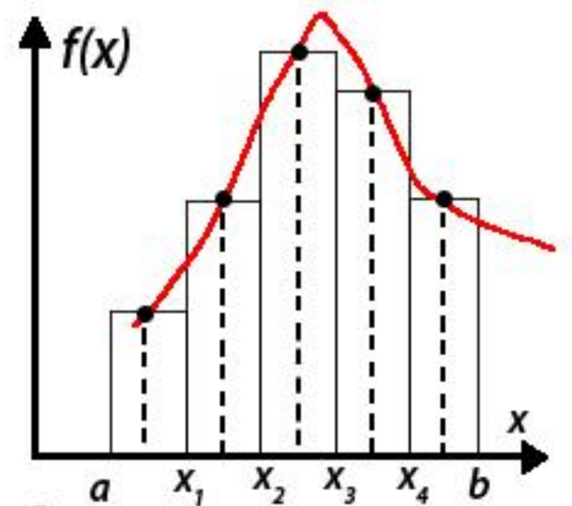
Три способа выбора точки:



Левые прямоугольники



Правые прямоугольники



Средние прямоугольники

От этого выбора зависит точность.

Левые прямоугольники:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i).$$ ***расчетная формула***

Оценка погрешности

Используя разложение $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_i получим:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx =$$

$$x \cdot f(x_i)\Big|_{x_i}^{x_i+h} + \frac{(x-x_i)^2}{2} f'(x_i)\Bigg|_{x_i}^{x_i+h} + \frac{(x-x_i)^3}{3 \cdot 2!} f''(x_i)\Bigg|_{x_i}^{x_i+h} + \ldots =$$

$$= hf(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) + O(h^3)$$

Погрешность одного шага $R_i = \frac{h^2}{2}\left| f'(x_i) \right| + O(h^3).$

Погрешность метода $R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i \le n \cdot h^2 \frac{M_1}{2} + O(h^3),$

можно оценить так: $R \le \frac{h}{2} M_1 (b-a),$ где $M_1 = \max_{a \le x \le b} \left| f'(x) \right|.$

Метод имеет первый порядок точности

(*относительно шага интегрирования*).

Правые прямоугольники – аналогично.

Средние прямоугольники:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

Для оценки погрешности используем

разложение в окрестности точки $\bar{x} = x_i + \dfrac{h}{2}.$

Второй член разложения сократится, поэтому:

$$R \le \frac{h^2}{24} M_2 (b-a), \text{ где } M_2 = \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|.$$

Получаем второй порядок точности.

показать самостоятельно

Повысить точность можно

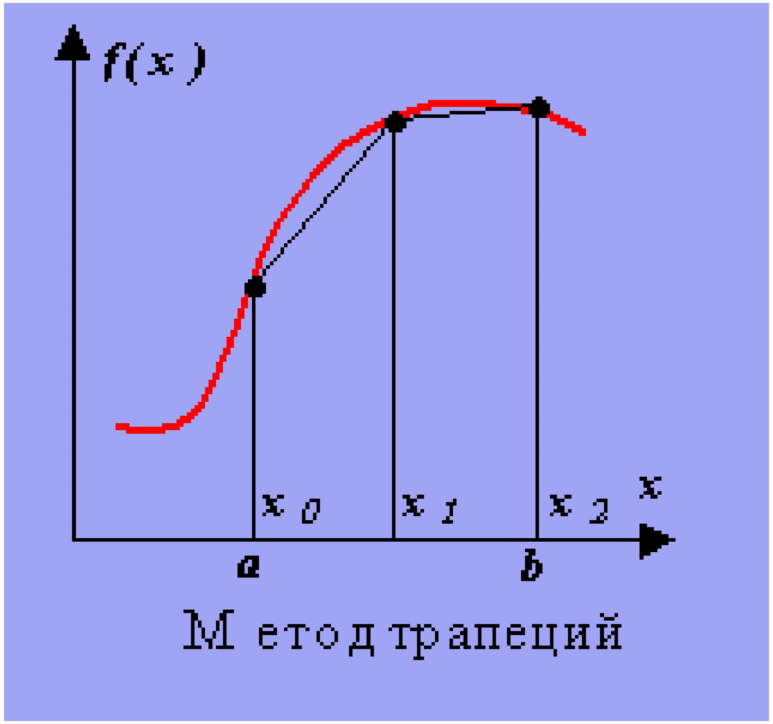
увеличением точности аппроксимации =>

увеличением степени аппроксимирующего многочлена.

Метод трапеций:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).$$

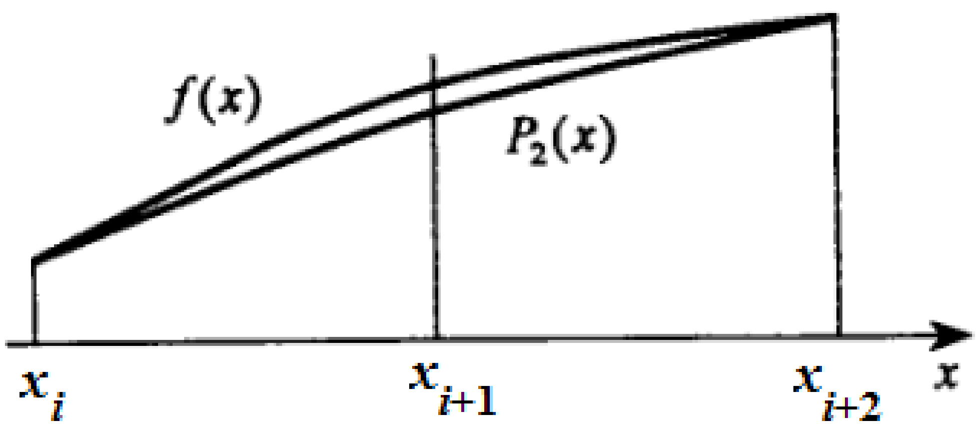
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) + err,$$



$$|err| \le \frac{h^2}{12} M_2 (b-a).$$

Метод Симпсона (метод парабол).

Подынтегральная функция заменяется интерполяционным полиномом второй степени $P_2(x)$ – параболой, проходящей через три точки x_i, x_{i+1}, x_{i+2}.



Расчетную формулу легко получить используя многочлен в ***форме Ньютона.***

Интеграл по одному интервалу:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right)$$

Общая формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Погрешность:

$$R \le \frac{h^4}{180} M_4 (b-a), \quad \text{где } M_4 = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Методы более высоких порядков

Общая формула при аппроксимации многочленом степени k:

$$\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx \approx c_0 h \sum_{i=0}^{k} \omega_i f(x_i).$$

Коэффициенты методов **Ньютона-Котеса**:

k	c_0	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1	1/2	1	1	-	-	-	-
2	1/3	1	4	1	-	-	-
3	3/8	1	3	3	1	-	-
4	2/45	7	32	12	32	7	-
5	5/288	19	75	50	50	75	19

При уменьшении шага следует учитывать, что *n* должно быть кратно *k*.

В основе алгоритмов с автоматическим выбором шага лежит **правило Рунге**

Пусть для вычисления $g(x)$ используется приближенная формула $\varphi(x,h)$ и

$g(x)-\varphi(x,h)=M h^p$,

где M – константа.

При вычислении с шагом rh получим

$g(x)-\varphi(x, rh)=M (rh)^p$.

Тогда

$$Mh^p = \frac{\varphi(x,h)-\varphi(x,rh)}{r^p - 1}$$

Пусть при последовательном уменьшении шага приближение вычисленное с шагом h обозначено S_h , а $S_{h/r}$ – с шагом h/r, тогда процесс измельчения сетки можно прекратить если $\dfrac{\left|S_h - S_{h/r}\right|}{r^p - 1} < \varepsilon,$

где ε - заданная точность,
p – порядок точности метода.