

Численное интегрирование

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и

требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$.

Метод прямоугольников

На каждом интервале $(x_i; x_{i+1})$,

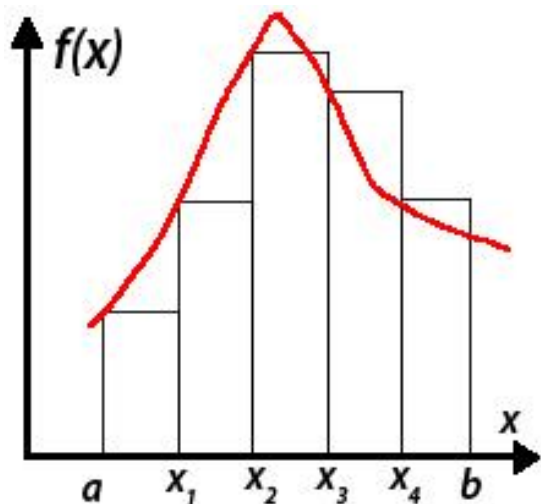
где $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$.

$f(x)$ *аппроксимируют константой.*

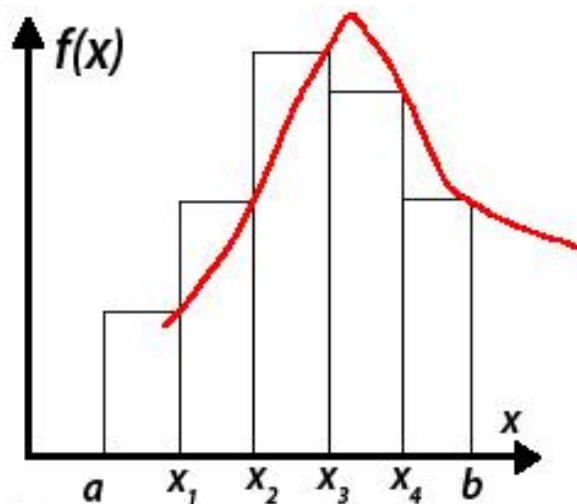
Как правило используют

постоянный шаг $x_{i+1} - x_i = h$.

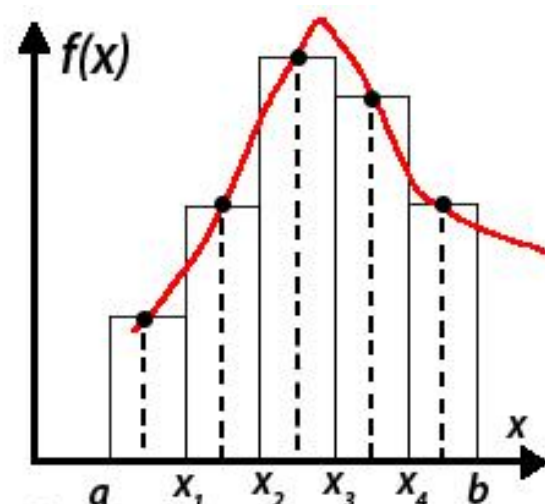
Три способа выбора точки:



Левые прямоугольники



Правые прямоугольники



Средние прямоугольники

*От этого выбора
зависит точность.*

Левые прямоугольники:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i). \quad \leftarrow \text{расчетная формула}$$

Оценка погрешности

Используя разложение $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_i получим:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx =$$

$$x \cdot f(x_i) \Big|_{x_i}^{x_i+h} + \frac{(x-x_i)^2}{2} f'(x_i) \Big|_{x_i}^{x_i+h} + \frac{(x-x_i)^3}{3 \cdot 2!} f''(x_i) \Big|_{x_i}^{x_i+h} + \dots =$$

$$= hf(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) + O(h^3)$$

Погрешность одного шага $R_i = \frac{h^2}{2} |f'(x_i)| + O(h^3)$.

Погрешность метода $R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i \leq n \cdot h^2 \frac{M_1}{2} + O(h^3)$,

можно оценить так: $R \leq \frac{h}{2} M_1 (b-a)$, где $M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$.

*Метод имеет первый порядок точности
(относительно шага интегрирования).*

*Правые
прямоугольники
— аналогично.*

Средние прямоугольники:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

Для оценки погрешности используем

разложение в окрестности точки $\bar{x} = x_i + \frac{h}{2}$.

Второй член разложения сократится, поэтому:

$$R \leq \frac{h^2}{24} M_2 (b-a), \text{ где } M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Получаем **второй порядок** точности.

*показать
самостоятельно*

ПОВЫСИТЬ ТОЧНОСТЬ МОЖНО

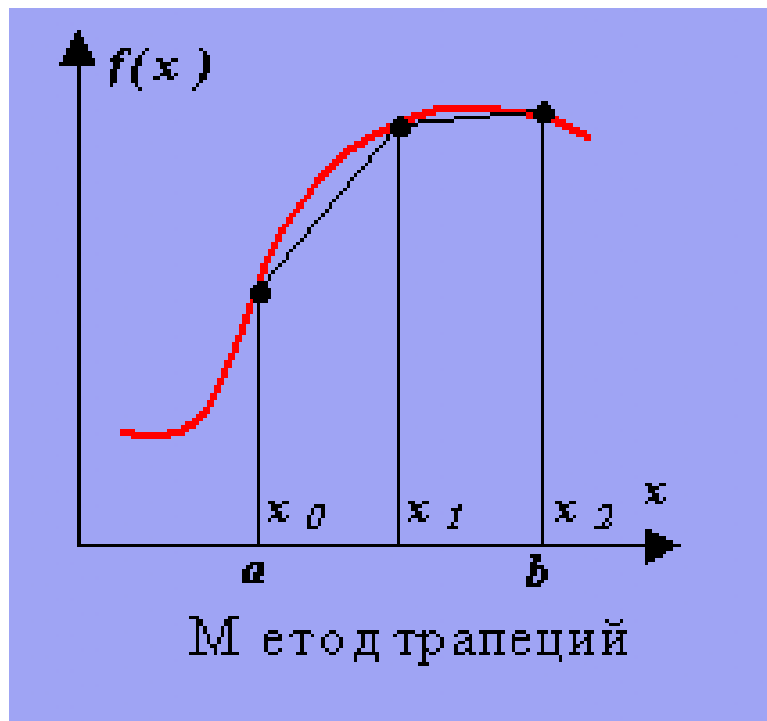
увеличением точности аппроксимации =>

*увеличением степени аппроксимирующего
многочлена.*

Метод трапеций:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

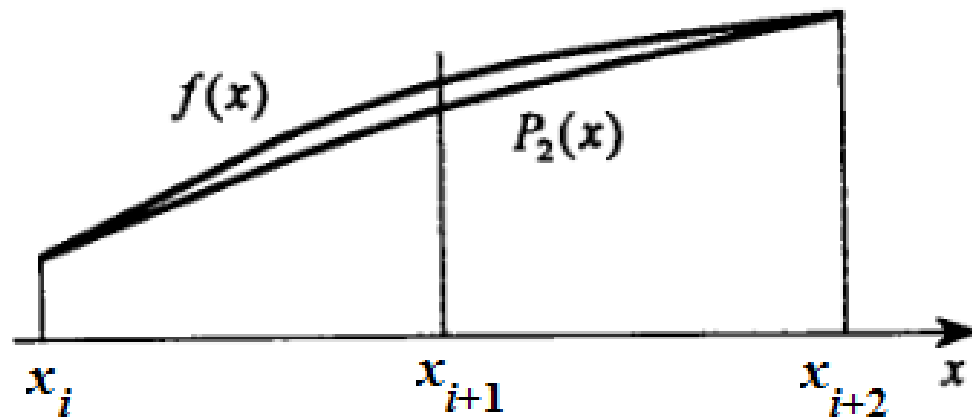
$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) + err,$$



$$|err| \leq \frac{h^2}{12} M_2 (b - a).$$

Метод Симпсона (метод парабол).

Подынтегральная функция заменяется интерполяционным полиномом второй степени $P_2(x)$ – параболой, проходящей через три точки x_i , x_{i+1} , x_{i+2} .



Расчетную формулу легко получить используя многочлен в *форме Ньютона*.

Интеграл по одному интервалу:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$$

Общая формула:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Погрешность:

$$R \leq \frac{h^4}{180} M_4 (b-a), \quad \text{где } M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

Методы более высоких порядков

Общая формула при аппроксимации многочленом степени k :

$$\int_{x_0}^{x_k} f(x) dx \approx c_0 h \sum_{i=0}^k \omega_i f(x_i).$$

Коэффициенты методов **Ньютона-Котеса**:

k	c_0	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1	1/2	1	1	-	-	-	-
2	1/3	1	4	1	-	-	-
3	3/8	1	3	3	1	-	-
4	2/45	7	32	12	32	7	-
5	5/288	19	75	50	50	75	19

При уменьшении шага следует учитывать, что n должно быть кратно k .

В основе алгоритмов с автоматическим выбором шага лежит правило Рунге

Пусть для вычисления $g(x)$ используется приближенная формула $\varphi(x, h)$ и

$$g(x) - \varphi(x, h) = M h^p,$$

где M – константа.

При вычислении с шагом rh получим

$$g(x) - \varphi(x, rh) = M (rh)^p.$$

Тогда

$$Mh^p = \frac{\varphi(x, h) - \varphi(x, rh)}{r^p - 1}$$

Пусть при последовательном уменьшении шага приближение вычисленное с шагом h обозначено S_h , а $S_{h/r}$ — с шагом h/r , тогда процесс измельчения сетки можно прекратить если $\frac{|S_h - S_{h/r}|}{r^p - 1} < \varepsilon$,

где ε - заданная точность,
 p — порядок точности метода.

Задание

1. Для заданных в таблице вариантов функции и интервала построить график и вычислить значение определенного интеграла в MathCAD (либо microsoft mathematics и т.п.).
2. Для каждого метода указанного в таблице вариантов оценить значение шага достаточное для достижения заданной точности ε и 0.1ε . Использовать оценки включающие производные.
3. С использованием современных высокоуровневых языков программирования разработать программную реализацию указанных методов. Точность задается пользователем, значение интеграла и величина шага (определяется согласно правилу Рунге) рассчитываются и выводятся на экран.
4. С помощью разработанной программы выполнить вычисления каждым из методов с точностью ε и 0.1ε . Сравнить полученные приближения с решением в MathCAD а величину шага с оценками, рассчитанными в п.2.
5. Подготовить отчет о проделанной работе, включающий:
 - исходные данные (функцию, график, границы интервала);
 - результаты вычислений (значения интеграла и величины шага, полученные разными методами, при различных значениях точности, оценки шага рассчитанные в п.2);
 - выводы;
 - тексты программ.

№	f(x)	a	b	ε	Методы
1	$f(x) := \frac{1+x}{(2+3x)^2}$	$a := 1$	$b := 3$	$\epsilon := 0.1$	1. Средних прямоугольников. 2. Левых прямоугольников. 3. Трапеций.
2	$f(x) := \frac{1+x}{(2+3x)^2 \cdot \sqrt{2+x}}$	$a := 5$	$b := 15$	$\epsilon := 0.01$	1. Средних прямоугольников. 2. Левых прямоугольников. 3. Симпсона.
3	$f(x) := \frac{(1+x)^2}{x^3 \cdot \sqrt{2+x}}$	$a := 2$	$b := 5$	$\epsilon := 0.1$	1. Средних прямоугольников. 2. Трапеций. 3. Симпсона.
4	$f(x) := \frac{1+\sqrt{x}}{1+4x+3x^2}$	$a := 0.5$	$b := 4.5$	$\epsilon := 0.1$	1. Средних прямоугольников. 2. Левых прямоугольников. 3. Трапеций.
5	$f(x) := \frac{2.5x^2 - 0.1}{\ln(x) + 1}$	$a := 5$	$b := 15$	$\epsilon := 1$	1. Средних прямоугольников. 2. Левых прямоугольников. 3. Симпсона.
6	$f(x) := \frac{\ln(x)}{\sqrt{1.2+0.3x}}$	$a := 5$	$b := 10$	$\epsilon := 0.1$	1. Средних прямоугольников. 2. Трапеций. 3. Симпсона.
7	$f(x) := \frac{(x+1)^2}{\sqrt{\ln(x)}}$	$a := 2$	$b := 5$	$\epsilon := 1$	1. Средних прямоугольников. 2. Левых прямоугольников. 3. Трапеций.
8	$f(x) := \sqrt{x} \cdot e^{\frac{-x}{2}}$	$a := 2$	$b := 4$	$\epsilon := 0.01$	1. Средних прямоугольников. 2. Левых прямоугольников. 3. Симпсона.
9	$f(x) := \frac{2x^2 \cdot \ln(x)}{10+x^2}$	$a := 4$	$b := 8$	$\epsilon := 1$	1. Средних прямоугольников. 2. Трапеций. 3. Симпсона.