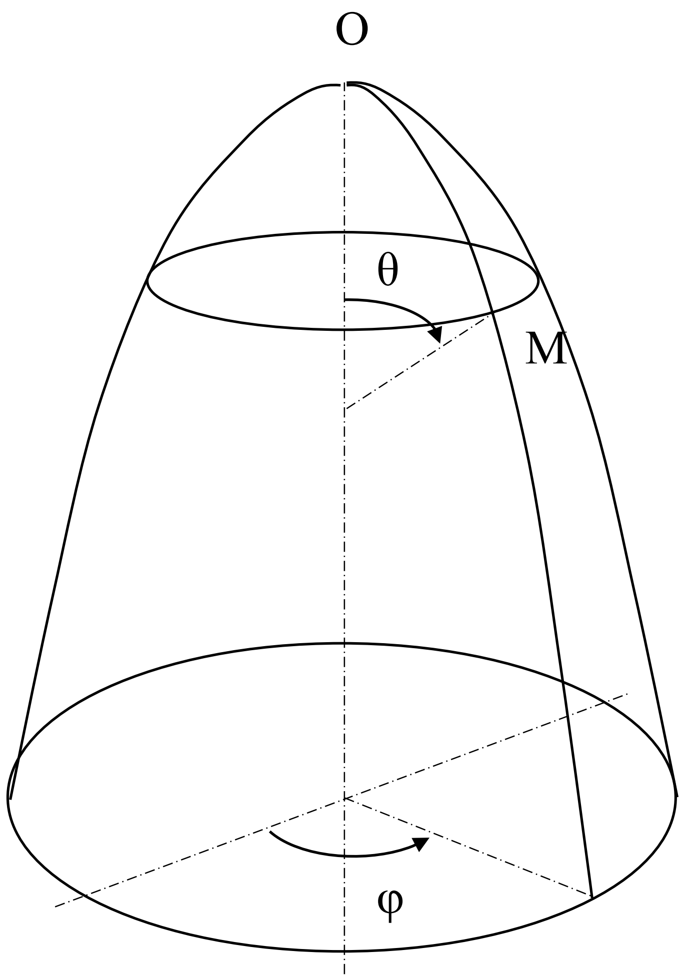
Осесимметричная деформация оболочек вращения.

Гипотезы Кирхгофа-Лява:

1. Материальный элемент, нормальный к срединной поверхности оболочки, остается нормальным к деформированной срединной поверхности.

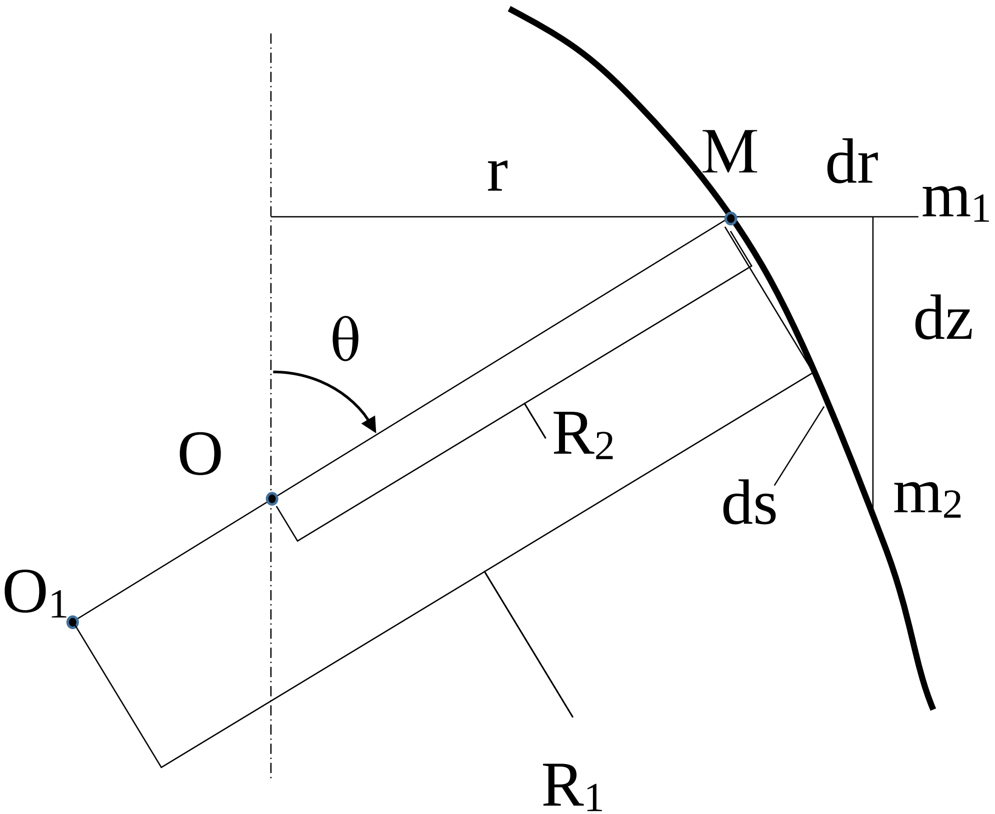
2. Нормальные напряжения в площадках параллельных срединной поверхности оболочки, пренебрежимо малы.

3. Изменение длины нормального к срединной поверхности элемента в процессе деформации оболочки пренебрежимо мало.



O
θ
M
φ

r- радиус параллельного круга, окружности, полученной сечением оболочки плоскостью, перпендикулярной оси оболочки.



$$dr = ds\,cos\theta \qquad dz = ds\,sin\theta$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}$$

$$R_2 = \frac{r}{sin\theta}$$

$$\frac{dR_2}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{r}{sin\theta}\right) = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{d\theta}\frac{1}{sin\theta} - \frac{r\,cos\theta}{sin^2\theta} =$$

$$= cos\theta\, R_1 \frac{1}{sin\theta} - \frac{r}{sin\theta} ctg\theta$$

$$\frac{dR_2}{d\theta} = (R_1 - R_2)ctg\theta$$

$$\tilde{r} = r + \xi \qquad \tilde{z} = z + \zeta \qquad \tilde{\theta} = \theta + \vartheta$$

$$d\tilde{r} = d\tilde{s}\cos\tilde{\theta} \qquad d\tilde{r} = dr + d\xi$$

$$\frac{d\tilde{s} - ds}{ds} = \varepsilon_1 \qquad d\tilde{s} = ds(1 + \varepsilon_1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi\tilde{r} - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\tilde{r} - r}{r} = \frac{r + \xi - r}{r} = \frac{\xi}{r}$$

$$\frac{dr}{ds} = \cos\theta$$

$$\frac{d\xi}{ds} = \varepsilon_1 \cos\tilde{\theta} + cos\tilde{\theta} - \cos\theta$$

$$d\tilde{z} = d\tilde{s}\sin\tilde{\theta}$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = \varepsilon_1 \sin\tilde{\theta} + sin\tilde{\theta} - \sin\theta$$

Для малых деформаций и углов поворота:

$$\varepsilon_1 \ll 1 \quad \varepsilon_2 \ll 1 \qquad \vartheta \ll 1$$

Подставим:

$$\tilde{\theta} = \theta + \vartheta$$

и пренебрегаем ϑ^2 и $\varepsilon\vartheta$.

$$cos(\theta + \vartheta) = cos\theta cos\vartheta - sin\theta sin\vartheta$$

$$sin(\theta + \vartheta) = sin\theta cos\vartheta + cos\theta sin\vartheta$$

$$\frac{d\xi}{ds} = \varepsilon_1 \cos\theta - \vartheta \sin\theta$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = \varepsilon_1 \sin\theta + \vartheta \cos\theta$$

Изменение кривизн:

$$\frac{1}{\widetilde{R_1}} = \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{s}}$$

$$\tilde{\theta} = \theta + \vartheta \quad d\tilde{s} = ds(1 + \varepsilon_1) \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{1}{\widetilde{R_1}} = \frac{d\widetilde{\theta}}{d\tilde{s}} = \frac{1}{1 + \varepsilon_1}\frac{d(\theta + \vartheta)}{ds} = \frac{1}{1 + \varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1} + \kappa_1\right) \qquad \kappa_1 = \frac{d\vartheta}{ds}$$

$$\frac{1}{\widetilde{R_2}} = \frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{r}}$$

$$\frac{1}{\widetilde{R_2}} = \frac{1}{1+\varepsilon_2}\left(\frac{\sin\tilde{\theta} + \sin\theta - \sin\theta}{r}\right) =$$

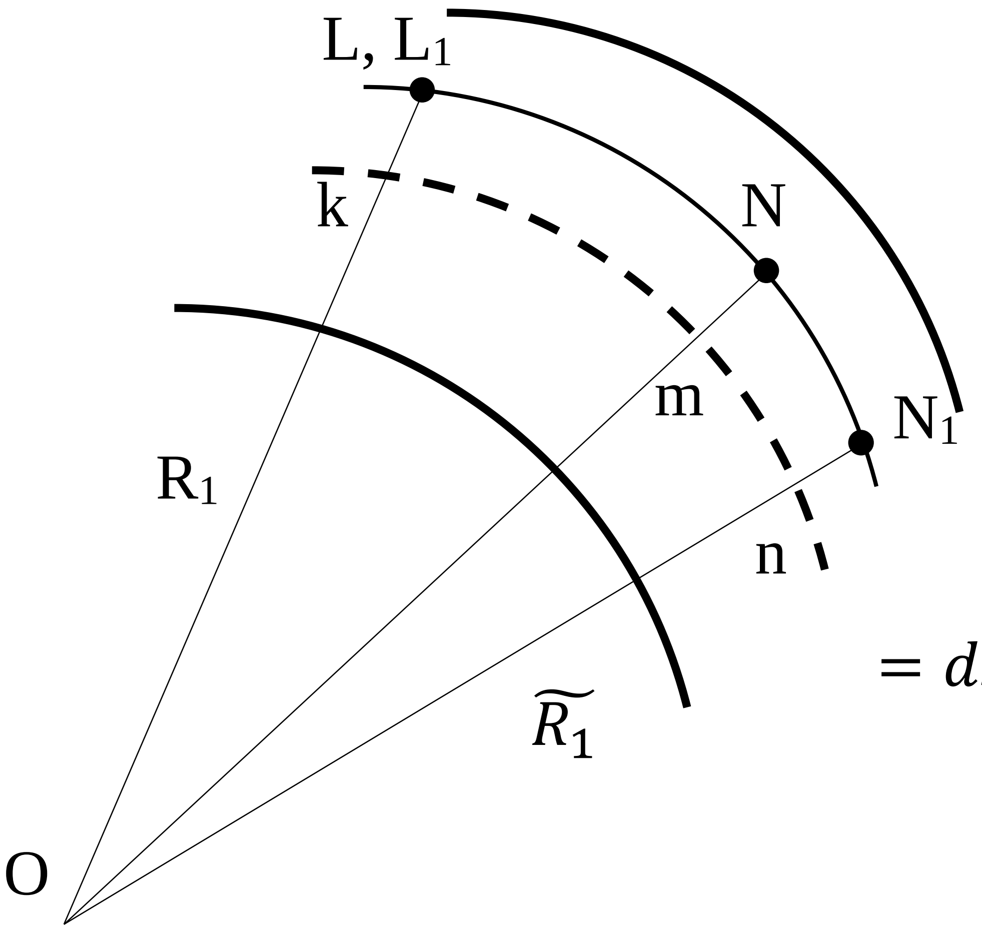
$$= \frac{1}{1+\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_2} + \kappa_2\right) \qquad \kappa_2 = \frac{1}{r}\left(\sin\tilde{\theta} - \sin\theta\right)$$

Учитывая малость деформаций получим:

$$\kappa_2 = \frac{cos\,\theta\ \ \vartheta}{r}$$

Деформация эквидистантного слоя.

$$km = ds \quad kn = ds(1 + \varepsilon_1)$$



$$LN = ds\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)$$

$$L_1N_1 = ds(1 + \varepsilon_1)\left(1 + \frac{z}{\widetilde{R_1}}\right) =$$

$$= ds(1 + \varepsilon_1)\left(1 + \frac{z}{(1 + \varepsilon_1)}\left(\frac{1}{R_1} + \kappa_1\right)\right)$$

$$L_1N_1 = ds\left(1 + \varepsilon_1 + \frac{z}{R_1} + \kappa_1 z\right)$$

$$\varepsilon_{1z} = \frac{L_1N_1 - LN}{LN} = \frac{ds\left(1 + \varepsilon_1 + \frac{z}{R_1} + \kappa_1 z\right) - ds\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}{ds\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}$$

$$\varepsilon_{1z} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}(\varepsilon_1 + \kappa_1 z)$$

По аналогии:

$$\varepsilon_{2z} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)}(\varepsilon_2 + \kappa_2 z)$$

Напряжения и внутренние силовые факторы:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{1z} + \mu\varepsilon_{2z})$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{2z} + \mu\varepsilon_{1z})$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{R_1}}(\varepsilon_1 + \kappa_1 z) + \mu\frac{1}{\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}(\varepsilon_2 + \kappa_2 z)\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\mu}{1+\frac{z}{R_1}}(\varepsilon_1 + \kappa_1 z) + \frac{1}{\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}(\varepsilon_2 + \kappa_2 z)\right)$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\big((\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) + (\kappa_1 + \mu\kappa_2)z\big)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\big((\mu\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\mu\kappa_1 + \kappa_2)z\big)$$

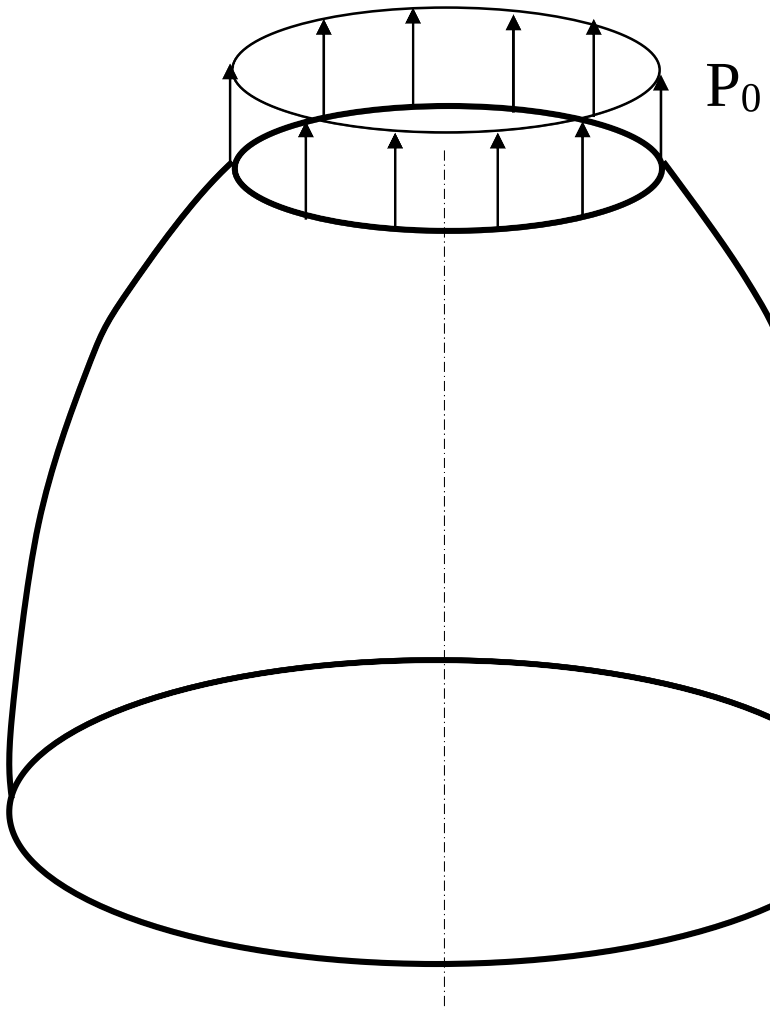
$$T_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 \left(\left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz\right)$$

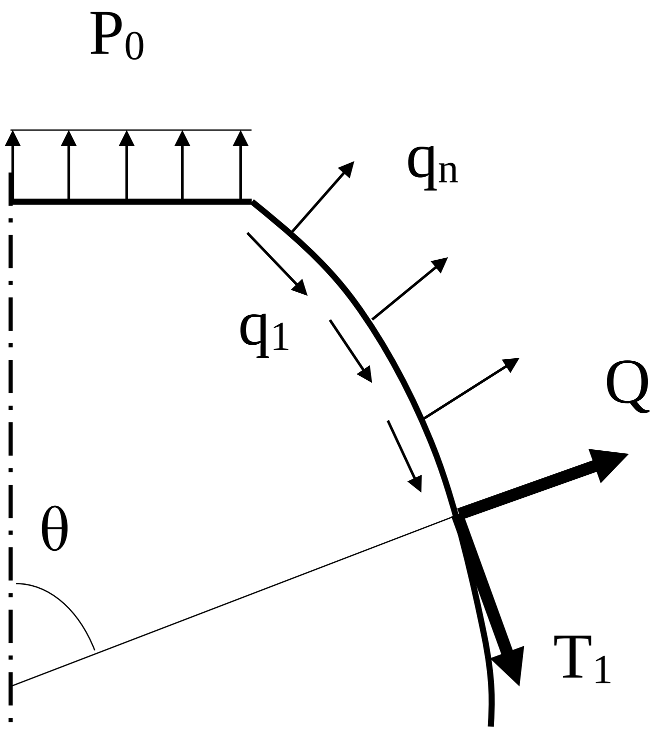
$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 \left(\left(1 + \frac{z}{R_2}\right) z dz\right)$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) \quad M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\kappa_1 + \mu\kappa_2)$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\kappa_2 + \mu\kappa_1)$$

Уравнения равновесия:





$$F(s) = P_0 + \int_{s_0}^{s} (q_n \cos\theta - q_1 \sin\theta) 2\pi r ds$$

$$(T_1 \sin\theta - Q\cos\theta) 2\pi r = \mathrm{F(s)}$$

$$N = T_1 \cos\theta - Q \sin\theta$$