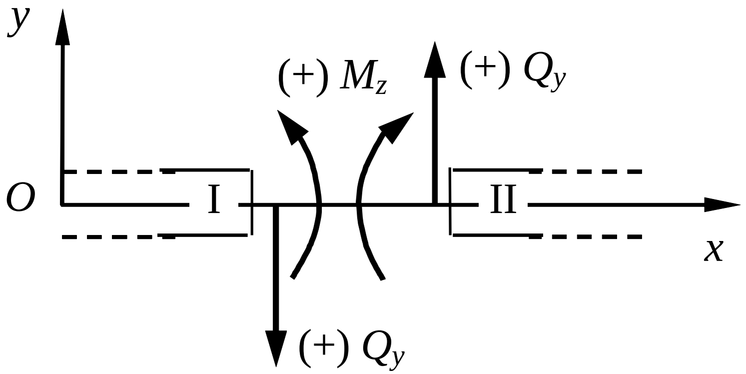
Новосибирский государственный технический университет

кафедра Прочность летательных аппаратов

Строительная механика машин

к.т.н., доц. Пель Александр Николаевич

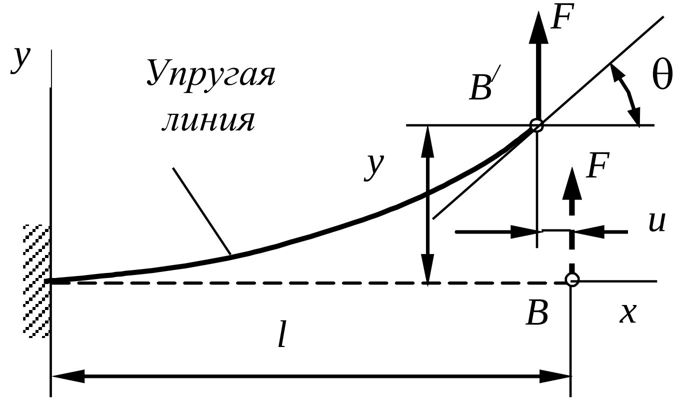
Изгиб балок



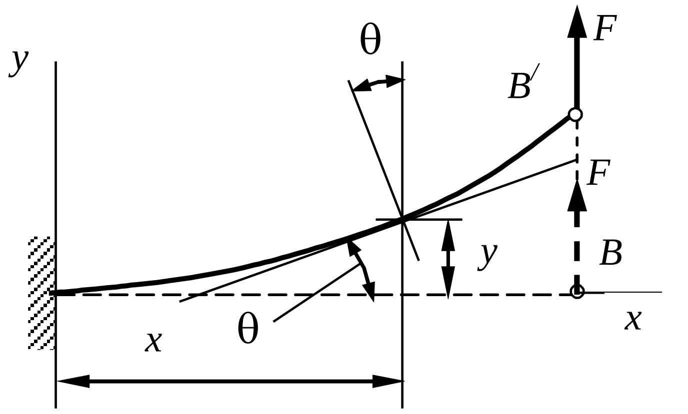
Чистый изгиб: $M_z \neq 0; \quad Q_y = 0.$

Поперечный изгиб: $M_z \neq 0; \quad Q_y \neq 0.$

Перемещения при изгибе балок



(а)



(б)

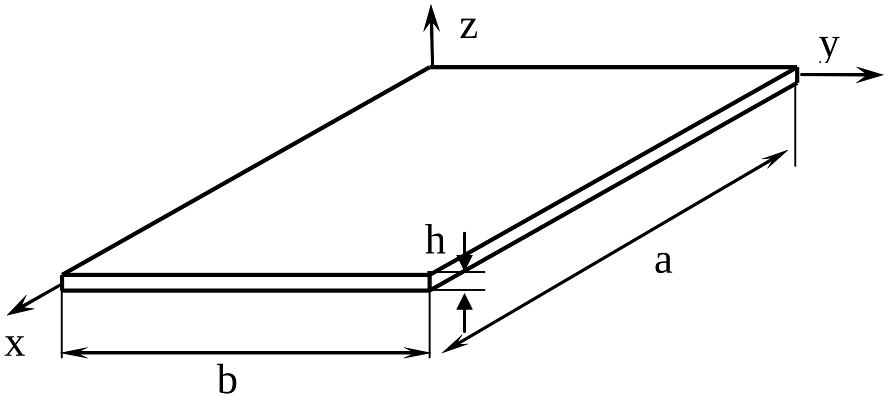
$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_z}{EI_z} \qquad \frac{1}{\rho}=\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}} \qquad \frac{1}{\rho}\approx y''$$

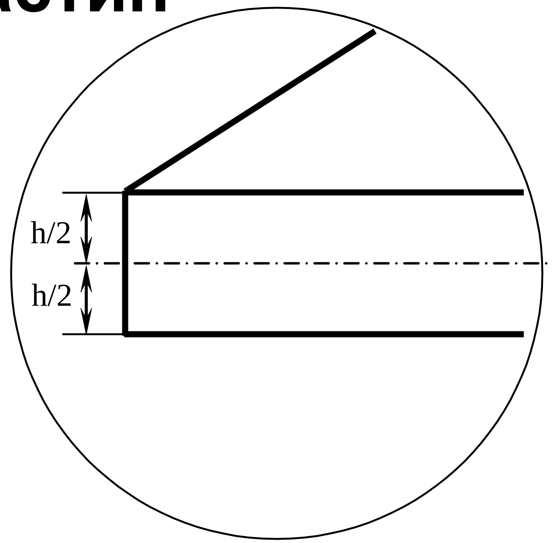
$$\boxed{y''=\frac{M_z}{EI_z}} \qquad \boxed{y^{(IV)}=\frac{q}{EI_z}}$$

$$\left.\begin{aligned}\theta &= y',\\ M &= EI_z y'',\\ Q &= \left(EI_z y''\right)',\\ q &= \left(EI_z y''\right)''\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\theta &= y',\\ M &= EI_z y'',\\ Q &= EI_z y''',\\ q &= EI_z y^{(IV)}\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{y''=\frac{M_z}{EI_z}} \qquad y'=\theta(x)=\int\frac{M_z}{EI_z}dx+C \qquad y(x)=\int\left(\int\frac{M_z}{EI_z}dx\right)dx+Cx+D$$

Поперечный изгиб пластин





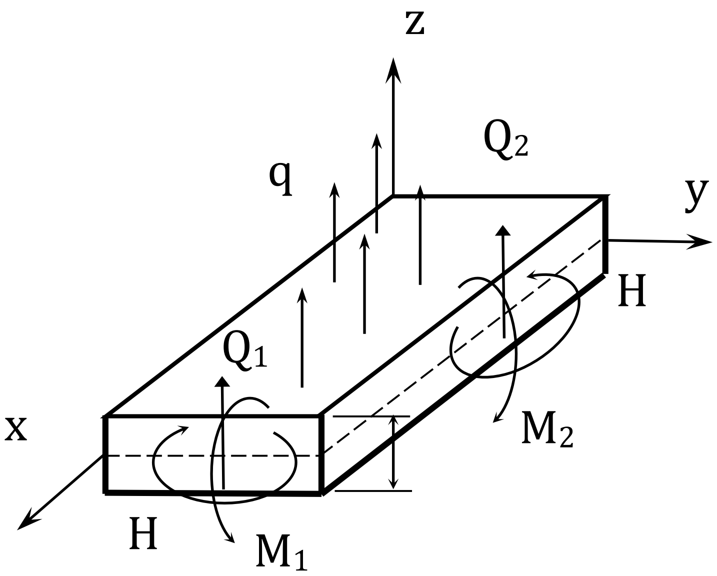
Гипотезы Кирхгофа:

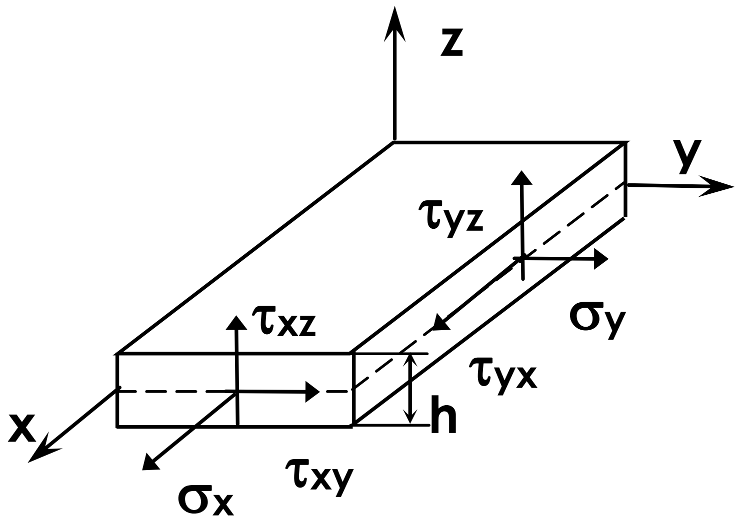
1. Нормальный элемент к срединной плоскости пластины остается перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

2. Нормальный элемент не изменяет своей длины (ε_z=0).

3. Отсутствуют напряжения надавливания между слоями (σ_z=0).

$$\varepsilon_z = 0 \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad w = w(x, y)$$





$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz$$

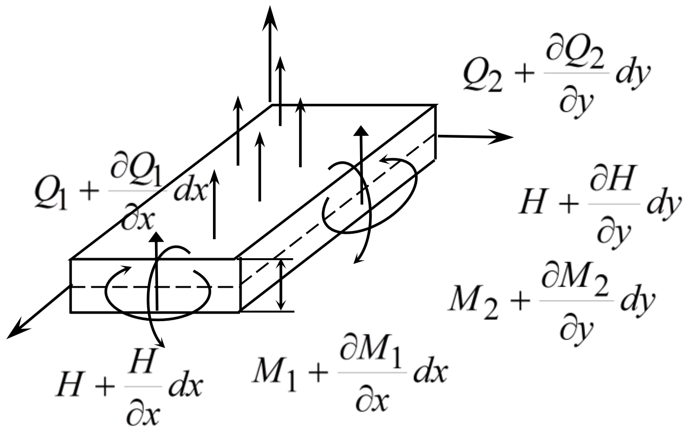
$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad M_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad H = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_1 = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (1-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) =$$

$$= -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w$$

$$Q_2 = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (1-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) =$$

$$= -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w$$



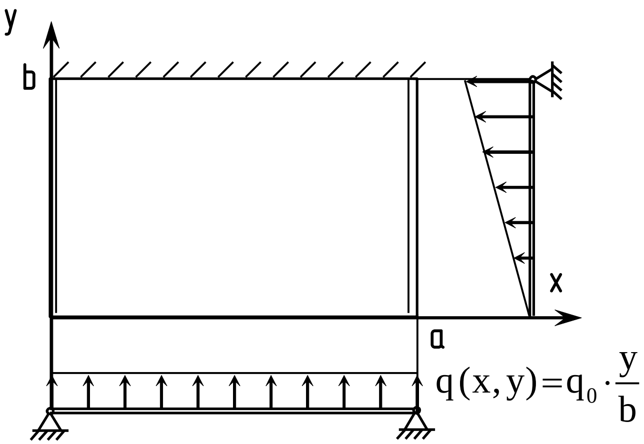
$$\boxed{\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + q = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_1} \qquad \boxed{\frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_2}$$

$$\boxed{\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + q = 0} \qquad Q_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w \qquad Q_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w$$

$$\boxed{D\Delta\Delta w = q}$$ уравнение Жермен-Лагранжа

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$



1. Шарнирно опертая кромка:

$$w=0,\quad M_1=0.\quad M_1=-D\,(w_{xx}+\nu\, w_{yy})-$$

т.к. после деформации кромка в направлении шарнира остается прямолинейной, то $w_{yy}=0$,

$$w=0\,,\quad w_{xx}=0\,;$$

2. Свободная кромка:

$M_1=0$ изгибающий момент

$Q_1^*=Q_1+\dfrac{\partial H}{\partial y}=0$ обобщенная перерезывающая сила

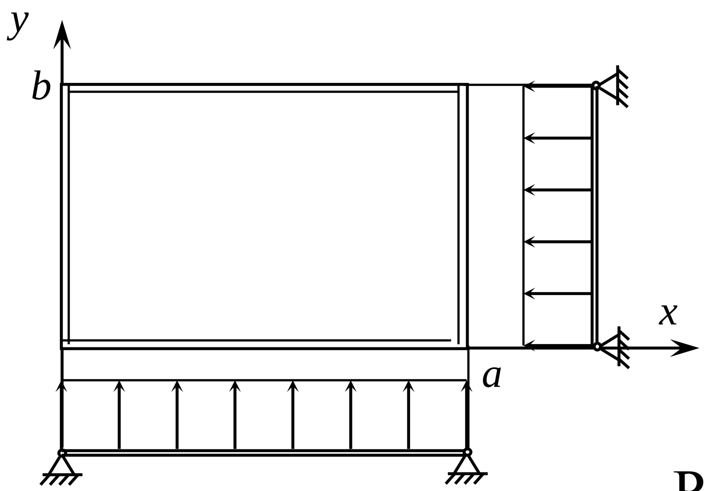
$$w_{xx}+\nu\, w_{yy}=0,$$

$$w_{xxx}+\left(2-\nu\right)w_{xyy}=0.$$

3. Защемленная кромка:

$$w=w_x=0;$$

МЕТОД ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ (МЕТОД НАВЬЕ)



Граничные условия:

$$x = 0, a \qquad w = w_{xx} = 0,$$

$$y = 0, b \qquad w = w_{yy} = 0.$$

Разложим нагрузку в двойной тригонометрический ряд:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Коэффициенты разложения B_{mn} определяются выражением

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{mn} D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 - B_{mn}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = 0.$$

$$A_{mn} = \frac{B_{mn}}{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2}$$

$$w = \frac{1}{D\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}.$$