2. Геометрические характеристики составного сечения

Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка:

1. Вычертить в масштабе составное сечение.
2. Выбрать из таблиц сортамента проката размеры заданных элементов: площади сечений A, моменты инерции J_y, J_z, J_{yz} и координаты центров тяжести элементов.
3. Выбрать начальные оси y_0, z_0, определить положение центра тяжести всего сечения и провести центральные оси y, z.
4. Вычислить осевые моменты инерции J_y, J_z, центробежный момент инерции J_{yz} составного сечения относительно центральных осей y, z.
5. Определить главные моменты инерции $J_v=J_{max}$, $J_u=J_{min}$ и найти направление главных осей v и u.

Решение:

Зададимся сечением, состоящим из швеллера № 20 и равнополочного уголка 100 х 100 х 10 (рис. 2). Выписываем табличные данные для заданных профилей.

Согласно ГОСТ 8240-89 основные характеристики швеллера № 20:

высота профиля	h = 20,0 см
ширина полки	b = 7,6 см
площадь сечения	A_1 = 23,4 см^2
осевые моменты инерции	J_{x1} = 1530 см^4
	J_{y1} = 134 см^4

Расстояние от центра тяжести сечения до наружной кромки стенки z_{01}=2,3 см.

Отметим, что если швеллер на данной схеме сложного сечения повернут на 90^o по сравнению с указанным в ГОСТе, то при выборе характеристик профилей табличные значения J_{x1} и J_{y1} необходимо поменять местами.

Основные характеристики равнополочного уголка 100 х 100 х 10 согласно ГОСТ 8509-93:

ширина полки	b = 10,0 см
площадь сечения	A_1 = 19,24 см^2
осевые моменты инерции	J_{x2} = J_{y2} = =178,95 см^4
центробежный момент инерции	J_{xy} = 110 см^4

Расстояние от центра тяжести сечения уголка до наружной кромки полки z_{02} = 2,83 см.

Отметим, что знак центробежного момента J_{xy} устанавливается по следующему правилу: если концы полок уголка (перья) расположены в I и III четверти системы координат, то J_{xy} положителен, если во II и IV четверти, то J_{xy} отрицателен.

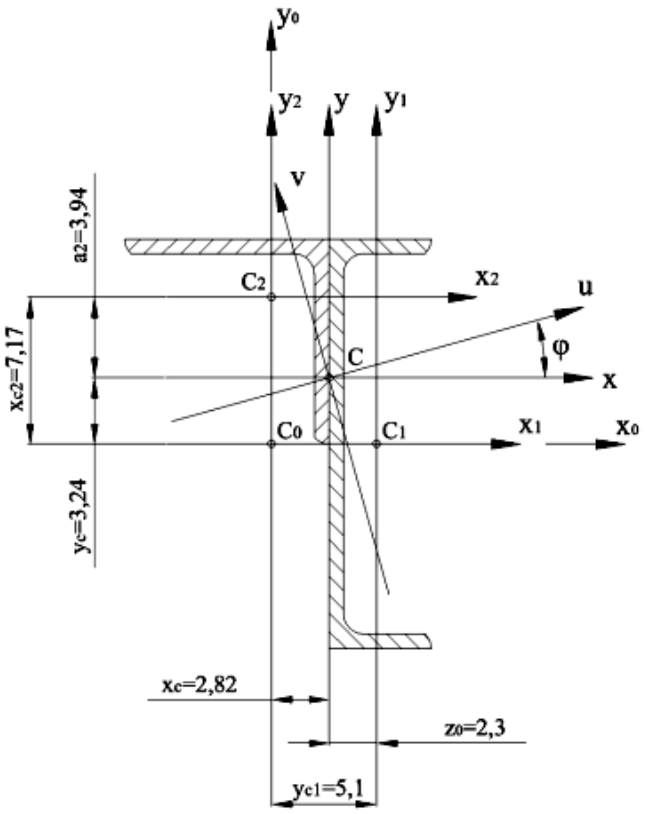


Рисунок 2 – Схема сечения

2.1. Определение центра тяжести площади сложного сечения

Прежде всего, выбираем вспомогательные оси координат, относительно которых будем определять положение центра тяжести площади сечения. За вспомогательные координатные оси принимаем оси x_0 и y_0. Далее, используя выражения для статических моментов площадей S_y и S_x, а также рисунок 6 определяем координаты центра тяжести сечения по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{23{,}4 \cdot 5{,}13}{23{,}4 + 19{,}24} = 2{,}82 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{c1} + A_2 \cdot x_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{19{,}24 \cdot 7{,}17}{23{,}4 + 19{,}24} = 3{,}24 \text{ см}.$$

Здесь и далее индексы «1» и «2» указывают на отношение величин соответственно к швеллеру и уголку.

Откладывая найденные значения x_c и y_c относительно координат x_0 и y_0, определяем положение центра тяжести площади сложного сечения – точку С (см. рис. 2).

2.2. Определение моментов инерции относительно центральных осей

В качестве центральных осей *x* и *y* принимаем оси, параллельные центральным осям заданных фигур: швеллера и уголка (рис. 2). Моменты инерции относительно этих осей определяем с помощью формул изменения моментов инерции при параллельном переносе:

$$J_x = J_{x1x} + J_{x2x} = (J_{x1} + a_1^2 \cdot A_1) + (J_{x2} + a_2^2 \cdot A_2), \qquad (1)$$

где J_{x1x} – осевой момент инерции первого элемента относительно оси *x*;
J_{x2x} – осевой момент инерции второго элемента относительно оси *x*;
J_{x1} – осевой момент инерции первого элемента относительно оси x_1;
J_{x2} – осевой момент инерции второго элемента относительно оси x_2;
$a_1 = y_c$ – расстояние между осями *x* и x_1;
a_2 – расстояние между осями *x* и x_2.

Тогда, из уравнения (1) получим:

$$J_x = 1530 + (-3{,}24)^2 \cdot 23{,}4 + 178{,}95 + (3{,}94)^2 \cdot 19{,}24 = 2253{,}26 \text{ см}^4.$$

Аналогично определим J_{y1}:

$$J_y = J_{y1y} + J_{y2y} = \left(J_{y1} + b_1^2 \cdot A_1\right) + \left(J_{y2} + b_2^2 \cdot A_2\right), \qquad (2)$$

где J_{y1y} – осевой момент инерции первого элемента относительно оси *y*;
J_{y2y} – осевой момент инерции второго элемента относительно оси *y*;
J_{y1} – осевой момент инерции первого элемента относительно оси y_1;
J_{y2} – осевой момент инерции второго элемента относительно оси y_2;
$b_1 = z_0$ – расстояние между осями *y* и y_1;
$a_2 = x_c$ – расстояние между осями *y* и y_2;

Тогда, из уравнения (2) получим:

$$J_y = 134 + (2{,}3)^2 \cdot 23{,}4 + 178{,}95 + (-2{,}82)^2 \cdot 19{,}24 = 589{,}74 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции определим из выражения:

$$J_{xy} = J_{x1y1}^{xy} + J_{x2y2}^{xy} = \left(J_{x1y1} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1\right) + \left(J_{x2y2} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2\right), \qquad (3)$$

где J_{x1y1}^{xy} – центробежный момент инерции первого элемента относительно осей *x*, *y*;
J_{x2y2}^{xy} – центробежный момент инерции второго элемента относительно осей *x*, *y*;
J_{x1y1} – центробежный момент инерции первого элемента относительно осей x_1, y_1;
J_{x2y2} – центробежный момент инерции второго элемента относительно осей x_2, y_2.

Подставим в (3) известные величины, получим:

$$J_{xy} = 0 + (-3{,}24) \cdot 2{,}3 \cdot 23{,}4 - 110 + 3{,}94 \cdot (-2{,}82) \cdot 19{,}24 = -498{,}1 \text{ см}^4.$$

2.3. Определение положения главных центральных осей инерции сложного сечения

Положение главных центральных осей инерции *v* и *u* определяем относительно центральных осей *x* и *y*. Для этого находим угол φ на который следует повернуть центральные оси, чтобы они заняли положение главных центральных осей инерции. Угол φ определяем по формуле:

$$tg2\varphi = -\frac{2 \cdot J_{xy}}{J_x - J_y}, \qquad (4)$$

отсюда

$$\varphi = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2 \cdot 498{,}1}{2253{,}26 - 589{,}74}\right) \approx 15{,}5°.$$

Положительный угол φ откладываем от положительного направления оси *x* против часовой стрелки (рис. 2). В случае отрицательного значения угла φ его откладывают по часовой стрелке.

2.4. Определение главных центральных моментов инерции сложного сечения

Главные осевые моменты инерции J_u и J_v определяем по формуле:

$$J_{\substack{max \\ min}} = \frac{1}{2}\left[\left(J_x + J_y\right) \pm \sqrt{\left(J_x - J_y\right)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2}\right]. \qquad (5)$$

Один из главных осевых моментов инерции имеет максимальное значение, второй – минимальное

$$J_u = J_{max} = \frac{1}{2}\Big[(2253{,}26 + 589{,}74) + \sqrt{(2253{,}26 - 589{,}74)^2 + 4 \cdot (-498{,}1)^2}\Big] = 2391 \text{ см}^4;$$

$$J_v = J_{min} = \frac{1}{2}\Big[(2253{,}26 + 589{,}74) - \sqrt{(2253{,}26 - 589{,}74)^2 + 4 \cdot (-498{,}1)^2}\Big] = 452 \text{ см}^4.$$

2.5. Проверка правильности решения

Различают простую проверку и капитальную. Простая проверка проводится по формуле (6):

$$J_x + J_y = J_u + J_v, \qquad (6)$$

Подставив в (6) полученные значения, получим:

$$2253{,}26 + 589{,}74 = 2391 + 452;$$

$$2843 = 2843.$$

Капитальная проверка дает возможность проверить правильность вычислений не только главных моментов инерции J_u и J_v, но и угла φ:

$$J_u = J_x \cdot cos^2\varphi + J_y \cdot sin^2\varphi - J_{xy} \cdot sin2\varphi\ , \qquad (7)$$

Подставив в (7) полученные значения, получим:

$$J_u = 2253{,}26 \cdot cos^2 15{,}5° + 589{,}74 \cdot sin^2 15{,}5° - (-498{,}1) \cdot sin 31° = \\ = 2391 = J_{max}$$

Следовательно, главный осевой момент инерции и угол поворота определены правильно.