
А.Н. БУРОВ, Э.Г. СОСНИНА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для студентов 1 курса
технических и экономических специальностей
высших учебных заведений

Новосибирск 2006

УДК 512.2
ББК 22.11
Б916

Рецензент: А.Г. Пинус, д-р физ.-мат. наук, профессор.

Буров А.Н., Соснина Э.Г.

Б916 Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие для студентов 1 курса технических и экономических специальностей высших учебных заведений. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. — 185 с.

Учебное пособие адресовано студентам, изучающим курс линейной алгебры и аналитической геометрии и желающим научиться решать задачи. В ней, с одной стороны, систематически вводятся основные определения и факты, необходимые для понимания предлагаемых задач, с другой стороны, приводятся примеры основных типов задач с подробными решениями (всего более 60 примеров). Кроме того, пособие содержит более 200 задач для самостоятельного решения, к большинству из которых приведены ответы.

УДК 512.2
ББК 22.11

© Кафедра высшей математики НГТУ, 2006 г.

© Буров А.Н., Соснина Э.Г. 2006 г.

Содержание

Предисловие	5
1 Матрицы и определители. Системы линейных уравнений	6
1.1 Матрицы и определители	6
1.2 Системы линейных уравнений	14
1.3 Алгоритм Гаусса	16
1.4 Задачи и упражнения	20
2 Векторное пространство	28
2.1 Векторы и линейные операции над ними	28
2.2 Линейная зависимость векторов. Базис	32
2.3 Декартова система координат	35
2.4 Простейшие задачи аналитической геометрии	38
2.5 Задачи и упражнения	39
3 Векторная алгебра	43
3.1 Скалярное произведение	43
3.2 Векторное произведение	46
3.3 Смешанное произведение	50
3.4 Задачи и упражнения	53
4 Прямые и плоскости	57
4.1 Прямая	57
4.2 Плоскость	68
4.3 Прямая в пространстве	73
4.4 Задачи и упражнения	77

5	Кривые второго порядка	86
5.1	Эллипс	86
5.2	Гипербола	88
5.3	Парабола	92
5.4	Задачи и упражнения	94
6	Линейные пространства	97
6.1	Определения и примеры	97
6.2	Базис и координаты	100
6.3	Ранг матрицы и системы векторов	102
6.4	Подпространства линейных пространств	104
6.5	Задачи и упражнения	105
7	Системы линейных уравнений (общая теория)	108
7.1	Однородные системы	108
7.2	Неоднородные системы	115
7.3	Замена базиса	120
7.4	Задачи и упражнения	126
8	Евклидовы пространства	131
8.1	Скалярное произведение	131
8.2	Ортонормированный базис	133
8.3	Задачи и упражнения	140
9	Линейные операторы	143
9.1	Определение линейного оператора	143
9.2	Матрица линейного оператора	145
9.3	Собственные числа и собственные векторы	149
9.4	Задачи и упражнения	157
10	Квадратичные формы	162
10.1	Квадратичная форма и ее матрица	162
10.2	Приведение квадратичной формы к каноническому виду	164
10.3	Квадратичные формы в евклидовом пространстве	166
10.4	Классификация квадратичных форм	171
10.5	Задачи и упражнения	173
	Ответы	175
	Список литературы	185

Предисловие

Данное учебное пособие является переработкой пособия [6]. Адресована оно, прежде всего, студентам, изучающим курс линейной алгебры и аналитической геометрии и желающим научиться решать задачи. Она не заменяет лекций или учебника, где теоретические сведения излагаются с подробными доказательствами (рекомендуемый перечень таких учебников приводится в списке литературы), в то же время, это не задачник, содержащий лишь большой набор задач с ответами. Предлагаемая книга есть нечто среднее между традиционными лекциями и сборником задач. В ней, с одной стороны, систематически вводятся основные определения и факты, необходимые для понимания предлагаемых задач, с другой стороны, приводятся примеры основных типов задач с подробными решениями (всего более 60 примеров).

Книга адресована также преподавателям, ведущим практические занятия по курсу линейной алгебры. Предлагаемый набор заданий, на наш взгляд, достаточен для потребностей аудиторных занятий, домашних заданий и дополнительной тренировочной работы.

Данное учебное пособие можно рекомендовать студентам для подготовки к очередному занятию, а также использовать для организации самостоятельного изучения той или иной темы на занятии.

◇ — Этот знак везде в этой книге означает конец доказательства или решения.

Авторы.

Модуль 1

Матрицы и определители. Системы линейных уравнений

1.1 Матрицы и определители

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрицей A размерности $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица, составленная из $(m \cdot n)$ чисел a_{ij} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}, \quad (1.1)$$

где m — число строк матрицы, n — число столбцов, a_{ij} — элемент матрицы, стоящий в i -й строке и j -м столбце ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Обозначение вида a_{12} читается как «а один—два», но не «а двенадцать»!

Строку $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ можно рассматривать как матрицу раз-

мерности $(1 \times n)$. Аналогично, столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — это матрица

размерности $(m \times 1)$. Матрица размерности $(n \times n)$ называется квадратной порядка n .

Приведем для сведения другие, встречающиеся в литературе, обозначения матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| = \|a_{ij}\|_{m \times n}.$$

Мы будем пользоваться обозначением (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Суммой матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется такая матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначение: $C = A + B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на число λ называется такая матрица $B = (b_{ij})_{m \times n}$, что $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначение: $B = \lambda A$.

В частности, можно рассматривать сумму строк одной и той же размерности $(1 \times n)$, сумму столбцов одной и той же размерности $(m \times 1)$, а также произведение числа на строку и числа на столбец.

Операции сложения и умножения на число носят название линейных операций.

ТЕОРЕМА 1 (Свойства линейных операций). Для произвольных матриц A, B, C одной и той же размерности и любых вещественных чисел λ, μ справедливы свойства:

- 1) $A + B = B + A$ — коммутативность сложения;
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность сложения;
- 3) существует матрица O , называемая нулевой, такая, что $O + A = A$ для любой матрицы A ;
- 4) для любой матрицы A существует матрица $-A$, называемая противоположной, такая, что $A + (-A) = O$;

- 5) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ — дистрибутивность относительно сложения матриц;
- 6) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ — дистрибутивность относительно сложения чисел;
- 7) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$ — ассоциативность умножения;
- 8) $1 \cdot A = A$ — свойство нормировки.

Легко проверить, что в качестве нулевой матрицы можно взять матрицу $O = (0)_{m \times n}$, состоящую из одних нулей, а в качестве противоположной для матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ взять матрицу $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Произведением строки $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ на столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ называется число $A \cdot B$, которое задается равенством $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

Через A_i обозначим i -ю строку матрицы A через B_j — j -й столбец матрицы B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Произведением $C = A \cdot B$ матриц $A = (a_{ij})_{m \times p}$ и $B = (b_{ij})_{p \times n}$ называется такая матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, что

$$c_{ij} = A_i \cdot B_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj};$$

т.е. элемент c_{ij} матрицы C равен произведению i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B .

Произведение $A \cdot B$ определено, если только число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . В этом случае размерности матриц — сомножителей и произведения — подчиняются следующему правилу умножения размерностей: $(m \times p)(p \times n) = (m \times n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Произведение матриц в общем случае некоммутативно, т.е. $AB \neq BA$. Это легко понять из определения, а также убедиться в этом на конкретных примерах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Транспонированной для $A = (a_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$, строки которой совпадают с соответствующими столбцами матрицы A . Матрица A называется симметрической, если $A^T = A$, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Каждой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число, которое обозначается $|A|$ или $\det A$ и называется определителем или детерминантом матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Определителем или детерминантом матрицы A второго порядка называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (1.2)$$

Определителем или детерминантом матрицы A третьего порядка называется число

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ &\quad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Формула (1.3) имеет геометрическую интерпретацию, известную как правило треугольника: определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов, соединенных в треугольники на рис. 1.1, взятых со знаками $(+)$ и $(-)$ соответственно.

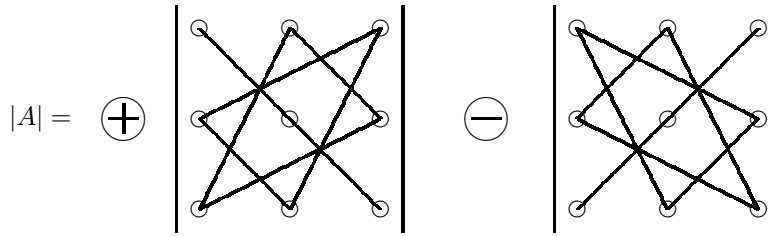


Рис. 1.1: Правило треугольника.

Обобщим определение 7 на случай произвольного $n > 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Минором элемента a_{ij} (обозначается M_{ij}) называется определитель порядка $(n - 1)$, полученный из определителя $\det A$ вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} . Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} .

Для определения знака множителя $(-1)^{i+j}$ полезно запомнить следующую «шахматную» таблицу:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Определителем или детерминантом матрицы A порядка $n \geq 3$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}. \quad (1.4)$$

Формулу (1.4) называют *правилом разложения определителя по первой строке*. Легко проверить, что при $n = 3$ определение 9 дает тот же результат, что и определение 7.

Места в определителе, занятые элементами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, называют *главной диагональю определителя*; то же самое относится к матрице. Квадратная матрица, у которой ниже главной диагонали находятся нулевые элементы, называется *треугольной*. Можно доказать, что определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Линейной комбинации строк (столбцов) $A_1, A_2, \dots, A_k$ называется строка (столбец) $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — некоторые числа.

Введем в рассмотрение полезный в дальнейшем символ Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

1. Определитель не изменяется после операции транспонирования: $\det A^T = \det A$.

СЛЕДСТВИЕ. Все, что справедливо для строк определителя, справедливо и для его столбцов.

2. Если в определителе поменять местами две строки, то его знак изменится на противоположный.

СЛЕДСТВИЕ. Определитель, содержащий две равные строки, равен нулю.

3. Если какую-либо строку определителя умножить на число, то в результате весь определитель умножится на это число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{i1} & k \cdot a_{i2} & \dots & k \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Определитель, у которого существуют две пропорциональные строки, равен нулю.

4. Если два определителя порядка n содержат равные между собой элементы на всех местах, кроме некоторой i -й строки, то сумма этих определителей равна определителю порядка n , у которого i -я строка равна сумме i -х строк определителей, остальные элементы сохраняют свои значения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЯ. 1. Если к некоторой строке определителя прибавить любую другую, умноженную на произвольное число, то определитель не изменится. 2. Если некоторая строка определителя представляет из себя линейную комбинацию каких-то других его строк, то такой определитель равен нулю.

5. Сумма произведений элементов какой-либо строки или столбца определителя на их алгебраические дополнения равна определителю, а

сумма произведений элементов какой-либо строки или столбца на алгебраические дополнения другой строки или столбца равна нулю:

$$a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + \dots + a_{in} \cdot A_{kn} = \delta_{ik} \det A = \begin{cases} \det A, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$a_{1j} \cdot A_{1p} + a_{2j} \cdot A_{2p} + \dots + a_{nj} \cdot A_{np} = \delta_{jp} \det A = \begin{cases} \det A, & \text{если } j = p, \\ 0, & \text{если } j \neq p, \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

ПРИМЕР 1. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Вычислим определитель, пользуясь его свойствами.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 10 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 5 \cdot 3 \cdot 3 - 0 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 3 = 0. \end{aligned}$$

Дадим необходимые пояснения. Первый шаг — транспонирование, при котором определитель не меняется; следующий шаг — перестановка первой строки со второй, в результате знак определителя сменился на противоположный; третий шаг — внесения множителя (-1) внутрь определителя, умножение на (-1) первой строки; четвертый шаг — сложение с первым столбцом второго и четвертого, а также вычитание из третьего столбца первого. Целью всех этих действий является получение в

первой строке нулей всюду, кроме первого элемента. В результате, применив определение определителя, другими словами, разложив его по первой строке, мы получаем определитель третьего порядка. Применение правила треугольника упрощается, если получить в определителе дополнительные нули, поэтому мы сначала сложили первый столбец с третьим, а затем от второй строки отняли первую. $\diamond$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Единичной матрицей называется квадратная матрица

$$E = (\delta_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Легко проверить, что единичная матрица играет роль единицы при умножении: $A \cdot E = E \cdot A = A$ для всех матриц A , при которых имеет смысл произведение. В литературе встречаются другие обозначения для единичной матрицы: $E = Id = I = \mathbf{1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A порядка n , если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E — единичная матрица.

Произвольная квадратная матрица может не иметь обратной. Справедлива следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. Для квадратной матрицы A существует обратная A^{-1} тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$; в этом случае обратная матрица может быть найдена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A .

Матрицы A , у которых $\det A \neq 0$, называются обратимыми или невырожденными.

ПРИМЕР 2. Найти обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Введем в рассмотрение основную матрицу системы

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а также $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Тогда система (1.6) в матричной форме записывается как $AX = B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Систему линейных уравнений будем называть кramerовской, если число ее уравнений равно числу неизвестных и $\det A \neq 0$.

ТЕОРЕМА 3. Крамеровские системы имеют единственное решение, которое может быть найдено с помощью обратной матрицы по формуле

$$X = A^{-1}B, \quad (1.7)$$

или по формулам Крамера

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (1.8)$$

где $\Delta = \det A$ — определитель основной матрицы системы, Δ_k — определитель, полученный из Δ заменой его k -го столбца столбцом свободных членов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Решение систем по формуле (1.7) носит название алгебраического или матричного метода решения.

ПРИМЕР 3. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} -x - 3y - 3z = 5, \\ 2x + 2y - 4z = -1, \\ 2x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

1) алгебраическим методом; 2) по формулам Крамера.

РЕШЕНИЕ. Найдем, прежде всего, основной определитель системы

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= (-1) \cdot 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-4) \cdot 2 + (-3) \cdot 2 \cdot (-2) - \\ &\quad - (-3) \cdot 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-4) \cdot (-2) = 72 \neq 0.\end{aligned}$$

Так как $\Delta \neq 0$, решение существует и единственно.

1) Обратная матрица A^{-1} вычислена в предыдущем примере, с ее помощью находим решение

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{72} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 18 & 18 \\ -16 & 2 & -10 \\ -8 & -8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -17/12 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

2) Определитель $\Delta = 72 \neq 0$ уже найден. Найдем определители

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \begin{vmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 18; \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -102; \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -24.\end{aligned}$$

По формулам Крамера получаем $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{4}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{17}{12}$,
 $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -\frac{1}{3}$. $\diamond$

1.3 Алгоритм Гаусса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции: 1) перестановку строк; 2) умножение любой строки на число, отличное от нуля; 3) сложение строк.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Две матрицы A и B будем называть эквивалентными (обозначается $A \sim B$), если они могут быть получены одна из другой конечной цепочкой элементарных преобразований.

Алгоритм Гаусса состоит в преобразовании исходной матрицы с помощью элементарных преобразований к так называемому «ступенчатому» виду.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Матрицу будем называть ступенчатой, если она удовлетворяет условиям: 1) все ее нулевые строки расположены ниже всех ненулевых; 2) у каждой ненулевой строки, кроме первой, число нулевых элементов, предшествующих первому ненулевому элементу, больше, чем у предыдущей строки.

Например, ступенчатыми являются следующие матрицы:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \underline{1} & 2 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & \underline{3} & 2 & 5 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \underline{4} & & & & \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \underline{3} & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} & -1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{2} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{2} & & \end{array} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Квадратные треугольные матрицы также являются ступенчатыми.

АЛГОРИТМ ГАУССА ПРИВЕДЕНИЯ МАТРИЦЫ К СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ.

Первый шаг — если в левом верхнем углу матрицы находится нулевой элемент, ищем строку, у которой первый элемент не равен нулю, переставляем ее с первой строкой и переходим ко второму шагу. Если все элементы в первом столбце равны нулю, переходим ко второму столбцу и повторяем первый шаг с этим столбцом.

Второй шаг — получаем в первом столбце нули под левым верхним элементом. С этой целью последовательно прибавляем первую строку, умноженную каждый раз на подходящий коэффициент, ко второй строке, к третьей и т.д.

Третий шаг — сдвигаемся на одну строку вниз и на один столбец вправо: переходим этим самым к матрице, в которой на одну строку и один столбец меньше, чем в исходной. В дальнейшем первая строка исходной матрицы алгоритмом Гаусса не затрагивается, а первый столбец, начиная со второго элемента состоит из нулей, поэтому он останется нулевым на следующих этапах. В полученной матрице повторяем первый шаг.

Алгоритм Гаусса закончится, когда мы дойдем до последней нижней строки или до последнего правого столбца.

Поясним алгоритм Гаусса на примере.

ПРИМЕР 4. Привести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ -6 & 12 & -6 & 9 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса к ступенчатому виду.

РЕШЕНИЕ. Цепочкой элементарных преобразований $A \sim B \sim C \sim D$ переведем матрицу A в матрицу D . За чертой справа от матриц — комментарии к проделанным операциям со строками.

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & A_1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 & A_2 \\ -6 & 12 & -6 & 9 & 3 & A_3 \\ 3 & -6 & 4 & -3 & 2 & A_4 \end{array} \right) \sim \\ &\sim B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 & B_1 = A_2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & B_2 = A_1 \\ -6 & 12 & -6 & 9 & 3 & B_3 = A_3 \\ 3 & -6 & 4 & -3 & 2 & B_4 = A_4 \end{array} \right) \sim \\ &\sim C = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 & C_1 = B_1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 & C_2 = B_2 - 2B_1 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 15 & C_3 = B_3 + 6B_1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 & C_4 = B_4 - 3B_1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim D = \left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & -2 & 1 & -4 & 2 & D_1 = C_1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 9 & -4 & D_2 = C_2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & -1 & D_3 = -\frac{1}{15}C_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_4 = C_4 - C_2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

На первом шаге мы поменяли местами первую строку со второй. Цель — получить в левом верхнем углу единицу, в этом случае алгоритм Гаусса легче провести в целых числах. $\diamond$

Решение крамеровских систем методом Гаусса

Введем в рассмотрение матрицу A^* — расширенную матрицу системы линейных уравнений, полученную из основной матрицы A при-

писыванием столбца свободных членов системы:

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Столбец свободных членов принято отделять от коэффициентов системы вертикальной чертой для удобства.

Легко проверить, что элементарные преобразования расширенной матрицы приводят к расширенной матрице системы линейных уравнений, эквивалентной первоначальной, т.е. имеющей то же самое множество решений, что и первоначальная.

Система линейных уравнений общего вида (1.6) называется совместной, если у нее существует хотя бы одно решение; если же решения нет — система называется несовместной. Совместные системы, в свою очередь, подразделяются на определенные — обладающие единственным решением, и неопределенные — имеющие более одного решения (позже мы увидим, что если система неопределенная, то множество решений бесконечно).

Применим алгоритм Гаусса к системе, у которой число неизвестных совпадает с числом уравнений. Если основная матрица такой системы приводится к треугольному виду с ненулевыми элементами на главной диагонали, это означает, что система крамеровская. Полученную систему, эквивалентную данной, легко решить с помощью последовательного исключения неизвестных.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Более общий случай будет рассмотрен позже (модуль 7.)

ПРИМЕР 5. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Составим расширенную матрицу системы и с помощью алгоритма Гаусса приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{aligned}
A^* &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & -11 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, наша система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ 5x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_4 = 1, \end{cases}$$

откуда последовательно получаем $x_4 = 1$, $x_3 = -4 + 3x_4 = -1$, $5x_2 = -7 - 3x_3 = -10$, $x_2 = -2$, $x_1 = -3 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1$. $\diamond$

1.4 Задачи и упражнения

1. Заданы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) определить размерности всех матриц;
- 2) указать квадратные, диагональные, единичные, треугольные матрицы;
- 3) выписать элементы a_{12} , a_{22} , a_{32} , a_{43} матриц A , K , M , P , N , если таковые существуют;
- 4) выяснить, определены ли операции сложения для следующих матриц: $A + B$, $C + D$, $D + F$, $K + L$, $L + M$, $M + N$, $M + P$, $P + R$. Вычислить сумму тех матриц, для которых операция сложения определена;
- 5) найти произведения матриц на число: $2B$, $-D$, $-3F$, $4M$, $-2N$, $5Q$;
- 6) вычислить линейные комбинации матриц, если они определены: $2A - 3B$, $A + B - 2C$, $2A + 3D$, $-E + 2F$, $3K - 2L$, $M - 5N$, $2M + 4Q$, $2Q - 5R$, $2P + 3Q - R$;
- 7) для матриц A , B , C , D , E , M , L , N и произвольных коэффициентов α , β , $\gamma \in \mathbb{R}$ выписать линейные комбинации следующих строк: $\alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1$, $\alpha D_2 + \beta E_2 + \gamma M_2$, $\beta L_2 + \gamma L_3$, $\alpha M_1 + \beta M_2$, $\alpha L_1 + \beta L_2$, $\alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3$.
- 8) для матриц A , B , C , D , E , M , L , N и произвольных коэффициентов α , β , $\gamma \in \mathbb{R}$ выписать следующие линейные комбинации столбцов: $\alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2$, $\alpha D_3 + \beta E_3 + \gamma M_3$, $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3$, $\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3$, $\alpha N_2 + \beta N_3 + \gamma N_4$.

2. Среди следующих матриц A , B , C , D перечислить пары (с учетом порядка сомножителей), для которых определено произведение. Указать при этом размерность матрицы—произведения:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведения матриц AB и BA :

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти произведения матриц:

$$1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad 2) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) \quad \begin{pmatrix} 923 & 2115 & 0 & 0 \\ 1097 & 518 & 0 & 0 \\ 652 & 769 & 0 & 0 \\ 841 & 134 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 476 & 372 & 1505 & 882 \\ 549 & 795 & 999 & 400 \end{pmatrix};$$

$$5) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$6) \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5. Даны матрицы:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения всех пар матриц с учетом сомножителей: AB , BA , AC , CA , ..., CE , EC . Выделить пары матриц, для которых произведение коммутативно, т.е. не зависит от порядка сомножителей.

6. Найти все матрицы, перестановочные с матрицами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{7. Даны матрицы: } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

1) Вычислить: A^2 , A^3 , B^2 , B^3 , B^n .

2) Найти значения многочленов $f_1(A)$ и $f_2(A)$ от матрицы A , где $f_1(x) = 3x^2 - 4$, $f_2(x) = x^2 - 3x + 1$.

8. Транспонировать матрицы, найти среди них симметрические:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Проверить вычислением следующие соотношения: $(A^\top)^\top = A$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$, где

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Вычислить определители 2-го порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix},$$

$$5) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{1+t^2}{-2t} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}, \quad 7) \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & (1+kx)e^{kx} \end{vmatrix}.$$

11. Вычислить определители 3-го порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix},$$

$$5) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad 7) \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}, \quad 8) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$9) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad 10) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}, \quad 11) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}.$$

12. Решить уравнение и неравенство:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

13. Вычислить определитель $\det A$. Найти миноры всех элементов a_{ij} . Построить матрицу $\tilde{A} = (A_{ij})_{n \times n}$ из алгебраических дополнений элементов заданной матрицы A :

$$1) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad 4) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Пользуясь свойствами определителей, вычислить:

$$1) \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & 1 & \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \beta & 1 & \sin^2 \beta \\ \cos^2 \gamma & 1 & \sin^2 \gamma \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} x & x' & ax + bx' \\ y & y' & ay + by' \\ z & z' & az + bz' \end{vmatrix},$$

$$3) \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}.$$

15. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$3) \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$6) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad 7) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \quad 8) \begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix},$$

$$9) \begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}, \quad 10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

16. Для заданных матриц найти обратные и сделать проверку:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$5) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad 6) \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad 7) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$8) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad 9) \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$10) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad 11) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 12) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$13) \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad 14) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 15) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

17. Используя обратные матрицы, найденные в предыдущем задании, решить матричные уравнения:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы и формул Крамера:

$$1) \begin{cases} 3x - 4y = -6, \\ 3x + 4y = 18; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10, \\ 3x + 7y + 4z = 3, \\ x + 2y + 2z = 3; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 4x - 3y + 2z + 4 = 0, \\ 6x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 3 = 0; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 5x + 2y + 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + 5z = 0, \\ 3x + 4y + 2z + 10 = 0; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x + y - z = 6, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ 4x + 2y - 5z = 9; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 2x + y + 3z = 13, \\ x + y + z = 6, \\ 3x + y + z = 8; \end{cases} \quad 11) \begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 2. \end{cases}$$

19. Определить при каком значении параметра система имеет единственное решение. Найти одно из решений, взяв какое-либо значение параметра:

$$1) \begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ \lambda x - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \mu x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \mu x_3 = 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + y - z = 1, \\ 2x + y + z = 1. \end{cases}$$

20. Решить системы линейных уравнений задачи 18 методом Гаусса.

21. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7; \end{cases} \\
 3) \quad & \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2; \end{cases} & 4) \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -7; \end{cases} \\
 5) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126, \\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210; \end{cases} \\
 6) \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7; \end{cases} \\
 7) \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = -9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 = -146, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -10, \\ x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 = -26, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 37; \end{cases} \\
 8) \quad & \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 21, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 13x_4 + 3x_5 = 12, \\ 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - x_5 = 29, \\ 15x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 130, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -13. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Модуль 2

Векторное пространство

2.1 Векторы и линейные операции над ними

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Отрезок AB на плоскости или в пространстве называется направленным, если одну из точек A или B объявить началом, а другую — концом отрезка. На чертеже направленный отрезок изображается со стрелкой, направленной от начала к концу. Обозначается направленный отрезок как $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{AB}$ в рукописном тексте, и **AB** (жирным шрифтом) в печатном тексте, причем первая буква — начало, вторая — конец отрезка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Направленные отрезки **AB** и **CD** будем называть равными, если: 1) прямые AB и CD параллельны или совпадают; 2) длины отрезков AB и CD равны; 3) лучи AB и CD имеют одно и то же направление (сонаправлены).

Условия равенства направленных отрезков из определения 19 коротко можно сформулировать так: **$AB = CD$** в том и только в том случае, если $ABDC$ — параллелограмм. Другими словами, направленный отрезок остается равным себе самому при параллельном переносе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Вектором будем называть направленный отрезок. При этом, учитывая равенство направленных отрезков, вектор можно отложить от любой точки плоскости или пространства.

Вектор, определенный таким способом, называется свободным.

Обозначается вектор малыми латинскими буквами через $\vec{a}$ или $\bar{a}$ в рукописном тексте и через **a** (жирным шрифтом) в печатном тексте.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, который может быть построен по следующему правилу треугольника: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ — направленный отрезок, соединяющий начало вектора $\mathbf{a}$ с концом вектора $\mathbf{b}$, если начало вектора $\mathbf{b}$ совмещено с концом вектора $\mathbf{a}$ (см. рис. 2.1).

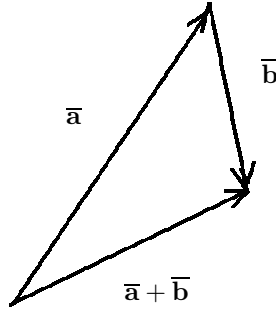


Рис. 2.1: Сумма векторов по правилу треугольника

Можно доказать, что тот же результат будет получен по правилу параллелограмма: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ — диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, исходящих из одной точки. Началом вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ при этом является общее начало векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (см. рис. 2.2).

Модулем или абсолютной величиной вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB ; обозначение модуля: $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются коллинеарными (обозначается как $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$), если они лежат на параллельных или совпадающих прямых. Обозначение $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ используется для сонаправленных коллинеарных векторов; $\mathbf{a} \downarrow\downarrow \mathbf{b}$ — для противоположно направленных коллинеарных векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Произведением $\lambda \cdot \mathbf{a}$ числа λ на вектор $\mathbf{a}$ называется вектор $\mathbf{b}$, удовлетворяющий условиям: 1) векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны; 2) $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$; 3) $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, если $\lambda > 0$ и $\mathbf{b} \downarrow\downarrow \mathbf{a}$, если $\lambda < 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из определений 22 и 23 можно получить следующее условие коллинеарности векторов: векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны в том и только в том случае, если существует вещественное число λ такое, что $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.

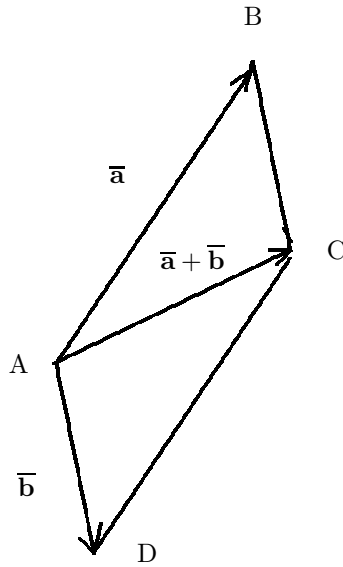


Рис. 2.2: Сумма векторов по правилу параллелограмма

Операции сложения векторов и умножения вектора на число носят название линейных операций. Можно доказать, что определены они корректно, т.е. результат операции не зависит от выбора точки приложения вектора.

ТЕОРЕМА 4 (Свойства линейных операций над векторами). Для произвольных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и любых вещественных чисел λ , μ справедливы свойства:

- 1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ — коммутативность сложения;
- 2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ — ассоциативность сложения;
- 3) существует вектор $\mathbf{0}$, называемый нулевым, такой, что $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого вектора $\mathbf{a}$;
- 4) для любого вектора $\mathbf{a}$ существует вектор $-\mathbf{a}$, называемый противоположным, такой, что $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;
- 5) $\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$ — дистрибутивность относительно сложения векторов;

- 6) $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{a}$ — дистрибутивность относительно сложения чисел;
- 7) $(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a})$ — ассоциативность умножения;
- 8) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ — свойство нормировки.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Нулевым вектором является вырожденный отрезок, у которого начало совпадает с концом: $\mathbf{0} = \mathbf{AA}$; для вектора $\mathbf{AB}$ противоположным является вектор $\mathbf{BA} = -\mathbf{AB}$; последнее восьмое свойство для векторов является тривиальным — его значение будет раскрыто позже в модуле 6 «Линейные пространства».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Ортом вектора $\mathbf{a}$ называют вектор единичной длины, сонаправленный с вектором $\mathbf{a}$. Обозначения: орт $\mathbf{a}$ или $\mathbf{a}^0$.

Нетрудно проверить, что орт $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

Можно ввести операцию разности векторов, как обратную к операции суммы векторов: разностью векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется такой вектор $\mathbf{c}$, что $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$, или, по-другому, разность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — это сумма вектора $\mathbf{a}$ с вектором, противоположным вектору $\mathbf{b}$: $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Построить разность векторов можно, поместив векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ началом в одной точке и соединив направленным отрезком их концы, при этом направление выбираем от вектора $\mathbf{b}$ к вектору $\mathbf{a}$ — из конца вычитаем начало (см. рис. 2.3).

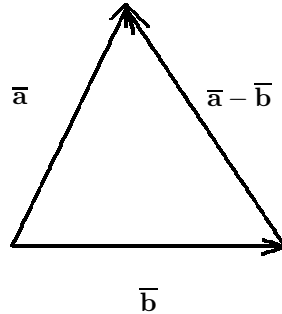


Рис. 2.3: Разность векторов

Множество векторов плоскости, на котором введены линейные операции суммы и умножения на число, будем называть двумерным ли-

нейным векторным пространством и обозначать через V^2 , соответственно, множество векторов пространства образует трехмерное линейное векторное пространство V^3 .

2.2 Линейная зависимость векторов. Базис

В дальнейшем будем вести изложение для некоторого положительного целого числа n . Можно считать, что n равно двум или трем, но важно иметь в виду, что большинство введенных здесь понятий и фактов переносятся на произвольные n -мерные пространства, которые будем изучать позже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Упорядоченный набор векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ будем называть системой векторов. Более компактные обозначения системы векторов: $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ или $\{\mathbf{a}_i\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Линейной комбинацией системы векторов $\{\mathbf{a}_i\}$ называется вектор $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — произвольные вещественные числа, называемые коэффициентами линейной комбинации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Система векторов $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ называется линейно зависимой, если найдется такой набор коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

при этом среди коэффициентов λ_i существует хотя бы один, не равный нулю ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Легко проверить, что: 1) если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима; 2) если в системе векторов содержатся два равных между собой вектора, то она линейно зависима.

Вышеперечисленные тривиальные случаи в дальнейшем исключаем из рассмотрения, т.е. рассматриваем системы, не содержащие нулевых и равных между собой векторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Можно доказать, что если к некоторой системе линейно зависимых векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ добавить произвольный вектор, то полученная система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}$ также линейно зависима.

ТЕОРЕМА 5. Система двух векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны ($\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. Векторы называются компланарными, если они лежат в параллельных или совпадающих плоскостях.

ТЕОРЕМА 6. Система трех векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ компланарны.

В качестве важного следствия этой теоремы получаем:

ТЕОРЕМА 7. Любая система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ трех векторов пространства V^2 линейно зависима.

ТЕОРЕМА 8. Любая система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ четырех векторов пространства V^3 линейно зависима.

Система векторов линейно независима, если она не является линейно зависимой. Однако, на практике удобнее применять следующее определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Систему векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ будем называть линейно независимой, если нулевая линейная комбинация векторов этой системы возможна только с нулевыми коэффициентами; другими словами, если из равенства $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Базисом векторного пространства V называется максимальная линейно независимая система векторов, т.е. линейно независимая система $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ такая, что присоединение к ней любого вектора $\mathbf{a} \in V$ делает систему $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}\}$ линейно зависимой.

ТЕОРЕМА 9. Если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис векторного пространства V , то любой вектор $\mathbf{a} \in V$ можно представить, причем единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n. \quad (2.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. Коэффициенты $x_1, x_2, \dots, x_n$ разложения (2.2) называются координатами вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Можно доказать, что если любой вектор $\mathbf{a} \in V$ можно представить в виде линейной комбинации векторов линейно независимой системы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, то эта система будет базисом пространства V .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Следствием теорем 5, 6, 7 и 8 является тот факт, что любая система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ неколлинеарных векторов плоскости является базисом пространства V^2 , а любая система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ некомпланарных векторов пространства является базисом пространства V^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. Число векторов в базисе линейного векторного пространства называется его размерностью. Обозначается размерность через $\dim V$, при этом в записи $V = V^n$ число n — размерность пространства V .

Можно доказать, что определение размерности корректно, т.е. число векторов во всех базисах данного пространства одно и то же.

Таким образом, размерность пространства векторов на плоскости равна двум ($\dim V^2 = 2$), размерность векторного пространства V^3 — трем ($\dim V^3 = 3$).

В векторном пространстве V^n с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ всякий вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен в координатной форме:

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Заметим по поводу обозначений, что координаты вектора могут обозначаться как в круглых, так и в фигурных скобках через запятую. Мы в данном пособии будем использовать фигурные скобки.

ТЕОРЕМА 10. Пусть векторы заданы своими координатами в некотором базисе: $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Тогда в этом же базисе сумма векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n\}$, произведение вектора на число $\lambda \cdot \mathbf{a} = \{\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \dots, \lambda \cdot a_n\}$, т.е. координаты суммы равны сумме координат, координаты произведения вектора на число равны произведению координат на это число.

ПРИМЕР 6. Вывести условие коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ в некотором базисе.

РЕШЕНИЕ. Так как $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ в том и только в том случае, если $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{b}$, то по теореме 10 получаем

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \lambda \cdot \mathbf{b} = \{\lambda \cdot b_1, \lambda \cdot b_2, \dots, \lambda \cdot b_n\},$$

и, поскольку координаты вектора задаются однозначно (теорема 9), можно записать $a_1 = \lambda \cdot b_1$, $a_2 = \lambda \cdot b_2$, ..., $a_n = \lambda \cdot b_n$, откуда получаем $\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Отбросив число λ , получим условие коллинеарности векторов:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}, \quad (2.3)$$

т.е. векторы коллинеарны в том и только в том случае, если координаты их пропорциональны. $\diamond$

Сделаем в конце важное замечание — условимся считать, что, если в знаменателе какой-либо из дробей пропорции (2.3) стоит число 0, то в числителе этой дроби тоже находится 0.

2.3 Декартова система координат

Основной метод аналитической геометрии — это метод координат, т.е. сведение геометрических задач к алгебраическим с помощью задания точек плоскости и пространства числами — координатами.

Координаты в векторном пространстве мы уже ввели в предыдущем разделе. Ближайшей целью нового раздела будет введение координат точек на плоскости и в пространстве.

Рассмотрим множество точек на плоскости или в пространстве. Будем считать, что в соответствующем векторном пространстве V^2 или V^3 выбран базис $\{e_i\}$. Построим систему координат в точечном пространстве следующим образом: 1) выберем и зафиксируем некоторую точку O в качестве начала координат; 2) перенесем базисные векторы e_i началом в точку O ; 3) проведем в направлении каждого из базисных векторов прямую через начало координат — так называемые координатные оси. Обозначим их: Ox — в направлении e_1 , Oy — в направлении e_2 и Oz — в направлении e_3 .

Построенная координатная система $\{O, \{e_i\}\}$ носит название косоугольной декартовой системы координат. Будем для построенной системы координат использовать также обозначения Oxy на плоскости и $Oxyz$ в пространстве.

Определим понятие декартовых координат точек. Для этого соединим произвольную точку M с началом координат прямолинейным отрезком и рассмотрим вектор OM , так называемый радиус-вектор точки M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Декартовыми координатами точки M в системе координат $\{O, \{e_i\}\}$ называются координаты вектора OM в базисе $\{e_i\}$.

Будем обозначать координаты точки M как $M(x, y)$ на плоскости и $M(x, y, z)$ в пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Очень важно при изучении аналитической геометрии не путать между собой элементы трех различных множеств — числа, векторы и точки. Поэтому будем последовательно отличать вектор от точки в обозначениях: $OM = \{x, y, z\}$ — вектор, координаты в фигурных скобках и между обозначением вектора и его координатами стоит знак «равно»; $M(x, y, z)$ — точка, координаты в круглых скобках рядом с обозначением точки без знака «равно».

Рассмотрим важный частный случай базиса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. Базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ называется ортонормированным, если $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$ и $e_1 \perp e_2$, $e_1 \perp e_3$, $e_2 \perp e_3$, т.е. базисные векторы имеют единичную длину и взаимно перпендикулярны.

Общепринято обозначать базисные векторы ортонормированного базиса через $e_1 = \bar{i}$, $e_2 = \bar{j}$, $e_3 = \bar{k}$.

Декартову систему $\{O, \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}\}$ называют прямоугольной декартовой системой координат (см. рис. 2.4).

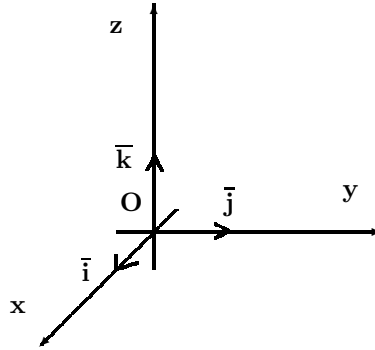


Рис. 2.4: Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Именно такая система чаще всего используется на практике и мы в дальнейшем будем считать, если не оговорено противное, что координаты точек заданы в прямоугольной декартовой системе координат, соответственно, координаты вектора — в ортонормированном базисе.

Будем называть осью вектора a прямую, на которой лежит вектор a , причем на этой прямой выделено направление, совпадающее с направлением вектора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Алгебраической проекцией вектора $\mathbf{a}$ на ось вектора $\mathbf{b}$ (обозначается как $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$) называется длина прямоугольной (ортогональной) проекции вектора $\mathbf{a}$ на ось вектора $\mathbf{b}$, взятая со знаком «+», если ось вектора $\mathbf{b}$ и проекция сонаправлены, и со знаком «−», если ось вектора $\mathbf{b}$ и проекция противоположно направлены.

Легко доказать, что $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, где через $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначен угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Для краткости алгебраическую проекцию вектора $\mathbf{a}$ на ось вектора $\mathbf{b}$ в дальнейшем будем называть просто проекцией вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$.

ТЕОРЕМА 11 (Геометрический смысл прямоугольных координат). Координаты вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ в ортонормированном базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ равны его проекциям на оси соответствующих базисных векторов: $a_1 = \text{пр}_{\mathbf{i}}\mathbf{a}$, $a_2 = \text{пр}_{\mathbf{j}}\mathbf{a}$, $a_3 = \text{пр}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}$.

Отметим, что отсюда и из теоремы Пифагора следует формула для вычисления модуля вектора в ортонормированном базисе:

если $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, то $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Общепринятыми являются обозначения углов, которые образует вектор $\mathbf{a}$ с базисными векторами: $\alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{i})$, $\beta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{j})$, $\gamma = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{k})$. Величины $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ носят название направляющих косинусов вектора $\mathbf{a}$.

Если вектор $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, то $a_1 = \text{пр}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha$, $a_2 = \text{пр}_{\mathbf{j}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \beta$, $a_3 = \text{пр}_{\mathbf{k}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \gamma$, откуда следуют формулы для вычисления направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}. \quad (2.4)$$

Сделаем в заключение два важных замечания: 1) направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}$ являются координатами его орта. В самом деле,

$$\text{орт } \mathbf{a} = \mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left\{ \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \right\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\};$$

2) так как направляющие косинусы — координаты орта, для них справедливо тождество

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

2.4 Простейшие задачи аналитической геометрии

Пусть в пространстве или на плоскости задана декартова прямоугольная система координат.

ПРИМЕР 7. Найти координаты вектора $\mathbf{AB}$ по заданным координатам точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

РЕШЕНИЕ. Так как вектор $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}$, а координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора, имеем $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, что обычно формулируют в виде правила: для нахождения координат вектора из координат конца вычитают координаты начала. $\diamond$

ПРИМЕР 8. Найти расстояние между точками A и B по их заданным координатам $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

РЕШЕНИЕ. Так как расстояние между точками A и B равно модулю вектора $\mathbf{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, получаем

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad \diamond$$

Пусть M_1 и M_2 — две различные заданные точки, $\lambda \neq -1$ — заданное число. Говорят, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , если $\mathbf{M}_1\mathbf{M} = \lambda \cdot \mathbf{MM}_2$.

ПРИМЕР 9. Найти координаты точки M , которая делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , если координаты $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ заданы.

РЕШЕНИЕ. Пусть $M(x, y, z)$ — искомая точка. Введем обозначения: $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}_1$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{OM}_2$. Тогда равенство $\mathbf{M}_1\mathbf{M} = \lambda \cdot \mathbf{MM}_2$ можно переписать как $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$, откуда получаем решение задачи в векторном виде $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda}$. Расписав это равенство в координатном виде, получим формулы деления отрезка в заданном отношении

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.5)$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаем формулы для нахождения координат середины отрезка M_1M_2 — точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad \diamond \quad (2.6)$$

ПРИМЕР 10. Даны координаты точек $M(x, y, z)$, $O'(x_0, y_0, z_0)$ в системе координат $Oxyz$. Найти координаты точки M в новой системе координат $O'x'y'z'$, полученной из $Oxyz$ параллельным переносом на вектор OO' .

РЕШЕНИЕ. Обозначим через (x', y', z') координаты точки M в новой системе координат. Тогда $OM = \{x, y, z\}$, $O'M = \{x', y', z'\}$, $OO' = \{x_0, y_0, z_0\}$. Из векторного равенства $OM = OO' + O'M$ получаем, что $O'M = OM - OO'$, откуда $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$. $\diamond$

ПРИМЕР 11. Даны вершины $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$, $C(1, 2, -3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти четвертую вершину D , противоположную B .

РЕШЕНИЕ. Найдем координаты вектора $AB = \{-8, 7, -9\}$. Но вектор $DC = AB$, а координаты конца вектора DC — точки $C(1, 2, -3)$, мы знаем. Поэтому из векторного равенства $OD = OC - DC$ получаем $D_x = 1 - (-8) = 9$, $D_y = 2 - 7 = -5$, $D_z = -3 - (-9) = 6$.

2.5 Задачи и упражнения

22. По данным векторам a и b построить каждый из следующих векторов: 1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $b - a$; 4) $-a - b$.

23. Векторы a и b взаимно перпендикулярны, $|a| = 5$, $|b| = 12$. Найти $|a + b|$ и $|a - b|$.

24. По данным векторам a и b построить каждый из следующих векторов: 1) $3a$; 2) $-\frac{1}{2}b$; 3) $2a + \frac{1}{3}b$; 4) $\frac{1}{2}a - 3b$.

25. В треугольнике ABC заданы векторы $a = AB$ и $b = AC$. Построить каждый из следующих векторов: 1) $\frac{a + b}{2}$; 2) $\frac{a - b}{2}$; 3) $\frac{b - a}{2}$; 4) $-\frac{a + b}{2}$.

26. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ заданы векторы $m = AB$, $n = BC$, $p = CD$, $q = DE$, $r = EA$. Построить векторы: 1) $m - n + p - q + r$; 2) $m + 2p + \frac{1}{2}r$; 3) $2m + \frac{1}{2}n - 3p - q + 2r$.

27. Три силы M, N, P , приложенные к одной точке, взаимно перпендикулярны. Определить величину их равнодействующей R , если известно, что $|M| = 2$, $|N| = 10$, $|P| = 11$.

28. Исследовать на коллинеарность систему векторов $\{a, b\}$, где $a = \{2, -1, 3\}$, $b = \{-6, 3, -9\}$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены — в одну или противоположные стороны.

29. В треугольнике ABC заданы векторы $a = AB$ и $b = AC$. Пусть вектор $m_a = AA_1$ — медиана, проведенная из вершины A . Доказать, что $m_a = \frac{a+b}{2}$.

30. Найти разложение медианы BB_1 треугольника ABC по векторам AB и AC .

31. Доказать векторным способом теоремы: 1) о медианах треугольника (медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины); 2) о средней линии треугольника (средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине); 3) о средней линии трапеции (средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме).

32. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Доказать векторное равенство $AM + BM + CM = 0$.

33. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Доказать, что для произвольной точки O плоскости или пространства выполняется векторное равенство $OM = \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$. Показать, что следствием этого равенства является утверждение, что точка пересечения медиан треугольника — его центр масс (барицентр), если в вершинах треугольника сосредоточены единичные массы.

34. Доказать, что три различные точки A, B, C лежат на одной прямой в том и только в том случае, если для произвольной точки O плоскости или пространства выполняется векторное равенство $OC = \lambda OA + \mu OB$, где $\lambda + \mu = 1$.

35. Найти значения α и β , при которых векторы $a = -2i + 3j + \beta k$ и $b = \alpha i - 6j + 2k$ будут коллинеарны. Будут ли они сонаправлены?

36. Система векторов $\{e_1, e_2\}$ образует базис на плоскости. Показать, что векторы $a = e_1 + e_2$, $b = -2e_1 - 2e_2$ линейно зависимы, и выписать их координаты в базисе $\{e_1, e_2\}$.

37. Система векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$ образует базис в пространстве. Выписать координаты векторов $a = 3e_1$, $b = e_1 + e_2 + e_3$, $c = -2e_3$ в этом базисе и показать, что система векторов $\{a, b, c\}$ линейно независима.

38. Система векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$ образует базис в пространстве. Доказать, что тройка векторов $a = e_1 + e_2$, $b = -e_1 + 2e_2$, $c = -3e_3$ также образует базис. Разложить вектор $d = 2e_1 - e_2 + 4e_3$ по этому базису.

39. В параллелограмме $ABCD$ в качестве базиса выбраны векторы $a = AD$ и $b = AC$. Разложить по этому базису вектор DK , где K — середина стороны BC .

40. Заданы векторы $a = 2i + 3j$, $b = -3j - 2k$, $c = i + j - k$. Найти координаты следующих линейных комбинаций комбинаций в базисе $\{i, j, k\}$: 1) $a + b + c$; 2) $a - b - c$; 3) $2a - 3b + 2c$; 4) $a + b - 2c$; 5) $a - \frac{1}{2}b + c$.

41. Найти орты векторов $a_1 = 4i + 3j$, $a_2 = -3j - 4k$, $a_3 = 2i - 2j - k$, $a_4 = 6i - 2j - 3k$.

42. Найти вектор b , образующий со всеми базисными векторами i, j, k равные острые углы, если $|b| = 2\sqrt{3}$.

43. Дан вектор $c = 16i - 15j + 12k$. Найти координаты вектора d , такого, что $d \perp c$, $|d| = 75$.

44. Найти вектор b , коллинеарный вектору $a = i - 2j - 2k$, образующий с j острый угол и имеющий длину 15.

45. Убедившись, что векторы $b = \{1, -1\}$ и $c = \{2, 1\}$ образуют базис в пространстве V^2 , найти координаты вектора $a = \{0, -3\}$ в этом базисе. Сделать чертеж.

46. В векторном пространстве V^2 заданы векторы $e_1 = \{-1, 2\}$, $e_2 = \{2, 1\}$ и $a = \{0, -2\}$. Убедившись, в том, что пара векторов $\{e_1, e_2\}$ может служить базисом, найти разложение вектора a по этому базису. Сделать чертеж.

47. Тройка некопланарных (проверьте!) векторов задана их декартовыми координатами: $e_1 = \{1, 0, 0\}$, $e_2 = \{1, 1, 0\}$, $e_3 = \{1, 1, 1\}$. Вычислить координаты вектора $a = -2i - k$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$.

48. Определить, какая из заданных систем векторов образует базис и разложить вектор $\mathbf{a}$ по этому базису.

- 1) $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, -1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 1\}$, $\mathbf{e}_3 = \{-1, 0, 1\}$, $\mathbf{a} = \{2, 3, 1\}$;
- 2) $\mathbf{e}_1 = \{1, -1, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_3 = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{a} = \{1, -3, 1\}$;
- 3) $\mathbf{e}_1 = \{1, 1, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{e}_3 = \{0, 1, 1\}$, $\mathbf{a} = \{1, 3, 0\}$.

49. Найти координаты конца вектора $\mathbf{AB} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, если его начало совпадает с точкой $A(2, 2, -5)$.

50. Проверить, что точки $A(1; -2, 5)$, $B\left(2; -\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$, $C(-1; -5, 4)$ лежат на одной прямой.

51. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2, 6)$, $B(2, 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2, 2)$. Найти две другие вершины.

52. На оси абсцисс найти точку M , расстояние которой до точки $A(3, -3)$ равно 5.

53. На оси ординат найти точку M , равноудаленную от точек $A(1, -4, 7)$ и $B(5, 6, -5)$.

54. Даны точки $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$, $C(-4, 0, 3)$ — вершины треугольника. Найти длину медианы, проведенной из вершины A .

55. Отрезок с концами в точках $A(3, -2)$, $B(6, 4)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

56. Точки $A(3, -2)$, $B(1, 4)$, и $M(x, y)$ лежат на одной прямой, причем $2|\mathbf{AM}| = |\mathbf{AB}|$. Найти координаты точки M , если точки M и B лежат по разные стороны от точки A .

57. Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан треугольника ABC : $A(-1, -4)$, $B(5, 0)$, $C(2, 1)$.

Модуль 3

Векторная алгебра

3.1 Скалярное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (3.1)$$

где $\varphi = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Кроме обозначения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ для скалярного произведения используется обозначение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Скалярное произведение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ вектора $\mathbf{a}$ самого на себя записывается как $\mathbf{a}^2$ и называется скалярным квадратом вектора, при этом справедливо равенство $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$, т.к. $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \cos 0 = 1$.

ТЕОРЕМА 12 (Свойства скалярного произведения). Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливы свойства:

- 1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ — коммутативность скалярного произведения;
- 2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ — дистрибутивность скалярного произведения;
- 3) $(\lambda \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ — однородность скалярного произведения;
- 4) $\mathbf{a}^2 \geq 0$, при этом $\mathbf{a}^2 = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

В силу коммутативности скалярного произведения свойства дистрибутивности и однородности выполняются и для второго сомножителя.

Из теоремы 12 выводится важная формула для вычисления скалярного произведения в координатах.

ТЕОРЕМА 13. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, заданных своими координатами в ортонормированном базисе, равно сумме произведений одноименных координат:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3. \quad (3.2)$$

ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

1) Условие ортогональности (перпендикулярности) ненулевых векторов: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ в том и только в том случае, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$; если векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ в том и только в том случае, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

2) Модуль вектора может быть вычислен как $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$. Если вектор $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ задан своими координатами в ортонормированном базисе, то

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (3.3)$$

3) Косинус угла между векторами может быть вычислен по формуле $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$. Если векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (3.4)$$

4) Проекцию вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$, которая равна $|\mathbf{a}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, можно вычислить по формуле $\text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. Если векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то

$$\text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (3.5)$$

5) Работа A силы $\mathbf{F}$ по перемещению материальной точки на вектор $\mathbf{s}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения: $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$.

ПРИМЕР 12. Даны модули векторов $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$ и угол между ними $\angle(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\pi}{3}$. Найти модули векторов $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}$ и угол $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ между ними.

РЕШЕНИЕ. Пользуясь свойствами и определением скалярного произведения, найдем $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot (2\mathbf{p} - \mathbf{q}) = 2\mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{q}^2 =$
 $= 2|\mathbf{p}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - |\mathbf{q}|^2 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - 9 = 2$; $\mathbf{a}^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 =$
 $= |\mathbf{p}|^2 + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{q}|^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 9 = 19$; $\mathbf{b}^2 = (2\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 =$
 $= 4|\mathbf{p}|^2 - 4\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{q}|^2 = 16 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 9 = 13$.

Тогда по формулам (3.3) и (3.4):

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{19}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b}^2} = \sqrt{13},$$

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{2}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{247}},$$

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{2}{\sqrt{247}}. \quad \diamond$$

ПРИМЕР 13. Даны векторы $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Найти $\text{пр}_{(\mathbf{a}-2\mathbf{b})}(\mathbf{3a} + 2\mathbf{b})$.

РЕШЕНИЕ. Найдем координаты векторов $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $\mathbf{3a} + 2\mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k},$$

$$\mathbf{3a} + 2\mathbf{b} = 3(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 11\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

По формулам (3.2) и (3.3) получаем

$$(\mathbf{3a} + 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 11 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 51,$$

$$|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}| = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}.$$

Искомую проекцию находим по формуле (3.5)

$$\text{пр}_{\mathbf{a}-2\mathbf{b}}(\mathbf{3a} + 2\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{3a} + 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})}{|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|} = \frac{51}{\sqrt{41}}. \quad \diamond$$

ПРИМЕР 14. Найти работу равнодействующей двух сил $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{F}_2 = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ по перемещению материальной точки из положения $A(1, 2, -3)$ в положение $B(1, 5, 1)$.

РЕШЕНИЕ. Найдем координаты векторов $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} =$
 $= \{7, 4, 0\}$ и $\mathbf{s} = \mathbf{AB} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \{0, 3, 4\}$. Согласно определению работы, получаем $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 7 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 12$. $\diamond$

3.2 Векторное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Упорядоченная некомпланарная тройка векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ называется правоориентированной (правой), если со стороны третьего вектора поворот от первого вектора ко второму в сторону наименьшего угла виден против часовой стрелки; если же поворот виден по часовой стрелке, то тройка называется левоориентированной (левой) (см. рис. 3.1).

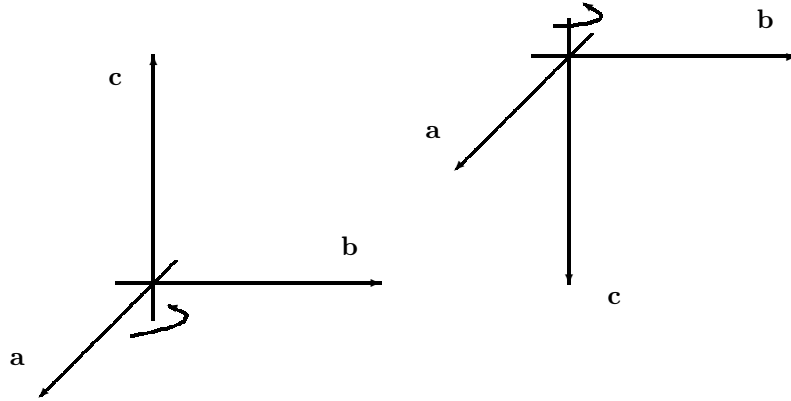


Рис. 3.1: Правая и левая тройки.

Термины «правая» и «левая» произошли от того, что разведенные пальцы правой руки, если первым считать большой палец, вторым — указательный, третьим — средний палец, образуют правоориентированную тройку в смысле определения 37; пальцы левой руки образуют левоориентированную тройку.

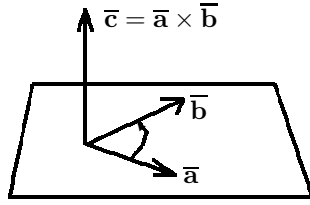
ЗАМЕЧАНИЕ 11. В дальнейшем будем считать, что стандартная ориентация ортонормированного базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ — правая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. Векторным произведением вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называется такой вектор $\mathbf{c}$, что

1) $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны или один из них равен нулевому вектору;

если это не так, то:

- 2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;
 3) $|\mathbf{c}| = S_{\diamond} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — модуль вектора $\mathbf{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
 4) тройка векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — правая.



$$\begin{aligned} \mathbf{c} &\perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b} \\ |\mathbf{c}| &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} &\text{ — правая тройка.} \end{aligned}$$

Обозначения векторного произведения: $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Сделаем несколько пояснений к определению этого сложного понятия: 1) векторное произведение определено только в трехмерном пространстве; 2) смысл первого пункта определения в том, что, если выполнены условия $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то мы не сможем однозначно построить вектор, удовлетворяющий второму пункту. Обоснованием корректности такого определения является третий пункт — параллелограмм в этом случае можно считать вырожденным, а значит, его площадь равна нулю; 3) отметим также особое свойство векторного произведения: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, так как вектор коллинеарен самому себе. Таким образом, векторный квадрат равен нулю!

ТЕОРЕМА 14 (Свойства векторного произведения). Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливы свойства:

- 1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ — антикоммутативность векторного произведения;
- 2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ — дистрибутивность векторного произведения;
- 3) $(\lambda \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ — однородность векторного произведения;

В силу антикоммутативности векторного произведения свойства дистрибутивности и однородности выполняются и для второго сомножителя.

ТЕОРЕМА 15. Если векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то координаты векторного произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

1) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, может быть вычислена по формуле $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. При этом, если векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то их векторное произведение вычисляем по формуле (3.6).

2) Площадь треугольника построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, может быть вычислена по формуле $S = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{2}$.

3) Высота, опущенная на сторону a треугольника или параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, может быть вычислена по формуле $h = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$.

4) В качестве вектора, перпендикулярного плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, может быть взято векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

5) Момент $\mathbf{M}$ силы $\mathbf{F}$ относительно точки A находится как векторное произведение $\mathbf{AB} \times \mathbf{F}$, где B — точка приложения силы $\mathbf{F}$.

ПРИМЕР 15. Даны длины векторов $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ и угол между ними $\varphi = \angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \frac{\pi}{3}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$.

РЕШЕНИЕ. Используя свойства векторного произведения, найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (3\mathbf{m} - \mathbf{n}) \times (\mathbf{m} + 2\mathbf{n}) = \\ &= 3(\mathbf{m} \times \mathbf{m}) + 6(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) - 2(\mathbf{n} \times \mathbf{n}) = \\ &= 7(\mathbf{m} \times \mathbf{n}), \end{aligned}$$

$$\text{откуда } S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |7(\mathbf{m} \times \mathbf{n})| = 7 \cdot |\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}| \cdot \sin \varphi = 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 21.$$

ПРИМЕР 16. Найти площадь треугольника ABC , вершины которого заданы декартовыми координатами $A(1, 2, -1)$, $B(3, 1, 1)$, $C(0, 2, -2)$, а также длину высоты, опущенной из вершины B .

РЕШЕНИЕ. Найдем координаты векторов $\mathbf{AB} = \{2, -1, 2\}$ и $\mathbf{AC} = \{-1, 0, -1\}$. Используя формулу (3.6), вычислим координаты векторного произведения

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 0 \cdot \mathbf{j} - \mathbf{k} = \{1, 0, -1\}.$$

Найдем длины векторов $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ и $|\mathbf{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. И окончательно:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ высота } h_b = \frac{|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|}{|\mathbf{AC}|} = 1. \quad \diamond$$

ПРИМЕР 17. Найти координаты вектора, перпендикулярного плоскости ABC , где $A(-1, 2, -3)$, $B(3, -1, 4)$, $C(2, 3, -1)$.

РЕШЕНИЕ. Векторы $\mathbf{AB} = \{4, -3, 7\}$ и $\mathbf{AC} = \{3, 1, 2\}$ лежат в плоскости ABC . Их векторное произведение

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -13\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 13\mathbf{k} = \{-13, 13, 13\}$$

перпендикулярно каждому из векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$, а значит, и всей плоскости ABC . Заметим, что любой вектор $\mathbf{m} = \lambda \mathbf{n}$ ($\lambda \neq 0$), коллинеарный найденному, также является решением нашей задачи. Например, $\mathbf{m} = \{1, -1, -1\}$. $\diamond$

ПРИМЕР 18. Найти абсолютную величину и направляющие косинусы момента силы $\mathbf{F} = \{1, 2, 1\}$, приложенной в точке $B(2, 0, -1)$, относительно точки $A(1, 1, 0)$.

РЕШЕНИЕ. Момент силы $\mathbf{F}$ равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \{1, -2, 3\}.$$

Тогда модуль момента равен $|\mathbf{M}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, а направляющие косинусы совпадают с координатами его орта $\mathbf{M}^0 =$

$$\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\}. \quad \diamond$$

3.3 Смешанное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39. Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется число, которое обозначается через $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ или $\mathbf{abc}$, и равно скалярному произведению векторного произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и вектора $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (3.7)$$

ТЕОРЕМА 16 (Геометрический смысл смешанного произведения). Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = V_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}}$. При этом $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} > 0$, в том и только в том случае, если тройка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ правая; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} < 0$, в том и только в том случае, если тройка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ левая; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, в том и только в том случае, если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны.

ТЕОРЕМА 17 (Свойства смешанного произведения). Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ и для любого числа λ справедливы свойства:

- 1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — при циклической перестановке векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ их смешанное произведение не меняется;
- 2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{b})$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a})$ — знак смешанного произведения меняется на противоположный при перестановке двух любых векторов;
- 3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$ — дистрибутивность смешанного произведения;
- 4) $(\lambda \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ — однородность смешанного произведения;

В силу неизменности смешанного произведения при циклической перестановке векторов, свойства дистрибутивности и однородности выполнены для любого сомножителя.

ТЕОРЕМА 18. Если векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, то смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

ПРИЛОЖЕНИЯ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

1) Если векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то система векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ линейно зависима в том и только в том случае, если

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, может быть найден по формуле $V_{\text{пар}} = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$; соответственно, объем призмы — $V_{\text{пр}} = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|}{2}$, объем тетраэдра — $V_{\text{тетр}} = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|}{6}$.

3) Высота, опущенная на плоскость векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в параллелепипеде, призме или тетраэдре, построенных на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, может быть найден по формуле $H = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$.

4) Если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} > 0$, то упорядоченная тройка векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ правоориентирована; если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} < 0$, — левоориентирована.

ПРИМЕР 19. Заданы векторы $\mathbf{a} = \{1, 1, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -1, -1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, -1\}$. 1) Проверить, что система $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ образуют базис; 2) разложить вектор $\mathbf{d} = \{4, 0, 2\}$ по этому базису.

РЕШЕНИЕ. 1) Покажем, что система $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ образует базис. Для этого вычислим смешанное произведение

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

следовательно тройка векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ некомпланарна, а значит, может служить базисом пространства V^3 .

2) Разложить вектор $\mathbf{d}$ по базису $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — значит, найти коэффициенты x, y, z в разложении $\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$, которое можно записать в матричной форме как

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как линейные операции над векторами выполняются по координатам, а векторы равны в том и только в том случае, если равны их

соответствующие координаты, это векторное равенство можно расписать в координатной форме в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x - y + z = 0, \\ x - y - z = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 3$, $y = 2$, $z = -1$. Следовательно, разложение вектора $\mathbf{d}$ по базису $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ имеет вид: $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

ПРИМЕР 20. Для заданных векторов $\mathbf{a} = \{1, -1, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -4, -1\}$, $\mathbf{c} = \{1, -1, 2\}$ 1) выяснить, будут ли эти векторы компланарны; 2) в случае, если векторы некомпланарны, определить ориентацию тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$; 3) найти объем параллелепипеда, построенного на этих векторах; 4) найти высоту параллелепипеда, опущенную на грань векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

РЕШЕНИЕ. Найдем смешанное произведение заданных векторов

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

- 1) Так как $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq 0$, то векторы некомпланарны.
- 2) Так как $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -3 < 0$, то тройка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — левая.
- 3) Объем параллелепипеда равен $V = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = 3$. $\diamond$
- 4) Найдем векторное произведение

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = \{5, 2, -3\}.$$

Так как $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$, высота $H = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{38}}$.

ПРИМЕР 21. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.

РЕШЕНИЕ. Объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}V$, где V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AD}$. Найдем координаты этих векторов $\mathbf{AB} = \{3, 6, 3\}$, $\mathbf{AC} = \{1, 3, -2\}$, $\mathbf{AD} = \{2, 2, 2\}$. Их смешанное произведение

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} \cdot \mathbf{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18,$$

поэтому объем параллелепипеда $V = |\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} \cdot \mathbf{AD}| = 18$, объем тетраэдра: $V_{ABCD} = \frac{V}{6} = \frac{18}{6} = 3$. $\diamond$

3.4 Задачи и упражнения

58. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$. Вычислить: 1) $\mathbf{a}^2$; 2) $\mathbf{b}^2$; 3) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; 4) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$; 5) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$; 6) $|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2$; 7) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$.

59. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\mathbf{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$; даны также $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$, $|\mathbf{c}| = 8$. Вычислить: 1) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + 3\mathbf{c})$; 2) $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2$; 3) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c})^2$.

60. Найти работу, которую совершает сила $\mathbf{F} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}$ по перемещению материальной точки на вектор $\mathbf{s} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, если $|\mathbf{p}| = 3$, $|\mathbf{q}| = \sqrt{2}$, $\varphi = \angle(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\pi}{4}$.

61. Даны $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

62. Даны три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, удовлетворяющие условию $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$, вычислить $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

63. Найти угол, образованный единичными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, если известно, что векторы $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$ взаимно перпендикулярны.

64. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, если $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы и $\varphi = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 60^\circ$.

65. Даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, причем $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Найти $\text{pr}_{(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

66. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

67. Векторы $\mathbf{a} = \{4, -2, -4\}$, $\mathbf{b} = \{6, -3, 2\}$ заданы декартовыми координатами. Вычислить: 1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; 2) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$; 3) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$; 4) $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}|$; 5) $\text{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$; 6) $\text{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$; 7) направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}$; 8) $\text{pr}_{(\mathbf{a}-2\mathbf{b})}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; 9) $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

68. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами: $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$.

69. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$, $D(4, 7, -2)$ — квадрат.

70. Даны три силы $\mathbf{F}_1 = \{3, -4, 2\}$, $\mathbf{F}_2 = \{2, 3, -5\}$, $\mathbf{F}_3 = \{-3, -2, 4\}$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $M_1(5, 3, -7)$ в точку $M_2(4, -1, -4)$.

71. Найти проекцию вектора $\mathbf{s} = \{\sqrt{2}, -3, -5\}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox , Oz углы $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, а с осью Oy — острый угол β .

72. Даны две точки $M(-5, 7, -6)$ и $N(7, -9, 9)$. Вычислить проекцию вектора $\mathbf{a} = \{1, -3, 1\}$ на ось вектора $\mathbf{MN}$.

73. При каком значении параметра α векторы $\mathbf{a} = \{3, 4, 0\}$, $\mathbf{b} = \{-8, 3\alpha, 0\}$ и $\mathbf{c} = \{0, 0, \alpha\}$ образуют ортогональный базис?

74. Вычислить всевозможные векторные произведения векторов декартова базиса: $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$.

75. Упростить выражения: 1) $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, 2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$, 3) $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 4) $2\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + 3\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 4\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$.

76. Дано $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\varphi = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Вычислить: 1) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$; 2) $|(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})|$; 3) $|(a + 3b) \times (3a - b)|$.

77. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого являются векторы $2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы, образующие угол 45° .

78. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{6}$.

79. Заданы векторы $\mathbf{a} = \{3, -1, 2\}$, $\mathbf{b} = \{1, 2, -1\}$ своими декартовыми координатами. Найти координаты следующих векторов: 1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; 2) $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$; 3) $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

80. Найти вектор $\mathbf{c}$, дополняющий ортогональные векторы $\mathbf{a} = \{1, 0, 0\}$ и $\mathbf{b} = \{0, 1, 1\}$ до ортогонального базиса.

81. Вычислить площадь треугольника ABC с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(4, 3, 2)$ и найти длину высоты AD .

82. Даны точки $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$ — вершины треугольника. Найти длину высоты, опущенной из вершины B .

83. Даны три силы $\mathbf{F}_1 = \{2, -1, -3\}$, $\mathbf{F}_2 = \{3, 2, -1\}$, $\mathbf{F}_3 = \{-4, 1, 3\}$, приложенные к точке $A(-1, 4, 2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(2, 3, -1)$.

84. Сила $\mathbf{F} = \{3, 2, -4\}$ приложена к точке $A(2, -1, 1)$. Определить момент этой силы относительно начала координат.

85. Вектор $\mathbf{c}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{a} = \{4, -2, -3\}$ и $\mathbf{b} = \{0, 1, 3\}$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\mathbf{c}| = 26$, найти его координаты.

86. Определить ориентацию тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, если: 1) $\mathbf{a} = \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j}$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j}$; 3) $\mathbf{a} = \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}$, $\mathbf{c} = \mathbf{k}$; 4) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{k}$; 5) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j}$; 6) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{k}$.

87. Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют правую тройку и взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 3$, вычислить $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

88. Заданы векторы $\mathbf{a} = \{1, -1, 3\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{3, -2, 5\}$. Вычислить смешанное произведение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ и определить ориентацию троек: 1) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$; 2) $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$; 3) $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\}$.

89. Установить, образуют ли векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ базис в множестве всех векторов, если: 1) $\mathbf{a} = \{2, 3, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -1, 3\}$, $\mathbf{c} = \{1, 9, -11\}$; 2) $\mathbf{a} = \{3, -2, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, 1, 2\}$, $\mathbf{c} = \{3, -1, -2\}$.

90. Определить, лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости.

1) $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$;

2) $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$.

91. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\mathbf{OA} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{OB} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{OC} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

92. Даны точки $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$ — вершины тетраэдра. Найти длину высоты, опущенной из вершины D .

93. Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некопланарны. Найти значения параметра μ , при которых векторы $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ некопланарны.

94. Найти значения параметра α , при которых объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = \{1, 2, 0\}$, $\mathbf{b} = \{\alpha, -2, 0\}$, $\mathbf{c} = \{1, \alpha, 1\}$, равен 2.

Модуль 4

Прямые и плоскости

В элементарной геометрии прямые и плоскости — понятия неопределяемые. В аналитической геометрии для вывода их уравнений приходится выделять какие-то определяющие свойства, т.е. давать определения прямой и плоскости, опираясь на которые, можно вывести уравнения прямых и плоскостей в декартовой системе координат.

4.1 Прямая

Параметрическое уравнение прямой

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40. *Прямой с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ называется множество точек M таких, что векторы $\mathbf{M_0M}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны.*

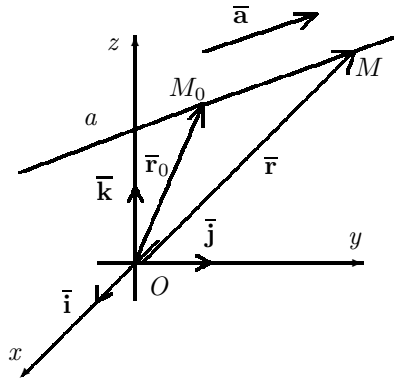
Коллинеарность векторов $\mathbf{M_0M}$ и $\mathbf{a}$ равносильна векторному равенству $\mathbf{M_0M} = t \cdot \mathbf{a}$, где t — произвольное вещественное число, так называемый параметр. Если ввести обозначения $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ — радиус-вектор точки M , $\mathbf{r_0} = \mathbf{OM_0}$ — радиус-вектор начальной точки M_0 , то $\mathbf{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0}$. Таким образом, $\mathbf{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0} = t \cdot \mathbf{a}$, и отсюда получаем параметрическое уравнение прямой в векторной форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t \cdot \mathbf{a}. \quad (4.1)$$

Уравнением (4.1) прямая задается в пространстве любой размерности n . Рассмотрим случай плоскости ($n = 2$). Через (x_0, y_0) обозначим

заданные координаты начальной точки M_0 ; $\mathbf{a} = \{l, m\}$ — заданные координаты направляющего вектора; $M(x, y)$ — координаты текущей точки прямой; тогда $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\}$, и уравнение (4.1) можно переписать как параметрическое уравнение прямой a на плоскости в координатной форме:

$$a: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \quad (4.2)$$



Аналогично в пространстве — если (x_0, y_0, z_0) — заданные координаты начальной точки M_0 ; $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$ — заданные координаты направляющего вектора; $M(x, y, z)$ — координаты текущей точки прямой, то $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ и уравнение (4.1) можно переписать как параметрическое уравнение прямой a в пространстве в координатной форме:

$$a: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (4.3)$$

Заметим, что уравнения (4.2) и (4.3) фактически являются системами уравнений, но носят название уравнений (в единственном числе), поскольку во-первых, являются уравнениями единого геометрического объекта — «прямая», во-вторых, являются координатной записью одного векторного уравнения (4.1).

При решении задач важно помнить геометрический смысл коэффициентов параметрического уравнения прямой: в уравнениях (4.2) и (4.3) параметры x_0, y_0, z_0 — координаты начальной точки; l, m, n — координаты направляющего вектора прямой.

Смысл параметрических уравнений заключается в том, что, задавая произвольные значения параметру t , мы по формулам (4.2) и (4.3) можем вычислить координаты всех точек M прямой.

Физический смысл уравнений (4.2) и (4.3) заключается в том, что они задают уравнение траектории движения материальной точки с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{a}$, параметр t в этом случае обозначает время, точка M_0 — местоположение материальной точки в начальный момент $t = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Можно доказать, что уравнение вида (4.1) будет задавать ту же самую прямую, если в качестве начальной точки взять какую-либо другую точку M_1 этой же прямой, а в качестве направляющего вектора — любой вектор $\mathbf{b}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$, т.е. одна и та же прямая может иметь бесконечно много различных параметрических уравнений.

ПРИМЕР 22. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, -2)$ и $B(3, 1)$.

РЕШЕНИЕ. Возьмем в качестве начальной точки точку A , а в качестве направляющего вектора $\mathbf{AB} = \{2, 3\}$. Тогда параметрическое уравнение прямой AB , в соответствии с формулой (4.2), запишется в виде AB :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t. \end{cases} \quad \diamond$$

ПРИМЕР 23. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, -2, 4)$ и $B(3, 1, 2)$.

РЕШЕНИЕ. Возьмем в качестве начальной точки точку A , а в качестве направляющего вектора $\mathbf{AB} = \{2, 3, -2\}$. Тогда параметрическое уравнение прямой AB , в соответствии с формулой (4.3), запишется в виде AB :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 4 - 2t. \end{cases} \quad \diamond$$

Общее уравнение прямой на плоскости

Рассмотрим параметрическое уравнение прямой a на плоскости в координатной форме a :
$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \quad \text{Исключив параметр } t \text{ из}$$
 каждого уравнения системы, получим $t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$. Из последних двух равенств имеем $m(x - x_0) = l(y - y_0)$, и после очевидных преобразований получаем уравнение a : $mx - ly + ly_0 - mx_0 = 0$.

Введем обозначения $A = m$, $B = -l$, $C = ly_0 - mx_0$. Перепишав полученное уравнение в новых обозначениях, получаем общее уравнение

прямой на плоскости

$$Ax + By + C = 0. \quad (4.4)$$

Отметим одну замечательную особенность: так как $A = m$, $B = -l$, то векторы $\mathbf{a} = \{l, m\}$ и $\mathbf{n} = \{m, -l\} = \{A, B\}$ взаимно перпендикулярны, так как $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = l \cdot m + m \cdot (-l) = 0$. Отсюда следует весьма полезное при решении задач правило: чтобы вектор плоскости повернуть на 90° , надо поменять местами его координаты и при одной из них изменить знак.

Более важным следствием этого факта является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 19 (Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения прямой). Если A и B — коэффициенты общего уравнения прямой $l: Ax + By + C = 0$ на плоскости, то вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ перпендикулярен прямой l . Он носит название вектор нормали, нормальный вектор или просто нормаль прямой l .

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Заметим, что если $Ax + By + C = 0$ — общее уравнение прямой a , то уравнение $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$, где $\lambda \neq 0$ — произвольное вещественное число, задает ту же прямую a .

К выводу общего уравнения можно подойти иначе. Пусть задан вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$, перпендикулярный прямой l , и точка $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащая этой прямой. Если $M(x, y)$ — произвольная точка прямой, то вектор $\mathbf{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ коллинеарен прямой l и, значит, перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$. Введем обозначения $\mathbf{r_0} = \mathbf{OM_0}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$, тогда $\mathbf{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0}$, и мы, используя условие перпендикулярности, получим векторное уравнение прямой l :

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) = 0. \quad (4.5)$$

Вычислив скалярное произведение, запишем уравнение (4.5) в виде $l: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Обозначим $C = -Ax_0 - By_0$. Тогда, раскрыв скобки, получим общее уравнение прямой l на плоскости

$$l: Ax + By + C = 0.$$

ПРИМЕР 24. Составить общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, -2)$ и $B(3, 1)$.

РЕШЕНИЕ. Первый способ. Составим, как в примере 22, параметрическое уравнение прямой AB : $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t. \end{cases}$ Исключив параметр t , получим $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$, откуда $AB: 3x - 2y - 7 = 0$ — общее уравнение прямой AB .

Второй способ. Если вектор $\mathbf{AB} = \{2, 3\}$ повернем на 90° , получим вектор $\mathbf{n} = \{3, -2\}$ — нормаль к прямой AB , поэтому искомое уравнение имеет вид $AB: 3x - 2y + C = 0$. Для нахождения параметра C подставим в полученное уравнение координаты точки A : $3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + C = 0$, откуда получаем $C = -7$ и, окончательно, $AB: 3x - 2y - 7 = 0$ — общее уравнение прямой AB .

Третий способ. Если вектор $\mathbf{AB} = \{2, 3\}$ повернем на 90° , получим вектор $\mathbf{n} = \{3, -2\}$ — нормаль к прямой AB . Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомой прямой, тогда $\mathbf{AM} = \{x-1, y+2\}$, и мы можем записать уравнение прямой в векторной форме $\mathbf{n} \cdot \mathbf{AM} = 0$, что в координатах дает уравнение $3(x-1) - 2(y+2) = 0$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получаем окончательный результат $AB: 3x - 2y - 7 = 0$ — общее уравнение прямой AB . $\diamond$

ПРИМЕР 25. Составить параметрическое уравнение прямой $a: 2x - 3y + 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Первый способ. Для составления параметрического уравнения надо задать начальную точку и направляющий вектор. Повернем на 90° вектор $\mathbf{n} = \{2, -3\}$, получим вектор $\mathbf{n}_\perp = \{3, 2\}$ — направляющий вектор прямой a . Для нахождения начальной точки возьмем любое подходящее значение y_0 , подставим в уравнение прямой и найдем x_0 . Скажем, при $y_0 = 1$ получим $x_0 = 1$. Таким образом, параметрическое уравнение прямой

$$a: \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 1 + 2t. \end{cases}$$

Второй способ. Выразим y из уравнения прямой: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Если принять x за параметр, то получим параметрическое уравнение прямой

$$a: \begin{cases} x = t, \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t. \end{cases}$$

Можно показать, полученные в первом и во втором способе параметрические уравнения задают одну и ту же прямую.

ПРИМЕР 26. Составить уравнение биссектрисы угла BAC треугольника с вершинами в точках $A(1, 1)$, $B(-4, 13)$, $C(5, -2)$.

РЕШЕНИЕ. Начальной точкой искомой биссектрисы будем считать точку $A(1, 1)$, в качестве направляющего вектора можно взять вектор $|\mathbf{AC}| \cdot \mathbf{AB} + |\mathbf{AB}| \cdot \mathbf{AC}$. В самом деле, модули векторов $|\mathbf{AC}| \cdot \mathbf{AB}$ и $|\mathbf{AB}| \cdot \mathbf{AC}$ равны между собой, а, значит, параллелограмм, на них построенный, является ромбом. Диагональ же ромба является его биссектрисой.

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \{-5, 12\}, \quad |\mathbf{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13; \\ \mathbf{AC} &= \{4, -3\}, \quad |\mathbf{AC}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5; \\ 5\mathbf{AB} + 13\mathbf{AC} &= \{27, 21\} \parallel \mathbf{a} = \{9, 7\}.\end{aligned}$$

В качестве нормального возьмем вектор $\mathbf{n} = \{7, -9\}$, тогда уравнение биссектрисы ищем в виде $l: 7x - 9y + C = 0$. Подставив координаты точки $A(1, 1)$ в это уравнение, получаем $C = 2$ и окончательный результат $l: 7x - 9y + 2 = 0$ — уравнение искомой биссектрисы. $\diamond$

Специальные виды уравнения прямой на плоскости

УРАВНЕНИЕ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. Если в общем уравнении (4.4) прямой на плоскости коэффициент $B \neq 0$, то уравнение можно переписать в виде $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Введя обозначения $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$l: y = kx + b. \quad (4.6)$$

Геометрический смысл углового коэффициента k заключается в том, что он равен тангенсу угла наклона l прямой l к оси Ox ; геометрический смысл b — величина отрезка, отсекаемого прямой l от оси Oy с учетом знака.

ПРИМЕР 27. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через точки $A(1, -2)$ и $B(3, 1)$.

РЕШЕНИЕ. Первый способ. Составим, как в примере 24, общее уравнение прямой $AB: 3x - 2y - 7 = 0$. Выразив y через x , получим $AB: y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ — уравнение прямой AB с угловым коэффициентом.

Второй способ. Ищем уравнение прямой AB в виде $AB: y = kx + b$. Поскольку точки A и B удовлетворяют искомому уравнению, можно подставить их координаты в уравнение $y = kx + b$, и получить систему уравнений для нахождения k и b :
$$\begin{cases} -2 = k + b, \\ 1 = 3k + b. \end{cases}$$
 Решив эту систему, получим $k = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, откуда $AB: y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ — уравнение прямой AB с угловым коэффициентом. $\diamond$

НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ. В общем уравнении (4.4) неявно предполагается, что коэффициенты не равны нулю. Рассмотрим различные случаи равенства нулю части коэффициентов.

1) Пусть $C = 0$. Тогда прямая $l: Ax + By = 0$ проходит через начало координат — точку $O(0, 0)$. В частности, уравнение с угловым коэффициентом в этом случае выглядит как $l: y = kx$.

2) Пусть $B = 0$. Тогда уравнение имеет вид $l: Ax + C = 0$. Так как при этом $A \neq 0$, перепишем уравнение прямой в виде $l: x = -\frac{C}{A}$. Если ввести обозначение $x_0 = -\frac{C}{A} = \text{const}$, то уравнение перепишется как $x = x_0$ — прямая, параллельная оси Oy , проходящая через точку с координатами $(x_0, 0)$.

3) Случай $A = 0$ аналогичен предыдущему. Имеем уравнение вида $y = y_0$ — прямая, параллельная оси Ox , проходящая через точку с координатами $(0, y_0)$.

УРАВНЕНИЕ В ОТРЕЗКАХ. Пусть в общем уравнении (4.4) коэффициенты A, B, C не равны нулю. Тогда уравнение прямой можно переписать в виде $\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$, и после введения обозначений $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ получим уравнение прямой в отрезках

$$l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (4.7)$$

Геометрический смысл параметров уравнения (4.7) заключается в том, что a и b — длины отрезков, отсекаемых прямой l на оси Ox и Oy соответственно, с учетом знака.

ПРИМЕР 28. Составить уравнение в отрезках для прямой, проходящей через точки $A(1, -2)$ и $B(3, 1)$.

РЕШЕНИЕ. В примере 24 было получено общее уравнение прямой $AB: 3x - 2y - 7 = 0$. Подвергнем его следующим алгебраическим пре-

образованиям: $3x - 2y = 7$, откуда получим $AB: \frac{x}{7/3} + \frac{y}{-7/2} = 1$ — искоемое уравнение прямой AB в отрезках. Видим, что $a = \frac{7}{3}$ — отрезок, отсекаемый прямой AB на оси Ox , $b = -\frac{7}{2}$ — отрезок, отсекаемый на оси Oy . $\diamond$

НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ. Если уравнению прямой (4.4) умножить на произвольное число $\lambda \neq 0$, то уравнение $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ задает ту же прямую, что и уравнение (4.4). Выберем в качестве λ такое число, что $|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\lambda \cdot C < 0$ при $C \neq 0$ и назовем его нормирующим множителем. Тогда легко заметить, что $\lambda A = \cos \alpha$, $\lambda B = \cos \beta$ — направляющие косинусы вектора нормали, $p = -\lambda C > 0$, и уравнение

$$l: x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0 \quad (4.8)$$

называется нормальным уравнением прямой. Геометрический смысл параметра p заключается в том, что он равен расстоянию от начала координат $O(0, 0)$ до прямой l .

ПРИМЕР 29. Составить нормальное уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, -2)$ и $B(3, 1)$.

РЕШЕНИЕ. В примере 24 было получено общее уравнение прямой $AB: 3x - 2y - 7 = 0$. Найдем нормирующий множитель: $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{13}$ и, поскольку $C = -7 < 0$ берем $\lambda = \frac{1}{\sqrt{13}}$. Таким образом, $AB: \frac{3}{\sqrt{13}}x - \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{7}{\sqrt{13}} = 0$ — нормальное уравнение прямой AB .

Основные задачи аналитической геометрии прямой на плоскости

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Поскольку направляющие или нормальные векторы прямых будут коллинеарны или ортогональны, как только прямые будут параллельны или перпендикулярны, то условия параллельности и перпендикулярности прямых сводятся к условиям коллинеарности или ортогональности направляющих (нормальных) векторов.

Пусть прямые заданы общими уравнениями:

$$a_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad a_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Так как $a_1 \parallel a_2$ в том и только в том случае, если $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$, условием параллельности прямых будет

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (4.9)$$

Поскольку $l_1 \perp l_2$ в том и только в том случае, если $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$, что эквивалентно равенству $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, условием перпендикулярности прямых будет

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \quad (4.10)$$

Аналогично, если прямые заданы параметрическими уравнениями

$$a_1: \begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = y_1 + m_1 t, \end{cases} \quad a_2: \begin{cases} x = x_2 + l_2 t, \\ y = y_2 + m_2 t, \end{cases}$$

то условием параллельности прямых будет

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (4.11)$$

и условием перпендикулярности —

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0. \quad (4.12)$$

Наконец, если одна из прямых задана параметрическим, а другая — общим уравнением

$$a_1: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad a_2: Ax + By + C = 0,$$

то $\mathbf{a} = \{l, m\}$ — направляющий вектор прямой a_1 , $\mathbf{a}_\perp = \{m, -l\}$ — вектор нормали к прямой a_1 ; аналогично, $\mathbf{n} = \{A, B\}$ — вектор нормали к прямой a_2 , $\mathbf{n}_\perp = \{B, -A\}$ — направляющий вектор прямой a_2 , поэтому условия параллельности и перпендикулярности выводятся в этом случае, как и в предыдущих.

ПРИМЕР 30. Даны точка $A(-1, 3)$ и прямая $l: 2x - 3y + 5 = 0$. 1) Составить уравнение прямой, параллельной прямой l и проходящей через точку A . 2) Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой l и проходящей через точку A .

РЕШЕНИЕ. 1) Для искомой параллельной прямой в качестве вектора нормали можно взять нормаль к данной прямой $\mathbf{n} = \{2, -3\}$. Тогда уравнение параллельной прямой можно записать в виде (4.5), что в нашем случае дает $2(x + 1) - 3(y - 3) = 0$, откуда получаем $l_{\parallel}: 2x - 3y + 11 = 0$ — уравнение прямой, параллельной заданной прямой и проходящей через точку A .

2) Уравнение перпендикуляра будем искать в параметрическом виде. В качестве начальной точки возьмем $A(-1, 3)$, в качестве направляющего вектора — вектор нормали $\mathbf{n} = \{2, -3\}$ к заданной прямой. Тогда $l_{\perp}: \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3 + 3t \end{cases}$ — параметрическое уравнение искомого перпендикуляра. $\diamond$

Углы между прямыми на плоскости

Так как угол между прямыми равен углу между их направляющими или нормальными векторами, то косинус угла между прямыми равен

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (4.13)$$

для случая задания прямых общими уравнениями, и

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \quad (4.14)$$

для случая параметрических уравнений.

ПРИМЕР 31. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -1)$ под углом 45° к заданной прямой $l: 2x + 3y - 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ.

ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Уравнение прямой будем искать в виде $Ax + By + C = 0$. Первым уравнением для нахождения A , B , и C будет $A - B + C = 0$, полученное подстановкой координат точки A в искомое уравнение. Второе уравнение — $\frac{2A + 3B}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

полученное применением формулы (4.13) к данной и искомой прямой. Третьим уравнением будет условие нормировки: $A^2 + B^2 = 26$. Обоснованием этого является тот факт, что коэффициенты общего уравнения

находятся с точностью до ненулевого постоянного множителя, а именно при таком условии нормировки второе уравнение приобретает простой вид $2A + 3B = 13$. Выражая из этого уравнения A через B и подставляя это выражение в условие нормировки, получаем квадратное уравнение на параметр B : $\frac{13^2 - 78B + 9B^2}{4} + B^2 = 26$. Его корни $B_1 = 1$, $B_2 = 5$. После этого находим $A_1 = 5$, $A_2 = -1$ и после нахождения C из первого уравнения получаем окончательный результат $l_1: 5x + y - 4 = 0$ и $l_2: -x + 5y + 6 = 0$. Заметим, что получили два взаимно перпендикулярных решения, что вполне объяснимо из элементарно-геометрических соображений.

ВТОРОЙ СПОСОБ. Уравнение прямой будем искать в виде $y = kx + b$. Так как угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона, то $k = \operatorname{tg}(\alpha \pm 45^\circ)$, где α — угол наклона данной прямой $\left(\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}\right)$. Значит, $k = \operatorname{tg}(\alpha \pm 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} 45^\circ}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{-\frac{2}{3} \pm 1}{1 \pm \frac{2}{3}}$. Отсюда, $k_1 = \frac{1}{5}$, $k_2 = -5$. Параметр b находим из условия, что искомая прямая проходит через точку $A(1, -1)$. Окончательный результат: $l_1: y = \frac{x}{5} - \frac{6}{5}$ и $l_2: y = -5x + 4$, что соответствует уравнениям $l_1: -x + 5y + 6 = 0$ и $l_2: 5x + y - 4 = 0$. $\diamond$

Расстояние от точки до прямой на плоскости

Если задано нормальное уравнение прямой $l: x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$, то $\rho(A, l) = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta - p|$ — расстояние от точки A с координатами (x_0, y_0) до прямой l .

То же самое расстояние от точки $A(x_0, y_0)$ до прямой l можно получить по формуле $\rho(A, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где $l: Ax + By + C = 0$ — общее уравнение прямой l .

В частности, отсюда следует геометрический смысл параметра p нормального уравнения прямой — это расстояние от начала координат до прямой.

ПРИМЕР 32. Заданы координаты вершин треугольника $A(1, -1)$, $B(2, 3)$, $C(-2, 3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины B .

РЕШЕНИЕ. Искомая длина высота равна расстоянию от точки B

до прямой AC . Составим общее уравнение прямой AC . Направляющий вектор $\mathbf{AC} = \{-3, 4\}$, вектор нормали $\mathbf{n} = \{4, 3\}$, поэтому ищем уравнение прямой в виде $AC: \mathbf{n} \cdot \mathbf{AM} = 0$, где M — произвольная точка прямой. Расписав последнее равенство в координатах, получим $AC: 4(x - 1) + 3(y + 1) = 0$, откуда, $AC: 4x + 3y - 1 = 0$. Теперь находим длину высоты, опущенной из вершины B : $h_b = \rho(B, AC) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{16}{5}$. $\diamond$

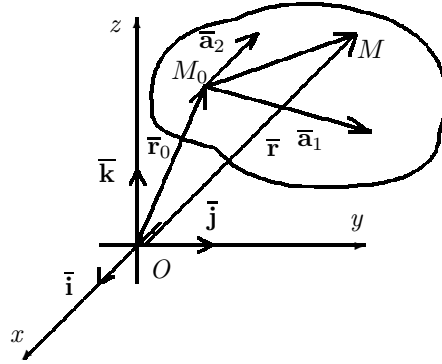
4.2 Плоскость

Параметрическое уравнение плоскости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41. *Плоскостью с начальной точкой M_0 и направляющими векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ ($\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$) называется множество точек M таких, что векторы $\mathbf{M}_0M$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ компланарны.*

Отсюда можно вывести параметрическое уравнение плоскости в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1 \cdot \mathbf{a}_1 + t_2 \cdot \mathbf{a}_2, \quad (4.15)$$



где $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ — радиус-вектор произвольной точки M плоскости; $\mathbf{r}_0 = \mathbf{OM}_0$ — радиус-вектор начальной точки M_0 плоскости; $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные вещественные числа (параметры). Пусть (x_0, y_0, z_0) — заданные координаты начальной точки M_0 ; $\mathbf{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ — заданные координаты направляющих векторов; $M(x, y, z)$ — координаты текущей точки плоскости.

Тогда $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ и уравнение (4.15) можно переписать как параметрическое уравнение плоскости в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t_1 + l_2 t_2, \\ y = y_0 + m_1 t_1 + m_2 t_2, \\ z = z_0 + n_1 t_1 + n_2 t_2. \end{cases} \quad (4.16)$$

Аналогично параметрическому уравнению (4.2) прямой на плоскости и уравнению (4.3) прямой в пространстве, параметрическое уравнение (4.16) плоскости следует понимать как формулы, по которым можно вычислить координаты произвольной точки на плоскости, задав соответствующие значения параметрам t_1 и t_2 .

Точно так же, как и для прямой, формулы (4.16) фактически являются системой уравнений, но носят название «уравнение» (в единственном числе), поскольку: во-первых, являются уравнением единого геометрического объекта — «плоскость»; во-вторых, являются координатной записью одного уравнения (4.15).

Общее уравнение плоскости

К выводу общего уравнения плоскости могут быть по крайней мере два подхода.

ПЕРВЫЙ ПОДХОД. Поскольку векторы $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ компланарны, мы можем записать условие компланарности в виде равенства нулю смешанного произведения $\mathbf{M}_0\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$, что в координатной форме дает уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.17)$$

Раскроем полученный определитель по первой строке. Получим уравнение $(x - x_0) \cdot \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} - (y - y_0) \cdot \begin{vmatrix} l_1 & n_2 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} + (z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} l_1 & m_2 \\ l_1 & m_2 \end{vmatrix} = 0$. Если ввести обозначения $A = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} l_1 & n_2 \\ l_1 & n_2 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} l_1 & m_2 \\ l_1 & m_2 \end{vmatrix}$, $D = -x_0A - y_0B - z_0C$, то последнее уравнение можно переписать в виде общего уравнения плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4.18)$$

ВТОРОЙ ПОДХОД. Рассмотрим вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$. По определению векторного произведения $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}_2$ и, значит, полученный вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен плоскости с направляющими векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Тогда уравнение плоскости, пользуясь условием перпендикулярности, можно записать в виде $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_0\mathbf{M} = 0$, или, введя обозначения: $\mathbf{r}_0 = \mathbf{OM}_0$, $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$, в виде

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (4.19)$$

Осталось вычислить координаты вектора $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_1 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \right\} = \{A, B, C\},\end{aligned}$$

где коэффициенты A, B, C совпадают с введенными в первом подходе. Запишем

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $D = -x_0A - y_0B - z_0C$ то же самое, что и в первом подходе. Таким образом, мы получили уравнение (4.18) — общее уравнение плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Уравнение (4.17) чаще всего используется при составлении уравнений плоскости. Геометрический смысл его параметров заключается в том, что (x_0, y_0, z_0) — координаты начальной точки плоскости; $\{l_1, m_1, n_1\}$, $\{l_2, m_2, n_2\}$ — координаты направляющих векторов плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Отметим, что коэффициенты A, B, C общего уравнения плоскости не равны нулю одновременно. Это следует из того, что $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, следовательно $\mathbf{n} = \{A, B, C\} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$.

ТЕОРЕМА 20 (Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения плоскости). Если A, B и C — коэффициенты общего уравнения плоскости α : $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, перпендикулярен плоскости l . Он носит название вектор нормали, нормальный вектор или просто нормаль плоскости α .

Примеры составления уравнений плоскости

ПРИМЕР 33. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, -3)$, $B(3, -1, 4)$, $C(-1, 1, 1)$.

РЕШЕНИЕ. Проверим, прежде всего, корректность задания — точки A, B и C не должны лежать на одной прямой. Для этого вычислим координаты векторов $\mathbf{AB} = \{2, -3, 7\}$, $\mathbf{AC} = \{-2, -1, 4\}$ и проверим, не являются ли они коллинеарными. Вычислив отношения соответствующих координат, видим, что $\frac{2}{-2} \neq \frac{-3}{-1} \neq \frac{7}{4}$, следовательно,

$\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$, и эти векторы являются направляющими векторами плоскости. В качестве начальной точки можно взять точку $A(1, 2, -3)$.

1. Параметрическое уравнение плоскости получим, подставив в уравнение (4.16) координаты наших направляющих векторов и начальной точки

$$ABC: \begin{cases} x = 1 + 2t - 2s, \\ y = 2 - 3t - s, \\ z = -3 + 7t + 4s. \end{cases}$$

2. Общее уравнение плоскости получим, подставив в уравнение (4.17) координаты начальной точки и направляющих векторов. В результате будем иметь

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2 & -3 & 7 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, раскрыв определитель, после упрощений получим общее уравнение плоскости $ABC: 5x + 22y + 8z - 25 = 0$. $\diamond$

ПРИМЕР 34. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, -2, 0)$ перпендикулярно прямой $l: \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -3 - 2t, \\ z = t. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ. Направляющий вектор $\mathbf{a} = \{2, -2, 1\}$ прямой l можно взять в качестве вектора нормали $\mathbf{n}$ искомой плоскости. Поэтому будем искать решение в виде $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 2(x-1) - 2(y+2) + z = 0$, откуда получаем уравнение искомой плоскости $\alpha: 2x - 2y + z - 6 = 0$. $\diamond$

ПРИМЕР 35. Составить параметрическое уравнение плоскости $2x - 3y + z - 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Выразив из уравнения плоскости z через x и y , получим равенство $z = 1 - 2x + 3y$. Взяв x, y в качестве параметров t_1, t_2 ,

получаем параметрическое уравнение плоскости $\begin{cases} x = t_1, \\ y = t_2, \\ z = 1 - 2t_1 + 3t_2. \end{cases}$

Точка $M_0(0, 0, 1)$ — начальная точка плоскости, векторы $\mathbf{a}_1 = \{1, 0, -2\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{0, 1, 3\}$ — направляющие векторы. $\diamond$

ПРИМЕР 36. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, -2, 0)$ и прямую $l: \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -3 - 2t, \\ z = t. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ. Направляющий вектор прямой $\mathbf{a} = \{2, -2, 1\}$ — первый направляющий вектор плоскости; точка $M_1(2, -3, 0)$ — начальная точка прямой, поэтому вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1 = \{1, -1, 0\}$ — второй направляющий вектор плоскости. Тогда, подставив наши данные в уравнение(4.17), получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда после преобразований получим искомое уравнение плоскости $\alpha: x + y + 1 = 0$. $\diamond$

ПРИМЕР 37. Заданы координаты точки $M_0(2, -2, 1)$ и параметрические уравнения двух прямых:

$$l_1: \begin{cases} x = -7 + 3t, \\ y = -4 + 4t, \\ z = -3 - 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x = 21 + 6t, \\ y = -5 - 4t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно прямым l_1 и l_2 ; 2) составить уравнение плоскости, проходящей через прямую l_1 параллельно прямой l_2 .

РЕШЕНИЕ. 1) Направляющие векторы прямых $\mathbf{a}_1 = \{3, 4, -2\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{6, -4, -1\}$ могут служить направляющими векторами искомой плоскости. Подставив наши данные в уравнение(4.17), получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда найдем искомое уравнение плоскости $\alpha_1: 4x + 3y + 12z - 14 = 0$.

2) Для второго случая в качестве начальной точки возьмем точку $M_1(-7, -4, -3)$ — начальную точку прямой l_1 , направляющие векторы искомой плоскости — те же, что и в первом случае. Подставив данные в уравнение(4.17), получим

$$\begin{vmatrix} x+7 & y+4 & z+3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда найдем искомое уравнение плоскости $\alpha_2: 4x + 3y + 12z + 76 = 0$.

$\diamond$

ПРИМЕР 38. Составить уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 :

$$l_1: \begin{cases} x = 9 + 3t_1, \\ y = 3 + 4t_1, \\ z = 4 - 2t_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x = 21 + 6t_2, \\ y = -5 - 4t_2, \\ z = 2 - t_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Сначала убедимся в корректности постановки задачи, т.е. в том, что прямые l_1 и l_2 пересекаются. Для этого составим систему уравнений

$$\begin{cases} 9 + 3t_1 = 21 + 6t_2, \\ 3 + 4t_1 = -5 - 4t_2, \\ 4 - 2t_1 = 2 - t_2 \end{cases}$$

для нахождения точки пересечения данных прямых и убедимся в ее совместности. Перепишем первые два уравнения как $\begin{cases} t_1 - 2t_2 = 4, \\ t_1 + t_2 = -2. \end{cases}$

Решение этой системы $t_1 = 0$, $t_2 = -2$ удовлетворяет третьему уравнению. Таким образом, мы убедились в совместности системы и нашли точку пересечения прямых, при $t_1 = 0$ — это $M_1(9, 3, 4)$, начальная точка прямой l_1 . Взяв ее в качестве начальной для искомой плоскости, а направляющие векторы прямых в качестве направляющих векторов плоскости, получим

$$\begin{vmatrix} x - 9 & y - 3 & z - 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда найдем искомое уравнение плоскости $\alpha: 4x + 3y + 12z - 93 = 0$.
 $\diamond$

4.3 Прямая в пространстве

Кроме уже рассмотренного в пункте 4.1 параметрического уравнения прямой применяются еще два вида задания прямой в пространстве.

Из курса элементарной геометрии известно, что две непараллельные плоскости пересекаются по прямой. Отсюда, система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

задает прямую, если векторы $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ неколлинеарны. Уравнение (4.20) называется общим уравнением прямой в пространстве.

Рассмотрим уравнение (4.3) — параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Если из каждого уравнения выразим параметр t , получим равенства $t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$. Отбросив общее значение t , получим следующее каноническое уравнение прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (4.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Условимся считать, что если в знаменателе хотя бы одной из дробей уравнения (4.21) стоит число 0, то и числитель этой же дроби равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Каноническое уравнение, являясь фактически общим и параметрическим одновременно, является связующим звеном между ними.

В самом деле, уравнение (4.21) можно переписать как систему

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}, \end{cases}$$

что является частным случаем общего уравнения прямой (4.20).

С другой стороны, каноническое уравнение позволяет мгновенно перейти к параметрическому — надо взять в качестве параметра t общее значение дробей $\frac{x - x_0}{l} = t$, $\frac{y - y_0}{m} = t$, $\frac{z - z_0}{n} = t$ и выразить x , y и z через это значение t . В результате получим параметрическое уравнение прямой в пространстве (4.3). Поэтому геометрический смысл параметров канонического уравнения тот же, что и в параметрическом: x_0, y_0, z_0 — координаты начальной точки, $\{l, m, n\}$ — координаты направляющего вектора прямой.

ПРИМЕР 39. Прямая задана общим уравнением

$$l: \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0, \\ 2x - 3y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$$

Записать параметрическое и каноническое уравнения прямой l .

РЕШЕНИЕ. Чтобы записать прямую в параметрическом виде, необходимо найти начальную точку и направляющий вектор. Возьмем $z = 0$ и подставим в общее уравнение прямой. Получим систему

$$\begin{cases} x - 2y = -3, \\ 2x - 3y = 9, \end{cases}$$

откуда $x = 27$, $y = 15$. Таким образом, $M_0(27, 15, 0)$ — начальная точка. Вектор нормали $\mathbf{n}_1 = \{1, -2, 1\}$ перпендикулярен первой плоскости, $\mathbf{n}_2 = \{2, -3, -3\}$ перпендикулярен второй плоскости, значит, каждый из них перпендикулярен линии их пересечения. Поэтому в качестве направляющего вектора прямой можно взять векторное произведение нормалей к плоскостям.

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \{-3, -1, 1\}.$$

Таким образом, получаем параметрическое уравнение

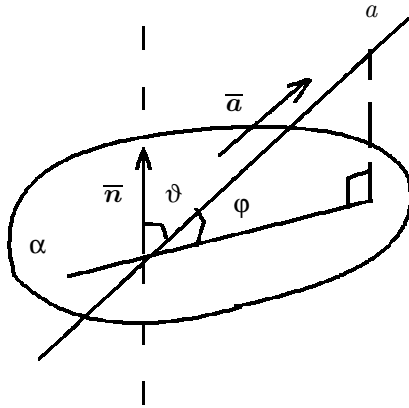
$$l: \begin{cases} x = 27 - 3t, \\ y = 15 - t, \\ z = t. \end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой $l: \frac{x - 27}{-3} = \frac{y - 15}{-1} = \frac{z}{1}$. $\diamond$

Основные задачи аналитической геометрии прямой и плоскости

Задачи нахождения угла между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей, расстояния от точки до плоскости решаются аналогично соответствующим задачам для прямой на плоскости. Рассмотрим принципиально новые задачи, связанные с комбинацией прямых и плоскостей в пространстве.

Угол между прямой и плоскостью



Угол между прямой и плоскостью определяется как угол φ между прямой и ее проекцией на плоскость (см. рисунок). Пусть задана нормаль $\mathbf{n}$ к плоскости α и направляющий вектор $\mathbf{a}$ прямой a . Если угол $\vartheta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ между ними острый, то он дополняет угол φ до 90° . Значит, $\cos \vartheta = \sin \varphi$. Если же угол ϑ — тупой, то $|\cos \vartheta| = \sin \varphi$. Таким образом, угол между

прямой и плоскостью определяется формулой:

$$\sin \varphi = |\cos \vartheta| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{a}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad (4.22)$$

где A, B, C, l, m, n — параметры соответствующих уравнений плоскости

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0 \text{ и прямой } a: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть задана прямая l с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и начальной точкой M_0 . Требуется найти расстояние от заданной точки M_1 до прямой l .

Искомое расстояние может быть найдено как высота параллелограмма, построенного на векторах M_0M_1 и $\mathbf{a}$. Получаем следующую формулу для нахождения расстояния от заданной точки M_1 до прямой l :

$$\rho(M_1, l) = \frac{|\mathbf{a} \times M_0M_1|}{|\mathbf{a}|}.$$

Расстояние между параллельными прямыми

Если в пространстве заданы две параллельные прямые l_1 и l_2 , то расстояние между ними может быть найдено как расстояние от произвольной точки одной из прямых до другой прямой. Решение этой задачи можно записать в виде формулы

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2|}{|\mathbf{a}_1|},$$

где M_1 и M_2 — начальные точки прямых l_1 и l_2 соответственно, $\mathbf{a}_1$ — направляющий вектор прямой l_1 .

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Если заданы прямые l_1 и l_2 с начальными точками M_1 и M_2 соответственно, направляющими векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ ($\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$), то расстояние между ними можно искать как высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$, опущенную на грань векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2|}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}.$$

4.4 Задачи и упражнения

95. По заданным параметрическим уравнениям прямых указать начальную точку и направляющий вектор каждой прямой.

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -2 - 3t; \end{cases} & 2) \begin{cases} x = 2, \\ y = -2 + t; \end{cases} & 3) \begin{cases} x = t, \\ y = -5 + 2t; \end{cases} & 4) \begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 5t; \end{cases} \\ 5) \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 - t; \end{cases} & 6) \begin{cases} x = -2, \\ y = 3t, \\ z = 1 + 5t; \end{cases} & 7) \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 0, \\ z = -3 + t; \end{cases} & 8) \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3 - 2t. \end{cases} \end{array}$$

96. Составить общее и параметрическое уравнение прямой на плоскости, если заданы ее начальная точка M_0 и направляющий вектор $\mathbf{a}$: 1) $M_0(-1, 2)$, $\mathbf{a} = \{3, -1\}$; 2) $M_0(1, 1)$, $\mathbf{a} = \{0, -1\}$; 3) $M_0(-1, 1)$, $\mathbf{a} = \{2, 0\}$. Сделать чертеж.

97. Составить общее и параметрическое уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки M_1 и M_2 : 1) $M_1(1, 2)$,

$M_2(-1, 0)$; 2) $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -2)$; 3) $M_1(2, 2)$, $M_2(0, 2)$. Сделать чертеж.

98. Составить общее и параметрическое уравнение прямой на плоскости, если заданы ее начальная точка M_0 и нормальный вектор $\mathbf{n}$: 1) $M_0(-1, 2)$, $\mathbf{n} = \{2, 2\}$; 2) $M_0(2, 1)$, $\mathbf{n} = \{2, 0\}$; 3) $M_0(1, 1)$, $\mathbf{n} = \{2, -1\}$. Сделать чертеж.

99. Составить параметрическое уравнение прямой в пространстве с начальной точкой $M_0(2, 0, -3)$, проходящей параллельно: 1) вектору $\mathbf{a} = \{2, -3, 5\}$; 2) вектору $\mathbf{b} = \{5, 2, -1\}$; 3) оси Ox ; 4) оси Oy ; 5) оси Oz .

100. Составить параметрическое уравнение прямой в пространстве, с начальной точкой $M_0(1, -1, -3)$, проходящей параллельно: 1) вектору $\mathbf{a} = \{2, -3, 4\}$; 2) прямой $x = 1 + 2t, y = -2 + 4t, z = 1$; 3) прямой $x = -1 + 3t, y = 3 - 2t, z = 2 + 5t$.

101. Составить параметрическое уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки A и B :

1) $A(1, -2, 1)$, $B(3, 1, -1)$; 2) $A(3, -1, 0)$, $B(1, 0, -3)$; 3) $A(0, -2, 3)$, $B(3, -2, 1)$; 4) $A(3, -1, 2)$, $B(2, 1, 1)$; 5) $A(1, 1, -2)$, $B(3, -1, 0)$.

102. Через точки $M_1(-6, 6, -5)$ и $M_2(12, -6, 1)$ проведена прямая. Найти точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

103. Даны точки $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$, $C(4, -7, -2)$ — вершины треугольника. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C .

104. По заданным параметрическим уравнениям плоскостей указать начальную точку и направляющие векторы каждой плоскости.

$$1) \begin{cases} x = 1 + 3t + s, \\ y = -2 - 3t - s, \\ z = 1 - t + 2s; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2 + 3s, \\ y = -2 + t - s, \\ z = 1 - t + s; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = t, \\ y = -5 + 2s, \\ z = 1 - t; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = 3 - t - 2s, \\ y = 5t + 3s, \\ z = 1 - t - s; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + 3t + s, \\ z = 1 - s; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x = -2, \\ y = 3t + s, \\ z = 1 + 5t - s. \end{cases}$$

105. По заданным начальной точке M_0 и направляющим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ составить параметрическое уравнение плоскости: 1) $M_0(2, -1, 0)$, $\mathbf{a} = \{2, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, 2, -3\}$. 2) $M_0(-2, 1, 1)$, $\mathbf{a} = \{-2, 0, 0\}$, $\mathbf{b} = \{0, 2, -3\}$. 3) $M_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{a} = \{3, 4, -1\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 2, -3\}$.

106. Составить параметрическое уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0 параллельно заданной прямой l :

$$\begin{aligned} 1) M_0(3, -2, 1), l: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 - t; \end{cases} & 2) M_0(0, 2, -1), l: \begin{cases} x = t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = 5 - t; \end{cases} \\ 3) M_0(1, 2, -1), l: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 - 2t, \\ z = 3 - t; \end{cases} & 4) M_0(0, 0, 0), l: \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 + 5t, \\ z = 1 - t. \end{cases} \end{aligned}$$

107. Составить параметрическое уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0 параллельно заданным прямым l_1 и l_2 :

$$\begin{aligned} 1) M_0(3, -2, 1), \quad l_1: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 - t; \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x = t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = 5 - t; \end{cases} \\ 2) M_0(1, 2, -1), \quad l_1: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 - 2t, \\ z = 3 - t; \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 - t. \end{cases} \end{aligned}$$

108. Даны прямые: 1) $4x + 2y - 5 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$; 3) $4x - 3y + 24 = 0$; 4) $3x - 5y - 2 = 0$. Преобразовать их к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ — уравнения «в отрезках». Выяснить геометрический смысл коэффициентов a и b , построить эти прямые на чертеже.

109. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. 1) Определить угловой коэффициент k и величину b отрезка, отсекаемого данной прямой на оси Oy . 2) Составить уравнение прямой, параллельной данной и имеющей параметр $b = 3$. 3) Составить уравнение прямой, перпендикулярной данной и имеющей параметр $b = -5$. 4) Построить все прямые на координатной плоскости xOy .

110. Доказать, что заданные прямые пересекаются и найти точку их пересечения: 1) $x + 5y - 35 = 0$ и $3x + 2y - 27 = 0$; 2) $14x - 9y - 24 = 0$ и $7x - 2y - 17 = 0$.

111. Определить при каких значениях a и b прямые $ax - 2y - 1 = 0$ и $6x - 4y - b = 0$ 1) имеют одну общую точку; 2) параллельны; 3) совпадают.

112. Определить при каких значениях m и n прямые $l_1: mx + 8y + n = 0$ и $l_2: 2x + my - 1 = 0$ 1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны.

113. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 1)$ 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой.

114. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2, -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

115. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5, -4)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$ параллельно противоположным сторонам.

116. Даны вершины треугольника $M_1(2, 1)$, $M_2(-1, -1)$, $M_3(3, 2)$. Составить уравнения его высот.

117. Определить угол между прямыми на плоскости и найти точку их пересечения: 1) $x + 5y - 35 = 0$, $3x + 2y - 27 = 0$; 2) $y = \frac{14}{9}x - \frac{8}{3}$, $y = \frac{7}{2}x - \frac{17}{2}$; 3) $12x + 15y - 8 = 0$, $y = -\frac{16}{9}x + \frac{7}{9}$; 4) $3x + 5 = 0$, $y - 2 = 0$.

118. Определить, в каких из следующих пар прямые параллельны, совпадают, перпендикулярны: 1) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y + 7 = 0$; 2) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y - 8 = 0$; 3) $2x - 4y + 3 = 0$, $x - 2y = 0$; 4) $x - \sqrt{2}y = 0$, $\sqrt{2}x - 2y = 0$; 5) $x + y - 1 = 0$, $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2}$;

6) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -4t, \end{cases} \quad -x + 2y + 1 = 0.$

119. Найти внутренние углы треугольника и координаты его вершин, если стороны треугольника заданы уравнениями $3x - y + 6 = 0$, $x - y + 4 = 0$, $x + 2y + 2 = 0$.

120. Вычислить расстояние от точки K до прямой l : 1) $K(2, -1)$, $l: 4x + 3y + 10 = 0$; 2) $K(0, -3)$, $l: 5x - 12y - 23 = 0$; 3) $K(-2, 3)$, $l: 3x - 4y - 2 = 0$.

121. Вычислить расстояние между параллельными прямыми:

- 1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$; 2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$.

122. Даны вершины треугольника $A(-10, -13)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C .

123. Доказать, что следующие «неполные» уравнения первой степени определяют: 1) $Ax + By + Cz = 0$ — плоскость, проходящую через начало координат; 2) $By + Cz + D = 0$ — плоскость, параллельную оси Ox ; 3) $Ax + Cz + D = 0$ — плоскость, параллельную оси Oy ; 4) $Ax + By + D = 0$ — плоскость, параллельную оси Oz ; 5) $Cz + D = 0$ — плоскость, параллельную плоскости Oxy ; 6) $By + D = 0$ — плоскость, параллельную плоскости Oxz ; 7) $Ax + D = 0$ — плоскость, параллельную плоскости Oyz ; 8) $Cz = 0$ — плоскость Oxy ; 9) $By = 0$ — плоскость Oxz ; 10) $Ax = 0$ — плоскость Oyz .

124. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $M_0(1, 2, 3)$, и 1) параллельных координатным плоскостям; 2) проходящих через оси координат.

125. Показать, что полное уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$ можно привести к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, называемому уравнением плоскости «в отрезках». Выяснить геометрический смысл коэффициентов a, b, c .

126. Составить уравнение плоскости в отрезках, если эта плоскость проходит через точку $M_0(1, 2, 3)$ и имеет нормальный вектор $\mathbf{n} = \{1, 1, 1\}$.

127. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: 1) $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, 1)$, $M_3(2, 0, 2)$; 2) $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(2, 1, 3)$, $M_3(-1, -1, 1)$.

128. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M_0 и имеет нормальный вектор $\mathbf{n}$: 1) $M_0(2, 1, -1)$, $\mathbf{n} = \{1, -2, 3\}$; 2) $M_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = \{5, 0, -3\}$.

129. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3, 4, 5)$ и: 1) параллельна двум векторам $\mathbf{a} = \{3, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -2, 1\}$; 2) перпендикулярна вектору $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, где $M_2(4, -2, 1)$; 3) перпендикулярна вектору $\mathbf{OM}_1$; 4) содержит точку $M_2(2, -1, 3)$, параллельна вектору $\mathbf{a} = \{3, -1, 4\}$.

130. Составить параметрическое и общее уравнения плоскости с начальной точкой $M_0(2, 3, -5)$ и направляющими векторам $\mathbf{p} = \{-5, 6, 4\}$ и $\mathbf{q} = \{2, -1, 0\}$.

131. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают: 1) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $3x - 6y + 1 = 0$; 2) $3x - 2y - 3z + 5 = 0$, $9x - 6y - 9z - 5 = 0$; 3) $2x - y - z - 3 = 0$, $10x - 5y - 5z - 15 = 0$.

132. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическому уравнению
$$\begin{cases} x = 2 + 3s - 4t, \\ y = 4 - t, \\ z = 2 + 3s. \end{cases}$$

133. По данным общим уравнениям прямых составить их параметрические и канонические уравнения:

$$\begin{aligned} 1) l_1: & \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0; \end{cases} & 2) l_2: & \begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0; \end{cases} \\ 3) l_3: & \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0; \end{cases} & 4) l_4: & \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

134. Составить каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2, 3, -5)$ параллельно прямой

$$l: \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

135. Доказать, что прямая $l: \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -5 + 4t \end{cases}$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

136. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

137. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, -3, -5)$ перпендикулярно к плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

138. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, -1, -1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

139. Найти проекцию точки $N(2, -1, 3)$ на прямую $x = 3t$, $y = -7 + 5t$, $z = 2 + 2t$.

140. Найти проекцию точки $P(5, 2, -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

141. Найти точку N , симметричную точке $M(1, 3, -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

142. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $N(1, 2, -3)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$ и $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$.

143. Определить углы, образованные следующими парами плоскостей: 1) $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$, $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$; 2) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$; 3) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

144. Найти угол между прямыми:

$$1) l_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}};$$

$$2) l_1: \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 0, \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 0, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

145. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямая $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$: 1) не пересекалась с осью Oz ; 2) пересекалась с осью Oz ; 3) была ей параллельна; 4) совпадала с осью Oz .

146. Доказать параллельность прямых:

$$1) l_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$$

$$2) l_1: \begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -7 + t \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

147. Доказать перпендикулярность прямых:

$$1) l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0; \end{cases}$$

$$2) l_1: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 1 - 6t \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

148. Плоскость P и прямая l заданы своими уравнениями. Найти угол между ними и точку пересечения:

$$1) P: x + y - z + 1 = 0, \quad l: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1};$$

$$2) P: x - 3y + 2z + 1 = 0, \quad l: \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

149. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямая $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$: 1) пересекалась с плоскостью xOy в одной точке; 2) была ей параллельна; 3) лежала в этой плоскости.

150. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$1) L: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}, \quad P: 3x + 5y - z - 2 = 0;$$

$$2) L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}, \quad P: 3x - 3y + 2z - 5 = 0;$$

$$3) L: \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}, \quad P: x + 2y - 4z + 1 = 0.$$

151. Привести каждое из следующих уравнений плоскости к нормальному виду: 1) $2x - 2y + z - 18 = 0$; 2) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$; 3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$; 4) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$.

152. Вычислить расстояние от точки до плоскости: 1) $M_1(-2, -4, 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$; 2) $M_2(2, -1, -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$; 3) $M_3(1, 2, -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$.

153. Вычислить расстояние от точки $K(-1, 1, -2)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(-2, 1, 3)$, $M_3(4, -5, -2)$.

154. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:
 1) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$; 2) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$,
 $16x + 12y - 15z + 25 = 0$.

155. Заданы точки $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(1, 1, 0)$, $D(4, 1, 2)$ — вершины тетраэдра. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC .

156. Найти расстояние от точки A до прямой l : 1) $M(2, 3, -1)$,
 $l: \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$; 2) $M(1, 2, 5)$, $l: x = t, y = 1 - 2t, z = 3 + t$.

157. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

$$1) l_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2};$$

$$2) l_1: \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x = -t, \\ y = 2 + t, \\ z = -2t; \end{cases}$$

$$3) l_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0; \end{cases}$$

$$4) l_1: \begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -7 + t \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

158. Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

$$1) \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}, \quad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1};$$

$$2) x = 2t - 4, y = -t + 4, z = -2t - 1; \quad x = 4t - 5, y = -3t + 5, z = -5t + 5;$$

$$3) \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}; \quad x = 6t + 9, y = -2t, z = -t + 2.$$

159. Две прямые заданы уравнениями $l_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$,
 $l_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$. Требуется: 1) показать, что эти прямые не лежат в одной плоскости, т.е. являются скрещивающимися; 2) написать уравнение плоскости P_2 , проходящей через прямую l_2 параллельно l_1 ; 3) вычислить расстояние между прямой l_1 и плоскостью P_2 ; 4) вычислить расстояние между прямыми l_1 и l_2 , сравнить его с предыдущим расстоянием.

Модуль 5

Кривые второго порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42. Кривой второго порядка на плоскости называется линия, которая в некоторой декартовой системе координат может быть задана уравнением второй степени вида:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (5.1)$$

где коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} не равны нулю одновременно.

В общем случае может оказаться, что уравнение (5.1) определяет так называемую вырожденную кривую: пустое множество, точку, прямую, пару прямых.

К невырожденным кривым второго порядка относятся эллипс, гиперболы, парабола.

Для невырожденных кривых можно выбрать систему координат таким образом, что уравнение (5.1) будет иметь наиболее простой вид—такое уравнение называется каноническим, соответственно, система координат также называется канонической.

5.1 Эллипс

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническую систему координат для эллипса выберем следующим образом: начало координат поместим в середину отрезка F_1F_2 , ось Ox

совместим с прямой, проходящей через фокусы. Каноническое уравнение эллипса будет иметь вид (см. задачу 162):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.2)$$

В канонической системе координат эллипс имеет форму, представленную на рис. 5.1.

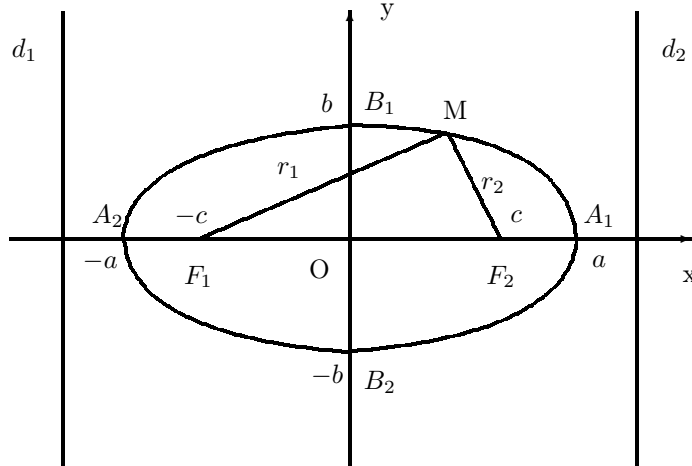


Рис. 5.1: Эллипс.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЛИПСА:

- 1) параметры a и b ($a \geq b > 0$) называются полуосями эллипса (бóльшей и мéньшей соответственно);
- 2) точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются вершинами эллипса;
- 3) оси координат являются осями симметрии эллипса, называемыми также главными осями, начало координат является центром симметрии и называется центром эллипса;
- 4) точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, являются фокусами эллипса, а расстояние между ними $|F_1 F_2| = 2c$ называется фокальным расстоянием;

- 5) векторы $\mathbf{F}_1\mathbf{M}$ и $\mathbf{F}_2\mathbf{M}$, где M — произвольная точка, принадлежащая эллипсу, называют фокальными радиус-векторами точки M , а числа $r_1 = |\mathbf{F}_1\mathbf{M}|$ и $r_2 = |\mathbf{F}_2\mathbf{M}|$ — фокальными радиусами точки M ;
- 6) число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса ($0 \leq \varepsilon < 1$) и характеризует его «сплюснутость» (при $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность, а при $\varepsilon \rightarrow 1$ эллипс приближается к своему вырожденному состоянию — отрезку);
- 7) прямые $d_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса.

Если в уравнении (5.2) $b \geq a$, то фокусы эллипса будут расположены на оси ординат, а сам эллипс будет «вытянут» вдоль этой оси.

Если центр эллипса находится в точке $O'(x_0, y_0)$, а главные оси параллельны осям координат, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (5.3)$$

При $a = b = R$ оба уравнения (5.2) и (5.3) задают окружности радиуса R — превращаются в $x^2 + y^2 = R^2$ и $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ соответственно.

5.2 Гипербола

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Если выбрать каноническую декартову систему координат на плоскости, а именно: начало координат поместить в середину отрезка F_1F_2 , а ось Ox совместить с прямой, проходящей через фокусы (см. рис. 5.2.), то уравнение гиперболы имеет вид (см. задачу 169):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) называется каноническим уравнением гиперболы. В канонической системе координат гипербола имеет форму, представленную на рис. 5.2.

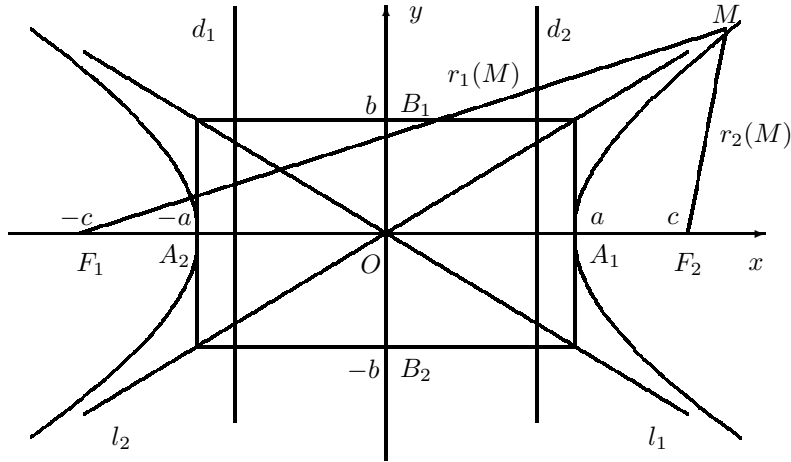


Рис. 5.2: Гипербола.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРБОЛЫ:

- 1) параметры a и b ($a > 0$, $b > 0$) называются полуосями гиперболы;
- 2) точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ — точки пересечения гиперболы с осью Ox — называются вершинами гиперболы, точки $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются мнимыми вершинами;
- 3) оси координат являются осями симметрии гиперболы, называемыми также главными осями, при этом ось Ox называется действительной осью (она имеет точки пересечения с гиперболой), а ось Oy называется мнимой осью (она не пересекается с гиперболой), начало координат является центром симметрии и называется центром гиперболы;
- 4) точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, являются фокусами гиперболы, а расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$ называется фокальным расстоянием;
- 5) векторы $\vec{F_1M}$ и $\vec{F_2M}$ называют фокальными радиус-векторами точки M , принадлежащей гиперболе, а числа $r_1 = |\vec{F_1M}|$ и $r_2 = |\vec{F_2M}|$ — фокальными радиусами точки M ;

- 6) число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы ($1 < \varepsilon < \infty$) и характеризует ее «сплюснутость»;
- 7) прямые $d_1: x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $d_2: x = \frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами гиперболы;
- 8) прямые $l_1: y = -\frac{b}{a}x$ и $l_2: y = \frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы, они являются продолжением диагоналей прямоугольника с центром в начале координат со сторонами, параллельными осям Ox , Oy и равными соответственно $2a$ и $2b$, этот прямоугольник называется характеристическим прямоугольником гиперболы.

Уравнение гиперболы с центром в точке $O'(x_0, y_0)$ и главными осями, параллельными осям координат, имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (5.5)$$

Уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (5.6)$$

также является уравнением гиперболы с действительной осью Oy и мнимой осью Ox .

ПРИМЕР 40. Установить, что уравнение $4x^2 - 16y^2 - 8x + 64y + 4 = 0$ определяет гиперболу. Найти ее центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделать чертеж.

РЕШЕНИЕ. Чтобы привести данное уравнение к каноническому виду, выделим полные квадраты по x и по y :

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) + 4 &= 0, \\ 4(x^2 - 2x + 1) - 4 - 16(y^2 + 4y + 4) - 64 + 4 &= 0, \\ 4(x - 1)^2 - 16(y + 2)^2 &= 64. \end{aligned}$$

Разделив обе части полученного уравнения на 64, придем к уравнению

$$\frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y + 2)^2}{4} = 1,$$

которое имеет вид (5.5). Центр гиперболы находится в точке $C(1, -2)$, а главные оси совпадают с прямыми $y = -2$ и $x = 1$. Полуоси гиперболы равны: $a = \sqrt{16} = 4$, $b = \sqrt{4} = 2$.

Отсюда находим $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20}$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{20}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Чтобы найти уравнения директрис и асимптот, а также построить гиперболу, удобно сделать замену координат: $x - 1 = x'$, $y + 2 = y'$. В новых координатах уравнение гиперболы имеет вид $\frac{(x')^2}{16} - \frac{(y')^2}{4} = 1$.

Уравнения директрис в новых координатах: $d_1: x' = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{8}{\sqrt{5}}$, $d_2: x' = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{8}{\sqrt{5}}$, уравнения асимптот: $l_1: y' = -\frac{1}{2}x'$ и $l_2: y' = \frac{1}{2}x'$. Переходя к первоначальной системе координат, получим уравнения директрис и асимптот в виде:

$$d_1: x = 1 - \frac{8}{\sqrt{5}}, d_2: x = 1 + \frac{8}{\sqrt{5}}; l_1: y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, l_2: y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$$

Графическую работу начнем с построения систем координат Oxy и $O'x'y'$, затем изобразим гиперболу в системе $O'x'y'$ (см. рис. 5.3). $\diamond$

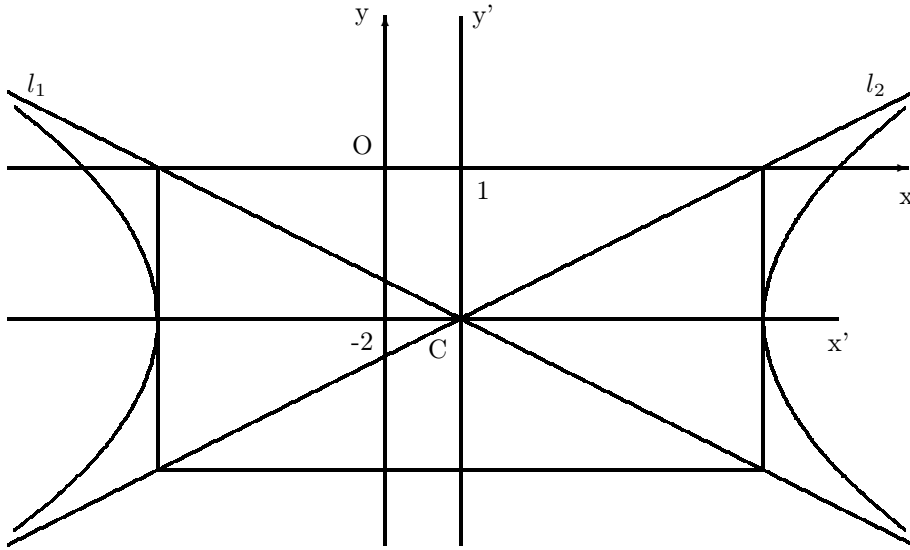


Рис. 5.3: Решение примера 40.

5.3 Парабола

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки F и некоторой фиксированной прямой d этой плоскости. Указанная в этом определении точка F называется фокусом параболы, а фиксированная прямая — директрисой параболы.

Каноническая система координат для параболы строится следующим образом: начало координат выбирается в середине отрезка FD , представляющего собой перпендикуляр, опущенный из фокуса на директрису; ось Ox направляется по перпендикуляру FD от директрисы к фокусу. Каноническое уравнение параболы имеет вид (см. задачу 174):

$$y^2 = 2px. \quad (5.7)$$

В канонической системе координат парабола имеет форму, представленную на рис. 5.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Каноническое уравнение параболы (5.7) отличается от школьного ($y = ax^2$) тем, что меняется роль осей Ox и Oy — парабола «положена на бок» по отношению к привычному виду.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАРАБОЛЫ:

- 1) число $p > 0$ называется фокальным параметром параболы, оно равно расстоянию от фокуса до директрисы;
- 2) фокус параболы есть точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$;
- 3) уравнение директрисы $d: x = -\frac{p}{2}$;
- 4) ось Ox является осью симметрии параболы и называется ее осью;
- 5) начало координат — вершину параболы — по аналогии с предыдущим иногда называют центром параболы;
- 6) эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$ по определению. Разумность такого определения следует из определения параболы и результатов задач 163 и 170.

Если параболу, заданную каноническим уравнением (5.7), перенести параллельным сдвигом на вектор $\{x_0, y_0\}$, то центр ее окажется в точке $C(x_0, y_0)$, ось будет параллельна оси Ox , а уравнение сдвинутой параболы будет иметь вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

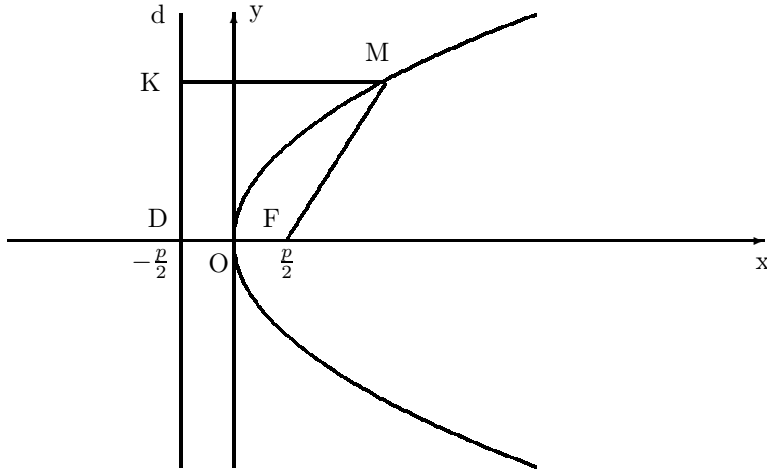


Рис. 5.4: Парабола.

ПРИМЕР 41. Установить, какая линия определяется уравнением $y = -1 - 2\sqrt{2x - 4}$. Определить характеристики кривой и сделать чертеж.

РЕШЕНИЕ. Чтобы определить тип кривой, приведем данное уравнение к каноническому виду:

$$y + 1 = -2\sqrt{2x - 4} \implies (y + 1)^2 = 4(2x - 4) \implies (y + 1)^2 = 8(x - 2).$$

Последнее уравнение этой цепочки есть уравнение параболы с центром в точке $C(2, -1)$ и осью, параллельной оси Ox ; первое же уравнение цепочки показывает, что исходная кривая удовлетворяет условию $y + 1 \leq 0$, т.е. лежит в полуплоскости $y \leq -1$. Следовательно, данная кривая есть часть параболы $(y + 1)^2 = 8(x - 2)$, лежащая в указанной полуплоскости (см. рис. 5.5).

Чтобы найти характеристики параболы, перейдем к новым координатам $x - 2 = x'$, $y + 1 = y'$. В новых координатах уравнение параболы имеет вид $(y')^2 = 8x'$; параметр $p = 4$; фокус находится в точке с координатами $x'_F = \frac{p}{2} = 2$, $y'_F = 0$; уравнение директрисы $d: x' = -\frac{p}{2} = -2$. Перейдя к исходным координатам, получим: фокус находится в точке $F(4, -1)$, уравнение директрисы $d: x = 0$. $\diamond$

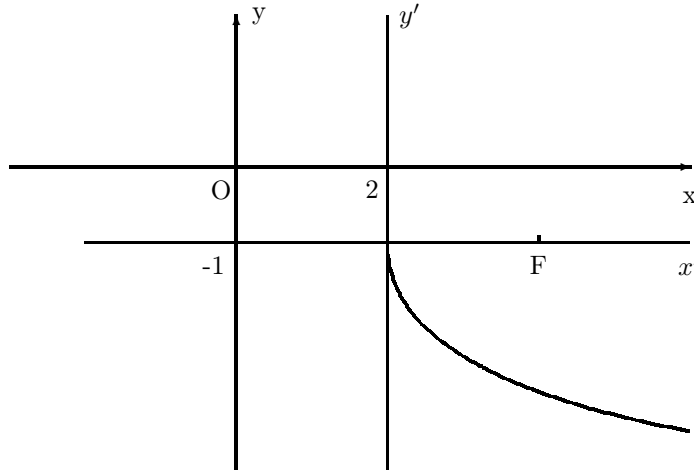


Рис. 5.5: Решение примера 41.

5.4 Задачи и упражнения

160. Показав, что уравнение $9x^2 + 25y^2 = 225$ задает эллипс, построить его. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

161. Составить каноническое уравнение эллипса и построить его, если: 1) $a = 3$, $b = 2$; 2) $a = 5$, $c = 4$; 3) $c = 3$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$; 4) $b = 5$, $\varepsilon = \frac{12}{13}$; 5) $c = 2$, расстояние между директрисами равно 5; 6) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, расстояние между директрисами равно 32.

162. Пусть заданы точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, $c \geq 0$. Доказать, что координаты точек $M(x, y)$ обладающих свойством $|F_1M| + |F_2M| = 2a = \text{const}$, удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$.

163. Пусть M — произвольная точка эллипса, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки, $\rho(M, d_1)$ и $\rho(M, d_2)$ — расстояния от точки M до директрис. Показать, что $\frac{r_1(M)}{\rho(M, d_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, d_2)} = \varepsilon = \text{const}$, то есть отношение фокального радиуса точки к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная для точек эллипса и равно эксцентриситету.

164. Составить уравнение окружности и изобразить ее на координатной плоскости xOy , если: 1) центр окружности — начало координат, радиус равен 3; 2) центр окружности совпадает с точкой $C(2, -3)$ и радиус равен 7; 3) окружность проходит через точку $A(2, 6)$, а ее центр совпадает с точкой $C(-1, 2)$; 4) точки $A(3, 2)$ и $B(-1, 6)$ являются концами одного из диаметров окружности; 5) окружность проходит через три точки: $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(2, 0)$.

165. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс (или окружность); найти его центр, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис; изобразить эллипс на координатной плоскости: 1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$; 2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$; 3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$; 4) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 5) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; 6) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

166. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис.

167. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$, называемую сопряженной к гиперболе задачи 166. Каково расположение этой гиперболы в той же канонической системе координат? Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис.

168. Написать каноническое уравнение гиперболы, если заданы:

- 1) $a = 2$, $b = 3$; 2) $b = 4$, $c = 5$; 3) $c = 3$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$; 4) $a = 8$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$; 5) $c = 10$, уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$; 6) $\varepsilon = \frac{3}{2}$, расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$.

169. Пусть заданы точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, $c > 0$. Доказать, что координаты точек $M(x, y)$, обладающих свойством $||F_1M| - |F_2M|| = 2a = \text{const}$, удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

170. Доказать, что, если $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы; $r_1(M)$, $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки; $\rho(M, d_1)$, $\rho(M, d_2)$ — расстояния от точки M до директрис, то $\frac{r_1(M)}{\rho(M, d_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, d_2)} = \varepsilon = \text{const}$, то есть отношение фокального радиуса точки к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная для точек гиперболы и равно эксцентриситету.

171. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу; найти ее центр, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис и асимптот; изобразить гиперболу на координатной плоскости: 1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$; 2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$; 3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

172. Построить следующие параболы и найти их параметры: 1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$.

173. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что: 1) парабола расположена в левой полуплоскости, симметрична относительно оси Ox и имеет параметр $p = \frac{1}{2}$; 2) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $M(4, -8)$; 3) фокус параболы находится в точке $F(0, -3)$, а осью симметрии является ось Oy .

174. Пусть заданы точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и прямая $d: x = -\frac{p}{2}$. Обозначим $\rho(M, d)$ расстояние от точки M до прямой d . Доказать, что координаты точек $M(x, y)$, обладающих свойством $|FM| = \rho(M, d)$ удовлетворяют уравнению $y^2 = 2px$.

175. Установить, какие из следующих уравнений определяют параболу, найти ее параметр, координаты вершины, уравнение директрисы; построить график: 1) $y^2 = 4x - 8$, 2) $x^2 = 2 - y$, 3) $y = 4x^2 - 8x + 7$, 4) $y = -\frac{x^2}{6} + 2x - 7$, 5) $x = -\frac{y^2}{4} + y$, 6) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

176. Доказать следующее «оптическое» свойство параболы: луч света, направленный из фокуса параболы в какую-нибудь ее точку, отразится в направлении, параллельном оси параболы.

Модуль 6

Линейные пространства

6.1 Определения и примеры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 46. Линейным пространством называется множество L элементов произвольной природы, которые будем называть векторами. Множество L удовлетворяет следующим требованиям:

1. Определена операция суммы векторов, а именно, для каждой пары векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$ единственным образом определен вектор $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in L$;
2. Определена операция умножения вектора на вещественное число, а именно, для каждого вектора $\mathbf{u} \in L$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ единственным образом определен вектор $\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{u} \in L$;
3. При этом операции сложения и умножения на число удовлетворяют следующим аксиомам:
 - 1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$ — коммутативность сложения;
 - 2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L$ — ассоциативность сложения;
 - 3) существует нулевой вектор $\mathbf{0} \in L$, такой, что $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ для любого вектора $\mathbf{u} \in L$;
 - 4) для любого вектора $\mathbf{u} \in L$ существует вектор $-\mathbf{u} \in L$, называемый противоположным вектору $\mathbf{u}$, такой, что $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$;

- 5) $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$ для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ — дистрибутивность относительно сложения векторов;
- 6) $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}$ для любого $\mathbf{u} \in L$, для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ — дистрибутивность относительно сложения чисел;
- 7) $(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u})$ для любого $\mathbf{u} \in L$, для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ — ассоциативность умножения вектора на число;
- 8) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ для любого $\mathbf{u} \in L$ — свойство нормировки.

Векторы будем обозначать, как правило, малыми латинскими буквами, напечатанными жирным шрифтом: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$; а числа — малыми греческими буквами: $\alpha, \beta, \lambda, \dots$.

Операции сложения и умножения на число носят название линейных операций.

ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

1. Векторные пространства V^2 векторов плоскости и V^3 векторов пространства являются линейными пространствами в смысле определения 46. Этот факт является главным содержанием теоремы 4 (свойства линейных операций над векторами) на стр. 30.

2. Множество матриц фиксированного размера $(m \times n)$ с операциями сложения и умножения на число (определения 2 и 3 на стр. 7) является линейным пространством в смысле определения 46 (теорема 1 на стр. 7). В частности, линейными пространствами являются множества столбцов — матриц размера $(m \times 1)$ и строк — матриц размера $(1 \times n)$.

3. Определим арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ как множество упорядоченных наборов вида $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — вещественные числа. Линейные операции над элементами $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ определим правилами:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Легко проверить, что так определенное пространство $\mathbb{R}^n$ является линейным пространством.

4. Рассмотрим множество $C^0(a, b)$ непрерывных на интервале (a, b) функций. Линейные операции определим правилами:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

для всех $x \in (a, b)$, для любых функций $f, g \in C^0(a, b)$. Теоремы математического анализа о свойствах непрерывных функций гарантируют нам, что $f + g \in C^0(a, b)$, $\lambda \cdot f \in C^0(a, b)$, проверка аксиом 1–8 определения линейных пространств труда не представляет, следовательно $C^0(a, b)$ — линейное пространство.

5. Рассмотрим множество

$$\mathcal{P}_n = \{P_n: P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}\}$$

полиномов P_n степени не выше, чем $(n-1)$, от вещественной переменной x , с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$. Линейные операции определим правилами:

$$(P_n + Q_n)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1};$$

$$(\lambda \cdot P_n)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \dots + \lambda a_{n-1}x^{n-1}.$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ для любых полиномов $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, $Q_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$. Легко проверить, что так определенное пространство $\mathcal{P}_n$ является линейным пространством.

ПРИМЕР 42. Проверить, образуют ли линейные пространства:

1) множество L_0 всех векторов из $\mathbb{R}^n$, у которых $x_1 = 0$; 2) множество L_1 всех векторов из $\mathbb{R}^n$, у которых $x_1 = 1$. Линейные операции в L_0 и L_1 определены так же, как в $\mathbb{R}^n$.

РЕШЕНИЕ. 1) Пусть $\mathbf{x} = (0, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (0, y_2, \dots, y_n)$ — произвольные векторы из L_0 .

Сумма их равна $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (0, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in L_0$ и произведение на число равно $\lambda \mathbf{x} = (0, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in L_0$. Проверим выполнение аксиом линейного пространства. Так как в $\mathbb{R}^n$ операции сложения векторов и умножения вектора на число сводятся к сложению и умножению чисел, выполнение аксиом 1, 2, 5–8 очевидно. В качестве нулевого вектора нужно взять вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in L_0$, а в качестве противоположного для вектора $\mathbf{x} = (0, x_2, \dots, x_n)$ нужно взять вектор $-\mathbf{x} = (0, -x_2, \dots, -x_n) \in L_0$. Таким образом, множество L_0 образует линейное пространство.

б) Так как сумма любых двух векторов из L_1 имеет вид

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (2, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \notin L_1,$$

то результат сложения векторов из L_1 не принадлежит L_1 . Аналогично, результат умножения вектора из L_1 на число $\lambda \neq 1$ выходит за

пределы множества L_1 . Следовательно, множество L_1 с операциями сложения и умножения на число, определенными так же, как в $\mathbb{R}^n$, не является линейным пространством. $\diamond$

6.2 Базис и координаты

Из определения произвольного линейного пространства L вовсе не следует, что оно будет конечномерно, т.е. в нем найдется базис, содержащий конечное число векторов. Например, рассмотренное выше линейное пространство непрерывных функций $C^0(a, b)$ не является конечномерным. Поэтому дадим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 47. Система векторов $\{e_i\}_{i \in I}$ линейного пространства L , где I — некоторое множество индексов (конечное или бесконечное), называется линейно зависимой, если найдется конечное число векторов $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ этой системы, являющихся линейно зависимыми в смысле определения 27 на стр. 32, и линейно независимой, если любая конечная подсистема $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$ этой системы является линейно независимой в смысле определения 29 на стр. 33.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48. Базисом векторного пространства L называется максимальная линейно независимая система векторов $\{e_i\}_{i \in I}$, где I — некоторое множество индексов, т.е. такая линейно независимая система векторов, что система $\{e_i, a\}$ будет линейно зависимой для любого вектора $a \in L$.

ТЕОРЕМА 21. Любой вектор $u \in L$ можно представить, причем единственным образом, в виде линейной комбинации конечного числа базисных векторов:

$$u = x_1 e_{i_1} + x_2 e_{i_2} + \dots + x_k e_{i_k}. \quad (6.1)$$

Коэффициенты $x_1, x_2, \dots, x_n$ этого разложения называются координатами вектора u в базисе $\{e_i\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Можно доказать, что если любой вектор u линейного пространства L можно выразить в виде линейной комбинации конечного числа векторов некоторой линейно независимой системы $\{e_i\}$, то эта система является максимальной линейно независимой, т.е. базисом.

Линейное пространство L называется конечномерным, если в нем существует базис, состоящий из конечного числа векторов. Это число векторов n называется размерностью пространства. Определение размерности линейного пространства корректно, т.е. все базисы конечномерного линейного пространства состоят из одного и того же количества векторов.

Мы в этом курсе будем рассматривать только конечномерные пространства.

ПРИМЕР 43. Найти базис арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Показать, что $\dim \mathbb{R}^n = n$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим систему векторов $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Произвольная линейная комбинация этих векторов равна

$$\begin{aligned} x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n &= \\ &= x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n \cdot (0, 0, \dots, 1) = \\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) = \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Отсюда следует, что во-первых, система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независима, так как равенство $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{0}$ возможно только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$; во-вторых, равенство (6.2) показывает, что произвольный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ мы представили в виде линейной комбинации векторов системы $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Это и означает, что система векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ является базисом и $\dim \mathbb{R}^n = n$. $\diamond$

Рассмотренный базис пространства $\mathbb{R}^n$ принято называть каноническим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 49. *Отображение $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$, где L_1 и L_2 — линейные пространства, называется изоморфизмом, если: 1) отображение φ является взаимно-однозначным соответствием между элементами пространств L_1 и L_2 ; 2) для любых векторов $u, v \in L_1$ и чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$. Другими словами, изоморфизм — взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции.*

ТЕОРЕМА 22. *Все конечномерные линейные пространства одной и той же размерности n изоморфны между собой.*

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Последняя теорема означает, что мы можем брать одно из конечномерных пространств в качестве основного, являющегося математической моделью всех конечномерных пространств. Таковым является, например, арифметическое линейное пространство $\mathbb{R}^n$. Если в базисе $\{e_i\}$ пространства L размерности n вектор $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, то определяем изоморфизм $\varphi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством $\varphi(u) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. отождествляем вектор u с элементом $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — координатной строкой.

Иногда в качестве основного удобно брать линейное пространство столбцов размера $(n \times 1)$. В этом случае вектор $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots +$

$+ x_n e_n$ отождествляется с координатным столбцом $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

ПРИМЕР 44. Доказать, что система многочленов $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ образует базис в пространстве $\mathcal{P}_n$ всех многочленов степени не выше $(n-1)$. Указать размерность пространства $\mathcal{P}_n$.

РЕШЕНИЕ. Приравняем нулю линейную комбинацию векторов $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}: \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \dots + \alpha_n \cdot x^{n-1} = 0$. Так как справа стоит многочлен, тождественно равный нулю, то многочлен слева также должен тождественно равняться нулю и, значит, должны равняться нулю все его коэффициенты: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Следовательно, векторы $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ линейно независимы.

Произвольный многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ степени не выше $n-1$ очевидным образом представляет собой линейную комбинацию многочленов $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$. Поэтому система векторов $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ образует базис пространства $\mathcal{P}_n$, а число n векторов базиса есть размерность пространства.

Таким образом, многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ отождествляем с вектором $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, т.е. многочлен отождествляем с упорядоченным набором его коэффициентов. $\diamond$

Базис $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ пространства $\mathcal{P}_n$ будем называть каноническим.

6.3 Ранг матрицы и системы векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 50. Минором порядка k матрицы A называется

определитель порядка k , образованный элементами матрицы, расположенными на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51. Наивысший порядок r миноров матрицы, отличных от нуля, называется ее рангом (обозначение $r = \text{rang } A$), а любой минор матрицы, отличный от нуля и имеющий порядок r , называется ее базисным минором.

Находить ранг матрицы по определению достаточно непросто из-за перебора большого числа вариантов, но из определения элементарных преобразований и свойств определителя легко доказать, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы. Поэтому ранг можно найти с помощью элементарных преобразований — привести матрицу к ступенчатому виду. Ранг исходной матрицы будет равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы. При этом базисным можно взять минор, образованный элементами таких r строк и r столбцов ($r = \text{rang } A$), которые образуют минор треугольного вида.

ПРИМЕР 45. Найти ранг и базисный минор матрицы A примера 4.

РЕШЕНИЕ. Ранг матрицы A равен числу ненулевых строк матрицы D : $\text{rang } A = \text{rang } D = 3$. В качестве базисного минора ступенчатой матрицы D удобно выбрать минор третьего порядка треугольного вида, например,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52. Рангом r системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$, где $\mathbf{a}_i \in L^n$, называется максимальное число линейно независимых векторов этой системы, т.е. r — количество векторов максимальной линейно независимой подсистемы системы $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. В матрице $A = (a_{ij})$ размерности $(m \times n)$ строки $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ можно рассматривать как систему векторов арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, аналогично, столбцы $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ — система векторов арифметического пространства $\mathbb{R}^m$.

ТЕОРЕМА 23 (О ранге). Ранг матрицы A равен рангу системы ее строк, а также рангу системы ее столбцов.

Отметим важное следствие теоремы о ранге:

ТЕОРЕМА 24. Определитель равен нулю в том и только в том случае, если система его строк (столбцов) является линейно зависимой.

ПРИМЕР 46. Найдем условия, при выполнении которых, система векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ будет базисом линейного пространства L^n размерности n , если векторы заданы своими координатами в некотором базисе $\{\mathbf{e}_i\}$: $\mathbf{a}_i = a_{1i}\mathbf{e}_1 + a_{2i}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{ni}\mathbf{e}_n$, $i = 1, 2, \dots, n$.

РЕШЕНИЕ. Прежде всего, заметим, что надо найти необходимые и достаточные условия того, что ранг заданной системы векторов равен числу n , т.е. будет максимальным. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются координаты векторов $\mathbf{a}_i$. По теореме 23 ранг матрицы A равен рангу системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Но $\text{rang } A = n$ в том и только в том случае, если $\det A \neq 0$. Поэтому неравенство

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6.3)$$

является необходимым и достаточным условием, того, что система векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ может служить базисом пространства L^n . $\diamond$

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Если неравенство (6.3) переписать в виде равенства

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (6.4)$$

то получим необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Заметим, что при $n = 2$ условие (6.4) эквивалентно пропорции $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$ — условию коллинеарности системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, а при $n = 3$ — условию компланарности системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

6.4 Подпространства линейных пространств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53. Подпространством линейного пространства L называется всякое подмножество $L_1 \subset L$, которое само является ли-

нейным пространством относительно операций сложения и умножения на число, определенных во всем линейном пространстве L .

ТЕОРЕМА 25. Для того, чтобы подмножество $L_1 \subset L$ было подпространством линейного пространства L , необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in L_1$ для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L_1$; 2) $\lambda \mathbf{u} \in L_1$, для любого вектора $\mathbf{u} \in L_1$ и произвольного числа $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. множество L_1 должно быть замкнутым относительно линейных операций.

ПРИМЕРЫ ПОДПРОСТРАНСТВ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

1. Линейное пространство L_0 примера 42 является подпространством пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Множество векторов вида $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ два неколлинеарных вектора, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — произвольные числа, является подпространством векторного пространства V^3 .

3. Множество $D(a, b)$ дифференцируемых на интервале (a, b) функций является линейным подпространством пространства $C^0(a, b)$ непрерывных на интервале (a, b) функций.

6.5 Задачи и упражнения

Выяснить, являются ли линейными пространствами следующие множества с указанными линейными операциями.

177. Множество V^1 всех геометрических векторов пространства, коллинеарных фиксированной прямой, с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число.

178. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$ — произвольные числа, с обычными операциями сложения матриц и умножения на число.

179. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 5 \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$ — произвольные числа, с обычными операциями сложения матриц и умножения на число.

180. Все векторы из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению: 1) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, 2) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

181. Множество $\mathbb{R}^n$ всех n -мерных столбцов, если линейные операции определить как операции над матрицами:

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

182. Множество L всех геометрических векторов, выходящих из начала координат, концы которых лежат на фиксированной прямой, с обычными линейными операциями.

183. Множество всех многочленов степени n с обычными линейными операциями.

184. Множество $\mathbb{R}^n$ всех n -мерных строк, если линейные операции $\oplus$ — «сложение» и $\odot$ — «умножение на число» определить следующим образом:

- 1) $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)$; $\lambda \odot \mathbf{a} = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \dots, \lambda \cdot a_n)$;
 2) $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)$; $\lambda \odot \mathbf{a} = (a_1^\lambda, a_2^\lambda, \dots, a_n^\lambda)$.

185. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и вектор $\mathbf{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе линейного пространства L^3 . Доказать, что системы векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ сами образуют базис в L^3 и разложить вектор $\mathbf{x}$ по этому базису, если:

- 1) $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{x} = (6, 9, 14)$;
 2) $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\mathbf{e}_2 = (3, 2, -5)$, $\mathbf{e}_3 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{x} = (6, 2, -7)$.

186. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ и вектор $\mathbf{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе линейного пространства L^4 . Доказать, что системы векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ сами образуют базис в L^4 и разложить вектор $\mathbf{x}$ по этому базису, если:

- 1) $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 2, 1, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 2, 1)$, $\mathbf{e}_4 = (1, 3, 2, 3)$, $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0)$; 2) $\mathbf{e}_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 2, 1, 4)$, $\mathbf{e}_4 = (1, 3, -1, 0)$, $\mathbf{x} = (7, 14, -1, 2)$.

187. Доказать, что система многочленов $g_3(t) = t^3 + t^2 + t + 1$, $g_2(t) = t^2 + t + 1$, $g_1(t) = t + 1$, $g_0(t) = 1$ образует базис в пространстве $\mathcal{P}_4$ всех многочленов степени не выше 3.

188. Доказать, что система многочленов $g_1(t) = t^2 + 1$, $g_2(t) = -t^2 + 2t$, $g_3(t) = t^2 - t$ образует базис в пространстве $\mathcal{P}_3$ всех многочленов степени не выше 2. Найти разложение многочлена $f(t) = -2t^2 + t - 1$ в этом базисе.

189. Доказать, что система матриц $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образует базис в пространстве $M_{2,2}$ всех матриц размерности (2×2) — канонический базис. Найти разложение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

190. Доказать, что система матриц $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ линейно независима и может быть принята в качестве базиса в пространстве $M_{2,2}$ всех матриц размерности (2×2) . Найти разложение матрицы B в этом базисе:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

191. Показать, что множество симметрических матриц 2-го порядка образует линейное подпространство всех квадратных матриц 2-го порядка. Доказать, что система матриц $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образует базис этого подпространства, и определить его размерность.

192. Показать, что система матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

образует базис пространства симметрических матриц 2-го порядка и и разложить матрицу $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, по этому базису.

193. Показать, что многочлены $\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 3. Разложить многочлены $P(x) = 5 + 11x - 7x^2 + 2x^3$ и $Q(x) = 1 + 5x - 3x^2 + x^3$ по этому базису.

Модуль 7

Системы линейных уравнений (общая теория)

7.1 Однородные системы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 54. Система линейных уравнений вида $AX = 0$ называется однородной.

Любая однородная система совместна, так как обладает хотя бы одним решением — нулевым. Поэтому главной задачей является: выяснить условия, при которых однородная система обладает ненулевыми решениями, и установить структуру решений однородных систем.

ТЕОРЕМА 26. Множество решений однородной системы линейных уравнений $AX = 0$ является линейным подпространством арифметического линейного пространства $\mathbb{R}^n$, где n — число неизвестных.

Действительно, любое решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ однородной системы является элементом пространства $\mathbb{R}^n$. Если X_1 и X_2 два различных решения однородной системы, то $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$, т.е. сумма решений однородной системы является ее решением; далее, если X — решение однородной системы и $\lambda \in \mathbb{R}$ — произвольное число, то $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda \cdot 0 = 0$, т.е. произведение решения на число — снова решение системы.

ТЕОРЕМА 27. Размерность k пространства решений однородной системы линейных уравнений равна $n - r$, где n — число неизвестных, r — ранг основной матрицы системы.

Предположим, для определенности, что в результате преобразований к ступенчатому виду, базисный минор находится в левом верхнем углу, т.е. основная матрица A приведена к виду:

$$A \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1r}x_r + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1n}x_n & = & 0, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2r}x_r + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{2n}x_n & = & 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{rr}x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{rn}x_n & = & 0. \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{lcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1r}x_r & = & -a'_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{1n}x_n, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2r}x_r & = & -a'_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a'_{rr}x_r & = & -a'_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{rn}x_n. \end{array} \right. \quad (7.1)$$

Будем последовательно придавать параметрам значения $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = \dots = x_n = 0$; затем $x_{r+2} = 1$, $x_{r+1} = x_{r+3} = \dots = x_n = 0$ и т.д.

В результате мы получим $k = n - r$ столбцов—решений системы (7.1):

$$E_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{r-1,1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{r-1,2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{r-1,k} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор вида

$$X = C_1 E_1 + C_2 E_2 + \dots + C_k E_k, \quad (7.2)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ — произвольные вещественные числа, является решением однородной системы.

Система векторов $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ — линейно независима. Действительно, нулевая линейная комбинация этих векторов возможна только с нулевыми коэффициентами, т.к. равенство

$$\begin{aligned} C_1 E_1 + C_2 E_2 + \dots + C_k E_k &= \\ &= C_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{r-1,1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{r-1,2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + C_k \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{r-1,k} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + \dots + C_k x_{1k} \\ C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + \dots + C_k x_{2k} \\ \dots \\ C_1 x_{r-1,1} + C_2 x_{r-1,2} + \dots + C_k x_{r-1,k} \\ C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

справедливо только при $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$.

С другой стороны, произвольное решение $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*, x_{r+1}^*, x_{r+2}^*, \dots, x_n^*$ однородной системы может быть представлено в виде (7.2). Для этого достаточно положить $C_1 = x_{r+1}^*, C_2 = x_{r+2}^*, \dots, C_k = x_n^*$, т.к. решая систему (7.1), мы найдем, причем единственным образом, по набору значений параметров $x_{r+1}^*, x_{r+2}^*, \dots, x_n^*$ значения неизвестных $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$.

Это показывает, что система векторов $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ является базисом пространства решений однородной системы.

Систему векторов $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ называют также фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений, а вектор X вида (7.2) — общим решением однородной системы линейных уравнений. $\diamond$

Из теоремы 7.6 следует, что однородная система $AX = 0$ обладает только нулевым решением, если $r = \text{rang } A = n$, где n — число неизвестных, и имеет ненулевые решения, если $r = \text{rang } A < n$, причем этих решений бесконечно много: они образуют линейное пространство размерности $k \geq 1$.

Отсюда следует, что, если в однородной системе линейных уравнений число неизвестных равно числу уравнений, то ненулевое решение этой системы существует в том и только в том случае, если $\det A = 0$.

ПРИМЕР 47. Найти размерность, базис пространства решений и общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Приведем матрицу A к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $r = \text{rang } A = 2$. Размерность пространства решений $k = n - r = 4 - 2 = 2$. Эквивалентная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

с базисным минором $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, связанными переменными x_1, x_2 и свободными x_3, x_4 .

Придадим свободным переменным значения $x_3 = 1, x_4 = 0$. Тогда система (7.3) примет вид $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4 = 0, \\ x_2 + 6 = 0, \end{cases}$ откуда получаем $x_2 = -6, x_1 = 8$, т.е. $E_1 = (8, -6, 1, 0)^\top$ — первое фундаментальное решение. Аналогично, при $x_3 = 0, x_4 = 1$ система (7.3) примет вид $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3 = 0, \\ x_2 - 5 = 0, \end{cases}$ откуда $E_2 = (-7, 5, 0, 1)^\top$ — второе фундаментальное решение.

Общее решение системы в матричной форме можно записать как

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \cdot E_1 + C_2 \cdot E_2 = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и в развернутой координатной форме $\begin{cases} x_1 = 8C_1 - 7C_2, \\ x_2 = -6C_1 + 5C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$

ПРИМЕР 48. Найти размерность, базис пространства решений и общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Приведем матрицу A системы к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $r = \text{rang } A = 2$, следовательно, размерность подпространства решений $k = n - r = 5 - 2 = 3$. В качестве связанных переменных можно взять x_1 и x_2 .

Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Последовательно придавая свободным переменным x_3 , x_4 и x_5 значения $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$, находим из этой системы уравнений базис решений однородной системы:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или в развернутой координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = 3C_1 + C_3, \\ x_2 = -4C_1 + C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2, \\ x_5 = C_3. \end{cases}$$

ПРИМЕР 49. Установить линейную зависимость системы векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 6, 4, -5)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 9, 6, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (5, 6, 4, -1)$.

РЕШЕНИЕ. Задачи такого типа предполагают, что надо: 1) установить сам факт линейной зависимости; 2) найти все ненулевые наборы коэффициентов, дающих нетривиальную нулевую линейную комбинацию.

Будем искать x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что линейная комбинация $x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 = 0$. В матричном виде это запишется как

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

что эквивалентно однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0, \\ -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем основную матрицу к ступенчатому виду.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Видим, что $r = 3$, $k = n - r = 4 - 3 = 1$. Система имеет ненулевые решения, что означает линейную зависимость системы векторов.

Найдем теперь коэффициенты. Берем x_3 в качестве параметра. Положив $x_3 = 1$, подставим в преобразованную систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3 + 5x_4 = 0, \\ x_2 - 3 - 9x_4 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

откуда получаем $x_4 = 0$, $x_2 = 3$, $x_1 = -9$.

Таким образом, $E = (-9, 3, 1, 0)^\top$ — базис решений однородной системы; $X = CE = (-9C, 3C, C, 0)^\top$ — общее решение однородной системы линейных уравнений; $-9C\mathbf{a}_1 + 3C\mathbf{a}_2 + C\mathbf{a}_3 = 0$ — общий вид линейной зависимости данной системы векторов (C — произвольная константа). $\diamond$

7.2 Неоднородные системы

ТЕОРЕМА 28 (Критерий Кронекера—Капелли). Система m линейных уравнений с n неизвестными совместна тогда и только тогда, когда $\text{rang } A = \text{rang } A^*$, где A — основная матрица системы, A^* — расширенная матрица системы.

ТЕОРЕМА 29 (Структура общего решения неоднородной системы). Общее решение неоднородной системы

$$AX = B \quad (7.4)$$

может быть найдено в виде

$$X = X^* + X_0, \quad (7.5)$$

где X^* — некоторое частное решение неоднородной системы (7.4); $X_0 = C_1 \cdot E_1 + C_2 \cdot E_2 + \dots + C_{n-r} \cdot E_{n-r}$ — общее решение соответствующей однородной системы $AX = 0$; $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$ — базис пространства решений однородной системы, $r = \text{rang } A$ — ранг основной матрицы системы.

Формула (7.5) универсальна — содержит в себе все возможные случаи. Действительно, если $\text{rang } A \neq \text{rang } A^*$, то система (7.4) несовместна, и общее решение X не существует, поскольку нет частного решения X^* ; если $\text{rang } A = \text{rang } A^* = n$, мы имеем $X = X^*$, т.е. частное решение является единственным (совместная система является определенной), поскольку соответствующая однородная система имеет только нулевое решение; наконец, когда $\text{rang } A = \text{rang } A^* < n$ имеем общий случай — неопределенную систему. Заметим, что в этом случае решений бесконечно много, так как размерность пространства решений однородной системы по крайней мере единица ($k = n - r \geq 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Формула (7.5) имеет простую геометрическую интерпретацию — она представляет собой параметрическое уравнение плоскости размерности $k = n - r$ в объемлющем n -мерном пространстве с начальной точкой X^* и направляющими векторами $E_1, E_2, \dots, E_k$.

Практически общее решение (7.5) находится с помощью метода Гаусса: расширенную матрицу $A^* = (A|B)$ с помощью алгоритма Гаусса приводим к ступенчатому виду $A'^* = (A'|B')$, находим ранги матриц A и A^* , проверяем условие совместности; если система совместна, то

в матрице A' выбираем базисный минор M треугольного вида и связанные переменные (неизвестные) x_i с номерами, соответствующими столбцам базисного минора, остальные $k = n - r$ неизвестных будут свободными переменными (параметрами); придавая свободным переменным (параметрам) нулевые значения, находим связанные переменные (неизвестные), — в результате получим частное решение X^* неоднородной системы. Способ нахождения базиса пространства решений и общего решения однородной системы мы уже знаем.

ПРИМЕР 50. Методом Гаусса исследовать систему на совместность и в случае совместности найти общее решение:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 2, \\ -6x_1 + 12x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Расширенную матрицу системы

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ -6 & 12 & -6 & 9 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

алгоритмом Гаусса приведем к ступенчатому виду (см. пример 4):

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{0} & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0} & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

откуда видно, что $r = \text{rang } A = \text{rang } A^* = 3$, следовательно, система совместна, при этом $k = n - r = 4 - 3 = 1$ — размерность пространства решений соответствующей однородной системы.

В качестве базисного минора матрицы A выберем минор треугольного вида

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как ранг системы меньше числа неизвестных ($r = 3 < n = 4$), то система является неопределенной. Базисный минор расположен на

столбцах с номерами 1, 3 и 4, поэтому связанными переменными будут x_1, x_3, x_4 , свободная переменная — x_2 .

Заменяем исходную систему равносильной, соответствующей ступенчатой матрице $(A'|B')$,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 2, \\ + x_3 + 9x_4 = -4, \\ + x_4 = -1. \end{cases} \quad (7.6)$$

Подставим в систему (7.6) значение параметра $x_2 = 0$. Решив полученную систему методом последовательных исключений, получим $x_4 = -1$, $x_3 = -4 - 9x_4 = 5$, $x_1 = 2 - x_3 + 4x_4 = -7$. Значит, $X^* = (-7, 0, 5, -1)^\top$ — частное решение.

Перепишем систему (7.6) как однородную (заменяем столбец свободных членов нулями) и подставим значение параметра $x_2 = 1$, получим в результате систему

$$\begin{cases} x_1 - 2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ + x_3 + 9x_4 = 0, \\ + x_4 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = 2$. Таким образом, базис решений однородной системы: $E = (2, 1, 0, 0)^\top$.

Ответ можно записать в матричной форме

$$X = X^* + X_0 = X^* + CE = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 + 2C \\ C \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или в развернутой координатной

$$\begin{cases} x_1 = -7 + 2C, \\ x_2 = C, \\ x_3 = 5, \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

Полученное общее решение геометрически представляет из себя параметрическое уравнение прямой с начальной точкой $M_0(-7, 0, 5, -1)$ и направляющим вектором $\mathbf{a} = \{2, 1, 0, 0\}$ в четырехмерном пространстве. $\diamond$

ПРИМЕР 51. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 5. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, прежде всего, что основная матрица A нашего примера совпадает с матрицей A примера 47.

Приведем к ступенчатому виду матрицу $A^* = (A|B)$.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Видим, что $r = \text{rang } A = \text{rang } A^* = 2$, следовательно, система совместна. Система, эквивалентная первоначальной, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 1, \end{cases}$$

откуда при $x_3 = x_4 = 0$ имеем $x_2 = 1$, $x_1 = -1$, таким образом, $X^* = (-1 \ 1 \ 0 \ 0)^\top$ — частное решение.

Воспользовавшись тем, что общее решение соответствующей однородной системы найдено в примере 47, получим общее решение неоднородной системы в матричной форме

$$\begin{aligned} X &= X^* + X_0 = X^* + C_1 \cdot E_1 + C_2 \cdot E_2 = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

То же самое в развернутой координатной форме записи:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 8C_1 - 7C_2, \\ x_2 = 1 - 6C_1 + 5C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

Полученное общее решение геометрически можно проинтерпретировать как параметрическое уравнение двумерной плоскости с начальной

точкой $M_0(-1, 1, 0, 0)$ и направляющими векторами $\mathbf{a}_1 = \{8, -6, 1, 0\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{-7, 5, 0, 1\}$ в четырехмерном пространстве. $\diamond$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55. Линейной оболочкой системы векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ линейного пространства L^n называется множество всевозможных линейных комбинаций $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{x}_m$ этих векторов. Линейная оболочка является линейным подпространством пространства L^n .

ПРИМЕР 52. Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы векторов пространства $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{x}_1 = (-4, 6, 0, 0), \mathbf{x}_2 = (5, 3, 2, 0), \mathbf{x}_3 = (2, 0, -3, 8), \mathbf{x}_4 = (7, 3, -1, 8).$$

РЕШЕНИЕ. Найдем ранг системы векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ как ранг матрицы, составленной из координат данных векторов.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Видим, что $\text{rang } A = 3$. Следовательно, размерность линейной оболочки заданной системы векторов равна 3. В качестве базиса могут быть взяты векторы $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, соответствующие столбцам базисного минора. $\diamond$

ПРИМЕР 53. Найти разложение вектора $\mathbf{x}_4$ из примера 52 по векторам $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ того же самого примера.

РЕШЕНИЕ. Искомое разложение вектора $\mathbf{x}_4$ имеет вид: $\mathbf{x}_4 = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3$ с неизвестными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Расписав векторное равенство в координатном виде, получим систему линейных уравнений для нахождения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} -4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 7, \\ 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = 3, \\ 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = -1, \\ 8\alpha_3 = 8. \end{cases}$$

Так как расширенная матрица полученной системы совпадает с матрицей A предыдущего примера, и с помощью алгоритма Гаусса мы уже привели ее к ступенчатому виду, наша система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} -4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 7, \\ 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = -1, \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

Отсюда легко найти, что $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$; т.е. разложение вектора $\mathbf{x}_4$ в базисе $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ имеет вид $\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$. $\diamond$

7.3 Замена базиса

Пусть в n -мерном линейном пространстве L^n выбраны два базиса $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}'_i\} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\}$. Условимся базис $\{\mathbf{e}_i\}$, в обозначении которого нет «штрихов», называть старым, «штрихованный» базис $\{\mathbf{e}'_i\}$ — новым. Предположим, что нам известны координаты новых базисных векторов в старом базисе:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{21}\mathbf{e}_2 + \dots + s_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2 &= s_{12}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + s_{n2}\mathbf{e}_n, \\ &\dots \dots \\ \mathbf{e}'_n &= s_{1n}\mathbf{e}_1 + s_{2n}\mathbf{e}_2 + \dots + s_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Пусть произвольный вектор $\mathbf{x} \in L$ разложен по старому и новому базисам:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + \dots + x'_n \mathbf{e}'_n. \quad (7.8)$$

Подставив в это выражение представление (7.7) векторов $\mathbf{e}'_i$ через $\mathbf{e}_i$, получим равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = \\ &= x'_1 (s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{21}\mathbf{e}_2 + \dots + s_{n1}\mathbf{e}_n) + x'_2 (s_{12}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + s_{n2}\mathbf{e}_n) + \\ &\quad + \dots + x'_n (s_{1n}\mathbf{e}_1 + s_{2n}\mathbf{e}_2 + \dots + s_{nn}\mathbf{e}_n). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Отсюда можно, приведя подобные при векторах $\mathbf{e}_i$ в правой части, вывести формулы, выражающие старые координаты вектора $\mathbf{x}$ через

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Фактически равенства (7.13) и (7.14) являются системами линейных уравнений с неизвестными x'_i и x_i соответственно. Основные матрицы этих систем S и S^{-1} невырождены, поэтому у каждой системы имеется единственное решение, т.е. новые координаты по старым и старые по новым координатам находятся однозначно.

ПРИМЕР 54. Доказать, что векторы $E_1 = (1, 2, -1, -2)^\top$, $E_2 = (2, 3, 0, -1)^\top$, $E_3 = (1, 2, 1, 4)^\top$, $E_4 = (1, 3, -1, 0)^\top$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^4$ и разложить вектор $X = (7, 14, -1, 2)^\top$ по этому базису.

РЕШЕНИЕ. 1) Докажем, что данная система векторов—столбцов линейно независима. Воспользуемся условием (6.4) — составим и вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Таким образом, система векторов $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ линейно независима и число векторов в ней равно размерности пространства, т.е. она является базисом—максимальной линейно независимой системой.

2) Разложить вектор X по базису $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ — значит найти коэффициенты линейной комбинации $X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4$. Последнее равенство для столбцов равносильно системе четырех равенств для координат этих столбцов:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14, \\ -x_1 + x_3 - x_4 = -1, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Таким образом, координатный столбец $X = 2E_2 + E_3 + 2E_4$. $\diamond$

ПРИМЕР 55. Доказать, что система многочленов $f_1(x) = 1 + 2x - x^2 - 2x^3$, $f_2(x) = 2 + 3x - x^3$, $f_3(x) = 1 + 2x + x^2 + 4x^3$, $f_4(x) = 1 + 3x - x^2$ образует базис в пространстве $\mathcal{P}_4$ всех многочленов степени не выше 3, и разложить по этому базису многочлен $g(x) = 7 + 14x - x^2 + 2x^3$.

РЕШЕНИЕ. ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Решим сначала задачу неформальным, содержательным способом. Так $\dim \mathcal{P}_4 = 4$, то система векторов

$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ образуют базис, если она линейно независима. Линейную независимость докажем так же, как в примере 44 — приравняем нулю линейную комбинацию данных многочленов

$$\alpha_1 \cdot (1 + 2x - x^2 - 2x^3) + \alpha_2 \cdot (2 + 3x - x^3) + \\ + \alpha_3 \cdot (1 + 2x + x^2 + 4x^3) + \alpha_4 \cdot (1 + 3x - x^2) = 0$$

что означает равенство нулю коэффициентов при всех степенях x многочлена в левой части:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0, \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса, видим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ — единственное решение. Значит, система $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ линейно независима и образуют базис.

Чтобы разложить многочлен $g(x)$ по этому базису, представим его в виде линейной комбинации $g(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) + x_4 f_4(x)$, которая означает, что с некоторыми неизвестными коэффициентами x_1, x_2, x_3, x_4 для всех вещественных x должно выполняться равенство

$$7 + 14x - x^2 + 2x^3 = x_1 (1 + 2x - x^2 - 2x^3) + x_2 (2 + 3x - x^3) + \\ + x_3 (1 + 2x + x^2 + 4x^3) + x_4 (1 + 3x - x^2).$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x у многочленов, стоящих слева и справа, получим систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14, \\ -x_1 + x_3 - x_4 = -1, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Таким образом, разложение многочлена $g(x)$ базису $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ имеет вид: $g(x) = 2f_2(x) + f_3(x) + 2f_4(x)$.

Второй способ. Решим задачу более простым, формальным способом. Так как коэффициенты многочлена — это его координаты в каноническом базисе, мы можем сопоставить каждому многочлену его координатный столбец.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение задачи сводится к доказательству линейной независимости столбцов f_1, f_2, f_3, f_4 и к разложению столбца g по базису $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ как это проделано в примере 54. $\diamond$

ПРИМЕР 56. Проверив, что векторы $e'_1 = 2i - j$, $e'_2 = 2i - k$, $e'_3 = i + 2k$ образуют базис, найти координаты вектора $x = 2i + 3j + k$ в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

РЕШЕНИЕ. Убедимся сначала, что система векторов $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ является базисом. Для этого вычислим определитель матрицы S , столбцами которой являются координаты векторов $\{e'_i\}$:

$$\det S = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Значит, согласно условию (6.4), система векторов $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ линейно независима, следовательно является базисом.

Формула (7.10), выражающая старые координаты через новые, в нашем случае имеет вид следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2 = 2x'_1 + 2x'_2 + x'_3, \\ 3 = -x'_1, \\ 1 = -x'_2 + 2x'_3. \end{cases} \quad (7.15)$$

Решив ее любым из известных способов, найдем $x'_1 = -3$, $x'_2 = 3$, $x'_3 = 2$, откуда следует, что разложение вектора x по базису $\{e'_i\}$ имеет вид: $x = -3e'_1 + 3e'_2 + 2e'_3$. $\diamond$

Заметим, что основная матрица системы (7.15) совпадает с матрицей S перехода от старой системы к новой, а формула (7.14) фактически является записью алгебраического метода решения системы линейных уравнений (7.13), если считать X столбцом свободных членов, а X' — столбцом неизвестных. Таким образом, оба способа решения предыдущего примера совпадают по сути.

ПРИМЕР 57. В пространстве L^2 векторы $\{e_1, e_2\}$ и $\{e'_1, e'_2\}$ заданы своими координатами столбцами в некотором базисе:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad E'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E'_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1) Доказать, что системы векторов $\{e_1, e_2\}$ и $\{e'_1, e'_2\}$ образуют базисы в L^2 ; 2) найти матрицу перехода S от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e'_1, e'_2\}$; 3) найти координаты вектора $x = e_1 - 2e_2$ в базисе $\{e'_1, e'_2\}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Составим матрицы $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\{i, j\}$ к системе $\{e_1, e_2\}$ и $S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\{i, j\}$ к системе $\{e'_1, e'_2\}$. Так как $\det S_1 = -1 \neq 0$ и $\det S_2 = 1 \neq 0$, системы $\{e_1, e_2\}$ и $\{e'_1, e'_2\}$ действительно являются базисами.

2) Пусть произвольному вектору x соответствуют координатные столбцы X в базисе $\{i, j\}$, X_1 — в базисе $\{e_1, e_2\}$ и X_2 — в базисе $\{e'_1, e'_2\}$. Тогда по формулам (7.13) имеем $X = S_1 \cdot X_1$ и $X = S_2 \cdot X_2$, откуда $S_1 \cdot X_1 = S_2 \cdot X_2$, значит, $X_1 = S_1^{-1} \cdot S_2 \cdot X_2$. Таким образом, $S = S_1^{-1} \cdot S_2$ будет матрицей перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e'_1, e'_2\}$. Вычислим

$$S_1^{-1} = - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$S = S_1^{-1} \cdot S_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

3) Координаты вектора $x = e_1 - 2e_2$ в базисе $\{e'_1, e'_2\}$ найдем как решение системы уравнений $\begin{cases} 1 = -7x_2 - 11y_2, \\ -2 = 5x_2 + 8y_2. \end{cases}$ По формулам Кра-

$$\text{мера } \Delta = \begin{vmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -11 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-14}{-1} = 14 \text{ и}$$

$$y_2 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{9}{-1} = -9.$$

Таким образом, вектор $x = e_1 - 2e_2 = 14e'_1 - 9e'_2$. $\diamond$

7.4 Задачи и упражнения

194. Вычислить ранг матрицы, выписать базисный минор исходной или эквивалентной ей ступенчатой матрицы:

$$\begin{aligned}
 & 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \\
 & 5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; 6) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}; 7) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \\
 & 8) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}; 9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \\
 & 10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 \end{pmatrix}; 11) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

195. Указать все группы неизвестных, которые могут быть свободными переменными (параметрами) в системе

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

196. Исследовать системы уравнений на совместность, найти общее и одно частное решения:

$$\begin{aligned}
 & 1) \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3; \end{cases} & 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \\
 & 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6; \end{cases} & 4) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 11x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_3 = -1, \\ 11x_1 + 4x_2 + 56x_3 = 5; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$5) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

197. Исследовать совместность и найти общее решение системы в зависимости от параметра λ :

$$1) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

198. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы:

$$1) 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0; \quad 2) \begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0, \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0, \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0, \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases} & 5) \quad \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0, \\ -x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \\
6) \quad & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases} & 7) \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\
8) \quad & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases} & 9) \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0; \end{cases} \\
10) \quad & \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

199. Найти общее решение неоднородной системы, представив его через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы и частное решение неоднородной:

$$\begin{aligned}
1) \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 1 = 0; & 2) \quad x + 5y - 3z + 4 = 0; \\
3) \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5 = 0; \end{cases} & 4) \quad \begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = -1, \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = -2; \end{cases} \\
5) \quad & \begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = -7, \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 5, \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = -13; \end{cases} & 6) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8; \end{cases} \\
7) \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -4; \end{cases} & 8) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1; \end{cases} \\
9) \quad & \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = -2, \\ x_2 - x_4 + x_6 = -2, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 3, \\ x_2 + x_3 + x_6 = -5, \\ -x_4 + x_5 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

200. Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки заданной системы векторов пространства $\mathbb{R}^n$:

- 1) $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 1, 1, 1)$,
 $\mathbf{x}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{x}_5 = (0, 1, 2, 3)$;
- 2) $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\mathbf{x}_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$,
 $\mathbf{x}_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $\mathbf{x}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$;
- 3) $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (0, -1, 2, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (1, -1, 4, -1)$;
- 4) $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, -1, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (0, 0, 1, -1)$,
 $\mathbf{x}_4 = (1, 0, 0, 1)$;
- 5) $\mathbf{x}_1 = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, -1)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 2, -1, -1)$,
 $\mathbf{x}_4 = (2, 4, -2, -2)$;
- 6) $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{x}_3 = (0, 0, 1)$;
- 7) $\mathbf{x}_1 = (1, 2, -3)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{x}_4 = (1, 1, 1)$.

201. Найти размерность и базис подпространств решений однородных системы линейных уравнений задачи 198 на стр. 127.

202. Разложить векторы нового базиса $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ по старому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, если задана матрица S перехода от базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к базису $\{\mathbf{e}'_i\}$. Выписать уравнения, связывающие координаты вектора $\mathbf{x}$ в старом и новом базисах.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

203. Заданы соотношения, связывающие координаты вектора $\mathbf{x}$ в старом и новом базисах:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y', \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y', \\ z = z'. \end{cases}$$

Выписать матрицу перехода S от старого базиса к новому. Найти координаты векторов нового базиса в старом базисе.

204. Выписать матрицу перехода S от базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ к базису $\{\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\}$. Найти обратную матрицу S^{-1} и координаты вектора $\mathbf{x} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ в новом базисе.

205. Найти матрицу перехода S от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ к базису $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, если все векторы заданы своими координатами в некотором исходном

базисе пространства L^2 : $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (-1, 0)$, $e'_1 = (2, 1)$, $e'_2 = (0, 1)$. Найти обратную матрицу S^{-1} и координаты вектора $x = e_1 + 2e_2$ в базисе $\{e'_1, e'_2\}$.

206. В пространстве V^3 заданы векторы: $e'_1 = i + j$, $e'_2 = i - j$, $e'_3 = -i + 2j - k$. Доказать, что они образуют базис в V^3 , найти матрицу S перехода от базиса $\{i, j, k\}$ к базису $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ и координаты вектора $x = i - 2j + 2k$ в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

207. В пространстве V^3 заданы системы векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$ и $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ своими координатами в некотором базисе: $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 3)$, $e_3 = (3, 7, 1)$; $e'_1 = (3, 1, 1)$, $e'_2 = (5, 2, 1)$, $e'_3 = (1, 1, -6)$. Доказать, что системы $\{e_i\}$ и $\{e'_i\}$ образуют базисы. Найти матрицу перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_i\}$.

208. Решить задачи 185, 186, 188, 189, 190, 192, 193 с помощью матрицы перехода от старого базиса к новому.

Модуль 8

Евклидовы пространства

8.1 Скалярное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57. Скалярным произведением в линейном пространстве L называется отображение, которое каждой паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ ставит в соответствие вещественное число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ — коммутативность;
- 2) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — однородность;
- 3) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ — дистрибутивность;
- 4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — положительная определенность.

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Скалярное произведение в произвольном линейном пространстве является обобщением скалярного произведения, ранее введенного в векторных пространствах V^2 и V^3 , при этом свойства скалярного произведения векторов из V^2 и V^3 становятся аксиомами скалярного произведения в абстрактных линейных пространствах.

Будем обозначать скалярное произведение в произвольном линейном пространстве через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в отличие от обозначения $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ скалярного произведения векторов из V^2 и V^3 .

Линейное пространство со скалярным произведением называется евклидовым пространством. Обозначать евклидово пространство будем через E или через E^n , если размерность линейного пространства L , в котором введено скалярное произведение, равна n .

В евклидовом пространстве можно ввести метрику—аналог длины вектора и угла между векторами.

Аксиома положительной определенности скалярного произведения $((\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0)$ позволяет корректно определить норму вектора:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58. Нормой вектора $\mathbf{x} \in E$ называется число $\|\mathbf{x}\|$, которое определяется равенством $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Норма вектора — обобщение понятия длины или модуля вектора.

ТЕОРЕМА 30 (Свойства нормы вектора). Для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ евклидового пространства E и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства:

- 1) $\|\mathbf{x}\| > 0$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, и $\|\mathbf{x}\| = 0$, если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- 2) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$;
- 3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ — неравенство треугольника.

ТЕОРЕМА 31 (Неравенство Коши—Буняковского). Для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ выполняются следующее неравенство Коши—Буняковского: $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

Из неравенств Коши—Буняковского следует, что $\frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \leq 1$, поэтому можно корректно определить угол между векторами:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 59. Углом между ненулевыми векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ евклидового пространства E называется угол $\varphi \in [0, \pi]$, косинус которого определен равенством $\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$.

В частности, ненулевые векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

ПРИМЕРЫ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ.

1. Векторные пространства V^2 и V^3 с обычным скалярным произведением являются евклидовыми.

2. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ становится евклидовым, если определить скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ равенством $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

3. Линейное пространство $C^0[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций становится евклидовым, если скалярное произведение векторов—функций $f \in C^0[a, b]$ и $g \in C^0[a, b]$ определить равенством $(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$.

4. В частности, пространство $\mathcal{P}_n[a, b]$ всех многочленов $P_n(t)$ степени не выше $n - 1$, где $t \in [a, b]$, является евклидовым пространством, если скалярное произведение векторов—многочленов $P = P_n(t)$ и $Q = Q_n(t)$ определить равенством $(P, Q) = \int_a^b P_n(t) \cdot Q_n(t) dt$.

ПРИМЕР 58. Проверить, можно ли в линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^2$ определить скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ с помощью следующих равенств: 1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2$; 2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_1$; 3) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_2$?

РЕШЕНИЕ. Проверим для каждого из случаев выполнение аксиом скалярного произведения.

Первый случай. 1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 = y_1x_1 + 2y_2x_2 = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ — выполнено; 2) $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda x_1)y_1 + 2(\lambda x_2)y_2 = \lambda(x_1y_1 + 2x_2y_2) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — выполнено; 3) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 = (x_1z_1 + 2x_2z_2) + (y_1z_1 + 2y_2z_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ — выполнено; 4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 > 0$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, 0)$ — выполнено.

Второй случай. Как и в предыдущем случае, легко проверить, что аксиомы 1)–3) выполняются. Аксиома 4) не выполняется, так как «скалярный квадрат» $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2x_1x_2$ может принимать отрицательные значения.

Третий случай. Нарушается первая аксиома — аксиома коммутативности, т.к. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_2 \neq 2y_1x_2 = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$. $\diamond$

8.2 Ортонормированный базис

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60. Базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ n -мерного евклидова пространства E^n называется ортонормированным, если векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ ортогональны при $i \neq j$ и норма каждого вектора $\mathbf{e}_i$ равна единице, т.е. выполняются равенства

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.1)$$

СВОЙСТВА ОРТОНОРМИРОВАННОГО БАЗИСА.

Пусть векторы $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \dots + y_n\mathbf{e}_n$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ евклидова пространства E^n . Тогда выполняются следующие свойства.

1. Скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i. \quad (8.2)$$

2. Норма вектора задается формулой

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (8.3)$$

3. Косинус угла между векторами вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}}. \quad (8.4)$$

ПРИМЕР 59. В евклидовом пространстве E^4 векторы $\mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 - 4\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Найти нормы векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и угол между ними.

РЕШЕНИЕ. Так как базис — ортонормированный, то скалярное произведение, нормы и косинус угла между векторами вычисляем по формулам (8.2)—(8.4).

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = -5 + 0 - 6 - 4 = -15; \\ \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{30}, \\ \|\mathbf{b}\| &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2} = \sqrt{5^2 + 0^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}; \\ \cos \varphi &= \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{-15}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{30}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$. $\diamond$

ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ГРАМА—ШМИДТА.

ПРИМЕР 60. В евклидовом пространстве E^3 задан некоторый базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Преобразовать его в ортогональный базис.

РЕШЕНИЕ. Положим $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$. Второй базисный вектор будем искать в виде $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 + \alpha\mathbf{e}'_1$, где неизвестен коэффициент α . Для его

нахождения приравняем нулю скалярное произведение векторов e'_2 и e'_1 : $(e'_2, e'_1) = (e_2 + \alpha e'_1, e'_1) = (e_2, e'_1) + \alpha(e'_1, e'_1) = 0$, откуда $\alpha = -\frac{(e_2, e'_1)}{(e'_1, e'_1)}$. Аналогично, третий базисный вектор ищем в виде $e'_3 = e_3 + \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2$. Из равенств $(e'_3, e'_1) = 0$ и $(e'_3, e'_2) = 0$ получим, что $\beta_1 = -\frac{(e_3, e'_1)}{(e'_1, e'_1)}$, $\beta_2 = -\frac{(e_3, e'_2)}{(e'_2, e'_2)}$.

Осталось показать, что полученная система векторов $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ является базисом. Это легко увидеть из того, что матрица

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta_1 + \alpha\beta_2 \\ 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

перехода от системы $\{e_i\}$ к системе $\{e'_i\}$ является невырожденной. $\diamond$

Решение примера 60 обобщается на произвольный случай, а именно произвольный базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ евклидова пространства E^n можно преобразовать в ортонормированный базис. Для этого сначала преобразуем базис $\{e_i\}$ в ортогональный базис $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ по формулам

$$e'_1 = e_1, \quad e'_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i e'_i, \quad \text{где } \alpha_i = -\frac{(e_k, e'_i)}{(e'_i, e'_i)}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (8.5)$$

Затем базис $\{e'_i\}$ преобразуется в ортонормированный базис $\{e_i\}$ путем нормирования векторов $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$:

$$e_i = \frac{e'_i}{\|e'_i\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Описанный алгоритм носит название процесс ортогонализации Грама—Шмидта.

ПРИМЕР 61. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ всех 3-мерных столбцов со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$, задан базис: $\mathbf{f}_1 = (2, 0, -1)^\top$, $\mathbf{f}_2 = (5, -1, 0)^\top$, $\mathbf{f}_3 = (1, 7, -3)^\top$. Используя процесс ортогонализации Грама—Шмидта, преобразовать его к ортонормированному базису.

РЕШЕНИЕ. Полагаем $e'_1 = \mathbf{f}_1 = (2, 0, -1)^\top$. Вектор e'_2 будем искать в виде $e'_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha_1 e'_1$. Имеем $(\mathbf{f}_2, e'_1) = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 10$,

$$(e'_1, e'_1) = 2^2 + 0^2 + 1^2 = 5. \text{ Поэтому } \alpha_1 = -\frac{(f_2, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} = -\frac{10}{5} = -2,$$

$$e'_2 = f_2 + \alpha_1 e'_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, вектор e'_3 будем искать в виде $e'_3 = f_3 + \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2$, где $\beta_1 = -\frac{(f_3, e'_1)}{(e'_1, e'_1)}$, $\beta_2 = -\frac{(f_3, e'_2)}{(e'_2, e'_2)}$. Вычисляем

$$\begin{aligned} (f_3, e'_1) &= 1 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) = 5, & (e'_1, e'_1) &= 5, & \beta_1 &= -1, \\ (f_3, e'_2) &= 1 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 = -12, & (e'_2, e'_2) &= 1^2 + (-1)^2 + 2^2 = 6, & \beta_2 &= 2, \\ e'_3 &= f_3 - e'_1 + 2e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что базис $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ — ортогональный. Чтобы перейти к ортонормированному базису, умножим каждый из векторов e'_i на число $\lambda_i = \frac{1}{\|e'_i\|}$:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\|e'_1\|} \cdot e'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}; \\ e_2 &= \frac{1}{\|e'_2\|} \cdot e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \\ e_3 &= \frac{1}{\|e'_3\|} \cdot e'_3 = \frac{1}{\sqrt{1+25+4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 62. В евклидовом пространстве $\mathcal{P}_3[0, 1]$ всех многочленов степени не выше 2, заданных на отрезке $[0, 1]$, с операцией скалярного произведения, определяемой равенством $(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, перейти от канонического базиса $\{f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = t^2\}$ к ортонормированному.

РЕШЕНИЕ. Нетрудно проверить, что канонический базис не является ортонормированным и даже ортогональным относительно введенного скалярного произведения. Воспользуемся процедурой ортогонализации Грама—Шмидта.

Вначале найдем ортогональный базис $\{g_1(t), g_2(t), g_3(t)\}$. Положим $g_1(t) = f_1(t) = 1$. Вторым базисным полином $g_2(t)$ будем искать в виде $g_2(t) = f_2(t) + \alpha_1 g_1(t) = t + \alpha_1 \cdot 1$, где $\alpha_1 = -\frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}$. Имеем

$$(f_2, g_1) = \int_0^1 f_2(t) g_1(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

$$(g_1, g_1) = \|g_1\|^2 = \int_0^1 dt = 1,$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad g_2(t) = t - \frac{1}{2}.$$

Аналогично, базисный полином $g_3(t)$ ищем в виде $g_3(t) = f_3(t) + \beta_1 g_1(t) + \beta_2 g_2(t) = t^2 + \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 t$, где $\beta_1 = -\frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)}$, $\beta_2 = -\frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)}$. Вычисляем

$$(f_3, g_1) = \int_0^1 f_3(t) g_1(t) dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{3},$$

$$(f_3, g_2) = \int_0^1 f_3(t) g_2(t) dt = \int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{12},$$

$$(g_2, g_2) = \|g_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}, \quad \beta_2 = -1,$$

$$g_3(t) = t^2 - \left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot 1 = t^2 - t + \frac{1}{6},$$

$$(g_3, g_3) = \|g_3\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180}.$$

Чтобы перейти к ортонормированному базису $\{h_1(t), h_2(t), h_3(t)\}$,

умножим каждый полином $g_i(t)$ на число $\lambda_i = \frac{1}{\|g_i\|}$. Учитывая предыдущие вычисления, получим: $h_1(t) = 1$, $h_2(t) = 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)$, $h_3(t) = 6\sqrt{5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$. $\diamond$

Замена ортонормированного базиса

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве E^n выбраны два ортонормированных базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$,

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от старого базиса $\{e_i\}$ к новому базису $\{e'_i\}$. Так как столбцы матрицы S являются координатами векторов e'_i нового ортонормированного базиса $\{e'_i\}$ в старом, тоже ортонормированном, базисе $\{e_i\}$, то выполняется свойство

$$\sum_{k=1}^n s_{ki}s_{kj} = (e'_i, e'_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad (8.6)$$

Матрицы S , обладающие свойством (8.6), называются ортогональными.

Ортогональная матрица обладает также следующими свойствами:

- 1) обратная к ортогональной матрице совпадает с транспонированной, то есть $S^{-1} = S^T$;
- 2) модуль определителя ортогональной матрицы равен единице, то есть $|\det S| = 1$;
- 3) обратная к ортогональной матрице также ортогональна.

ПРИМЕР 63. В евклидовом пространстве V^3 заданы два базиса: канонический базис $\{i, j, k\}$ и базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, где

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{2}{\sqrt{6}}k,$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{6}}k,$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}.$$

1) Проверить, что базис $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный. 2) Найти матрицу перехода S от базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. 3) Найти обратную матрицу S^{-1} и координаты вектора $\mathbf{x} = \sqrt{3}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} + \sqrt{6}\mathbf{k}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

РЕШЕНИЕ. 1. Проверим, что векторы $\{\mathbf{e}_i\}$ попарно ортогональны и имеют единичную длину.

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \Rightarrow \|\mathbf{e}_1\| = 1;$$

$$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \Rightarrow \|\mathbf{e}_2\| = 1;$$

$$(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \Rightarrow \|\mathbf{e}_3\| = 1;$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{6} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2;$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{6} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3;$$

$$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3.$$

2. Столбцы матрицы S являются координатами векторов $\mathbf{e}_i$ в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Следовательно,

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

3) Матрица S — ортогональная, поэтому $S^{-1} = S^T$:

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ находится по формуле (7.14) на стр. 121.

$$X' = S^{-1}X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $\mathbf{x} = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. $\diamond$

8.3 Задачи и упражнения

209. Какой вид имеют неравенство Коши—Буняковского и неравенство треугольника в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ всех n -мерных столбцов (или строк), если скалярное произведение задано равенством:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$?

210. Проверить, можно ли в линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ задать скалярное произведение при помощи равенства:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (1, -2)$ и $\mathbf{y} = (5, 1)$. Проверить для этих векторов неравенство Коши—Буняковского.

211. Доказать, что в пространстве $\mathcal{P}_n$ всех многочленов

$$P(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$$

степени не выше $n-1$ операцию скалярного умножения можно определить равенством:

$$(P, Q) = p_0q_0 + p_1q_1 + \dots + p_{n-1}q_{n-1},$$

где $P(t) = p_0 + p_1t + \dots + p_{n-1}t^{n-1}$, $Q(t) = q_0 + q_1t + \dots + q_{n-1}t^{n-1}$. Вычислить скалярное произведение векторов—многочленов $P(t) = 1 + t + t^2$ и $Q(t) = t - 2t^2$, проверить для них неравенство треугольника.

212. Заданы базис $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ и вектор $\mathbf{a}$ в двумерном евклидовом пространстве V^2 геометрических векторов с обычным скалярным произведением. Требуется: 1) преобразовать базис $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ в ортогональный базис $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$, с помощью процесса ортогонализации Грама—Шмидта; 2) преобразовать базис $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ в ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; 3) найти координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$; 4) изобразить на чертеже векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}$.

а) $\mathbf{f}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{f}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$;

б) $\mathbf{f}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}, \mathbf{f}_2 = \sqrt{3}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{a} = 3\mathbf{j}$.

213. Ортогонализировать следующие системы векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$:

1) $\mathbf{f}_1 = (1, -2, 2)^\top, \mathbf{f}_2 = (-1, 0, -1)^\top, \mathbf{f}_3 = (5, -3, -7)^\top$;

2) $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1, 1)^\top, \mathbf{f}_2 = (3, 3, -1, -1)^\top, \mathbf{f}_3 = (-2, 0, 6, 8)^\top$.

214. Применив процесс ортогонализации, перейти от базиса $\{1, t, t^2\}$ к ортогональному, а затем к ортонормированному базису в евклидовом пространстве $\mathcal{P}_3[-1, 1]$ многочленов степени не выше 2, заданных на отрезке $[-1, 1]$, со скалярным произведением, определяемым формулой:

$$(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

215. В пространстве V^2 геометрических векторов на плоскости заданы два базиса: канонический $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. 1. Доказать, что базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ортонормированный. 2. Найти матрицу перехода S от базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. 3. Найти обратную матрицу S^{-1} и координаты вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

а) $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}, \mathbf{e}'_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$;

б) $\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.

216. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задана матрица перехода S от канонического базиса $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ к базису $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выписать разложения векторов e'_1, e'_2, e'_3 по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$. Проверить, является ли базис $\{e'_i\}$ ортонормированным. Найти обратную матрицу S^{-1} и координаты вектора $a = -5e_1 + e_3$ в базисе $\{e'_i\}$.

217. В пространстве V^2 геометрических векторов на плоскости найти матрицу S поворота базиса $\{i, j\}$ на угол α вокруг начала координат. Найти обратную матрицу S^{-1} , выписать формулы, связывающие координаты вектора x в старом и в новом базисах. Найти координаты вектора $a = 2i + j$ в новом базисе, если: а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

218. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы канонический базис $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ и базис $\{e'_i\}$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{1}{\sqrt{15}}e_1 - \frac{2}{\sqrt{15}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{15}}e_3 + \frac{3}{\sqrt{15}}e_4, \\ e'_2 &= \frac{2}{\sqrt{15}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{15}}e_2 - \frac{3}{\sqrt{15}}e_3 + \frac{1}{\sqrt{15}}e_4, \\ e'_3 &= -\frac{4}{\sqrt{30}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{30}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{30}}e_3 + \frac{3}{\sqrt{30}}e_4, \\ e'_4 &= \frac{2}{\sqrt{30}}e_1 + \frac{4}{\sqrt{30}}e_2 + \frac{3}{\sqrt{30}}e_3 + \frac{1}{\sqrt{30}}e_4. \end{aligned}$$

1) Доказать, что базис $\{e'_i\}$ — ортонормированный. 2) Найти матрицу перехода S от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_i\}$. 3) Найти обратную матрицу S^{-1} и координаты вектора $x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ в базисе $\{e'_i\}$.

Модуль 9

Линейные операторы

9.1 Определение линейного оператора

Пусть L и L' — линейные пространства.

Любое отображение $\hat{A}: L \rightarrow L'$, которое произвольному вектору $\mathbf{x} \in L$ ставит в соответствие единственный вектор $\mathbf{y} = \hat{A}(\mathbf{x}) \in L'$ принято называть оператором, действующим из L в L' . При этом вектор $\mathbf{y} \in L'$ называется образом вектора $\mathbf{x} \in L$, а $\mathbf{x}$ — прообразом вектора $\mathbf{y}$.

Среди всех операторов наиболее интересны в линейной алгебре те, которые сохраняют линейные операции линейного пространства. Поэтому центральным в данном модуле будет следующее определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61. Оператор $\hat{A}: L \rightarrow L'$ называется линейным, если выполняются следующие два условия:

- 1) $\hat{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \hat{A}(\mathbf{x}_1) + \hat{A}(\mathbf{x}_2)$ — образ суммы любых двух векторов из L равен сумме образов этих векторов (аддитивность);
- 2) $\hat{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \hat{A}(\mathbf{x})$ — образ произведения вектора $\mathbf{x} \in L$ на любое число λ равен произведению этого числа на образ вектора $\mathbf{x}$ (однородность).

Линейный оператор $\hat{A}: L \rightarrow L$, отображающий линейное пространство в себя, называют также линейным преобразованием.

Линейный оператор $\hat{A}: L \rightarrow \mathbb{R}$, отображающий линейное пространство L в одномерное линейное пространство $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, называют также линейным функционалом.

ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

1. Пусть $L = D^\infty[a, b]$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Если задать линейные операции равенствами $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, то L будет линейным пространством. Введем оператор $\frac{d}{dx}: L \rightarrow L$ равенством $\left(\frac{d}{dx}(f)\right)(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ — оператор дифференцирования функции $f(x)$. Так как $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ и $(C \cdot f)'(x) = C \cdot f'(x)$ — известные свойства производной, оператор дифференцирования является линейным преобразованием пространства $D^\infty[a, b]$.

2. Пусть $L = C^0[a, b]$ — множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Введем оператор $I: L \rightarrow \mathbb{R}$ равенством $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ — оператор интегрирования. Так как

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{и} \\ \int_a^b (C \cdot f(x)) dx &= C \cdot \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

известные свойства определенного интеграла, оператор интегрирования является линейным функционалом на множестве непрерывных функций.

3. Предел последовательности или функции является линейным оператором, поскольку предел суммы равен сумме пределов, и константу за знак предела можно выносить.

Вернемся к конечномерным линейным пространствам.

ПРИМЕР 64. Установить, какое из отображений линейного пространства $\mathbb{R}^3$ в себя является линейным оператором:

- а) $\hat{A}\mathbf{x} = (x_1, x_2 + 1, 2x_1 + x_3)$,
 - б) $\hat{A}\mathbf{x} = (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3)$,
- где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим произвольные векторы $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ из R^3 .

а) Проверим, выполняется ли условие аддитивности?

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\widehat{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1, 2(x_1 + y_1) + x_3 + y_3);$$

$$\widehat{A}\mathbf{x} + \widehat{A}\mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 2, 2(x_1 + y_1) + x_3 + y_3).$$

Сравнивая два последних выражения, видим, что условие не выполняется, а значит данное отображение не является линейным оператором.

б) Пользуясь определением $\widehat{A}$, проверим выполнение условия аддитивности.

$$\widehat{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2),$$

$$2(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), 3(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3)) =$$

$$= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (2x_2 - x_3) + (2y_2 - y_3),$$

$$(3x_1 - x_2 + 2x_3) + (3y_1 - y_2 + 2y_3)) =$$

$$= (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3) +$$

$$+ (y_1 + y_2, 2y_2 - y_3, 3y_1 - y_2 + 2y_3) = \widehat{A}\mathbf{x} + \widehat{A}\mathbf{y}$$

Условие однородности:

$$\widehat{A}(\lambda\mathbf{x}) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, 2\lambda x_2 - \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + 2\lambda x_3) =$$

$$= \lambda(x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3) = \lambda\widehat{A}\mathbf{x}$$

Оба условия выполнены — следовательно, отображение является линейным оператором. $\diamond$

9.2 Матрица линейного оператора

Пусть L^n и L_1^m — линейные пространства размерностей n и m соответственно, отображение $\widehat{A}: L^n \rightarrow L_1^m$ — линейный оператор.

Будем считать, что заданы $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис пространства L , $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*\}$ — базис пространства L_1 .

Подействуем на произвольный вектор $\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ оператором $\widehat{A}$, и в силу линейности этого оператора получим

$$\mathbf{y} = \widehat{A}(\mathbf{x}) = \widehat{A}(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) =$$

$$= x_1 \widehat{A}(e_1) + x_2 \widehat{A}(e_2) + \dots + x_n \widehat{A}(e_n). \quad (9.1)$$

Следовательно, образ любого вектора есть линейная комбинация образов базисных векторов. Таким образом, чтобы задать линейный оператор, достаточно задать только образы базисных векторов.

Пусть нам известны разложения векторов $\hat{A}(e_k)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ по базису $\{e_j^*\}$, $(j = 1, 2, \dots, m)$.

$$\hat{A}(e_k) = a_{1k}e_1^* + a_{2k}e_2^* + \dots + a_{mk}e_m^*.$$

Подставив эти разложения в формулу (9.1), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \hat{A}(\mathbf{x}) = \\ &= x_1(a_{11}e_1^* + a_{21}e_2^* + \dots + a_{m1}e_m^*) + \\ &+ x_2(a_{12}e_1^* + a_{22}e_2^* + \dots + a_{m2}e_m^*) + \dots + \\ &+ x_n(a_{1n}e_1^* + a_{2n}e_2^* + \dots + a_{mn}e_m^*) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)e_1^* + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)e_2^* + \dots + \\ &+ (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)e_m^*. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Представим вектор $\mathbf{y}$ своим координатным столбцом

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{вектор } \mathbf{x} \text{ — столбцом } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

и введем в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}. \quad (9.3)$$

Тогда полученное разложение (9.2) вектора $\mathbf{y}$ можно представить в матричной форме как

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

или $Y = AX$.

Введенная матрица A называется матрицей линейного оператора. Ее геометрический смысл заключается в том, что столбцами матрицы являются координатные столбцы образов базисных векторов $\hat{A}(e_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Заданием матрицы A оператор $\hat{A}$ определяется однозначно, т.е. равенство $y = \hat{A}(x)$ эквивалентно матричному равенству $Y = AX$.

В частном случае, когда $L_1 = L$, мы имеем линейное преобразование. Матрица A — квадратная размерности $(n \times n)$, и базис $\{e_i^*\}$ совпадает с базисом $\{e_i\}$.

Если $L_1 = \mathbb{R}$, линейный оператор $\hat{A}$ является линейным функционалом, его матрица A — строка $(A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)$ и значение

$$y = \hat{A}(x) = AX = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n.$$

Этим самым мы получили так называемую линейную форму.

ПРИМЕР 65. Найти матрицу линейного оператора

$$\hat{A}(x) = (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3)$$

и вычислить координаты образа вектора $x_0 = (3, -2, 5)$.

РЕШЕНИЕ. Образ y произвольного вектора x распишем как

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ — матрица линейного оператора.

Найдем образ вектора $x_0 = (3, -2, 5)$.

$$Y_0 = AX_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $y_0 = \hat{A}(x_0) = (1, -9, 21)$. $\diamond$

Преобразование матрицы линейного оператора

Пусть $\hat{A}: L^n \rightarrow L^n$ — линейный оператор. Выберем в L^n два базиса: старый $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и новый $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, S — матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_i\}$.

Обозначим через A и A' матрицы линейного оператора $\hat{A}$ в базисах $\{e_i\}$ и $\{e'_i\}$ соответственно. В матричную запись $Y = AX$ мы можем подставить равенства $Y = SY'$ и $X = SX'$, выражающие связь старых и новых координат векторов x и $y = \hat{A}(x)$. В результате получим соотношение $SY' = ASX'$, откуда $Y' = S^{-1}ASX'$. Таким образом, имеет место равенство

$$A' = S^{-1}AS. \quad (9.4)$$

ПРИМЕР 66. Оператор $\hat{A}: L^2 \rightarrow L^2$ в старом базисе $\{e_1, e_2\}$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в новом базисе $e'_1 = -2e_1 + 3e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$.

РЕШЕНИЕ. Запишем матрицу S перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e'_1, e'_2\}$:

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу S^{-1} :

$$S^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (9.4) преобразования матрицы оператора при замене базиса, находим матрицу A' оператора в новом базисе:

$$\begin{aligned} A' = S^{-1}AS &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -8 \\ 48 & -17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9.3 Собственные числа и собственные векторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62. Ненулевой вектор x называется собственным вектором линейного преобразования $\hat{A}: L \rightarrow L$ если существует число λ такое, что выполняется равенство

$$\hat{A}(x) = \lambda x. \quad (9.5)$$

Число λ называется собственным числом или собственным значением линейного оператора. При этом говорят, что собственный вектор x принадлежит собственному значению λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Собственный вектор не является нулевым по определению, так как $\hat{A}(0) = 0 = \lambda 0$ для любого вещественного числа λ и любого линейного преобразования.

Геометрический смысл собственного вектора состоит в том, что после линейного преобразования он остается коллинеарным самому себе.

ЗАМЕЧАНИЕ 27. Множество собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ , образует линейное подпространство пространства L . В частности, если вектор x — собственный, то любой коллинеарный ему вектор αx также является собственным.

При этом, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — различные собственные значения, то соответствующие им собственные векторы x_1 и x_2 неколлинеарны.

Если в линейном пространстве L^n зафиксирован базис, то, записав соотношение (9.5) в матричной форме, получим эквивалентное ему равенство:

$$AX = \lambda X = \lambda EX \quad \text{или} \quad (A - \lambda E)X = 0, \quad (9.6)$$

где A — матрица оператора $\hat{A}$, а E — единичная матрица порядка n . Следовательно, если собственный вектор существует, то его координаты должны удовлетворять однородной системе линейных уравнений (9.6). Так как собственный вектор x ненулевой, то для нахождения его нужно найти ненулевые решения системы, а они существуют тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, т.е. $\text{rang}(A - \lambda E) < n$, а это условие эквивалентно следующему:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (9.7)$$

Левая часть последнего равенства $\det(A - \lambda E) = P_n(\lambda)$ — многочлен степени n от λ — называется характеристическим многочленом оператора, а уравнение (9.7) — характеристическим уравнением.

ПРИМЕР 67. Проверить, являются ли векторы $\mathbf{x} = (1, 0, -1)$ и $\mathbf{y} = (1, -1, 1)$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$ собственными векторами оператора $\hat{A}$, заданного своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ. Задача сводится к проверке равенства (9.5) при каком-нибудь λ для заданных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для вектора $\mathbf{x}$ выполняется равенство: $\hat{A}(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$ и, стало быть, $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $\hat{A}$, принадлежащий собственному значению $\lambda = 3$.

$$A \cdot Y = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что равенство $\hat{A}(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$ не может быть выполненным ни при каком λ , так как не выполнено условие коллинеарности $\left(\frac{15}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{7}{1}\right)$, поэтому $\mathbf{y}$ не является собственным вектором оператора $\hat{A}$. $\diamond$

ПРИМЕР 68. Оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L^3 , задан в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ этого пространства матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

РЕШЕНИЕ. Составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4 - \lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = 0$$

или $(\lambda - 2)^3 = 0$, откуда получаем единственное значение $\lambda = 2$. Система уравнений $(A - \lambda E)X = 0$ для нахождения координатного столбца собственного вектора $\mathbf{x}$ при $\lambda = 2$ имеет вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Так как все уравнения этой системы пропорциональны, она сводится к единственному уравнению $x_2 = 2x_1$. Переменная x_3 может принимать любое значение, так как не входит в систему, т.е. является параметром. В качестве второго параметра возьмем x_1 . В результате имеем общее решение системы:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, $r = \text{rang}(A - 2E) = 1$, значит $k = n - r = 2$ — размерность пространства решений, а векторы $E_1 = (1, 2, 0)^\top$ и $E_2 = (0, 0, 1)^\top$ линейно независимы и являются решением уравнения—системы $x_2 = 2x_1$, поэтому могут служить фундаментальной системой решений.

Таким образом, векторы вида $\mathbf{x} = (C_1, 2C_1, C_2)^\top$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, образуют все множество собственных векторов оператора $\hat{A}$, принадлежащих единственному собственному значению $\lambda = 2$. $\diamond$

ПРИМЕР 69. Оператор $\hat{\Phi}$ задает поворот на угол φ , ($0 < \varphi < \pi$) вокруг оси Oz в пространстве V^3 . Найти все собственные числа и собственные векторы оператора $\hat{\Phi}$.

РЕШЕНИЕ. ПЕРВЫЙ СПОСОБ — ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ. Согласно определению, собственные векторы — это все такие ненулевые векторы, которые под действием оператора переходят в коллинеарные самим себе. Очевидно, что для данного оператора поворота таким свойством обладают лишь векторы $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{k}$, коллинеарные оси Oz , которые при повороте остаются на месте: $\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Последнее равенство означает также, что соответствующее собственное число $\lambda = 1$.

ВТОРОЙ СПОСОБ — АНАЛИТИЧЕСКИЙ. Матрица оператора $\hat{\Phi}$ в ортонормированном базисе имеет вид $\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение оператора

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= [(\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi] \cdot (1 - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

имеет единственный действительный корень $\lambda = 1$, так как выражение $[(\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi]$ не обращается в нуль при $\varphi \in (0, \pi)$ ни при каком значении λ . Система уравнений $(\Phi - \lambda E)X = 0$ для нахождения координатного столбца собственного вектора $\mathbf{x}$ при $\lambda = 1$ имеет вид:

$$\begin{cases} (\cos \varphi - 1) \cdot x_1 - (\sin \varphi) \cdot x_2 = 0, \\ (\sin \varphi) \cdot x_1 + (\cos \varphi - 1) \cdot x_2 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = C$ — произвольный параметр. Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$X = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, все собственные векторы имеют вид: $\mathbf{x} = C\mathbf{k}$. $\diamond$

Матрица линейного оператора в базис из собственных векторов

Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор, действующий в линейном пространстве L^n и имеющий n линейно независимых собственных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Если выбрать указанные векторы в качестве базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ пространства L^n , то в этом базисе матрица оператора имеет диагональный вид, причем на главной диагонали находятся собственные числа оператора:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

Для того, чтобы матрица линейного оператора приводилась к диагональному виду, достаточно, чтобы его характеристическое уравнение имело n различных вещественных корней.

ПРИМЕР 70. Оператор $\hat{A}$ задан в некотором базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдя собственные числа и собственные векторы оператора, определить, можно ли построить базис из собственных векторов. Если можно, то найти матрицу оператора в этом базисе.

РЕШЕНИЕ. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 2 & -1 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 + \lambda) \cdot [(1 - \lambda)^2 - 1] = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$.

Найдем собственные векторы x , принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = 2$. Система $(A - \lambda E)X = 0$ при $\lambda = 2$ имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 = 0, \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Третье уравнение совпадает с первым. Взяв x_1 в качестве параметра, из первых двух уравнений системы получим, что $x_3 = -x_1$, $3x_2 = 2x_1$. При $x_1 = 3$ собственным будет вектор $X_1 = (3, 2, -3)^\top$.

При $\lambda_2 = -1$ получаем систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0, \\ 2x_1 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Видим, что неизвестное x_2 не входит в уравнения системы, поэтому может принимать произвольное значение. Непосредственно из системы находим $x_1 = 0$, $x_3 = 0$. Значит, собственным вектором будет $X_2 = (0, 1, 0)^\top$.

Аналогично, при $\lambda_3 = 0$ получим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Как и в первом случае третье уравнение совпадает с первым. Взяв x_1 в качестве параметра, из первых двух уравнений системы получим, что $x_3 = x_1$, $x_2 = 2x_1$. При $x_1 = 1$ собственным будет вектор $X_3 = (1, 2, 1)^T$.

Система векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$ линейно независима. В самом деле, определитель, составленный из координат этих векторов не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Значит, систему собственных векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$ можно выбрать в качестве нового базиса. И так как образы новых базисных векторов равны: $\hat{A}(X_1) = 2X_1$, $\hat{A}(X_2) = -X_2$, $\hat{A}(X_3) = 0 \cdot X_3 = 0$, матрица линейного оператора $\hat{A}$, состоящая из координатных столбцов образов базисных векторов, в новом базисе имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A' имеет диагональный вид, причем на главной диагонали стоят собственные числа оператора $\hat{A}$. $\diamond$

Рассмотрим линейные операторы, действующие в n -мерном евклидовом пространстве E^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 63. Оператор $\hat{A}^*$, действующий в евклидовом пространстве E^n , называется сопряженным линейному оператору $\hat{A}$, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$ выполняется соотношение

$$(\hat{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*(\mathbf{y})). \quad (9.9)$$

Оператор $\hat{A}^*$, сопряженный линейному оператору $\hat{A}$, также является линейным. Матрица оператора $\hat{A}^*$, сопряженного оператору $\hat{A}$, совпадает с транспонированной матрицей оператора $\hat{A}$, т.е. $A^* = A^T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 64. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в евклидовом пространстве E_n , называется самосопряженным, если он равен сопряженному оператору $\hat{A}^*$, т.е. для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$ имеет место равенство

$$(\hat{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}(\mathbf{y})). \quad (9.10)$$

СВОЙСТВА САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ.

1. Матрица самосопряженного оператора симметрична.
2. Собственные числа самосопряженного оператора вещественны.
3. Собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.
4. У каждого самосопряженного оператора $\hat{A}$, действующего в n -мерном евклидовом пространстве, существует n линейно независимых попарно ортогональных и единичных собственных векторов.

ПРИМЕР 71. Самосопряженный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, в каноническом базисе задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\hat{A}$, и матрицу этого оператора в новом базисе.

РЕШЕНИЕ. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

Система для нахождения собственных векторов при $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы: $X = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где

$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — базис решений, состоящий из двух

линейно независимых собственных векторов оператора, принадлежащих собственному значению $\lambda = 2$ кратности 2.

Система для нахождения собственных векторов при $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы: $X = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — базисный вектор общего решения.

Векторы X_1, X_2, X_3 линейно независимы. Кроме того, легко проверить, что векторы X_1 и X_2 ортогональны вектору X_3 (как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям).

Ортогонализируем систему векторов $\{X_1, X_2\}$, полагая $G_1 = X_1$, $G_2 = X_2 + \alpha X_1$, где $\alpha = -\frac{(X_1, X_2)}{(X_1, X_1)} = -\frac{1+0+0}{1+1} = -\frac{1}{2}$. Тогда

$$G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Полагая $G_3 = X_3$, получим ортогональную систему $\{G_1, G_2, G_3\}$ из собственных векторов оператора $\hat{A}$. Нормируя эти векторы, получим ортонормированный базис из собственных векторов:

$$E_1 = \frac{G_1}{\|G_1\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \frac{G_2}{\|G_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \frac{G_3}{\|G_3\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода S от канонического базиса к базису $\{E_i\}$ ортогональна (так как оба базиса ортонормированные), значит $S^{-1} = S^T$:

$$S = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

В базисе из собственных векторов матрица оператора $\hat{A}$ имеет диагональный вид с собственными числами на главной диагонали:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицу A' в базисе из собственных векторов оператора $\hat{A}$ можно получить и по формуле (9.4): $A' = S^{-1}AS$. $\diamond$

9.4 Задачи и упражнения

219. Установить, какие из следующих отображений пространства $\mathbb{R}^3$ в себя являются линейными преобразованиями:

- 1) $\hat{A}(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;
- 2) $\hat{A}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$;
- 3) $\hat{A}(\mathbf{x}) = (0, x_2 - x_3, 0)$.

220. Пусть $\mathcal{P}_n$ — линейное пространство многочленов $P_n(t)$ степени не выше $n-1$. Установить, какие из следующих отображений являются линейными операторами:

- а) $\hat{A} : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$, где $(\hat{A}(P_n))(t) = C \cdot P_n(t)$, C — некоторая постоянная;
- б) $\hat{B} : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$, где $(\hat{B}(P_n))(t) = C + P_n(t)$, C — некоторая постоянная;
- в) $\hat{D} : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$, где $(\hat{D}(P_n))(t) = (P_n)'(t)$ — производная многочлена $P_n(t)$.

221. Для линейных операторов задачи 219 найти их матрицы в каноническом базисе.

222. Установить, какие из заданных операторов в пространстве E^3 являются линейными и выяснить их геометрический смысл:

- 1) $\hat{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, где λ — заданная константа;
- 2) $\hat{B}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} + \mathbf{b}$, где λ — заданная константа, $\mathbf{b}$ — заданный фиксированный вектор;
- 3) $\hat{E}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — заданный фиксированный единичный вектор.

223. Доказать, что существует единственное линейное преобразование, переводящее векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ в векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ и найти матрицу этого преобразования в том базисе, в котором заданы векторы:

- 1) $\mathbf{a}_1 = \{1, 2\}, \mathbf{a}_2 = \{-1, 1\}, \mathbf{b}_1 = \{-1, 8\}, \mathbf{b}_2 = \{-2, 1\};$
 2) $\mathbf{a}_1 = \{1, 1\}, \mathbf{a}_2 = \{-3, 2\}, \mathbf{b}_1 = \{3, 0\}, \mathbf{b}_2 = \{4, 5\};$

224. Показать, что дифференцирование является линейным преобразованием пространства многочленов степени не выше n . Найти матрицу этого преобразования в базисе $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$.

225. Как изменится матрица линейного преобразования, если в базисе поменять местами два вектора?

226. Составить матрицу оператора $\hat{A}$ поворота на угол α вокруг оси Oz в пространстве E^3 с базисом $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

227. Составить матрицу оператора $\hat{P}$ проектирования векторов пространства V^3 с базисом $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ в пространство V^2 , где V^2 — пространство геометрических векторов: 1) на плоскости Oxz , 2) на плоскости Oyz , 3) на плоскости Oxy .

228. Линейное преобразование $\hat{A}$ в пространстве V^3 задано в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выяснить геометрический смысл этого преобразования и найти образ вектора $\mathbf{x} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

229. В пространстве L^4 задан оператор $\hat{A}$, матрица которого в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисах:

- a) $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_4 = \mathbf{e}_4;$
 b) $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4.$

230. В линейном пространстве L^3 в старом базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ заданы новые базисы $\{g_1, g_2, g_3\}$ и $\{f_1, f_2, f_3\}$: $g_1 = 8e_1 - 6e_2 + 7e_3$, $g_2 = -16e_1 + 7e_2 - 13e_3$, $g_3 = 9e_1 - 3e_2 + 7e_3$; $f_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 - e_2 + 2e_3$, $f_3 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$.

Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$, если его матрица в базисе $\{g_1, g_2, g_3\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

231. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в новом базисе, если задана его матрица A в старом базисе и используются условия следующих задач:

- 1) задача 204, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) задача 205, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
 3) задача 206, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) задача 214, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;
 5) задача 218, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

232. Линейное преобразование $y = \hat{A}(x)$ задано в некотором базисе в координатной форме:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Найти матрицу A преобразования (в том же базисе).
 2) Из векторов, заданных своими координатными столбцами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

выбрать собственные и найти соответствующие им собственные значения.

233. Какие из векторов $\mathbf{a} = (-1, 1)$ и $\mathbf{b} = (2, 1)$ являются собственными для оператора $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, если матрица оператора в каноническом базисе имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Для собственных векторов указать собственные числа.

234. Подобрать параметр α так, чтобы вектор $\mathbf{x} = (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ был собственным для оператора, заданного в каноническом базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

235. Используя только определение собственного вектора и его геометрическую интерпретацию, найти собственные векторы и собственные числа линейного преобразования трехмерного пространства, если линейное преобразование есть:

а) проектирование пространства на плоскость векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ параллельно вектору $\mathbf{e}_3$;

б) поворот пространства на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ вокруг вектора $\mathbf{e}_2$;

в) растяжение пространства по осям векторов $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ соответственно в 2 и в 3 раза;

г) зеркальное отражение пространства относительно плоскости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$.

236. Даны характеристические многочлены векторов:

а) $P_1(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2$,

б) $P_2(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda$,

с) $P_3(\lambda) = \lambda^3 + \lambda - 2$.

Какой из операторов является вырожденным?

237. Найти собственные числа и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе своими матрицами:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

238. Линейное преобразование в пространстве V^3 является проектированием на плоскость $\alpha: x = y$. Записать матрицу преобразования в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Найти собственные числа и собственные векторы двумя способами: 1) непосредственно, исходя из геометрического смысла преобразования (см. пример 69); 2) аналитически, используя матрицу преобразования.

239. Выяснить, можно ли матрицу линейного оператора привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Если можно, то найти этот базис и матрицу оператора в этом базисе.

$$\begin{aligned} 1) & \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \\ 4) & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad 5) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad 6) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

240. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу A' в этом базисе для оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$\begin{aligned} 1) & A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad 2) A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}, \\ 3) & A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 4) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Модуль 10

Квадратичные формы

10.1 Квадратичная форма и ее матрица

КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА КАК ОДНОРОДНЫЙ МНОГОЧЛЕН.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65. Квадратичной формой от вещественных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i,j=1}^n a'_{ij} x_i x_j = \\ &= a'_{11} x_1^2 + a'_{12} x_1 x_2 + \dots + a'_{1n} x_1 x_n + a'_{21} x_2 x_1 + \dots + a'_{nn} x_n^2. \quad (10.1)\end{aligned}$$

В частности, квадратичная форма от двух переменных имеет вид: $\mathcal{A}(x_1, x_2) = a'_{11} x_1^2 + a'_{12} x_1 x_2 + a'_{21} x_2 x_1 + a'_{22} x_2^2$.

Так как $x_i x_j = x_j x_i$ ($i \neq j$), в группе слагаемых $a'_{ij} x_i x_j + a'_{ji} x_j x_i = (a'_{ij} + a'_{ji}) x_i x_j$ можно ввести обозначения $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} (a'_{ij} + a'_{ji})$, и переписать ее как $a'_{ij} x_i x_j + a'_{ji} x_j x_i = 2a_{ij} x_i x_j$. Если переобозначить $a_{ii} = a'_{ii}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то квадратичную форму можно переписать в виде:

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$$

В частности, $\mathcal{A}(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$ — квадратичная форма от двух переменных; $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3$ — квадратичная форма от трех переменных.

Симметрическая матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$, составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется матрицей квадратичной формы. Тогда сама квадратичная форма может быть представлена в матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X) &= \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^\top A X = \\ &= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА КАК ФУНКЦИОНАЛ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Если набор переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ рассматривать как координаты вектора $\mathbf{x} \in L^n$, где L^n — n -мерное линейное пространство, то можно дать другое определение квадратичной формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 66. Квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется отображение линейного пространства L^n в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел $(\mathcal{A}: L^n \rightarrow \mathbb{R})$, заданное формулой

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = X^\top A X = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (10.3)$$

где $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — симметричная матрица порядка n (матрица квадратичной формы), а X — координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в заданном базисе $(\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)$.

Найдем формулы преобразования матрицы квадратичной формы при преобразовании базиса. Пусть S — матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к базису $\{\mathbf{e}'_i\}$. Тогда $X = SX'$, $X^\top = (SX')^\top = X'^\top S^\top$ — связь координат вектора $\mathbf{x}$ в старом и новом базисе. Подставив эти выражения в формулу (10.3), получим $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = X^\top A X = X'^\top S^\top A S X'$, откуда следует, что матрица A' квадратичной формы в новом базисе находится через матрицу A в старом базисе и матрицу перехода S по формуле

$$A' = S^\top A S. \quad (10.4)$$

ПРИМЕР 72. Квадратичная форма от двух переменных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ задается равенством $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

1) Составить матрицу квадратичной формы. 2) Найти матрицу квадратичной формы в новом базисе $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. 3) Записать квадратичную форму в новом базисе.

РЕШЕНИЕ. 1) Матрица квадратичной формы в старом базисе имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2) Матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ к базису $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^\top = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу квадратичной формы в новом базисе по формуле (10.4):

$$\begin{aligned} A' = S^\top A S &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) В новых координатах квадратичная форма имеет вид:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (x'_1 \ x'_2) \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = -6(x'_1)^2 + 3(x'_2)^2.$$

10.2 Приведение квадратичной формы к каноническому виду

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 67. Каноническим видом квадратичной формы называется ее выражение, содержащее лишь квадраты переменных :

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2. \quad (10.5)$$

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются каноническими коэффициентами. Матрица квадратичной формы в каноническом виде диагональна, причем на главной диагонали стоят канонические коэффициенты:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

Всякая квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием может быть приведена к каноническому виду. Одним из способов приведения квадратичной формы к каноническому виду является метод Лагранжа, основанный на выделении полных квадратов. Продемонстрируем этот метод на примере.

ПРИМЕР 73. Рассмотрим квадратичную форму от трех переменных

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2.$$

Требуется привести ее к каноническому виду с помощью невырожденного преобразования координат.

РЕШЕНИЕ. Выделим в квадратичной форме все слагаемые, содержащие переменную x_1 , и добавим к ним члены, содержащие x_2 и x_3 такие, чтобы группа в целом представляла собой полный квадрат трех членов. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2) - 4x_2^2 - 8x_2x_3 = \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - 8x_2x_3.\end{aligned}$$

Аналогичную процедуру проведем с переменной x_2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (4x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 = \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2.\end{aligned}$$

Перейдем к новым переменным x'_1, x'_2, x'_3 по формулам:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x'_2 = 2x_2 + 2x_3, \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

или в матричной форме: $X' = S^{-1}X$, $X = SX'$, где

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица S , очевидно, невырожденная, так как $\det S = 2 \neq 0$, поэтому преобразование координат невырожденное. В новых переменных квадратичная форма имеет канонический вид:

$$\mathcal{A}(x'_1, x'_2, x'_3) = (x'_1)^2 - (x'_2)^2 + 4(x'_3)^2.$$

Матрица A' квадратичной формы в новых переменных диагональна:

$$A' = S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

10.3 Квадратичные формы в евклидовом пространстве

Пусть E^n — евклидово пространство, в котором задана квадратичная форма $\mathcal{A}(\mathbf{x})$. Выберем в E^n некоторый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и обозначим через $A = (a_{ij})_{n \times n}$ матрицу квадратичной формы, а через X — координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в заданном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Тогда квадратичная форма задается равенством:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = X^T A X.$$

Найдем базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ пространства E^n , в котором матрица квадратичной формы диагональна. Квадратичная форма, записанная с помощью этой матрицы, будет иметь канонический вид.

Рассмотрим самосопряженный оператор $\hat{A}$, действующий в E^n , который в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ задается той же симметричной матрицей A , что и квадратичная форма $\mathcal{A}(\mathbf{x})$. Среди свойств самосопряженного оператора уже отмечалось, что его матрица всегда приводится к диагональному виду, если в качестве базисных векторов выбрать собственные векторы данного оператора. Возьмем в качестве нового базиса $\{\mathbf{e}'_i\}$ пространства E^n ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\hat{A}$. Так как базисы $\{\mathbf{e}'_i\}$ и $\{\mathbf{e}_i\}$ ортонормированные, то матрица перехода S — ортогональна, т.е. $S^{-1} = S^T$. Поэтому закон (10.4) преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к базису $\{\mathbf{e}'_i\}$ совпадает с законом преобразования матрицы линейного оператора. Действительно, $A' = S^T A S = S^{-1} A S$. Следовательно, матрица A' квадратичной формы в базисе $\{\mathbf{e}'_i\}$ совпадает с матрицей A' оператора $\hat{A}$. Так как матрица оператора в новом базисе диагональна и на диагонали стоят собственные числа, то матрица A' квадратичной формы также диагональна, причем канонические коэффициенты квадратичной формы равны собственным числам оператора. В дальнейшем для краткости собственные числа и собственные векторы оператора $\hat{A}$ будем называть собственными числами и собственными векторами матрицы A .

Таким образом, получаем следующий алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду в евклидовом пространстве.

1. Находим собственные числа и собственные векторы матрицы A .
2. Строим ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A и записываем ортогональную матрицу перехода S к новому базису.
3. Находим матрицу квадратичной формы в новом базисе по формуле $A' = S^T A S$. Матрица A' будет диагональной, причем на главной диагонали будут стоять собственные числа матрицы.
4. Записываем канонический вид квадратичной формы, в котором канонические коэффициенты равны собственным числам матрицы A .

ПРИМЕР 74. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2.$$

РЕШЕНИЕ. Не ограничивая общности, можно считать, что $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ — координатный столбец вектора $\mathbf{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ — матрица квадратичной формы в каноническом базисе $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^\top$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^\top$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^\top$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ трехмерных столбцов. Приведем квадратичную форму к каноническому виду, следуя описанному выше алгоритму.

1. Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы A . Для этого составим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) &= 0, \\ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 &= -1. \end{aligned}$$

Найдем собственные векторы матрицы A :

$$\lambda = 2, X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda = 5, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda = -1, X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы X_1, X_2, X_3 взаимно ортогональны, как принадлежащие различным собственным значениям, в чем легко убедиться непосредственно.

2. Найдем ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A . Для этого нормируем векторы X_1, X_2, X_3 , умножив каждый из них на число, обратное его длине. Получим:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу перехода от старого базиса к новому. Напомним, что в столбцах этой матрицы стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе. Следовательно, матрица S имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что матрица S ортогональна.

3. Найдем матрицу квадратичной формы в новом базисе по формуле $A' = S^T A S$ и убедимся, что она диагональна. Действительно:

$$A' = S^T A S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Запишем квадратичную форму в новом базисе, обозначив новые переменные через x'_1, x'_2, x'_3 . Получим:

$$\mathcal{A}(x) = X'^T A' X' = 2(x'_1)^2 + 5(x'_2)^2 - (x'_3)^2.$$

Таким образом, квадратичная форма приведена к алгебраической сумме квадратов. $\diamond$

Приведение квадратичной формы к каноническому виду находит применение при исследовании уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

ПРИМЕР 75. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип кривой и построить ее:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \mathcal{A}(x, y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$$

как функционал в евклидовом пространстве V^2 геометрических векторов плоскости xOy с ортонормированным базисом $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Приведем эту форму к каноническому виду, перейдя к ортонормированному базису из собственных векторов матрицы A .

1) Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы A :

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 1.$$

Собственные векторы, принадлежащие найденным собственным значениям, задаются координатными столбцами:

$$\lambda_1 = 9, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Собственные векторы X_1 и X_2 ортогональны, так как принадлежат различным собственным числам симметричной матрицы A , это нетрудно видеть и непосредственно: $(X_1, X_2) = 0$. Тогда, нормируя их, получим ортонормированный базис из собственных векторов:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

или иначе:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\sin \alpha)\mathbf{j}, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} = -(\sin \alpha)\mathbf{i} + (\cos \alpha)\mathbf{j}, \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{\pi}{4}$ — угол поворота вокруг начала координат, в результате которого новый базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ получен из старого базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

3) Матрица перехода S и обратная к ней равны:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\mathbf{r}$ в старом базисе и в новом базисе связаны соотношениями $R = SR'$:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

что в координатной форме можно расписать как:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases} \quad (10.7)$$

4) Матрица квадратичной формы в новом базисе будет диагональной: $A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а сама квадратичная форма в базисе приобретет канонический вид $\mathcal{A}(\mathbf{r}) = 9(x')^2 + (y')^2$.

Запишем теперь исходное уравнение кривой в новых координатах (x', y') , произведя в нем замену переменных по формулам (10.7):

$$\begin{aligned} 9(x')^2 + (y')^2 - 18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - 18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 9 = 0, \\ 9(x')^2 + (y')^2 - 18\sqrt{2}x' + 9 = 0. \end{aligned}$$

Избавимся в последнем уравнении от линейных членов, выделяя полные квадраты: $9((x')^2 - 2\sqrt{2}x' + (\sqrt{2})^2) - 9(\sqrt{2})^2 + (y')^2 + 9 = 0$, или

$$9(x' - \sqrt{2})^2 + (y')^2 = 9, \quad \frac{(x' - \sqrt{2})^2}{1} + \frac{(y')^2}{9} = 1,$$

откуда, заменяя переменные $x' - \sqrt{2} = x''$, $y' = y''$, получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{(x'')^2}{1} + \frac{(y'')^2}{9} = 1$$

в системе координат $x''O'y''$, смещенной относительно системы $x'Oy'$ на вектор (x'_0, y'_0) , где $x'_0 = \sqrt{2}$, $y'_0 = 0$. В свою очередь, система координат $x'Oy'$ получена поворотом системы xOy на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ вокруг начала координат (см. рис. 10.1).

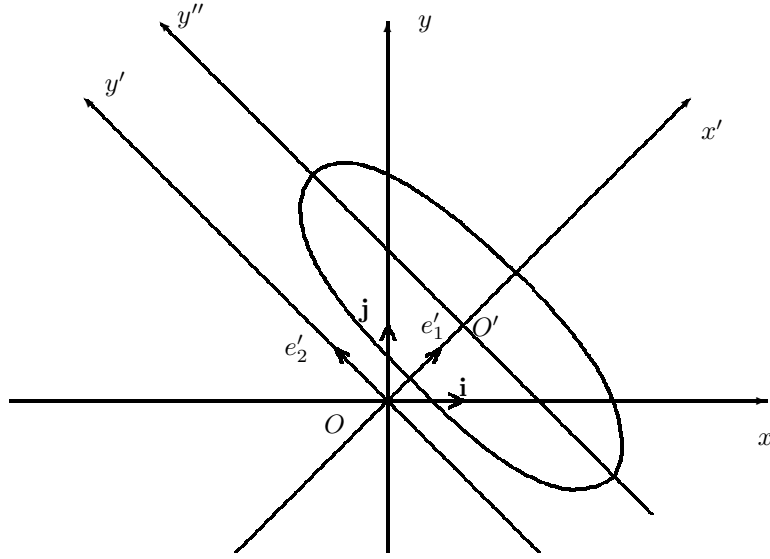


Рис. 10.1: Эллипс

10.4 Классификация квадратичных форм

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 68. Квадратичная форма $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если она принимает неотрицательные (неположительные) значения при любых значениях переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и равна нулю, только если $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, или иначе:

$$\mathcal{A}(x) > 0 \quad (\mathcal{A}(x) < 0) \quad \text{для всех } x \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(x) = 0 \quad \text{для } x = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 69. Квадратичная форма называется знакопостоянной положительной (знакопостоянной отрицательной), если она принимает лишь неотрицательные (неположительные) значения. Квадратичная форма называется знакопеременной, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Заметим, что знакопостоянная квадратичная форма может обращаться в нуль и при значениях $x_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для проверки положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм можно использовать одно из следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 32. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной (отрицательно определенной), необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы квадратичной формы были положительны (отрицательны).

Рассмотрим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим миноры этой матрицы, стоящие в левом верхнем углу (угловые или главные миноры), соответственно:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 33 (Критерий Сильвестра). Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры были положительны: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\dots$, $\Delta_n > 0$.

Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки ее угловых миноров чередовались, начиная со знака «минус»: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\dots$.

ПРИМЕР 76. Выяснить, является ли положительно (отрицательно) определенной квадратичная форма $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$, найдя все собственные значения ее матрицы.

РЕШЕНИЕ. Собственные числа матрицы квадратичной формы равны: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$ (см. пример 75). Следовательно, согласно теореме 33, форма положительно определенная. $\diamond$

ПРИМЕР 77. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$ (см. пример 74).

РЕШЕНИЕ. Квадратичная форма является знакопеременной, так как собственные значения ее матрицы равны $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -1$, и форма может принимать значения разных знаков. Это следует из ее канонического вида: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 2(x'_1)^2 + 5(x'_2)^2 - (x'_3)^2$. $\diamond$

ПРИМЕР 78. Используя критерий Сильвестра, исследовать вопрос о положительной определенности квадратичной формы

$$\mathcal{A}(x, y) = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz.$$

РЕШЕНИЕ. Вычислим угловые миноры матрицы квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} :$$

$$\Delta_1 = 7 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 38 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162 > 0.$$

Так как все угловые миноры положительны, то квадратичная форма положительно определена. $\diamond$

10.5 Задачи и упражнения

241. Задана квадратичная форма от двух переменных в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Найти матрицу квадратичной формы в новом базисе $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ и ее выражение в новых координатах.

1) $\mathcal{A}(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$; 2) $\mathcal{A}(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$.

242. Методом Лагранжа привести квадратичную форму к каноническому виду:

1) $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$; 2) $2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$;

3) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$; 4) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$.

243. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду и записать этот канонический вид:

1) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

2) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

244. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип, найти каноническую систему координат и изобразить кривую в исходной системе координат:

- 1) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;
- 2) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
- 3) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

245. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, найти каноническую систему координат:

- 1) эллипсоид: $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;
- 2) однополостный гиперболоид: $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$.

246. Выяснить, является ли положительно (отрицательно) определенной квадратичная форма:

- 1) $5x^2 - 4xy + 5y^2$;
- 2) $x^2 - 2xy + y^2$;
- 3) $x^2 - 2xy - y^2$;
- 4) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$;
- 5) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz$;
- 6) $-x_1^2 - 5x_2^2 - 14x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Ответы

$$4. 5) \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}, 6) \begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad 7. 1) \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}, 2) \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

$$6. 1) \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix} \forall a, b; 2) \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \forall a, b, c; 3) \text{любая матрица}$$

размерности (3×3) .

$$10. 1) 1, 2) -2, 3) 1, 4) 4ab, 5) \cos(\alpha + \beta), 6) 1, 7) e^{2kx}.$$

$$11. 1) 40, 2) -3, 3) 1, 4) 1, 5) 2, 6) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc, 7) 2x^3 - (a + b + c)x^2 + abc, 8) 1, 9) -8, 10) 20, 11) 6.$$

$$12. 1) -4 \pm \sqrt{22}, 2) x \in (-6, -4).$$

$$13. 2) |A| = -2, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; 4) |A| = 2, \tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$14. 1) 0, 2) 0, 3) 0, 4) xyz(y-x)(z-x)(z-y).$$

$$15. 1) a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}, 2) 0, 3) abcd, 4) -3, 5) -9, 6) 0, 7) -12, 8) 16, 9) 12, 10) -11.$$

$$16. 1) -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, 2) -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, 3) \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$4) \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}, 5) -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, 6) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$7) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, 8) \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, 9) -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -21 \end{pmatrix},$$

$$10) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, 11) -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$12) \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, 13) -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

$$14) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 15) -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$17. 1) X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2) X = \begin{pmatrix} -2/7 \\ -6/7 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$3) X = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad 4) X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. 1) $x = 2, y = 3$, 2) $x = -b, y = -\frac{2}{3}a$, 3) $x = 3, y = -2, z = 2$, 4) $x = y = z = 1$, 5) $x = y = z = 0$, 6) $x = 1, y = 3, z = 5$, 7) $x = 1, y = 2, z = -1$, 8) $x = 2, y = -3, z = -2$, 9) $x = 2, y = 3, z = 1$, 10) $x = 1, y = 2, z = 3$, 11) $x = 2, y = -1, z = 1$.

19. 1) $x = y = z = 0$ при $\lambda \neq 5$, 2) при $(\mu - 1)(\mu - 2) \neq 0$, система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\mu + 2}$; 3) при $a \neq 2$.

21. 1) $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = 2$; 2) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -3, x_4 = 1$; 3) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 3$; 4) $x_1 = 1/2, x_2 = -2/3, x_3 = 2, x_4 = -3$; 5) $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 1$; 6) $x_1 = 3, x_2 = -5, x_3 = 4, x_4 = -2, x_5 = 1$; 7) $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = -3, x_4 = 3, x_5 = -2$; 8) $x_1 = 2, x_2 = -3/2, x_3 = 4, x_4 = 3, x_5 = 5/2$.

35. $\alpha = 4, \beta = -1$. 38. $d = a - b - (4/3)c$. 39. $DK = -\frac{3}{2}a + b$. 41. $a_1^0 = \{4/5, 3/5\}$, $a_2^0 = \{0, -3/5, -4/5\}$, $a_3^0 = \{2/3, -2/3, -1/3\}$, $a_4^0 = \{6/7, -2/7, -3/7\}$. 42. $b = 2i + 2j + 2k$. 43. $d = -48i + 45j - 36k$. 44. $b = -5i + 10j + 10k$. 45. $a = 2b - c$. 46. $a = -\frac{4}{5}e_1 - \frac{2}{5}e_2$. 47. $a = -2e_1 + e_2 - e_3$. 48. 3); $a = 2e_1 - e_2 + e_3$.

49. $B(0, 1, -2)$. 51. $C(6, -2), D(2, -4)$. 52. $M_1(7, 0), M_2(-1, 0)$. 53. $M(0, 1, 0)$. 54. 7. 55. $M_1(4, 0), M_2(5, 2)$. 56. $M(4, -5)$. 57. $\sqrt{5}$.

58. 1) 9; 2) 16; 3) -6; 4) 13; 5) 37; 6) 73; 7) -61. 59. 1) -62; 2) 162; 3) 373. 60. 27. 61. $\alpha = \pm 0,6$. 62. -13. 63. $\pi/3$. 64. $d_1 = \sqrt{7}, d_2 = \sqrt{13}$. 65. $-3/\sqrt{7}$. 66. $\alpha = \arccos \frac{4}{5}$. 67. 1) 22; 2) -200; 3) 41; 4) $\sqrt{105}$; 5) 11/3; 6) 22/7; 7) $\cos \alpha = 2/3, \cos \beta = -1/3, \cos \gamma = -2/3$; 8) -7; 9) 11/21. 68. $|AB| = |AC| = 5, |BC| = 5\sqrt{2}, \angle A = \pi/2, \angle B = \angle C = \pi/4$. 70. 13. 71. -3. 72. 3. 73. $\alpha = 2$. 75. 1) $2k - 2i$; 2) $2a \times c$; 3) $a \times c$; 4) 3. 76. 1) $\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{3}$; 3) $10\sqrt{3}$. 77. $S = 3/\sqrt{2}$. 78. $S = 12$. 79. 1) $\{-3, 5, 7\}$; 2) $\{-6, 10, 14\}$; 3) $\{12, -20, -28\}$. 80. $c = \{0, -1, 1\}$. 81. $S = 2\sqrt{6}, h = 2\sqrt{3}$. 82. 5. 83. $|M| = 7\sqrt{2}, \cos \alpha = -1/\sqrt{2}, \cos \beta = 0, \cos \gamma = -1/\sqrt{2}$. 84. $M = \{2, 11, 7\}$. 85. $c = \{-6, -24, 8\}$. 86. 1) правая; 2) левая; 3) левая; 4) правая; 5) векторы компланарны; 6) левая. 87. 24. 88. -7; 1) левая; 2) правая; 3) правая. 89. 1) нет; 2) да. 90. 1) нет; 2) да. 91. 17/2. 92. 11. 93. $\mu \neq 1$. 94. $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -2$.

- 96.** 1) $x + 3y - 5 = 0$, 2) $x - 1 = 0$, 3) $y - 1 = 0$; **97.** 1) $x - y + 1 = 0$, 2) $x - 1 = 0$, 3) $y - 2 = 0$. **98.** 1) $x + y - 1 = 0$, 2) $x - 2 = 0$, 3) $2x - y - 1 = 0$; **99.** 1) $x = 2 + 2t, y = -3t, z = -3 + 5t$; 2) $x = 2 + 5t, y = 2t, z = -3 - t$; 3) $x = 2 + t, y = 0, z = -3$; 4) $x = 2, y = t, z = -3$; 5) $x = 2, y = 0, z = -3 + t$. **100.** 1) $x = 1 + 2t, y = -1 - 3t, z = -3 + 4t$; 2) $x = 1 + 2t, y = -1 + 4t, z = -3$; 3) $x = 1 + 3t, y = -1 - 2t, z = -3 + 5t$. **101.** 1) $x = 1 + 2t, y = -2 + 3t, z = 1 - 2t$; 2) $x = 3 + 2t, y = -1 - t, z = 3$; 3) $x = 3t, y = -2, z = 3 - 2t$; 4) $x = 2 + t, y = 1 - 2t, z = 1 + t$; 5) $x = 3 + t, y = -1 - t, z = t$. **102.** $(9, -4, 0), (3, 0, -2), (0, 2, -3)$. **103.** $x = 5t + 4, y = -11t - 7, z = -2$. **110.** $M_1(5, 6), M_2(3, 2)$. **111.** 1) $a \neq 3$, 2) $a = 3, b \neq 2$, 3) $a = 3, b = 2$. **112.** 1) $m = 4, n \neq 2$ или $m = 4, n = -2$; 2) $m = -4, n = 2$ или $m = 4, n = -2$; 3) $m = 0, n$ — любое. **113.** 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$. **114.** $3x + 2y = 0, 2x - 3y - 13 = 0$. **115.** $5x - 2y - 33 = 0, x + 4y - 11 = 0, 7x + 6y + 33 = 0$. **116.** $4x + 3y - 11 = 0, x + y + 2 = 0, 3x + 2y - 13 = 0$. **117.** 1) $(5, 6)$; 2) $(3, 2)$; 3) $(1/4, 1/3)$; 4) $(-5/3, 2)$. **119.** $A(-1, 3), \cos \angle A = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $B(-2, 0), \cos \angle B = \frac{1}{5\sqrt{2}}$; $C\left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right), \cos \angle C = \frac{1}{\sqrt{10}}$. **120.** 1) 3; 2) 1; 3) 4. **121.** 1) 2,5; 2) 3. **122.** 4. **124.** 1) $x = 1, y = 2, z = 3$; 2) $3y - 2z = 0, 3x - z = 0, 2x - y = 0$. **126.** $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$. **127.** 1) $x + y + z - 4 = 0$; 2) $4x - 5y - z = 0$. **128.** 1) $x - 2y + 3z + 3 = 0$; 2) $5x - 3z = 0$. **129.** 1) $x + 2y + 3z - 26 = 0$; 2) $x - 6y - 4z + 41 = 0$; 3) $3x + 4y + 5z - 50 = 0$; 4) $11x + y - 8z + 3 = 0$. **130.** $x = 2 - 5s + 2t, y = 3 + 6s - t, z = -5 + 4s$; $4x + 8y - 7z - 67 = 0$. **131.** 1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают. **132.** $x - 4y - z + 16 = 0$. **133.** 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$. 3) $x = t+1, y = -7t, z = -19t-3$; 4) $x = -t+1, y = 3t+2, z = 5t-1$. **134.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$. **136.** $(2, -3, 6)$. **137.** $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$. **138.** $2x - 3y + 4z - 1 = 0$. **139.** $(3, -2, 4)$. **140.** $(1, 4, -7)$. **141.** $(-5, 1, 0)$. **142.** $9x + 11y + 5z - 16 = 0$. **143.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **144.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. **148.** $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}, (1, -6, -4)$. **150.** 1) пересекаются в точке $(0, 0, -2)$; 2) параллельны; 3) лежит в плоскости. **152.** 1) 3; 2) 1; 3) 0. **153.** 4. **154.** 1) 3,5; 2) 1. **155.** $\frac{1}{\sqrt{11}}$. **156.** 1) 21; 2) $\sqrt{\frac{35}{6}}$. **157.** 1) 3; 2) $\sqrt{\frac{10}{3}}$; 3) 25; 4) $\sqrt{\frac{220}{3}}$. **158.** 1) 13; 2) 3; 3) 7. **159.** 2) $4x + 3y + 12z - 93 = 0$; 3) 13; 4) 13. **160.** а) $a = 5, b = 3$; б) $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$; в) $\varepsilon = \frac{4}{5}$; г) $x = \pm \frac{25}{4}$. **161.** 1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 4) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 5) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$; 6) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **164.** 1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$; 3) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$; 4) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$; 5) $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

- 165.** 1) эллипс: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$, $C(3, -1)$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $\varepsilon = \frac{2}{3}$, $d_1: 2x - 15 = 0$, $d_2: 2x + 3 = 0$; 2) эллипс: $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$, $C(-1, 2)$, $a = 5$, $b = 4$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$, $d_1: 3x - 34 = 0$, $d_2: 3x + 16 = 0$; 3) эллипс: $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$, $C(1, -2)$, $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $d_1: y - 6 = 0$, $d_2: y + 10 = 0$; 4) окружность: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$, $C(2, -3)$, $R = 4$; 5) окружность: $(x-4)^2 + y^2 = 16$, $C(4, 0)$, $R = 4$; 6) окружность: $x^2 + (y+2)^2 = 4$, $C(0, -2)$, $R = 2$.
- 166.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; $a = 3$; $b = 4$; $F_1(-5, 0)$; $F_2(5, 0)$; $\varepsilon = \frac{5}{3}$; $l_1, l_2: y = \pm \frac{4}{3}x$; $d_1, d_2: x = \pm \frac{9}{5}$.
- 167.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$; $a = 3$; $b = 4$; $F_1(0, -5)$; $F_2(0, 5)$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$; $l_1, l_2: y = \pm \frac{4}{3}x$; $d_1, d_2: y = \pm \frac{16}{5}$.
- 168.** 1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; 6) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.
- 171.** 1) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$; $C(2, -3)$; $a = 3$; $b = 4$; $\varepsilon = \frac{5}{3}$; $l_1: 4x - 3y - 17 = 0$; $l_2: 4x + 3y + 1 = 0$; $d_1: 5x - 1 = 0$; $d_2: 5x - 19 = 0$; 2) $\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1$; $C(-5, 1)$; $a = 8$; $b = 6$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$; $l_1: 3x + 4y + 11 = 0$; $l_2: 3x - 4y + 19 = 0$; $d_1: x = -11, 4$; $d_2: x = 1, 4$; 3) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = -1$; $C(2, -1)$; $a = 3$; $b = 4$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$; $l_1: 4x + 3y - 5 = 0$; $l_2: 4x - 3y - 11 = 0$; $d_1: y = -4, 2$; $d_2: y = 2, 2$.
- 172.** 1) $p = 3$, в правой полуплоскости, симметрична относительно Ox ; 2) $p = 2$, в верхней полуплоскости, симметрична относительно Oy ; 3) $p = 2$, в левой полуплоскости, симметрична относительно Ox ; 4) $p = \frac{1}{2}$, в нижней полуплоскости, симметрична относительно Oy .
- 173.** 1) $y^2 = -x$, 2) $x^2 = -2y$, 3) $x^2 = -12y$.
- 175.** 1) $y^2 = 4(x-2)$ — парабола, $p = 2$, $A(2, 0)$, $d: x - 1 = 0$; 2) $x^2 = -(y-2)$ — парабола, $p = \frac{1}{2}$, $A(0, 2)$, $d: 4y - 9 = 0$; 3) $(x-1)^2 = \frac{1}{4}(y-3)$ — парабола, $p = \frac{1}{2}$, $A(1, 3)$, $d: y = \frac{11}{4}$; 4) $(x-6)^2 = -6(y+1)$ — парабола, $p = 3$, $A(6, -1)$, $d: y = 0, 5$; 5) $(y-2)^2 = -4(x-1)$ — парабола, $p = 2$, $A(1, 2)$, $d: x = 2$; 6) $(y-3)^2 = \frac{1}{2}(x+4)$ — парабола, $p = \frac{1}{4}$, $A(-4, 3)$, $d: x = -\frac{33}{8}$.
- 177.** Да. **178.** Да. **179.** Нет. **180.** 1) Да. 2) Нет. **181.** Да. **182.** Нет. **183.** Нет. **184.** 1) Нет. 2) Да. **185.** 1) $x = e_1 + 2e_2 + 3e_3$; 2) $x = e_1 + e_2 + e_3$. **186.** 1) $x = e_1 + \frac{e_3}{2} - \frac{e_4}{2}$; 2) $x = 2e_2 + e_3 + 2e_4$. **188.** $f(t) = -g_1(t) - g_3(t)$.

190. $B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. **192.** $B = 2E_1 - E_2 + 3E_3$. **193.** $P(x) = 1 + 3(x-1) - (x-1)^2 + 2(x-1)^3$; $Q(x) = 4 + 2(x-1) + (x-1)^3$.

194. 6) $r = 2$; 7) $r = 3$; 8) $r = 3$; 9) $r = 3$; 10) $r = 2$; 11) $r = 3$.

195. (x_1, x_2) , (x_1, x_4) , (x_2, x_3) , (x_2, x_5) , (x_3, x_4) , (x_4, x_5) . **196.** 1) несовместна; 2) единственное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; 3) несовместна; 4) $x_1 = -1 - 4C$, $x_2 = 4 - 3C$, $x_3 = C$; 5) единственное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$; 6) $x_1 = C$, $x_2 = -13 + 3C$, $x_3 = -7$, $x_4 = 0$; 7) $x_1 = -1 + C_1 + 2C_2$, $x_2 = -3 + C_1 + 2C_2$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$; 8) единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$; 9) $x_1 = \frac{1+C_3}{3}$, $x_2 = \frac{1+3C_1+3C_2-5C_3}{3}$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, $x_5 = C_3$.

197. 1) несовместна при $\lambda \neq 0$; при $\lambda = 0$ $x_1 = \frac{-5C_1 - 13C_2 - 3}{2}$, $x_2 = \frac{-7C_1 - 19C_2 - 7}{2}$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$; 2) при $\lambda = 8$ $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2 - C_1 - \frac{3}{2}C_2$; при $\lambda \neq 8$ $x_1 = C$, $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}C$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$; 3) при $(\lambda-1)(\lambda+2) \neq 0$ система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2}$; при $\lambda = 1$ $x_1 = 1 - C_1 - C_2$, $x_2 = C_1$, $x_3 = C_2$; при $\lambda = -2$ система несовместна; 4) система несовместна ни при каких λ ; 5) при $\lambda \neq 1$ система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$;

при $\lambda = 1$ $x_1 = 1 - \frac{13}{3}C$, $x_2 = 1 - \frac{5}{3}C$, $x_3 = C$. **198.** 1) $X = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$;

$$2) X = C_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$3) X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}; 4) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$5) X = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 6) X = C \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; 7) X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; 8) X = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; 9) X = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$10) X = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{199.} 1) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; 2) X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 3) X = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; 4) X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; 5) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$6) X = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 7) X = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$8) X = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$9) X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{202.} \begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \frac{5}{4}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \end{cases} \begin{cases} x_1 = x'_1 + 5x'_2 - x'_3, \\ x_2 = x'_1 - x'_2 + x'_3, \\ x_3 = \frac{5}{4}x'_1 + x'_3. \end{cases}$$

$$203. S = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$204. S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} -11/3 \\ -103 \end{pmatrix}.$$

$$205. S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, x = -\frac{1}{2}e'_1 + \frac{3}{2}e'_2.$$

$$206. S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$207. S = \begin{pmatrix} -42 & -71 & -41 \\ 12 & 20 & 9 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$210. -6. \quad 211. -1. \quad 212. 1) e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j, a = \sqrt{2}e_1 + 2\sqrt{2}e_2; 2) e_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j, e_2 = -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j, a = \frac{3}{2}e_1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}e_2.$$

$$213. 1) e_1 = f_1 = (1, -2, 2)^\top, e_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^\top, e_3 = (6, -3, -6)^\top;$$

$$2) e_1 = f_1 = (1, 1, 1, 1)^\top, e_2 = (2, 2, -2, -2)^\top, e_3 = (-1, 1, -1, 1)^\top. \quad 214. g_1 = 1, g_2 = t, g_3 = t^2 - \frac{1}{3}; e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, e_2 = t\sqrt{\frac{3}{2}}, e_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right).$$

$$215. a) S = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, a = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)e_1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)e_2;$$

$$b) S = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, a = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}e_2. \quad 216. e'_1 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2,$$

$$e'_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, e'_3 = e_3, a = -\frac{5}{2}e'_1 - \frac{5\sqrt{3}}{2}e'_2 + e'_3.$$

$$217. S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, S^{-1} = S^\top, \begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{cases}$$

$$a) a = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)e'_1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)e'_2; b) a = \frac{3}{\sqrt{2}}e'_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e'_2.$$

$$218. S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{15} & 2/\sqrt{15} & -4/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{15} & 1/\sqrt{15} & 2/\sqrt{30} & 4/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{15} & -3/\sqrt{15} & -1/\sqrt{30} & 3/\sqrt{30} \\ 3/\sqrt{15} & 1/\sqrt{15} & 3/\sqrt{30} & 1/\sqrt{30} \end{pmatrix},$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{15}}e'_1 + \frac{1}{\sqrt{15}}e'_2 + \frac{10}{\sqrt{30}}e'_4.$$

$$219. 1) \text{ является, } 2) \text{ не является, } 3) \text{ является. } \quad 220. \text{ а), в).}$$

221. 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **222.** 1) является;

гомотетия с коэффициентом λ , с центром в начале координат; 2) не является; композиция гомотетии с коэффициентом λ , с центром в начале координат и параллельного переноса на вектор $\mathbf{b}$; 3) является линейным оператором проектирования на ось вектора $\mathbf{e}$.

223. 1) $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **226.** $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **227.** 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **228.** Проектирование на плоскость

xOy и симметрия относительно начала координат; $\hat{A}(\mathbf{x}) = -10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

229. а) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

230. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **231.** 1) $A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A' = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$; 3) $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$A' = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -2 \\ -5/2 & 1/2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $A' = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3}(2\sqrt{3}-1) & \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) & 0 \\ 1+2\sqrt{3} & 10+\sqrt{3} & 0 \\ 2\sqrt{3} & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $A' = \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$; 6) $A' = A$. **232.** $A_1, \lambda = 5$. **233.** $\mathbf{a}$ —

собственный, $\lambda = 1$. **234.** $\alpha = \pm 1$. **237.** 1) $\lambda = -1$, $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

2) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{x}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ($c \neq 0$). **238.** $A =$

$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **239.** 1) $\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$;

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2) \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad x_1 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

матрица к диагональному виду не приводится; 3) $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1,$
 $x_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$ матрица к диагональному виду не приводит-

ся; 4) $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$

$$5) e'_1 = \begin{pmatrix} -15 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$6) e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{240.} \quad 1) e'_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad e'_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -23 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}; \quad 2) e'_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e'_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \\ -4/\sqrt{18} \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix};$$

$$3) e'_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4) e'_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad e'_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{241.} \quad 1) A' = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad 2) A' =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & -13 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{242.} \quad 1) x_1'^2 - 3x_2'^2, \quad x'_1 = x_1 - 2x_2, \quad x'_2 = x_2; \quad 2) -7x_1'^2 +$$

$$+ x_2'^2, \quad x'_1 = x_1, \quad x'_2 = 3x_1 + x_2; \quad 3) x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2; \quad 4) x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2.$$

- 243.** 1) $9x_1'^2 + 18x_2'^2 - 9x_3'^2$, $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_1' + \frac{2}{3}x_2' - \frac{1}{3}x_3', \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_1' + \frac{2}{3}x_2' + \frac{2}{3}x_3', \\ x_3 = \frac{2}{3}x_1' - \frac{1}{3}x_2' + \frac{2}{3}x_3'; \end{cases}$
- 2) $3x_1'^2 + 6x_2'^2 - 2x_3'^2$, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2'. \end{cases}$
- 244.** 1) Эллипс: $\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1$, $O'(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$, $e_1' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$,
 $e_2' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$; 2) Парабола: $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$, $O'(2, 1)$, $e_1' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$,
 $e_2' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; 3) Гипербола: $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$, $O'(1, 1)$, $e_1' = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$,
 $e_2' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$. **245.** 1) $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} + \frac{z'^2}{2/3} = 1$, $O'(1, 2, -1)$, $e_1' =$
 $= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \end{pmatrix}^\top$, $e_2' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^\top$, $e_3' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \end{pmatrix}^\top$;
2) $\frac{x'^2}{1/3} + \frac{y'^2}{1/6} - \frac{z'^2}{1/2} = 1$, $O'(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^\top$,
 $e_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^\top$, $e_3' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\top$. **246.** 1) положительно
определенная; 2) положительно определенная; 3) знакопеременная; 4) поло-
жительно определенная; 5) знакопеременная; 6) отрицательно определенная.

Список литературы

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1978. 296с.
2. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1974. 320с.
3. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее применения. М.: Наука, 1971. 407с.
4. Сборник задач по математике. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. М.: Наука, 1988. 462с.
5. *Бородихин В.М., Вахрушев Н.В., Путинцева А.П., Соснина Э.Г., Хайкин Ю.Е.* Высшая математика. Учебное пособие в 2-х частях. Новосибирск: НГТУ, 1995. 256с.
6. *Бородихин В.М., Путинцева А.П., Соснина Э.Г.* Линейная алгебра. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: Учебное пособие.— Новосибирск, 1999.— 151с.
7. *Бородихин В.М., Путинцева А.П., Соснина Э.Г.* Высшая математика. Дополнительные главы линейной алгебры. Учебное пособие. Новосибирск, 1998. 97с.