

3.1. Достаточные статистики

Пусть $\mathbb{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ - выборка из распределения $F(x, \theta)$ и пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ - конкретная реализация выборки $\mathbb{X}_n$

Определение

Статистика $T = T(\mathbb{X}_n)$ называется *достаточной* для модели $F = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, если условная плотность (условная вероятность) $L(\bar{x} | t; \theta)$ случайного вектора $\mathbb{X}_n$ при условии $T(\mathbb{X}_n) = t(\bar{x})$ не зависит от параметра θ .

Свойство достаточности статистики $T(\mathbb{X}_n)$ означает, что она содержит всю информацию о параметре θ , имеющуюся в выборке. Следовательно, достаточная статистика дает оптимальный в определенном смысле способ представления статистических данных, что особенно важно при обработке большого объема статистической информации.

Теорема 3.1 (критерий факторизации)

Для того чтобы статистика $T(X_n)$ была достаточной для θ , необходимо и достаточно, чтобы функция правдоподобия имела вид

$$L(X_n, \theta) = g(T(X_n); \theta)h(X_n),$$

где функция $g(t, \theta)$ зависит от выборки только через $T(X_n) = t$, а функция $h(X_n)$ не зависит от θ .

Следствие

- 1) Отметим, что всякая эффективная оценка является одновременно достаточной статистикой. Однако обратное утверждение далеко не всегда верно – достаточная статистика может существовать, но не быть эффективной.
- 2) Если статистика $T(X_n)$ достаточная, то достаточной является и любая взаимно-однозначная функция $\varphi(T(X_n))$.

Пример

Найдем достаточную статистику для $N(\theta_1, \theta_2^2)$.

$$\begin{aligned}
 L(\mathbb{X}_n, \bar{\theta}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\theta_2)^n} e^{-\frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta_1)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\theta_2)^n} e^{-\frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{\mathbb{X}}_n + \bar{\mathbb{X}}_n - \theta_1)^2} = \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n (X_i - \theta_1)^2 = \sum_{i=1}^n \left((X_i - \bar{\mathbb{X}}_n) + (\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_1) \right)^2 = \right. \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{\mathbb{X}}_n)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{\mathbb{X}}_n)(\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_1) + \sum_{i=1}^n (\theta_1 - \bar{\mathbb{X}}_n)^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{\mathbb{X}}_n)^2 + 2(\theta_1 - \bar{\mathbb{X}}_n) \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i - n \bar{\mathbb{X}}_n}_{=0} + n(\theta_1 - \bar{\mathbb{X}}_n)^2 = \left. \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{\mathbb{X}}_n)^2 + n(\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_1)^2 \right| \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\theta_2)^n} e^{-\frac{1}{2\theta_2^2} \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{\mathbb{X}}_n)^2}_{T_2} - \frac{\overbrace{n(\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_1)^2}^{T_1}}{2\theta_2^2}} , \quad g(T_1, T_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\theta_2)^n} e^{-\frac{1}{2\theta_2^2} T_2 - \frac{n(T_1 - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}} , \quad h(\mathbb{X}_n) = 1
 \end{aligned}$$

Откуда вытекает по критерию факторизации $T = (T_1, T_2)$, $T_1 = \bar{\mathbb{X}}_n$, $T_2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{\mathbb{X}}_n)^2$

Пример

Найдем достаточную статистику для равномерного распределения $Rav(\theta)$:

$$L(\mathbb{X}_n, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq \theta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \frac{h(\theta - X_{(n)})}{\theta^n}, \quad \text{где} \quad h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \quad \text{По критерию}$$

факторизации имеем, что $T(\mathbb{X}_n) = X_{(n)}$.

Пример (Коши).

$$L(\mathbb{X}_n, \theta) = \frac{1}{\pi^n} \prod \frac{1}{1 + (X_i - \theta)^2}$$

Здесь нельзя найти статистику T делающую факторизацию

Теорема 3.2 (Рао – Блекуэлла - Колмогорова)

НОРМД, если она существует, является функцией от достаточной статистики. Значит, для любой несмещенной оценки можно найти несмещенную оценку, которая зависит от достаточной статистики и имеет линейную дисперсию. Следовательно, НОРМД нужно искать среди функций от достаточной статистики.

Определение

Достаточная статистика называется *полной*, если $\forall \varphi(T(X_n)) : (M\varphi(T) = 0, \forall \theta) \Rightarrow \varphi(t) \equiv 0$ на всем множестве значений статистики T .

Теорема 3.3

Если существует полная достаточная статистика, то всякая функция от нее является НОРМД своего математического ожидания.

3.2. Метод максимального правдоподобия

Определение

Оценкой максимального правдоподобия (ОМП) параметра θ называется точка параметрического множества Θ , в которой функция максимального правдоподобия $L(X_n, \theta)$ достигает максимума:

$$L(X_n, \theta) = \sup_{\theta \in \Theta} L(X_n, \theta).$$

Определение

Если для любой выборки X_n из выборочного пространства X максимум $L(X_n, \theta)$ достигается во внутренней точке θ с $L(X_n, \theta)$ дифференцируема θ , то ОМП θ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial \ln L(X_n, \theta)}{\partial \theta_i} = 0, i = 1, \dots, r,$$

которые называется *уравнениями правдоподобия*.

Свойства ОМП

1. Если существует эффективная оценка $T(\mathbb{X}_n)$, то $\theta = T(\mathbb{X}_n)$, так как по критерию эффективности Рао-Крамера
$$\frac{\partial \ln L(X_n, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{a(\theta)} [T(\mathbb{X}_n) - \theta] = 0 \Rightarrow T(\mathbb{X}_n) = \theta .$$
2. Если существует достаточная $T = T(\mathbb{X}_n)$ и ОМП существует и единственная, то она является функцией от T . Так как по теореме факторизации $L(X_n, \theta) = g(T(X_n), \theta)h(X_n)$ и максимизация функции правдоподобия эквивалентна максимизации $g(T(X_n); \theta)$ по $\theta \Rightarrow \theta$ зависит от $T(X_n)$.
3. ОМП является инвариантной относительно преобразования параметров, то есть $\hat{\tau}(\theta) = \tau(\hat{\theta})$, если $\tau(\theta)$ - взаимнооднозначное преобразование.
4. ОМП является асимптотически несмещенной, то есть $M\theta \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty$.
5. Если модель F является регулярной, а функция правдоподобия $\forall n \geq 1$ и $\mathbb{X}_n \in X$ имеет один локальный максимум, то θ является состоятельной оценкой параметра θ , то есть $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta, \forall \theta \in \Theta$.

6. $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{P} N(0, I^{-1}(\theta))$, где $I(\theta)$ информационная матрица Фишера.

Если $\tau(\theta)$ непрерывно дифференцируемая функция от θ и $\hat{\tau}_n = \tau(\theta)$ - ОМП $\tau(\theta)$, то

$$\sqrt{n}(\tau_n - \tau(\theta)) \xrightarrow{P} N(0, \sigma_\tau^2) \quad \sigma_\tau^2 = b^T(\theta) I^{-1}(\theta) b(\theta), \quad b(\theta) = \left(\frac{\partial \tau(\theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \tau(\theta)}{\partial \theta_r} \right).$$

Это свойство называется свойством *асимптотической нормальности*.

3.3. Метод моментов

Определение.

$$\mathbb{X}_n = (X_1, \dots, X_n) \succ F(x, \theta)$$

$$\alpha_k = M \xi^k, k = 1, 2, \dots$$

Приравнивая теоретические и выборочные моменты можно найти оценки неизвестных параметров, решая систему уравнений: $\alpha_k(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1, 2, \dots, m.$

Такой метод называется *метод моментов*.

Оценки, полученные по методу моментов, при некоторых условиях являются состоятельными. В общем случае, не являются эффективными.

Пример

Имеется выборка $\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\} \in \Gamma(\theta_1, \theta_2)$

$$f(x, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{x^{\theta_2-1} e^{-x/\theta_1}}{\Gamma(\theta_2) \theta_1 \theta_2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_k = M \xi^k = \int_0^\infty x^k f(x, \theta_1, \theta_2) dx = \frac{1}{\Gamma(\theta_2) \theta_1 \theta_2} \int_0^\infty x^k x^{\theta_2-1} e^{-x/\theta_1} dx = \frac{\theta_1^k \Gamma(\theta_2 + k)}{\Gamma(\theta_2)}$$

$$\alpha_1 = \frac{\theta_1 \Gamma(\theta_2 + 1)}{\Gamma(\theta_2)} = \frac{\theta_1 \theta_2 \Gamma(\theta_2)}{\Gamma(\theta_2)} = \theta_1 \theta_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\alpha_2 = \frac{\theta_1^2 \Gamma(\theta_2 + 2)}{\Gamma(\theta_2)} = \frac{\theta_1^2 (\theta_2 + 1) \Gamma(\theta_2 + 1) \Gamma(\theta_2 + 1)}{\Gamma(\theta_2)} = \frac{\theta_1^2 (\theta_2 + 1) \theta_2 \Gamma(\theta_2)}{\Gamma(\theta_2)} = \theta_1^2 (\theta_2 + 1) \theta_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\text{Получаем } \theta_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}, \theta_2 = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$