Пусть имеется выборка $\mathbb{X}_n = \{X_1, ..., X_n\}$ наблюдаемой случайной величины с функцией распределения $F_\xi(x)$.

а) *Простой* гипотезой является утверждение $H_0 : F_\xi(x) = F(x)$, где $F(x)$ полностью задана.

б) *Сложной* гипотезой является утверждение $H_0 : F_\xi(x) \in F = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$.

Для проверки гипотезы о виде распределении используются ***критерии согласия***.

6.1. Критерий Колмогорова

В критериях типа Колмогорова измеряемое расстояние между эмпирическим $F_n(x)$ и теоретическим $F(x,\ \theta)$ распределениями имеет вид

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |\, F_n(x) - F(x,\theta)\, |. \qquad (6.1)$$

Предпочтительнее в критерии Колмогорова (Колмогорова-Смирнова) использовать статистику с поправкой Большева вида

$$S_k = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}\ , \qquad (6.2)$$

где

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-),\ D_n^+ = \max_{1\le i\le n}\left\{\frac{i}{n} - F(X_{(i)},\theta)\right\},\ D_n^- = \max_{1\le i\le n}\left\{F(X_{(i)},\theta) - \frac{i-1}{n}\right\}, \qquad (6.3)$$

и $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ – упорядоченные по возрастанию выборочные значения.

Статистика S_k при справедливости простой проверяемой гипотезы в пределе подчиняется закону Колмогорова, а в случае сложной гипотезы – различным законам, в зависимости от

- вида распределения,
- метода оценивания параметров,
- числа и типа оцениваемых параметров,
- в некоторых случаях (например, для гамма-распределения) от значения параметра формы.

Статистические модели распределений статистик $G(S_k | H_0)$ для наиболее распространенных семейств законов распределений приведены в работах Б.Ю. Лемешко (ami.nstu.ru/~headrd/publik.htm)

Если для вычисленного по выборке значения статистики S_k^* выполняется неравенство $P\left\{S > S_k^*\right\} = 1 - G(S_k^* | H_0) > \alpha$, то нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

6.2. Критерии типа ω^2

В критериях типа ω^2 расстояние между гипотетическим и истинным распределениями рассматривают в квадратичной метрике. Статистика критерия выражается соотношением

$$\omega_n^2\left[\psi(F)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{E\left[F_n(x)\right]-F(x)\right\}^2\psi(F(x))dF(x)=$$
$$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{g\left[F(x_i)\right]-\frac{2i-1}{2n}f\left[F(x_i)\right]\right\}+\int\limits_0^1(1-t)^2\psi(t)dt, \tag{6.4}$$

где

$$f(t)=\int\limits_0^1\psi(s)ds,\; g(t)=\int\limits_0^1 s\psi(s)ds.$$

При выборе $\psi(t) \equiv 1$ получается статистика критерия Крамера-Мизеса-Смирнова:

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ F(X_{(i)}, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2 . \qquad (6.5)$$

При выборе $\psi(t) \equiv 1/t(1-t)$ получается статистика критерия Андерсона-Дарлинга:

$$S_\Omega = n\Omega_n^2 = -n - 2\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(X_{(i)}, \theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right) \ln(1 - F(X_{(i)}, \theta)) \right\}. \qquad (6.6)$$

Статистики S_ω и S_Ω при простой гипотезе в пределе подчиняется законам $a_1(s)$ и $a_2(s)$, соответственно, а в случае сложной гипотезы – различным законам, в зависимости от вида распределения, числа и типа оцениваемых параметров, значений параметров формы, от метода оценивания. Статистические модели распределений статистик $G(S_\omega | H_0)$ и $G(S_\Omega | H_0)$ для наиболее распространенных семейств законов распределений приведены в работах Б.Ю. Лемешко (ami.nstu.ru/~headrd/publik.htm)

Критерии типа ω^2 имеют правостороннюю критическую область.

6.3. Критерии типа χ^2

Процедура проверки гипотез с применением критерия типа χ^2 предусматривает группирование наблюдений. Область определения случайной величины разбивается на k непересекающихся интервалов граничными точками $t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k$ где t_0 – нижняя граница области определения, t_k – верхняя грань. В соответствии с заданным разбиением подсчитывается число n_i выборочных значений, попавших в i-й интервал и вычисляют вероятность попадания в интервал $P_i(\theta) = F(t_i) - F(t_{i-1}) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(x,\theta)dx$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$; $\sum\limits_{i=1}^{k} P_i(\theta) = 1$. В основе статистик, используемых в критериях согласиях типа χ^2 лежит распределение отклонений $\dfrac{n_i}{n}$ от $P_i(\theta)$.

Критерии типа χ^2 имеют правостороннюю критическую область.

6.3.1. Критерий χ^2 Пирсона

Статистика χ^2 Пирсона имеет вид

$$S_{\chi^2} = n\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\frac{n_i}{n} - P_i(\theta)\right)^2}{P_i(\theta)}. \tag{6.7}$$

В случае проверки простой гипотезы при $n \to \infty$ статистика S_{χ^2} имеет распределение χ^2_{k-1} с $k-1$ степенями свободы.

В случае проверки сложной гипотезы и при условии, что оценки находятся по методу минимума χ^2 статистика S_{χ^2} имеет распределение χ^2_{k-m-1} степенями свободы при $n \to \infty$, где m – число оцениваемых параметров.

6.3.2. Критерий отношения правдоподобия

В критерии отношения правдоподобия используется статистика

$$S_{ОП} = -2\sum_{i=1}^{k} n_i \ln\left(\frac{P_i(\theta)}{n_i / n}\right), \qquad (6.8)$$

которая подчиняется в случае простой гипотезы χ^2_{k-1} распределению при $n \to \infty$.

В случае проверки сложной гипотезы и при условии, что оценки находятся по методу максимального правдоподобия по группированной выборке статистика $S_{ОП}$ при $n \to \infty$ имеет распределение χ^2_{k-m-1} степенями свободы, где m – число оцениваемых параметров, также как и для критерия χ^2 Пирсона.

Проверка гипотезы однородности распределений

Гипотеза однородности формулируется следующим образом: пусть имеются две независимые случайные выборки $\mathbb{X}_m = (X_1, X_2, ..., X_m)$ и $\mathbb{Y}_n = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ объемов m и n соответственно. Выборке $\mathbb{X}_m$ соответствует функция распределения $F(x)$, выборке $\mathbb{Y}_n$ – функция распределения $G(x)$. Проверяемая нулевая гипотеза H_0 имеет вид: $F(x) = G(x)$ против конкурирующей H_1: $F(x) \neq G(x)$. Функции $F(x)$ и $G(x)$ будем считать непрерывными.

6.4. Критерий Смирнова

В критерии Смирнова используется статистика вида:

$$S_C = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{mn}, \tag{6.9}$$

где

$$D_{mn}(\mathbb{X}_m, \mathbb{Y}_n) = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| F_m(x) - G_n(x) \right|, \tag{6.10}$$

$F_m(x)$ и $G_n(x)$ – эмпирические функции распределения, построенные по выборкам $\mathbb{X}_m$ и $\mathbb{Y}_n$ соответственно.

На практике значение $D_{mn}(\mathbb{X}_m, \mathbb{Y}_n)$ рекомендуется вычислять в соответствии с выражением:

$$D_{mn}(\mathbb{X}_m, \mathbb{Y}_n) = \max\left(D_{mn}^{+}, D_{mn}^{-}\right), \tag{6.11}$$

где D_{mn}^{+} и D_{mn}^{-} вычисляются по формуле

$$D_{mn}^{+} = \max_{1<i<m}\left\{\frac{i}{m} - F_n\left(X_{(i)}\right)\right\},\ D_{mn}^{-} = \max_{1<i<m}\left\{F_n\left(X_{(i)}\right) - \frac{i-1}{m}\right\}, \tag{6.12}$$

где $X_{(i)}$ – i-й элемент упорядоченной по возрастанию выборки $\mathbb{X}_m$.

Критерий Смирнова не зависит от конкретного вида распределений $F(x)$ и $G(x)$, и при стремлении объемов выборок к бесконечности статистика (6.9) сходится к распределению Колмогорова. Однако при малых значениях объемов m и n распределение статистики (7.4) может значительно отклоняться от предельного закона, в связи с чем предложена модификация критерия Смирнова вида

$$S_{CM} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}}\left(D_{m,n} + \frac{m+n}{4.6mn}\right). \tag{6.13}$$

При использовании критерия Смирнова рекомендуется брать объемы выборок m и n , представляющие собой взаимно простые числа.

6.5. Критерий однородности χ^2

Пусть осуществляется k последовательных серий независимых наблюдений, состоящих из $n_1, n_2, ..., n_k$ наблюдений. Пусть ν_{ij} – число наблюдений i-го исхода в j-й серии. Пусть p_{ij} – неизвестная вероятность появления i-го исхода в j-й серии. $(i = 1, ..., s;\ j = 1, ..., k)$.

Тогда гипотеза однородности может быть сформулирована следующим образом:

$$H_0 : \left(p_{1j}, \ldots, p_{sj}\right) = \left(p_1, \ldots, p_s\right),\ j = 1, ..., k.$$

Статистика критерия имеет вид

$$\chi_n^2 = n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\nu_{ij} - n_j\nu_i / n\right)^2}{n_j\nu_i} = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\nu_{ij}{}^2}{n_j\nu_i} - 1\right). \qquad (6.14)$$

Эта статистика при $n \to \infty$ имеет распределение $\chi^2_{((s-1)(k-1))}$. Критическая область имеет вид $\{t \ge t_\alpha\}$, $t_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_{(s-1)(k-1)}}(1 - \alpha)$.

Проверка гипотезы независимости

В эксперименте наблюдается двумерная случайная величина $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ с неизвестной функцией распределения $F_\xi(x, y)$, и есть основания предполагать, что ξ_1 и ξ_2 независимы. В этом случае нужно проверить гипотезу независимости:

$$H_0 : F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y),$$

где $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$ некоторые одномерные функции распределения.

Для проверки гипотезы независимости используется критерий χ^2 Пирсона. Если исходные данные негруппированы, то предварительно производится группировка наблюдений.

Пусть случайная величина ξ_1 принимает значения $c_1, ..., c_s$, а ξ_2 – $b_1, ..., b_k$.

Обозначим ν_{ij} количество наблюдений $\left(c_i, b_j\right)$, $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\nu_{ij} = n$.

Таблица сопряженности признаков ξ_1 и ξ_2 имеет вид:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	b_1	$\ldots$	b_k	
c_1	ν_{11}		ν_{1k}	$\nu_{1\bullet}$
$\ldots$				$\ldots$
c_s	ν_{s1}		ν_{sk}	$\nu_{s\bullet}$
	$\nu_{\bullet 1}$	$\ldots$	$\nu_{\bullet k}$	

Статистика критерия независимости χ^2 Пирсона

$$\chi_n^2 = n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\nu_{ij} - \nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}/n\right)^2}{\nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}} = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\nu_{ij}^{\ 2}}{\nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}} - 1\right)$$

имеет распределение $\chi^2_{((s-1)(k-1))}$ при $n \to \infty$.

Пример

В следующей таблице представлены значения показателя Y и значения показателя X в течение 12 лет.

Год	Y	X	Год	Y	X
1986	152	170	1992	177	200
1987	159	179	1993	179	207
1988	162	187	1994	184	215
1989	165	189	1995	186	216
1990	170	193	1996	190	220
1991	172	199	1997	191	225

Проверить гипотезу о независимости величин X и Y.

Решение:

Для проверки гипотезы независимости воспользуемся критерием независимости χ^2. Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0.05$. Составим таблицу сопряженности двух признаков: $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, k}$:

X \ Y	(151,161]	(161,171]	(171,181]	(181,191]	$\nu_{i\cdot}$
(165,180]	2	0	0	0	2
(180,195]	0	3	0	0	3
(195,210]	0	0	3	0	3
(210,225]	0	0	0	4	4
$\nu_{\cdot j}$	2	3	3	4	12

Статистика критерия независимости χ^2:

$$X_n^2 = n\left(\sum_{i,j}\frac{\nu_{ij}^2}{\nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}} - 1\right)$$

имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы $(s-1)(k-1)$.

Вычислим значение статистики: $X_n^2 = 36$, число степеней свободы $(s-1)(k-1) = 9$.

Находим по таблице из приложения 3 критическое значение статистики Пирсона при $\alpha = 0.05$: $S_\alpha = 16.9$.

Поскольку $X_n^2 > S_\alpha$, то гипотеза о независимости признаков X и Y отвергается.