

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

Любая процедура проверки статистической гипотезы связана с ошибками первого и второго рода. Если вероятность ошибки I рода экспериментатор вправе задать самостоятельно, то вероятность ошибки II рода зависит от множества параметров эксперимента:

- вероятности ошибки первого рода;
- объема выборки;
- критерия проверки гипотезы;
- альтернативной гипотезы.

Естественно желание экспериментатора чтобы вероятность ошибки первого рода была минимальна, но в этом случае, естественно, растет вероятность ошибки второго рода. Поэтому на практике, как правило, вероятность ошибки первого рода берут не менее 0.01.

При фиксированной вероятности ошибки первого рода и при увеличении объема выборки вероятность ошибки второго рода должна уменьшаться и стремиться к нулю. Критерии, удовлетворяющие этому условию, называются *состоятельными*.

7.1. Наиболее мощный критерий

Пусть в эксперименте требуется выбрать одну из двух гипотез:

$$H_0 : f_{\xi}(x) = f_0(x), H_1 : f_{\xi}(x) = f_1(x),$$

где $f(x)$ - функция плотности, если случайная величина ξ является непрерывной, и вероятность события $P\{\xi = x\}$, если ξ - дискретная случайная величина.

Определение 7.1. *Наиболее мощным критерием* при заданном уровне значимости α называется критерий, имеющий наибольшую мощность $1 - \beta$.

7.2. Построение наиболее мощного критерия в случае простой гипотезы

Определение 7.2. *Статистикой отношения правдоподобия* называется статистика

$$\Lambda = \Lambda(\mathbb{X}_n) = \frac{L(\mathbb{X}_n | H_1)}{L(\mathbb{X}_n | H_0)},$$

где $L(\mathbb{X}_n | H_j) = \prod_{i=1}^n f_j(X_i)$ – функции правдоподобия при верной H_j , $j = 0, 1$.

Естественно, что чем больше Λ , тем большее предпочтение мы должны отдавать гипотезе H_1 , и наоборот, чем меньше Λ , тем большее предпочтение мы должны отдавать гипотезе H_0 .

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

Таким образом, мы получаем следующее правило:

- Если $\Lambda > t_\alpha$, то гипотеза H_0 отвергается;
- Если $\Lambda \leq t_\alpha$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Найти критическое значение t_α можно из уравнения

$$P\{\Lambda > t_\alpha | H_0\} = \alpha.$$

Отсюда, в случае, если ξ является непрерывной, то

$$t_\alpha = F_{\Lambda|H_0}^{-1}(1 - \alpha),$$

где $F_{\Lambda|H_0}^{-1}(y)$ - обратная функция распределения случайной величины Λ при верной гипотезе H_0 .

Построенный критерий называется *критерием отношения правдоподобия*.

Теорема 7.1. (Лемма Неймана-Пирсона)

Среди всех критериев заданного уровня значимости α , проверяющих две простые гипотезы H_0 и H_1 , критерий отношения правдоподобия является наиболее мощным.

Пример 7.1.

Пусть рассматриваются две простые гипотезы о нормальном распределении с разными параметрами сдвига:

$$H_0 : F(x) \in N(\theta_0, \sigma^2);$$

$$H_1 : F(x) \in N(\theta_1, \sigma^2).$$

В простой гипотезе все параметры фиксированы, поэтому для определенности будем считать, что $\theta_1 > \theta_0$. Требуется построить наиболее мощный критерий и определить его мощность.

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

Запишем функцию правдоподобия для нормального закона с неизвестным параметром сдвига:

$$L(\mathbb{X}_n, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(X_1 - \theta)^2 + \dots + (X_n - \theta)^2]}.$$

Найдем отношение правдоподобия

$$\Lambda(\mathbb{X}_n) = \frac{L(\mathbb{X}_n, \theta_1)}{L(\mathbb{X}_n, \theta_0)} = \exp \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \right)$$

Гипотеза H_0 отвергается, если $\Lambda > t_\alpha$. Но чтобы найти t_α , нужно найти распределение статистики отношения правдоподобия $F_{\Lambda|H_0}(t)$. Чтобы упростить нашу задачу, построим критерий, эквивалентный критерию отношения правдоподобия, путем преобразования неравенства $\Lambda > t_\alpha$ таким образом, чтобы получить слева статистику, распределение которой мы знаем:

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

$$\exp\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right)\right) > t_\alpha \sim \\ \sim \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right) > \ln t_\alpha$$

Так как по условию задачи $\theta_1 > \theta_0$, то можем разделить левую и правую часть неравенства на $\frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2}$. Знак неравенства при этом не изменится. В результате получим:

$$\sum_{i=1}^n X_i > \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln t_\alpha + n \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} = t_\alpha'.$$

Таким образом, вместо критерия $\Lambda > t_\alpha$ мы построили эквивалентный критерий

$$T(\mathbb{X}_n) = \sum_{i=1}^n X_i > t_\alpha'.$$

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

Статистика $T(\mathbb{X}_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ при верной гипотезе H_0 распределена по нормальному закону $N(n\theta_0, n\sigma^2)$. Найдем t_α'

$$\alpha = P\left\{T(\mathbb{X}_n) > t_\alpha' \mid H_0\right\} = 1 - \Phi(t_\alpha'; n\theta_0, n\sigma^2) = 1 - \Phi\left(\frac{t_\alpha' - n\theta_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right).$$

Отсюда:

$$t_\alpha' = n\theta_0 + \sqrt{n\sigma^2} \Phi^{-1}(1 - \alpha).$$

Найдем мощность построенного критерия:

$$1 - \beta = P\left\{T(\mathbb{X}_n) > t_\alpha' \mid H_1\right\} = 1 - \Phi(t_\alpha'; n\theta_1, n\sigma^2) = 1 - \Phi\left(\frac{t_\alpha' - n\theta_1}{\sqrt{n\sigma^2}}\right).$$

Пример 7.2.

Для критерия, построенного в примере 7.1, требуется найти необходимый объем выборки, чтобы его мощность была не меньше $1 - \beta$.

Из найденного выражения для мощности выразим t'_α :

$$t'_\alpha = n\theta_1 + \sqrt{n\sigma^2}\Phi^{-1}(\beta).$$

Приравняем полученное выражение к t'_α :

$$n\theta_0 + \sqrt{n\sigma^2}\Phi^{-1}(1-\alpha) = n\theta_1 + \sqrt{n\sigma^2}\Phi^{-1}(\beta);$$

$$n(\theta_1 - \theta_0) = (\Phi^{-1}(1-\alpha) - \Phi^{-1}(\beta))\sqrt{n\sigma^2};$$

$$n = \frac{(\Phi^{-1}(1-\alpha) - \Phi^{-1}(\beta))^2 \sigma^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2}.$$

Таким образом, мы нашли минимальный размер выборки для различения заданных гипотез с заданными ошибками первого и второго рода.

7.3. Критерий отношения правдоподобия в случае дискретных распределений

Пусть наблюдается дискретная случайная величина. Тогда отношение правдоподобия

$$\Lambda(\mathbb{X}_n) = \frac{\prod_{i=1}^n f_1(X_i)}{\prod_{i=1}^n f_0(X_i)}$$

принимает дискретные значения $l_1 < l_2 < \dots < l_k < l_{k+1} < \dots$

Проблема построения критерия отношения правдоподобия в дискретном случае заключается в том, что мы не всегда можем найти такое критическое значение t_α , при котором $P\{\Lambda > t_\alpha | H_0\} = \alpha$, т.к. распределение дискретной случайной величины изменяется скачками, и, например, при некотором k вероятность $P\{\Lambda > l_k | H_0\} = \alpha_0 < \alpha$, но $P\{\Lambda > l_{k+1} | H_0\} = \alpha_0 + p_0 \geq \alpha$ (рис. 7.2).

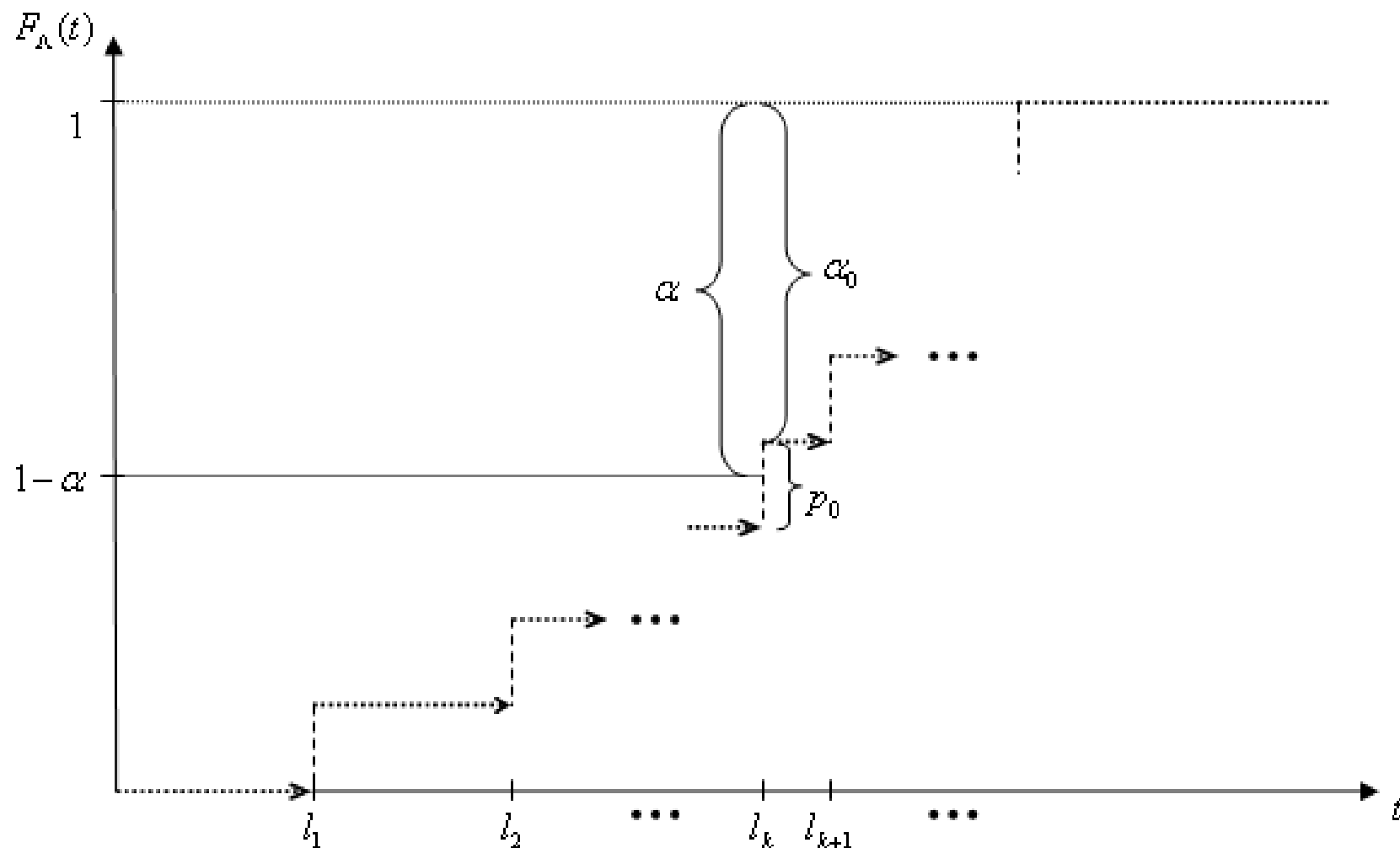


Рис. 7.2. Распределение статистики отношения правдоподобия в дискретном случае

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

Если $\alpha = \alpha_0$ то критическая область состоит из множества $\{\Lambda \mid \Lambda > l_{k(\alpha)}\}$.

Если $\alpha > \alpha_0$ и $p_0 = P\{\Lambda = l_{k(\alpha)}\}$, то строят *рандомизированный* критерий: гипотезу

H_0 отвергают с вероятностью $\frac{\alpha - \alpha_0}{p_0}$ и принимают с вероятностью $1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0}$ Тогда:

$$\begin{aligned} P\{\Lambda > l_{k(\alpha)} \mid H_0\} + \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} P\{\Lambda = l_{k(\alpha)}\} = \\ = \alpha_0 + \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} p_0 = \alpha_0 + \alpha - \alpha_0 = \alpha, \end{aligned}$$

и уровень значимости построенного критерия равен α .

7.4. Построение равномерно наиболее мощного критерия

Понятие равномерно наиболее мощного критерия (РНМК) связано с проверкой сложных гипотез, т.е. когда основная и (или) альтернативная гипотезы заданы с точностью до некоторого множества. Рассмотрим частный случай сложных гипотез, когда по основной и альтернативной гипотезам мы предполагаем, что наблюдения принадлежат одному и тому же параметрическому семейству $F(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Тогда

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta,$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_1 \subset \Theta,$$

и, естественно $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Определение 7.3. *Равномерно наиболее мощным критерием* при заданном уровне значимости α называется критерий, имеющий наибольшую мощность $1-\beta$ для любых пар простых гипотез $H_0 : \theta = \theta_0$ и $H_1 : \theta = \theta_1$, где $\theta_0 \in \Theta_0$ и $\theta_1 \in \Theta_1$.

В частности, когда подмножества Θ_0 и Θ_1 состоят из одной точки, мы получаем наиболее мощный критерий.

Надо отметить, что задача построения равномерно наиболее мощного критерия в общем случае неразрешимая, т.е., как правило, для одних альтернатив наиболее мощным будет один критерий, а для других - другой.

Построим для каждой фиксированной альтернативы $\theta \in \Theta_1$ критерий отношения правдоподобия $\mathcal{R}_{1\alpha} = \mathcal{R}_{1\alpha}(\theta_0, \theta_1) = \{X_n \mid \Lambda(X_n) > t_\alpha(\theta_0, \theta_1)\}$. Если $\mathcal{R}_{1\alpha}(\theta_0, \theta_1)$ зависит от альтернативы θ_1 , то не существует критической области, которая была бы наилучшей $\forall \theta_1 \in \Theta_1$ и РНМК не существует.

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

Если $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0, \theta_1)$ не зависит от θ_1 , т.е. $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0, \theta_1) = \mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0)$, то эта критическая область максимизирует мощность при любой альтернативе и поэтому $\mathcal{X}_{1\alpha}(\theta_0)$ является РНМК.

Сформулируем общее достаточное условие существования РНМК в случае односторонних альтернатив. Пусть θ - скаляр и H_1 - односторонняя гипотеза, т.е. $H_1 = H_1^+ : \theta > \theta_0$ или $H_1 = H_1^- : \theta < \theta_0$. Пусть вероятностная модель $F(x, \theta)$ обладает достаточной статистикой $T(X_n)$. Тогда из критерия факторизации следует, что

$$\Lambda(X_n) = \frac{g(T(X_n), \theta_1)}{g(T(X_n), \theta_0)}.$$

Пусть класс моделей $F(x, \theta)$ такой, что отношение $\frac{g(T(X_n), \theta_1)}{g(T(X_n), \theta_0)}$ является монотонной функцией T .

Для таких моделей существует РНМК, который совпадает с критерием отношения правдоподобия для любой альтернативы из H_1 .

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

Действительно, пусть $H_1 = H_1^+$ и $\theta_1 > \theta_0$. Тогда $\frac{g(T, \theta_1)}{g(T, \theta_0)}$ возрастает по T .

Тогда $\Lambda(\mathbb{X}_n) \geq t_\alpha \sim T(\mathbb{X}_n) \geq t_\alpha^+$, причем граница t_α^+ определяется по α и распределению $F(x, \theta_0)$.

В случае двусторонней альтернативы $H_1 = H_1^+ \cup H_1^- : \theta \neq \theta_0$ даже для экспоненциальных моделей с монотонным отношением правдоподобия в общем случае не существует РНМК. В этом случае поступают следующим образом: используют достаточную статистику $T(\mathbb{X}_n)$ с помощью которой строится РНМК против односторонних альтернатив H_1^+ и H_1^- и задают критическую область в виде объединения $\mathcal{R}_{1\alpha} = \{T(\mathbb{X}_n) \leq t_{\alpha_1}^-\} \cup \{T(\mathbb{X}_n) \geq t_{\alpha_2}^+\}$, где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Пример 7.3.

Пусть $X_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ - выборка из экспоненциального распределения с функцией плотности:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Используя достаточную статистику, построить равномерно наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta_1 > \theta_0$.

Решение:

Найдем достаточную статистику:

$$L(X_n, \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i}.$$

Отсюда, $g(T(X_n), \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} T(X_n)}$, $h(X_n) = 1$.

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

По критерию факторизации $T(X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ - достаточная статистика.

$$\Lambda = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ -\frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta_0 \theta_1} \sum_{i=1}^n X_i \right\},$$

так как $-\frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta_0 \theta_1} > 0$, очевидно, что $\Lambda(X_n, \theta)$ монотонна по $T(X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$. Таким образом,

РНМК существует и совпадает с НМК для некоторого $\theta = \theta_1$.

$$\Lambda(X_n, \theta) = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \exp \left\{ -\frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta_0 \theta_1} \sum_{i=1}^n X_i \right\} > c_\alpha,$$

$$\exp \left\{ -\frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta_0 \theta_1} \sum_{i=1}^n X_i \right\} > \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n c_\alpha,$$

$$\sum_{i=1}^n X_i > -\frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta_0 \theta_1} \ln \left[c_\alpha \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \right)^n \right] = \tilde{c}_\alpha,$$

$$P\{H_1 | H_0\} = P\left\{\sum_{i=1}^n X_i > \tilde{c}_\alpha \mid \theta = \theta_0\right\} = \alpha.$$

Так как $X_i \in \text{Exp}(\theta_0)$ или $X_i \in \Gamma(1, \theta_0)$, а $\Gamma(m, \theta_0)$ устойчиво (воспроизводимо по параметру), то:

$$\sum_{i=1}^n X_i \in \Gamma(n, \theta_0).$$

Тогда:

$$\alpha = 1 - F_{\Gamma(n, \theta_0)}(c_\alpha) \Rightarrow c_\alpha = F_{\Gamma(n, \theta_0)}^{-1}(1 - \alpha).$$

Пример 7.4.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - выборка из нормального распределения с функцией плотности:

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

Используя достаточную статистику, построить равномерно наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 > 0$.

Решение:

Найдем достаточную статистику:

$$\begin{aligned} L(X_n, \theta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\theta + \theta^2) \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\theta \sum_{i=1}^n X_i + n\theta^2 \right] \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \theta \sum_{i=1}^n X_i + n\theta^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\text{где } h(X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right\}, \quad \text{а } g(T(X_n), \theta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \theta \sum_{i=1}^n X_i + n\theta^2 \right\}.$$

Отсюда, по критерию факторизации $T(X_n) = \bar{X}$.

Лекция 7. Построение наиболее мощных критериев

$$\begin{aligned}\Lambda(X_n, \theta) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left((X_i - \theta_1)^2 - (X_i - \theta_0)^2 \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(X_i(2\theta_0 - 2\theta_1) \right) + n(\theta_0^2 - \theta_1^2) \right\}\end{aligned}$$

Отсюда, видно, что Λ монотонна по $T(X_n) = \bar{X}$.

$$2(\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n X_i + n(\theta_0^2 - \theta_1^2) \leq \ln \left(-\frac{c_\alpha}{2\sigma^2} \right),$$

$$\bar{X} \geq \frac{1}{2(\theta_0 - \theta_1)} \left[\ln \left(-\frac{c_\alpha}{2\sigma^2} \right) - n(\theta_0^2 - \theta_1^2) \right] = c_\alpha,$$

$$P\{H_1 | H_0\} = P\{\bar{X} > \tilde{c}_\alpha | \theta = \theta_0\} = \alpha.$$