

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

А.А. ШТЫГАШЕВ

**ПРИМЕНЕНИЕ ПЭВМ
В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ
ПО ФИЗИКЕ
(МЕХАНИКА)**

НОВОСИБИРСК 1999

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А.А. ШТЫГАШЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ ПЭВМ

В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

(МЕХАНИКА)

Методическое пособие к спецкурсу
для студентов физического факультета

НОВОСИБИРСК 1999

УДК 530(077)

БЕК 22.2p30

Ш 948

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Штыгашев А.А. Применение ПЭВМ в решении задач по физике. Механика: Методическое пособие к спецкурсу для студентов физического факультета. - Новосибирск: НГПУ, 1999. -112с.

Ш 948 В работе рассмотрены вопросы применения компьютерной техники при решении задач из курса общей физики. Основное внимание уделялось построению математических моделей, разработке алгоритмов и интерпретации результатов вычислений. Используемые программы написаны с минимальным набором базовых операторов языка программирования Basic, что позволяет эксплуатировать программы на всех типах ПЭВМ. Представленный материал можно применять на факультативных занятиях по физике и информатике в старших классах средней школы.

Научный редактор - канд. техн. наук,
доцент каф. общей физики НГПУ
Е. А. Краснопецев

Рецензенты - доктор пед. наук, профессор,
ректор НИПКиПРО В.Я. Синенко;

- канд. физ.-мат. наук,
доцент каф. общей физики НГТУ
А.В. Баранов

© Новосибирский государственный педагогический университет, 1999

ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительных средств произвело революцию в обработке информации. Это не могло не отразиться на содержании и методах обучения. Персональная электронно-вычислительная машина (ПЭВМ) является уникальным инструментом обработки данных, и основная проблема заключается в том, чтобы научиться эффективно использовать компьютер в повседневной практической деятельности. Для достижения поставленной цели необходимо приобрести навыки и умения использования ПЭВМ в решении учебно-прикладных задач. Для этого важно правильно ставить задачу, выбирать адекватный метод решения, разрабатывать алгоритм решения, программно его реализовывать и интерпретировать полученный результат. Таким образом, ключевые проблемы использования компьютера как в учебной, так и в практической деятельности предусматривают решение вопросов: "что считать?", "как считать?" и "как использовать результаты расчета?".

Данное методическое пособие предназначено для отработки навыков постановки проблемы, разработки математической модели, её программной реализации и анализа результатов моделирования.

При отборе материала предпочтение отдавалось задачам прикладного характера, а также имеющим определенный исторический интерес. Большинство рассмотренных задач допускает простое аналитическое решение и не требует применения "тяжелой артиллерии" в лице персонального компьютера. Однако научиться применять вычислительную технику, заставить ее быть инструментом, а не предметом поклонения можно только посредством решения практических задач, пусть сначала простых, а затем более сложных, требующих достаточно нетривиальных вычислительных алгоритмов.

При решении задачи используют приближенное описание физического процесса, выраженное с помощью математической символики и называемое

математической моделью данного процесса.

Математическое моделирование физического процесса происходит в несколько этапов. На первом этапе строится простейшая математическая модель, которую будем называть моделью нулевого уровня. После вычислительного эксперимента производится проверка результатов моделирования с помощью каких-либо критериев (законов сохранения физических величин, экспериментальных результатов и, наконец, просто здравого смысла). После проверки адекватности модели она, в случае ее несоответствия тем или иным критериям, либо заменяется другой моделью этого же уровня сложности, либо усложняется, что означает переход на более высокий уровень сложности.

Предполагается, что студент будет прорабатывать данное пособие с карандашом в руках, внимательно изучать листинги программ и непосредственно "прогонять" представленный здесь программный материал на ПЭВМ.

При написании программ основное внимание было обращено на содержательную компоненту обрабатываемой информации. Разработку же интерфейсной части программы, включая графическое представление результатов вычислений, которая зависит от конкретной версии используемого языка программирования Basic, можно порекомендовать в качестве упражнения студенту, изучающему материал данного пособия. Существенно, что представленные программы содержат минимальное число основных операторов, составляющих ядро языка программирования Basic, поэтому программы можно использовать почти без переделки на любых типах ПЭВМ. Кроме того, при составлении программ автор руководствовался важным принципом простоты в ущерб, быть может, оптимальности программно-кода, в частности, совершенно не затронуты вопросы структуризации программ на модули (подпрограммы). При систематической проработке примеров желательно пользоваться в качестве справочников стандартными учебными пособиями (см., например, [1-3]). Большинство заданий снабжено подробными решениями или указаниями к ним, приведенными в разделе 6. Для наиболее пытливых студентов в разделе 6 сформулированы задания для самостоятельного решения. Такое нелинейное построение текста предполагает следующий способ его изучения: сначала необходимо изучить раздел 1 (примеры 1.1 - 1.3), остальной материал можно изучать в произвольном порядке. Отметим, что в решении примера 4.1 содержится важная информация. Основой успешного изучения материала является самостоятельная проработка примеров и зада-

ний. Ответы и решения, приведенные в разделе 6, служат для сопоставления с полученными результатами моделирования.

Необходимо всегда помнить, что выводы, сделанные в результате математического моделирования, касаются исключительно свойств математических моделей, поэтому необходимо соблюдать известную осторожность при переносе изученных свойств модели на реальный объект.

В данной работе рассматривается достаточно широкий класс задач из раздела "Механика" курса общей физики, допускающий представление математической модели в виде системы уравнений движения.

1. ПАДЕНИЕ ТЕЛА

Пример 1.1. Свободное падение тела. Тело падает вертикально с высоты 19.6 м. В начальный момент времени скорость тела равна нулю. За какое время тело пройдет: 1) первый метр своего пути; 2) последний метр своего пути? Сопротивление воздуха не учитывать.

Согласно второму закону Ньютона, движение тела описывается уравнением

$$m \cdot a = F, \quad (1.1)$$

где m - масса тела, a - ускорение тела, вызываемое действующей на тело силой F . Уравнение (1.1) отражает связь между изменением состояния системы, в данном случае тела, с причиной её вызывающей и является математической моделью движения тела. В случае падения тела на него действует только одна сила тяжести, а силой сопротивления воздуха, по условию задачи, мы пренебрегаем. Выберем систему координат так, чтобы тело падало вдоль оси Y , причем ось направим вниз, тогда значение y означает длину пройденного пути. Удобно ввести понятие высоты h тела над нулевым уровнем (как правило, нулевым уровнем считается поверхность земли), тогда $y(t)$ и $h(t)$ связаны простым соотношением

$$h(t) = h(0) - y(t), \quad (1.2)$$

а $y(0) = 0$. Уравнение (1.1) можно представить в проекции на ось Y в виде

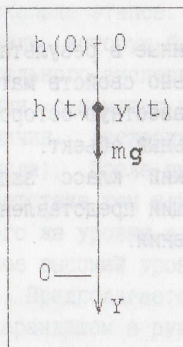


Рис. 1.1

Хотя система (1.3) имеет решение (1.4), на этом простейшем примере целесообразно показать, как применять компьютер, и проделать все основные этапы решения задач.

Примечание 1.1. Прежде чем решать пример 1.1, необходимо рассмотреть метод решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$dy/dt = f(x), \quad (1.5)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Производная определяется, как известно, через процедуру предельного перехода

$$dy/dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (y(x + \Delta x) - y(x)) / \Delta x, \quad (1.6)$$

что для машинной математики является малопродуктивным, так как все численные операции, выполняемые компьютером, определены на конечном множестве конечных чисел. Поэтому воспользуемся следующей аппроксимацией производной

$$dy/dx \approx (y(x + \Delta x) - y(x)) / \Delta x, \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = F, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $F = m \cdot g$, $g = 9.81$ м/с. Начальные условия: $y(0) = 0$ м, $v(0) = 0$ м/с, $h(0) = 19.6$ м. Система (1.3) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и имеет простейшее аналитическое решение

$$\begin{cases} y = y(0) + v(0) \cdot t + g \cdot t^2 / 2, \\ v = v(0) + g \cdot t. \end{cases} \quad (1.4)$$

где Δx малая, но конечная величина. Подставляя разностный аналог производной в (1.5), после преобразования имеем искомое решение дифференциального уравнения

$$y(x + \Delta x) = y(x) + f(x) \cdot \Delta x. \quad (1.8)$$

С учетом начального условия имеем следующую цепочку значений искомой функции y

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x, & x_1 &= x_0 + \Delta x, \\ y(x_2) &= y(x_1) + f(x_1) \cdot \Delta x, & x_2 &= x_1 + \Delta x, \\ y(x_3) &= y(x_2) + f(x_2) \cdot \Delta x, & x_3 &= x_2 + \Delta x, \\ y(x_4) &= y(x_3) + f(x_3) \cdot \Delta x, & x_4 &= x_3 + \Delta x, \end{aligned}$$

Заметим, что произошла своеобразная свертка информации, теперь для численного решения дифференциального уравнения (1.5) достаточно знать значения функции $f(x)$ лишь в дискретных точках x_i .

Вернемся к примеру 1.1. С учетом (1.8) система дифференциальных уравнений (1.3) может быть представлена в виде

$$\begin{cases} y(t + \Delta t) = y(t) + v(t) \cdot \Delta t, \\ v(t + \Delta t) = v(t) + g \cdot \Delta t \end{cases} \quad (1.9)$$

с начальными условиями $y(0) = y_0$, $v(0) = v_0$.

Программная реализация представленной модели имеет вид

```
10 REM Падение тела / модель 1 уровень 0 / mu11.bas
20 g = 9.81
30 dt = 0.1
40 h0 = 19.6
50 y = 0
60 v = 0
70 t = 0
```



```

80 y = y + v * dt
90 v = v + g * dt
100 h = h0 - y
110 t = t + dt
120 print t,y,h,v
130 if h > 0 then 80
140 end

```

Результатом работы программы будет таблица значений t , y , h , v .

Таблица 1.1. Высота и скорость тела

t, c	h, м	v, м/с	t, c	h, м	v, м/с	t, c	h, м	v, м/с
0.1	19.60	0.98	0.8	16.86	7.84	1.5	9.31	14.70
0.2	19.50	1.96	0.9	16.07	8.82	1.6	7.84	15.68
0.3	19.31	2.94	1.0	15.19	9.80	1.7	6.27	16.66
0.4	19.01	3.92	1.1	14.21	10.80	1.8	4.61	17.64
0.5	18.62	4.90	1.2	13.13	11.80	1.9	2.84	18.60
0.6	18.13	5.88	1.3	11.96	12.74	2.0	0.98	19.60
0.7	17.54	6.86	1.4	10.68	13.70	2.1	0.98	20.60

Примечание 1.2. Из-за различного представления вещественных чисел в многочисленных версиях языка программирования Basic численные значения результатов вычислений могут различаться от приведенных в данном пособии. Эти результаты получены с помощью языка программирования QBasic, вычисления проводились в представлении вещественных чисел с удвоенной точностью (double precision). Кроме того, параллельно проверялись результаты счета с помощью универсального математического пакета MathCad 6 PLUS.

Пользуясь данной таблицей, построим график закона падения $h = h(t)$ (сплошная линия), где на оси абсцисс будем отмечать время, а на оси ординат – высоту падающего тела над поверхностью земли. На графике проведем горизонтальные штриховые линии 1 и 2, соответствующие первому и второму участку. Точка В пересечения графика $h = h(t)$ с линией 1 определяет время движения по первому участку АВ (первый метр

пути) и равно $\Delta t_1 = 0.45$ с. Точка С пересечения графика $h = h(t)$ с линией 2 определяет время движения на втором участке CD (последний метр пути) и равно $\Delta t_2 = 2.0 - t_2 = 0.05$ с. Полученное решение опре-

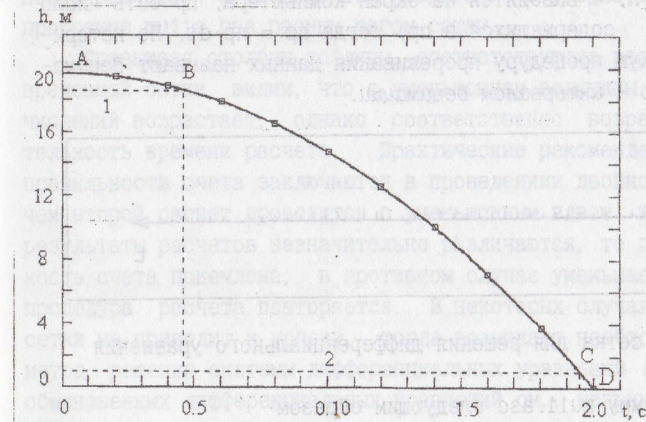


Рис.1.2. Закон движения для падающего тела

деляет параболу, квадратиками отмечено аналитическое решение (1.4) уравнения движения (1.3). Итак, первый метр пути тело падало 0.45 с, последний – 0.05 с. Причина такого уменьшения времени падения связана с возрастанием скорости падения тела. Расчет по формулам (1.4) приводит к таким же результатам.

Примечание 1.3. В тех случаях, если число строк таблицы, выводимой на экран дисплея, будет больше, чем максимальное количество строк экрана дисплея, то во избежание потери информации необходимо структурировать выходной поток данных. Если увеличить шаг по времени, то число строк таблицы уменьшится, однако точность, как мы увидим ниже, уменьшится. Величина шага Δt должна быть в достаточной мере малой величиной. Выход из положения заключается в выводе на экран дисплея не подряд всех строчек таблицы, а в выводе каждой m -ной строчки, где m может быть произвольной величиной. Для организации такого вывода разобьем ось времени на отрезки Δt_1 (см. рис.1.3), причем $t_{i+1} = t_i + \Delta t_1$. Это разбиение называется временной сеткой, а сами точки t_i – узлами временной сетки, величина Δt – шагом сетки.

Важный класс сеток составляют равномерные сетки с постоянным шагом $\Delta t = dt = \text{const}$. Пусть h_p есть интервал времени, через который рас-
четные значения t , h , v выводятся на экран компьютера, np есть число
отрезков длиной dt , содержащихся в h_p , тогда $h_p = np \cdot dt$. По истори-
ческим причинам такую процедуру прореживания данных называют децима-
цией, а интервал h_p — интервалом децимации.

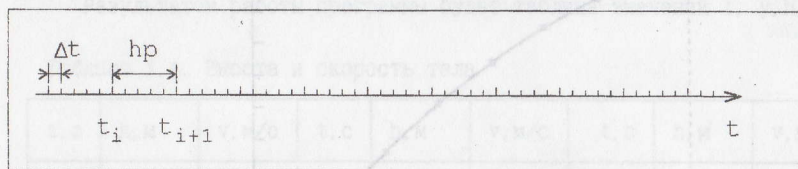


Рис. 1.3. Временная сетка для решения дифференциального уравнения

Модифицируем программу mu11.asc следующим образом

```
10 REM Падение тела / модель 1 уровень 0 / mu11a.bas
20 g = 9.81
30 dt = 0.01
40 hp = 0.1
50 np = hp/dt
60 h0 = 19.6
70 y = 0
80 v = 0
90 t = 0
100 for i = 1 to np
110 y = y + v * dt
120 v = v + g * dt
130 h = h0 - y
140 t = t + dt
150 if h < 0 then 190
160 next i
170 print t,y,h,v
180 goto 100
190 print t,y,h,v
200 end
```

Рассмотрим, как величина шага временной сетки Δt влияет на точ-
ность расчета. В таблице 1.2 представлены результаты вычислений по
программе mu11a.bas разным шагом сетки.

Сравнивая столбцы таблицы, соответствующие разной величине шага
временной сетки, видим, что с уменьшением величины шага точность вы-
числений возрастает, однако соответственно возрастает и продолжи-
тельность времени расчета. Практические рекомендации по проверке
правильности счета заключаются в проведении двойного расчета, при-
чем второй расчет проводится с уменьшенным вдвое шаге сетки. Если
результаты расчетов незначительно различаются, то полагается, что точ-
ность счета приемлема, в противном случае уменьшается шаг сетки и
процедура расчета повторяется. В некоторых случаях уменьшение шага
сетки не приводит к успеху, тогда возникает необходимость изменить
метод решения системы дифференциальных уравнений (о методах решения
обыкновенных дифференциальных уравнений см., например, [4,10,11]).

Таблица 1.2. Влияние шага Δt на точность расчета высоты тела $h = h(t)$

t, c	$\Delta t=0.1$	$\Delta t=0.01$	$\Delta t=0.001$	точное решение
0.1	19.60	19.56	19.551	19.551
0.2	19.50	19.41	19.405	19.404
0.3	19.31	19.17	19.160	19.159
0.4	19.01	18.84	18.818	18.816
0.5	18.62	18.40	18.377	18.375
0.6	18.13	17.87	17.839	17.836
0.7	17.54	17.23	17.202	17.199
0.8	16.86	16.50	16.468	16.464
0.9	16.07	15.68	15.635	15.631
1.0	15.19	14.75	14.705	14.700

Задание 1.1.1. С крыши дома через каждые четверть секунды пада-
ют капли воды. На каком расстоянии друг от друга будут находиться
две первые капли в момент отрыва десятой? С какой скоростью будет
двигаться первая капля относительно второй? Сопротивлением воздуха
пренебречь.

Примечание 1.4. Если решать пример 1.1 без учета сопротивления
среды движению тела, то вполне можно было бы обойтись без компьюте-
ра, поскольку задача допускает точное аналитическое решение. Однако

при переходе к более реальным задачам, в которых учитывалось влияние среды на движение тел, сложность аналитического решения резко возрастает, и часто лишь с помощью ЭВМ можно получить результат.

Пример 1.2. Затыжной прыжок. Общее решение. Парашютист массой 70 кг делает затыжной прыжок с большой высоты. Сила сопротивления среды описывается эмпирической формулой

$$R = -(a \cdot v + b \cdot v^2 + c \cdot v^3) \cdot e_v, \quad (1.10)$$

где коэффициенты a , b , c определяются опытным путем, $e_v = v/v_0$. Найти закон движения тела в зависимости от времени, прошедшего с момента падения, если известно, что установившаяся скорость падения тела равна 60 м/с. Согласно (1.1) имеем следующую систему

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} h(0) = 0 \\ \uparrow R \\ h(t) \quad y(t) \\ \downarrow mg \\ 0 \\ \downarrow y \end{array} \quad \begin{cases} dy/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = m \cdot g - R. \end{cases} \quad (1.11) \\ & \text{Используя (1.6), перепишем (1.11) в виде} \\ & \begin{cases} y(t + \Delta t) = y(t) + v(t) \cdot \Delta t, \\ v(t + \Delta t) = v(t) + (g - (a \cdot v + b \cdot v^2 + c \cdot v^3)/m) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (1.12) \end{aligned}$$

Рис. 1.4

Начальные условия задачи определены только для скорости $v(0)=0$, поэтому начальная высота является варьируемым параметром. Зададим начальную высоту $h(0)$ достаточно большой, например, $h(0) = 10000$ м. Например, известно из практики, что установившаяся скорость парашютиста, совершающего затыжной прыжок, равна приблизительно 60 м/с, следовательно, это дает нам критерий для подбора параметров модели: a , b и c .

Программная реализация представленной модели имеет аналогичную структуру, что и в предыдущем примере:

```
10 rem Падение тела / модель 1 уровень 1 / mu12.bas
20 g = 9.81
```

```
30 dt = 0.01
40 hp = 0.1
50 np = hp/dt
60 h0 = 10000
70 y = 0
80 v = 0
90 t = 0
100 input "Введите параметры модели: a,b,c";a,b,c
110 m = 70
115 print t,h,y,v
120 for i=1 to np
130 y = y + v * dt
140 v = v + (g - v * (a + v * (b + v * c))/m) * dt
150 h = h0 - y
160 t = t + dt
170 if h < 0 then 210
180 next i
190 print t,h,y,v
200 goto 120
210 print t,h,y,v
220 end
```

Проводя вычисления по программе с разными значениями параметров a , b , c , добиваемся, чтобы установившееся значение скорости падения тела равнялось 60 м/с. Полученные результаты моделирования приведены в таблице 1.3.

Пользуясь данными таблицы 1.3, построим график движения тела $h = h(t)$ (сплошная линия), на оси абсцисс отложено время, на оси ординат - высота тела над поверхностью земли (см.рис.1.5). График движения тела можно разбить на два участка. Первый участок от 0 до 25 с (см. таблицу 1.3) соответствует ускоренному падению тела, форма которого зависит от соотношения параметров a , b и c . На этом участке сила сопротивления R возрастает по модулю от нуля до значения силы тяжести. Второй участок соответствует равномерному падению, при котором сила сопротивления в точности равна силе тяжести и движение тела происходит по инерции со скоростью 60 м/с.

Таблица 1.3. Закон падения тела с учетом сопротивления воздуха, рассчитанный при $a=4.233$, $b=0$, $c=0.002$

t, c	h, м	y, м	v, м/с	t, c	h, м	y, м	v, м/с
0	10000	0	0.0	90	4852	5147	60.0
5	9891	108	39.8	95	4552	5447	60.0
10	9643	356	55.9	100	4252	5747	60.0
15	9352	647	59.3	105	3952	6047	60.0
20	9054	945	59.9	110	3652	6347	60.0
25	8754	1245	60.0	115	3351	6648	60.0
30	8454	1545	60.0	120	3051	6948	60.0
35	8154	1845	60.0	125	2751	7248	60.0
40	7854	2145	60.0	130	2451	7548	60.0
45	7553	2446	60.0	135	2151	7848	60.0
50	7253	2746	60.0	140	1851	8148	60.0
55	6953	3046	60.0	145	1551	8448	60.0
60	6653	3346	60.0	150	1251	8748	60.0
65	6353	3646	60.0	155	950	9049	60.0
70	6053	3946	60.0	160	650	9349	60.0
75	5753	4246	60.0	165	350	9649	60.0
80	5452	4547	60.0	170	50	9949	60.0
85	5152	4847	60.0	170.8	-0.56	10000.5	60.0

Полученный результат можно использовать при решении следующей задачи.

Пример 1.3. Затяжной прыжок с высоты 7000 метров. Парашютист делает затяжной прыжок с высоты 7 км. Оцените приблизительно, как долго парашютист может не раскрывать парашют. До Земли должно оставаться не менее 1 км и от 0.5 до 1 минуты запаса времени.

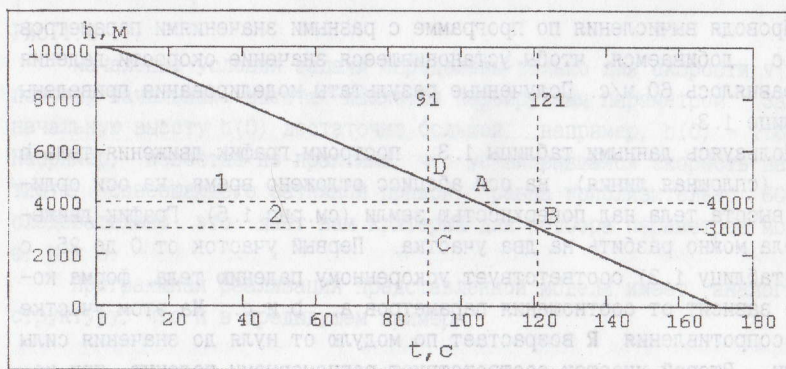


Рис. 1.5. Закон движения для падающего тела

На рис. 1.5 отметим горизонтальной линией 1 уровень 6000 м, а линией 2 — уровень 7000 м, отсчитывая от начального положения тела. Время падения парашютиста на последнем участке АВ, как видно из рис. 1.5, составляет 17 с. Поэтому, чтобы выполнить требования условий безопасного прыжка, необходимо иметь запас времени не менее 30 с. Далее, откладывая от точки В влево отрезок ВС, равный 30 с, и, восстановив перпендикуляр в точке С, мы определим высоту CD и момент времени раскрытия парашюта. Итак, время свободного падения составляет 91 с, после чего на высоте 1790 м (точка D) от поверхности земли (линия 2) парашютист должен раскрыть парашют.

Задание 1.2.1. Официально зарегистрированным рекордом падения человека без парашюта во время второй мировой войны, который остался жив, является "прыжок" советского летчика-лейтенанта И.М. Чижова. Он выбросился с подбитого дальнего бомбардировщика Ил-4 на высоте 6705 метров и при этом потерял сознание. Его тело упало на склон занесенного снегом оврага и, пробив туннель, выкатилось на дно оврага. При этом скольжении летчик получил серьезные травмы, однако остался жив. В этом задании необходимо определить наименьшее и наибольшее время падения тела, если известно, что скорость установившегося движения при падении в произвольной позе находится в диапазоне от 50 до 60 м/с. При расчете воспользуйтесь необходимыми данными из примера 1.2 и программой mu12.bas.

Задание 1.2.2. Детективная история. Кинооператор, находившийся в глубине комнаты на третьем этаже высотного здания, случайно снял на киноплёнку падающего сверху человека. Расстояние 2 м, равное высоте окна, тело пролетело за 0.1 с; высота одного этажа равно 4 м. С помощью программы mu12.bas установите, с какого этажа выпал человек? При расчете используйте необходимые данные, полученные при решении примера 1.2.

Примечание 1.5. В рассмотренном примере 1.2 размеры тела, его форма, а также характеристики среды учтены интегрально в численных значениях эмпирических постоянных a , b и c в выражении (1.9) для силы сопротивления. Вследствие огромного прикладного значения этого вопроса рассмотрим его более подробно. На тело, движущееся в среде,

действует аэродинамическая сила, величина которой зависит от многих факторов, выделим основные: размеры и форма тела, его скорость по отношению к среде, его ориентации по отношению к направлению движения, свойства и состояния среды. Это силовое воздействие среды на тело сводится к силам давления и трения, распределенным по поверхности тела, и имеет вид

$$R = \int_S (p_n + t_n) \cdot d\delta, \quad (1.13)$$

где интегрирование ведется по всей внешней поверхности тела; p_n и t_n есть векторы проекций давления и напряжения трения на нормаль к элементу поверхности $d\delta$. В общем случае для движущихся тел произвольной формы задача интегрирования (1.13) очень сложна и выполнима с определенными ограничениями только на высокопроизводительных суперкомпьютерах, поэтому мы в дальнейшем ограничимся только рассмотрением тел простейшей формы. Исторически сложилось так, что основным методом изучения силового воздействия среды на движущееся тело являлось физическое, натурное моделирование (попутно отметим, что со второй половины XX столетия произошла смена парадигмы и на авансцену вышло численное моделирование, а натурное отошло на второй план и служит сейчас для проверки правильности вычислительного эксперимента). Теоретическим обоснованием физического моделирования служит теория подобия, в которой ключевые роли играют так называемые безразмерные комбинации основных единиц измерения (подробнее о теории подобия см. [14]), называемые критериями. В рассматриваемых нами вопросах основными критериями являются числа Маха

$$M = v/v_s \quad (1.14)$$

и Рейнольдса

$$Re = \rho \cdot v \cdot d / \eta. \quad (1.15)$$

Здесь v – скорость тела, v_s – скорость звука в среде, ρ – плотность среды, d – характерный размер поперечного сечения тела, η – коэффи-

циент динамической вязкости среды. В случае, когда $Re \ll 1$, основной вклад в силовое воздействие среды на тело вносят процессы трения (второе слагаемое в (1.13)) и сила сопротивления R равна (гидродинамический закон Стокса)

$$R = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v, \quad (1.16)$$

где r – радиус наибольшего поперечного сечения тела. Во всех остальных случаях силовое воздействие определяется скоростным напором среды на тело (первое слагаемое в (1.13)), тогда

$$R = -C \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S \cdot e_v, \quad (1.17)$$

где $0.5 \cdot \rho \cdot v^2$ – скоростной напор (динамическое давление), S – характерная площадь тела (для сферических тел, снарядов, баллистических ракет S есть площадь наибольшего поперечного сечения); $C = C_x + C_y$ есть аэродинамический коэффициент, где C_x – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления, C_y – аэродинамический коэффициент подъемной силы. Аэродинамические коэффициенты зависят от ориентации тела по отношению к набегающему потоку частиц среды и чисел Маха и Рейнольдса.

Задание 1.2.3. Стальной шарик радиуса 1.00 мм опущен в широкий сосуд высотой 0.5 м, наполненный глицерином. Найдите закон движения и скорость установившегося (равномерного) движения шарика, используя гидродинамическую формулу Стокса (1.16). Коэффициент внутреннего трения в глицерине $\eta = 1.48$ Па·с, плотность глицерина $\rho_2 = 1260$ кг/м³, плотность стали $\rho_1 = 7800$ кг/м³.

Задание 1.2.4. Экспериментальные данные для случая падения пенопластового шарика массой 0.254 г и радиусом 2.54 см:

t, с	0	0.132	0.232	0.332	0.432	0.532	0.632	0.732	0.832	0.932
y, м	0	0.075	0.260	0.525	0.87	1.27	1.73	2.23	2.77	3.35

Модифицируйте программу mu12.bas и вычислите закон движения тела с учетом линейного (1.16) и квадратичного (1.17) законов сопротивления среды. Выясните, какая из моделей адекватна описываемому процессу падения. Какова скорость шарика в момент 0.5 с, 1 с и 1.5 с? Вычислите относительную ошибку определения $y(t)$ для этих моментов времени, если бы не учитывалось сопротивление среды.

Пример 1.4. Отклонение тела при падении от отвесной линии. Определите отклонение от линии отвеса свободно падающего тела, если опыт проводится на географической широте ϕ . Начальная высота h .

Впервые эта задача была поставлена в 1679 году И. Ньютоном в его знаменитом письме Роберту Гуку. Гук незамедлительно провел серию экспериментов и получил при высоте $h = 8.3$ м, что отклонение на юго-восток от направления отвеса составляет не менее чем четверть дюйма (6.35 мм). Географическая широта Лондона $51^\circ 40'$.

Для решения этой задачи необходимо учесть геометрию опыта, определить основные факторы, действующие на падающее тело, и составить уравнения движения тела. На рис.1.6 представлена система координат, связанная с Землей следующим образом: ось Z совпадает с линией отвеса и направлена вверх; начало координат O определяет точка пересечения оси Z и меридиана; ось X совпадает с касательной к меридиану, проходящему через начало координат, и направлена к северу; ось Y совпадает с касательной к параллели и направлена к западу. Вследствие вращения Земли вокруг своей оси, данная система отсчета является неинерциальной, поэтому на падающее тело будет действовать не только

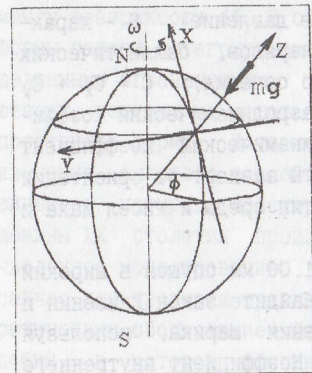


Рис.1.6. Геометрия опыта

сила тяжести, но и специфические силы, обусловленные неинерциальностью системы отсчета (Земли). Выделим основные факторы, такие, как сила тяжести и сила Кориолиса, тогда уравнения движения будут иметь вид (см., например, [1])

$$\begin{cases} d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}, \\ m \cdot d\mathbf{v}/dt = m \cdot \mathbf{g} + 2 \cdot m \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{w}] \end{cases} \quad (1.18)$$

с начальными условиями $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 8.3)$ и $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)$. Отметим, что координата z определяет высоту тела над поверхностью Земли. Здесь $m \cdot \mathbf{g}$ – сила тяжести, а $2 \cdot m \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ – сила Кориолиса, $\mathbf{w}$ – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси и равна

$$\mathbf{w} = 2 \cdot \pi / T = 7.272 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$$

и направлена вверх (см. рис.1.5). Остальные факторы в данной задаче несутся (см., например, [1]). Систему уравнений (1.18) можно записать в проекциях

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ dz/dt = v_z, \\ m \cdot dv_x/dt = 2 \cdot m \cdot w_z \cdot v_y, \\ m \cdot dv_y/dt = 2 \cdot m \cdot (w_x \cdot v_z - w_z \cdot v_x), \\ m \cdot dv_z/dt = -2 \cdot m \cdot w_x \cdot v_y - m \cdot g. \end{cases} \quad (1.19)$$

Переходя от (1.19) к разностной схеме Эйлера (1.7), имеем

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \cdot \Delta t, \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \cdot \Delta t, \\ z(t + \Delta t) = z(t) + v_z(t) \cdot \Delta t, \\ v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + 2 \cdot w_z \cdot v_y(t) \cdot \Delta t, \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + 2 \cdot (w_x \cdot v_z(t) - w_z \cdot v_x(t)) \cdot \Delta t, \\ v_z(t + \Delta t) = v_z(t) - (g + 2 \cdot w_x \cdot v_y(t)) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (1.20)$$

Программная реализация вычислительной схемы (1.19) аналогична рассмотренным выше и имеет вид

10 REM Отклонение свободно падающего тела

15 REM Модель 2 уровень 0/mu14.bas

20 g = 9.8


```

30 h = 8.3
40 phi = 51.7 * pi/180
50 w = 2 * pi/24/3600
60 wx = w * cos(phi)
70 wz = w * sin(phi)
80 dt = 0.00001
90 hp = 0.1
100 np = hp/dt
110 x = 0
120 y = 0
130 z = h
140 vx = 0
150 vy = 0
160 vz = 0
170 t = 0
180 for i = 1 to np
190 x = x + vx * dt
200 y = y + vy * dt
210 z = z + vz * dt
220 vx = vx + 2 * vy * wz * dt
230 vy = vy + 2 * (vz * wx - vx * wz) * dt
240 vz = vz + (-g - 2 * vy * wx) * dt
250 if z < 0 then 300
260 t = t + dt
270 next i
280 print t,x,y,z
290 goto 180
300 print t,x,y,z
310 end

```

В результате работы программы мы получим на экране дисплея таблицу,

Таблица 1.4. Траектория свободно падающего тела

t, c	X, м	Y, м	Z, м
0.000	0	0	8.300
0.100	-4.176E-13	-1.467E-07	8.951
0.200	-6.702E-12	-1.176E-06	8.804
0.300	-3.396E-11	-3.971E-06	8.559

Продолжение таблицы 1.4

t, c	X, м	Y, м	Z, м
0.400	-1.074E-10	-9.416E-06	8.216
0.500	-2.623E-10	-1.839E-05	7.775
0.600	-5.440E-10	-3.178E-05	7.235
0.700	-1.008E-09	-5.048E-05	6.598
0.800	-1.720E-09	-7.536E-05	5.862
0.900	-2.755E-09	-1.073E-04	5.028
1.000	-4.200E-09	-1.472E-04	4.096
1.100	-6.148E-09	-1.959E-04	3.066
1.200	-8.708E-09	-2.544E-04	1.937
1.300	-1.200E-08	-3.234E-04	0.710
1.302	-1.205E-08	-3.246E-04	-7.58E-4

из которой явствует, что тело в своем падении отклоняется на юго-восток (знак минус, см. вторая и третья колонки таблицы 1.4) и в момент падения на землю на 1.302 секунде это отклонение от направления отвеса составляет 0.325 мм, тогда как, по результатам Гука, это отклонение составляет более 6 мм. Обращает на себя внимание тот факт, что Р.Гук правильно указал направление отклонения тела, хотя, несомненно, измерить южное отклонение тела от направления отвеса с помощью лабораторного измерительного оборудования той эпохи он не мог. Опираясь на опыт проведения и интерпретации экспериментов, можно сказать, что источником такого большого расхождения является, во-первых, маленькая высота падения тела, что приводит к большой относительной ошибке измерения отклонения, во-вторых, недостаточное число опытов, проведенных великим мастером демонстраций, для того, чтобы сделать надежную оценку этого отклонения.

Задание 1.4.1. Для доказательства суточного вращения Земли ряд исследователей повторили опыты Р.Гука. В 1802 году И.Ф.Бенценберг проводил опыты на башне собора св.Михаила высотой 76 м в городе Гамбурге (географическая широта 53°,46'). Среднее отклонение на основании 31 опыта составило 9.0 мм. Более точные опыты проведены Ф.Райхом в 1833 году в Фрейбургской шахте (географическая широта 48°) глубиной 158 м. Среднее отклонение на основании 106 опытов составило 28.3 мм. Предлагается проверить прямым расчетом по программе mu14.bas результаты этих исследователей.

Задание 1.4.2. В точке, расположенной на широте г.Новосибирска ($\phi=55^\circ$), из ружья произведен выстрел строго вертикально вверх. Через некоторое время пуля упала на Землю. Вычислите с помощью mu14.bas, на

сколько сместилась упавшая пуля от точки выстрела, если ее начальная скорость 250 м/с. Сопротивление воздуха не учитывать.

Задание 1.4.3. Вычислите с помощью mu14.bas, под каким максимальным углом α к вертикали надо произвести выстрел вверх, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой произведен выстрел? Используйте данные предыдущего задания. Сопротивление воздуха движению пули не принимайте во внимание.

2. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Пример 2.1. Определение угла бросания тела. Под каким углом к горизонту нужно установить ствол орудия, чтобы поразить цель, находящуюся на расстоянии 10.0 км, если начальная скорость снаряда 500 м/с? Сопротивлением воздуха пренебrecь. Запишем (1.1) в следующей форме

$$\begin{cases} d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}, \\ m \cdot d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F} \end{cases} \quad (2.1)$$

с начальными условиями $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$. Здесь $\mathbf{r}(t)$ радиус-вектор тела в момент времени t (см. рис. 2.1), m — масса тела, а $\mathbf{F}$ — равнодействующая всех сил, действующих на тело. На снаряд действует сила тяжести, все остальные силы по условию задачи считаются пренебрежимо малыми.

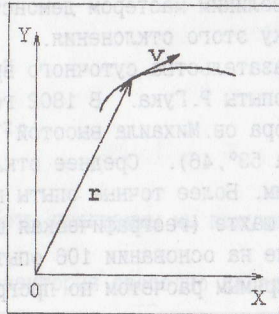


Рис. 2.1

Движение тела происходит в вертикальной плоскости. Обозначим горизонтальную ось как ось X, а вертикальную ось как ось Y. Тогда система уравнений движения (2.1), спроектированная на оси координат,

принимает вид

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ m \cdot dv_x/dt = 0, \\ m \cdot dv_y/dt = -m \cdot g \end{cases} \quad (2.2)$$

с начальными условиями: $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (v_0 \cdot \cos \alpha, v_0 \cdot \sin \alpha)$. Используя (1.7), получаем следующую вычислительную схему

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \cdot \Delta t, \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \cdot \Delta t, \\ v_x(t + \Delta t) = v_x(t), \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - g \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (2.3)$$

Программная реализация этой схемы имеет следующий вид

```
10 REM Баллистическая кривая / модель 1 уровень 0 / mu21.bas
20 g = 9.81
30 dt = 0.1
40 hp = 2
50 np = hp/dt
60 v = 500
70 x = 0
80 y = 0
90 t = 0
100 input "Введите угол наклона в градусах";a
110 al = a * pi/180
120 vx = v * cos(al)
130 vy = v * sin(al)
140 for i=1 to np
150 x = x + vx * dt
160 y = y + vy * dt
```



```

170 vx = vx
180 vy = vy - g * dt
190 t = t + dt
200 if y < 0 then 240
210 next i
220 print t,x,y,vx,vy
230 goto 140
240 end

```

Чтобы найти решение примера 2.1, необходимо исследовать зависимость дальности $x_{\max}$ от угла наклона ствола α . Результаты расчета по программе mu21.bas представлены на рис.2.2.

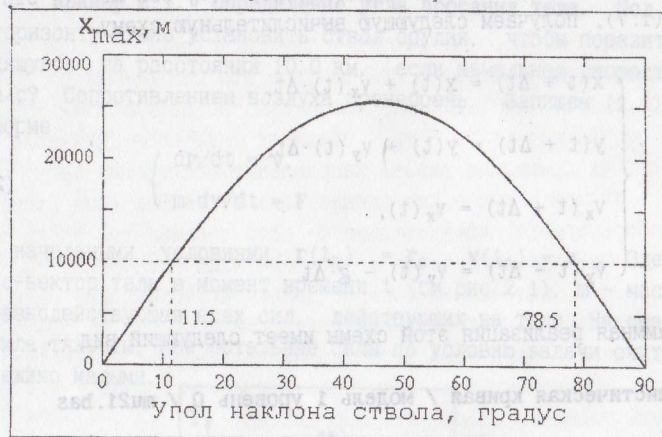


Рис. 2.2.

Проводя горизонтальную прямую, соответствующую дальности 10.0 км, видим, что существуют две точки пересечения прямой с графиком $y = y(x)$, которые определяют два решения $\alpha_1 = 11.5^\circ$ и $\alpha_2 = 78.5^\circ$. Первое решение $\alpha_1 < 45^\circ$ определяет настильную траекторию снаряда, а второе решение $\alpha_2 > 45^\circ$ — навесную траекторию снаряда. Наибольшая дальность, как видно из графика на рис.2.2, достигается при угле наклона в 45° , что в далекие средние века являлось военным секретом. Этот секрет, по-видимому, открыл первым итальянский ученый Никколо Тарталья. Отметим, что это положение справедливо только в случае, когда можно пренебречь влиянием среды на движение тела.

Задание 2.1.1. Шарик начал падать с нулевой начальной скоростью на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол 20° с горизонтом.

Пролетев расстояние 2 м, он упруго отразился от плоскости. С помощью программ mu1a.bas и mu21.bas рассчитайте, на каком расстоянии от места падения шарик отразится второй раз.

Задание 2.1.2. Истинную храбрость, великолепное умение летать показали пилоты 1-го минно-торпедного полка ВМФ СССР. Они бомбили Берлин в ответ на бомбардировки наших городов и сел в августе 1941 года. С помощью программы mu21.bas решите следующую задачу.

Скоростной дальний бомбардировщик ДБ-3, летевший на высоте 7000 м со скоростью 420 км/час, сбросил бомбу. За какое время до прохождения над целью и на каком расстоянии от нее должен самолет сбросить бомбу, чтобы попасть в цель; под каким углом β к вертикали летчик должен видеть цель в момент сброса бомбы (сопротивлением воздуха пренебречь)?

Задание 2.1.3. Скорость пули можно найти по понижению ее траектории на заданном расстоянии при горизонтальном выстреле. Понижение траектории определяется по пробоинам, сделанным пулей в двух вертикальных, последовательно расположенных на пути бумажных листах. Определить скорость пистолетной пули, если известно, что расстояние между листами составляет 30 м, а понижение траектории — 0.10 м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Пример 2.2. Движение мяча, брошенного под углом к горизонту. Мяч бросили со скоростью 10 м/с под углом в 40° к горизонту. Найти: 1) на какую высоту поднимется мяч; 2) на каком расстоянии от места бросания он упадет на землю; 3) сколько времени он будет в движении. Сопротивление воздуха не учитывать.

Выполняя расчет по программе mu21.bas с начальными условиями задачи, мы получим следующую таблицу

Таблица 2.1. Закон движения мяча

t, с	x, м	y, м	vx, м/с	vy, м/с
0.0	0.00	0.00	7.66	6.43
0.1	0.77	0.59	7.66	5.45
0.2	1.53	1.09	7.66	4.46
0.3	2.30	1.49	7.66	3.48
0.4	3.06	1.78	7.66	2.51
0.5	3.83	1.99	7.66	1.53

Продолжение табл. 2.1.

t, с	X, м	Y, м	VX, м/с	VY, м/с
0.6	4.60	2.10	7.66	-0.55
0.7	5.36	2.10	7.66	-0.43
0.8	6.13	2.01	7.66	-1.41
0.9	6.89	1.82	7.66	-2.39
1.0	7.66	1.53	7.66	-3.37
1.1	8.42	1.14	7.66	-4.35
1.2	9.19	0.66	7.66	-5.33
1.3	9.96	0.08	7.66	-6.31

График траектории движения тела, по данным таблицы 2.1, представлен на рис. 2.3.

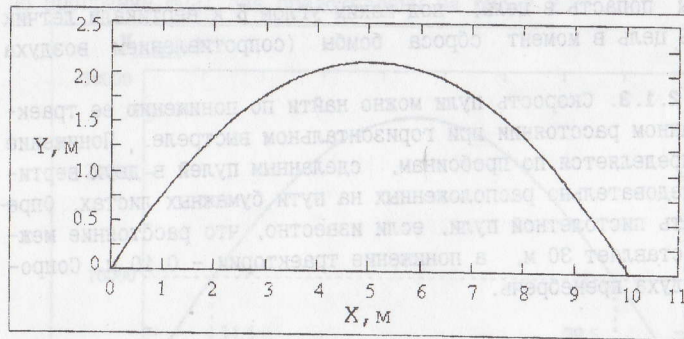


Рис. 2.3. Траектория движения тела

Из графика находим максимальную дальность 10 м, максимальная высота равняется 2.1 м, а длительность движения – 1.3 с. Точный расчет по известным формулам

$$\begin{aligned} t_{\max} &= 2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha / g = 1.31 \text{ с}, \\ X_{\max} &= v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t_{\max} = 10.05 \text{ м}, \\ Y_{\max} &= 0.5 \cdot v_0^2 \cdot (\sin \alpha)^2 / g = 2.11 \text{ м} \end{aligned} \quad (2.4)$$

подтверждает данные результаты вычислительного эксперимента.

Как видно из рис. 2.3, траектория движения тела представляет собой параболическую кривую, симметричную относительно прямой, параллельной оси ординат, и проходящую через точку максимума траектории. В действительности же реальная траектория не является симметричной кривой, и основной причиной этого является сопротивление среды движению тела. Например, тактико-технические данные 203-мм гаубицы:

1) масса снаряда 100 кг;

2) начальная скорость 607 м/с;

3) дальность 18000 м.

Если рассчитать по кинематическим формулам (2.4) максимальную дальность полета снаряда без учета сопротивления воздуха, то получим значение 37.6 км, что более чем в два раза превышает реальное значение. Следовательно, для уточнения расчетов баллистических кривых необходимо пересмотреть модель (2.2) путем учета силы сопротивления среды $R(v)$, действующей на движущееся тело (см. рис. 2.4)

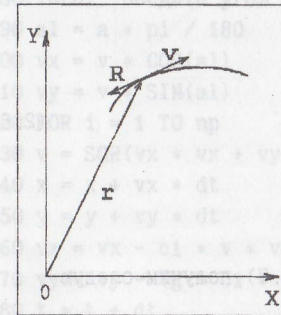


Рис. 2.4

В примечании 1.5 (с. 15) рассмотрено влияние среды на движущееся тело. Для характерных размеров и скоростей снарядов и параметров среды значение критерия Рейнольдса (1.15) Re много больше единицы. Следовательно, основной вклад в силовое воздействие среды на тело будет определяться скоростным напором, который обусловлен неупругими столкновениями молекул воздуха с движущимся телом, при этом частицы среды теряют нормальную к поверхности тела составляющую импульса, вследствие этого появляется сила давления среды на тело, равная (см. Примечание 1.5, формула (1.17) или, более подробно, [6, с. 704-710])

$$R(v) = -C \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S \cdot e_v, \quad (2.5)$$

где C – аэродинамический коэффициент сопротивления, ρ – плотность воздуха (при нормальном атмосферном давлении $p=1$ атм и температуре $t=20^\circ \text{C}$, $\rho=1.2 \text{ кг/м}^3$), S – площадь поперечного сечения тела, v – скорость движения тела, $e_v = v/v$ (здесь и далее используется, если не оговорено особо, система единиц измерения СИ).

Пример 2.3. Дальность 406-мм орудия береговой обороны. Определите реальную дальность 406-мм орудия береговой обороны (масса снаряда 1108 кг, начальная скорость 830 м/с) по известным характеристикам 356-мм орудия главного калибра линкора "Измаил" (Россия, год ввода в эксплуатацию 1915 г.). Необходимо отметить, что в годы Великой Отечественной войны 356-мм артиллерийская установка ТМ-1-14, смон-

тированная на железнодорожной платформе, использовалась при обороне Ленинграда в качестве эффективного инструмента подавления огневых средств противника, в том числе осадных орудий особой мощности, предназначенных для разрушения города, а также баз снабжения и штабов противника. Тактико-технические данные 356-мм орудия: масса снаряда 748 кг, начальная скорость 823 м/с, дальность 44.6 км.

Система уравнений, описывающая движение тела с учетом сопротивления воздуха, имеет вид (сравни с (2.2))

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ m \cdot dv_x/dt = -C \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot v \cdot S \cdot v_x, \\ m \cdot dv_y/dt = -m \cdot g - C \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot v \cdot S \cdot v_y. \end{cases} \quad (2.6)$$


С помощью конечно-разностной схемы Эйлера (1.7) получим следующую вычислительную схему

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \cdot \Delta t, \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \cdot \Delta t, \\ v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - c \cdot v \cdot v_x \cdot \Delta t, \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - (g + c \cdot v \cdot v_y) \cdot \Delta t, \end{cases} \quad (2.7)$$

где $c = C \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot S$. Программная реализация этой схемы имеет вид

10 REM Баллистическая кривая / модель 2 уровень 0 / mu23.bas

20 pi = 3.1415926#

30 g = 9.81

40 cb = .406

50 Rc = cb / 2

60 S = pi * Rc ^ 2

70 ds = 1.2

80 m = 1108

90 cx = .14

'Калибр орудия

'Площадь поперечного сечения снаряда

'Плотность воздуха

'Масса снаряда

'Коэффициент сопротивления

100 c1 = cx * S * ds / 2 / m

110 dt = .001

120 hp = 4

130 np = hp / dt

140 v = 830

150 x = 0

160 y = 0

170 t = 0

180 INPUT "Введите угол наклона в градусах"; a

190 al = a * pi / 180

200 vx = v * COS(al)

210 vy = v * SIN(al)

220 FOR i = 1 TO np

230 v = SQR(vx * vx + vy * vy)

240 x = x + vx * dt

250 y = y + vy * dt

260 vx = vx - c1 * v * vx * dt

270 vy = vy - (g + c1 * v * vy) * dt

280 t = t + dt

290 IF y < 0 THEN 340

300 NEXT i

310 PRINT t; x; y; vx; vy

320 GOTO 220

330 PRINT t; x; y; vx; vy

340 END

С помощью разработанной программы проведем расчет баллистических траекторий для разных углов наклона ствола орудия и коэффициентов аэродинамического сопротивления C . На основании проведенного моделирования отметим следующий важный результат: если не учитывать сопротивление среды, то, как мы уже показали на примере 2.1, максимальная дальность полета снаряда достигается при угле наклона ствола в 45° ; если же учитывать сопротивление среды, то наибольшая дальность достигается при углах наклона не равных 45° . Изменяя угол наклона ствола и значение коэффициента аэродинамического сопротивления, добиваемся совпадения расчетной максимальной дальности с реальным значением. Полученные значения параметров можно использовать как оценочные при расчетах других артиллерийских систем. Рас-

четная дальность 356-мм орудия достигается при угле наклона $\alpha = 40^\circ$ и $C = 0.142$.

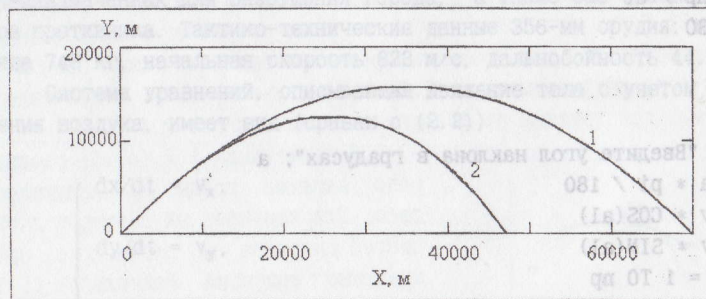


Рис. 2.5. Траектория снаряда 406-мм орудия береговой обороны. Траектория 1 соответствует полету снаряда в безвоздушном пространстве, траектория 2 рассчитана с учетом силы аэродинамического лобового сопротивления

Расчет траектории снаряда 406-мм орудия для разных углов наклона ствола и $C = 0.142$ показал, что наибольшая дальность достигается при $\alpha = 42^\circ$ и $x_{\max} = 47.0$ км. На рис. 2.5 представлен результат расчета баллистической траектории для 406-мм орудия. Реальная дальность этого орудия составляет 45.5 км, следовательно, относительная ошибка нашего расчета равна 3.3%, что является приемлемым результатом для нашей простой модели.

Задание 2.3.1. Во время Великой Отечественной войны 76.2-мм зенитным орудием сбили фашистский бомбардировщик Юнкерс-88, летевший со скоростью 400 км/час. В момент выстрела зенитное орудие было наклонено к горизонту на угол 75° , а самолет был виден под углом в 60° . Орудие и траектория самолета находились в одной плоскости; масса снаряда 6.5 кг, скорость зенитного снаряда 730 м/с; коэффициент сопротивления определите из условия, что максимальная высота подъема снаряда составляет 8000 м. С помощью программы mi23.bas рассчитайте, на какой высоте был сбит бомбардировщик Ю-88.

3. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Пример 3.1. Падение в облаке дождевой капли. Капля дождя падает в облаке толщиной 500 м. Вследствие конденсации происходит увеличение массы капли по закону

$$dm/dt = \alpha \cdot S, \quad (3.1)$$

где S – площадь поверхности. Найти скорость и массу капли, если $m(0)=0$, $v(0)=0$. Коэффициент α определить из условия, что максимальный радиус капель, выпавших из облака, составляет 1 мм.

До сих пор мы рассматривали движение таких тел, у которых масса не изменяется. Однако существует много процессов, в которых при движении меняется масса. Например, масса градинки изменяется при ее движении в атмосфере, причем градинка может увеличиваться за счет прилипания к ней различных частичек из атмосферы или конденсации водяных паров или уменьшаться за счет испарения; масса метеорита уменьшается при движении в атмосфере планеты за счет испарения и/или механического разрушения самого тела; движение ракеты происходит за счет выгорания топлива. Таких примеров можно указать множество, следовательно, для решения этого класса задач необходим другой подход, который в свое время был предложен русским ученым И.В.Мещерским в 1897 году. Основное уравнение движения тела переменной массы имеет вид [1,3]

$$m \cdot dv/dt = (dm/dt) \cdot u + F. \quad (3.2)$$

Здесь u – относительная (по отношению к движущемуся телу) скорость частичек среды до присоединения (если $dm/dt > 0$) или скорость частичек тела после отделения от тела (если $dm/dt < 0$); $u = v' - v$, где v' – абсолютная скорость частичек, v – абсолютная скорость тела; F – результирующая внешняя сила, действующая на тело.

В этом примере будем считать, что капля падает в неподвижном облаке, следовательно, абсолютная скорость v' частичек облака до

столкновения с каплями равна нулю и относительная скорость $u = -v$. Внешняя сила, действующая на каплю, складывается из силы тяжести, силы вязкого трения (1.16) и силы лобового сопротивления (1.17). В качестве нулевого приближения учтем только силу тяжести, тогда $F = m \cdot g$.

Уравнение (3.2) с учетом (3.1) можно записать в декартовой системе координат (см. рис. 1.1) в виде

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = -\alpha \cdot S \cdot v + m \cdot g. \end{cases} \quad (3.3)$$

Начальные условия: $y(0) = 0$ м, $h(0) = 500$ м, $v(0) = 0$ м/с.

Предположим, что капля имеет сферическую форму, тогда масса капли равна

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 / 3, \quad (3.4)$$

где ρ — плотность, а r — радиус капли. Из (3.4) можно выразить размер капли

$$r = (3 \cdot m / (4 \cdot \pi \cdot \rho))^{1/3}. \quad (3.5)$$

Площадь сферической поверхности капли равна

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (3 \cdot m / (4 \cdot \pi \cdot \rho))^{2/3} = (6 \cdot \pi^{1/2} / \rho)^{2/3} \cdot m^{2/3}. \quad (3.6)$$

С учетом (3.4) и (3.6) закон изменения массы принимает вид

$$dm/dt = \beta \cdot m^{2/3}, \quad (3.7)$$

где $\beta = \alpha \cdot (6 \cdot \pi^{1/2} / \rho)^{2/3}$. Так как изменение массы не зависит от y и v , то в этом дифференциальном уравнении можно разделить переменные

$$dm/m^{2/3} = \beta \cdot dt \quad (3.8)$$

и проинтегрировать это выражение

$$m(t) = [m(0)^{1/3} + \beta \cdot t/3]^3. \quad (3.9)$$

Итак, модель падения капли в облаке имеет вид

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ dv/dt = -\beta \cdot m^{-1/3} \cdot v + g, \\ m(t) = (m(0)^{1/3} + \beta \cdot t/3)^3 \end{cases} \quad (3.10)$$

с начальными условиями $y(0)$, $v(0)$, $m(0)$. Используя конечно-разностный метод Эйлера, преобразуем (3.10) в следующую вычислительную модель

$$\begin{cases} y(t + \Delta t) = y(t) + v(t) \cdot \Delta t, \\ v(t + \Delta t) = v(t) + (g - \beta \cdot m^{-1/3} \cdot v) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (3.11)$$

Программная реализация этой модели имеет вид

```
10 REM Падение капли в облаке/модель 1 уровень 0/mu31.bas
20 g = 9.8
25 pi = 3.1415926
30 dt = 0.01
40 hp = 0.1
50 np = hp/dt
60 r1 = 1000
70 a = 1
80 n1 = 1/3
90 n2 = 2/3
100 b = a * (4 * pi)^n1 * (3/r1)^n2
110 r0 = 0
120 m0 = 4 * r1 * pi * r0^3/3
130 m = m0
140 h0 = 100
145 y = 0
150 v = 0
160 t = 0
170 for i = 1 to np
180 y = y + v * dt
```



```

185 h = h0 - y
190 if m = 0 then v = v + g * dt else v = v + (g - b * v/m^n1) * dt
200 m = (m0^n1 + n1 * b * t)^3
210 t = t + dt
220 if h < 0 then 260
230 next i
240 print t,y,v,m
250 goto 150
260 r = (0.75 * m/pi/r1)^n1
270 print t,y,v,m,r
280 end

```

Примечание 3.1. В строке 190 производится проверка на нуль массы капли. Это связано с тем, что в начальный момент времени при условии $m(0)=0$ и, естественно, $v(0)=0$ возникает драматическая ситуация машинного деления на нуль (division by zero), хотя на самом деле фрагмент выражения равен нулю: $0/0^{1/3} = 0$. Это происходит потому, что стандартное программное обеспечение не обрабатывает неопределенности деления $0/0$ или ∞/∞ . Как отмечалось в Примечании 1.1.1, несовершенство машинной арифметики связано с природой аппроксимации действительного числа конечным набором символов (об особенностях машинной математики см. [10, 11]).

Данная модель (3.10) допускает аналитическое решение (см., например, [15, с. 125])

$$\begin{cases} y^*(t) = g \cdot t^2/8, \\ v^*(t) = g \cdot t/4. \end{cases}$$

Численное моделирование выполняем следующим образом: присваиваем начальное малое значение α и проводим расчет по программе mi31.bas, затем сравниваем расчетное значение размера капли с требуемым размером ($r = 1$ мм). Так, методом проб добиваемся совпадения этих размеров капли. Рекомендуется при расчете использовать стратегию дихотомического поиска (см., например, решение задания 1.4.3).

На рис. 3.1 приведены результаты расчета падения капли дождя.

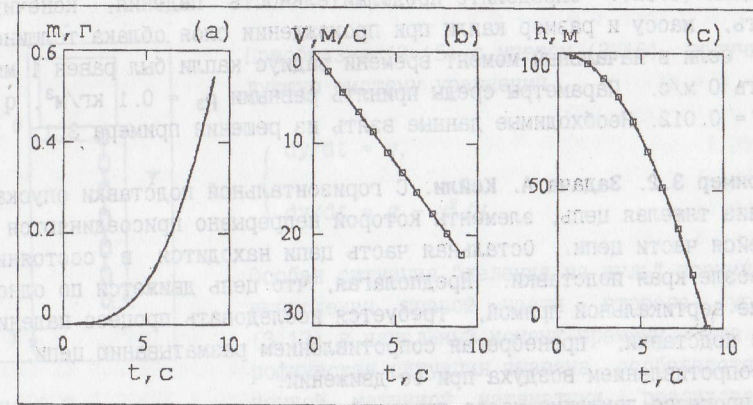


Рис. 3.1. (а) рост массы в зависимости от времени падения через облако; (б) изменение скорости капли со временем; (с) высота капли относительно нижней границы облака. Квадратиками отмечено аналитическое решение этой задачи $h_0 - y^*(t)$ и $v^*(t)$

Задание 3.1.1. Математическая модель (3.3) дождевой капельки учитывает процессы конденсации водяных паров и поглощения мельчайших капелек тумана по всей поверхности капли. Рассмотрим другой механизм изменения массы капли, который основывается на захвате мельчайших частичек облака при столкновении с падающей дождевой каплей

$$\begin{cases} dm/dt = \rho_3 \cdot v \cdot S, \\ S = k \cdot m^q, \end{cases} \quad (3.12)$$

где ρ_3 – плотность облака, v – скорость падения дождевой капли, S – площадь наибольшего поперечного сечения капли, q – массовый параметр формы капли (для сферической капли $q = 2/3$ (см. формулу (3.6)), k – геометрический фактор формы. Для сферической формы капли

$$k = \pi \cdot (3/(4 \cdot \pi \cdot \rho_1))^{2/3}, \quad (3.13)$$

где ρ_1 – плотность воды.

Рассчитайте закон движения капли $y = y(t)$, $v = v(t)$ и $m = m(t)$ для модели (3.12). Определите продолжительность падения, конечную скорость, массу и размер капли при прохождении слоя облака толщиной 100 м, если в начальный момент времени радиус капли был равен 1 мм, скорость 0 м/с. Параметры среды принять равными $\rho_3 = 0.1 \text{ кг/м}^3$, $q = 2/3$, $k = 0.012$. Необходимые данные взять из решения примера 3.1.

Пример 3.2. Задача А. Кейли. С горизонтальной подставки опускается вниз тяжелая цепь, элементы которой непрерывно присоединяются к движущейся части цепи. Остальная часть цепи находится в состоянии покоя возле края подставки. Предполагая, что цепь движется по одной и той же вертикальной прямой, требуется исследовать процесс падения цепи с подставки, пренебрегая сопротивлением разматыванию цепи, а также сопротивлением воздуха при ее движении.

В процессе движения масса движущейся части цепи будет изменяться до тех пор, пока цепь не вытянется на всю длину. Это движение описывается уравнением движения тела с переменной массой (уравнение Мещерского И.В.) и имеет вид

$$\begin{cases} dr/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = (dm/dt) \cdot u + m \cdot g \end{cases} \quad (3.14)$$

с начальными условиями $y(0) = 0 \text{ м}$, $h(0) = h \text{ м}$, $v(0) = 0 \text{ м/с}$. Пусть длина цепи равна L , ρ — линейная плотность массы цепи, h — высота горизонтальной подставки над поверхностью Земли, неподвижный конец цепи закреплен на горизонтальной подставке. Присоединяющиеся звенья к движущейся части цепи имеют относительно этой части скорость, равную $-v$, т.е. $u = -v$ (см. (3.2)). Построим систему координат так, как показано на рис. 3.2, и спроектируем векторные величины на ось Y , тогда (3.14) принимает вид

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = -v \cdot dm/dt + m \cdot g, \end{cases} \quad (3.15)$$

где масса свешивающейся части равна

$$m = \rho \cdot y. \quad (3.16)$$

Преобразуя (3.15) с учетом (3.16), получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ dv/dt = g - v^2/y. \end{cases} \quad (3.17)$$

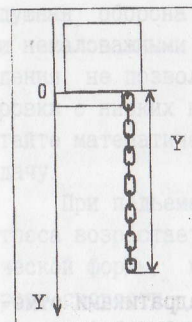


Рис. 3.2

Особая ситуация "деления на ноль" возникает при вычислении правой части второго уравнения (3.17) в начальный момент времени. Эта катастрофическая ситуация вызвана особенностями конечной машинной математики, реализованной в программном обеспечении современных ЭВМ. Неопределенность деления нуля на ноль не является драматическим для рассматриваемой нами модели (3.17), поскольку в числителе при $t=0$ стоит ноль более высокого порядка, чем ноль в знаменателе, поэтому при расчете координаты и скорости цепи в начальный момент времени отношение v^2/y равно нулю. Так как один конец цепи закреплен на горизонтальной подставке, то движение цепи прекращается в момент ее полного вытягивания на всю длину цепи L , это означает окончание вычислений. Для расчета движения цепи используем конечно-разностный метод Эйлера (1.7), тогда (3.17) принимает вид

$$\begin{cases} y(t + \Delta t) = y(t) + v(t) \cdot \Delta t, \\ v(t + \Delta t) = v(t) + (g - v^2(t)/y) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (3.18)$$

Программная реализация (3.15) имеет вид

```
10 REM Падение тяжелой цепи /модель 1 уровень 0/ mu32.bas
20 g = 9.81
30 L = 5
40 dt = 0.001
50 hp = 0.1
60 np = hp/dt
70 y = 0
80 v = 0
90 t = 0
```



```

100 for i = 1 to np
110 if y > 0 then v = v + (g - v * v/y) * dt
120 if y = 0 then v = v + g * dt
130 y = y + v * dt
140 t = t + dt
150 if y > L then 190
160 next i
170 print t,y,v
180 goto 100
190 print t,y,v
200 end

```

Результаты расчета приведены на рис. 3.3, где квадратиками отмечено аналитическое решение этой задачи, впервые полученное английским математиком Артуром Кейли (Кэли) в 1857 году, и имеет простой вид

$$y(t) = g \cdot t^2 / 6 \quad (3.19)$$

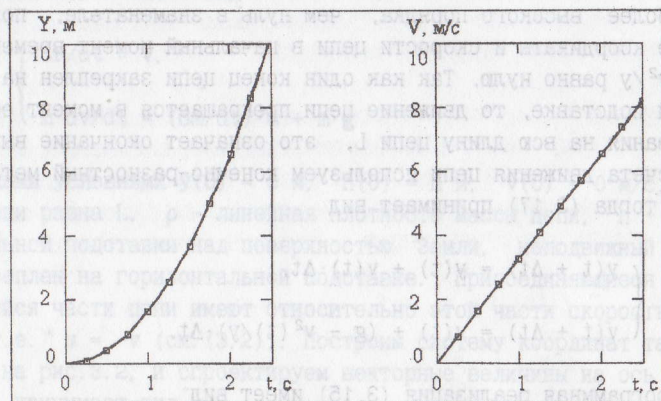


Рис. 3.3. Расчет движения нижнего конца тяжелой цепи в приближении отсутствия трения между горизонтальной подставкой и цепью, а также отсутствия сопротивления среды

Задание 3.2.1. Исследуйте случай падения тяжелой цепи, когда длина цепи меньше, чем высота горизонтальной подставки над поверх-

ностью земли. Для определенности принять длину цепи равной 5 м, высоту подставки – 10 м. Объясните характер полученного решения.

Задание 3.2.2. Во время Великой Отечественной войны противовоздушная оборона (ПВО) Москвы в целом обеспечивала эффективную защиту и немаловажными элементами ПВО являлись аэростаты воздушного заграждения, не позволявшие вражеским самолетам проводить точные бомбардировки с низких высот. На основе уравнения Мещерского (3.2) разработайте математическую модель подъема аэростата и решите следующую задачу.

При подъеме масса аэростата заграждения по мере вытягивания троса возрастает. Исследуйте вертикальный подъем аэростата цилиндрической формы, принимая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости, аэродинамический коэффициент сопротивления принять равным 0.2. Определите время подъема аэростата на высоту 1, 1.5 и 2 км. При расчете использовать следующие данные: объем аэростата 1400 м³, его длина 24 м, масса 644 кг, линейная плотность привязного троса 0.370 кг/м. Аэростат заполнен водородом, давление 101.3 кПа, температура 0° С, плотность водорода 0.0899 кг/м³, плотность воздуха 1.29 кг/м³.

Пример 3.3. Старт ракеты (вторая задача Циолковского). После Великой Отечественной войны как у нас, так и в США началось интенсивное изучение трофейной военной ракетной техники, в частности, знаменитого оружия "Возмездие" (Фау-2), с помощью которого гитлеровцы обстреливали Лондон. Результаты этих исследований были в свое время рассекречены американской стороной и опубликованы в известном обзоре Г.Зейферта и др. [12], а также в книге В.Лея [13]. Часть трофейных ракет использовалась как у нас, так и в США в чисто научных исследованиях атмосферы Земли. Полученные геофизические данные имели неопределимое значение для науки, в частности, с нашей стороны такую работу в свое время курировал президент АН СССР С.И. Вавилов.

Рассчитать траекторию ракеты, если известны следующие данные. Ракета стартует вертикально вверх с полигона Уайт Сэндз (США), расположенного на высоте 1220 м над уровнем моря. Стартовая масса ракеты 12790 кг, масса сухой ракеты 3870 кг, время работы двигателя ракеты 62.5 с, максимальный диаметр ракеты 1650 мм, секундный расход топлива $w=125$ кг/с, эффективная скорость истечения газов $u=2000$ м/с. Высота подъема 158 км.

Для описания движения ракеты воспользуемся уравнением Мещерского (3.2) в следующем виде

$$m \cdot dv/dt = F + u \cdot dm/dt. \quad (3.20)$$

При движении ракеты на нее действует внешняя сила F и реактивная сила (второе слагаемое в (3.20)). Внешняя сила F складывается из суммарного гравитационного взаимодействия ракеты с планетами и Солнцем и силой лобового сопротивления R . Предположим, что сила сопротивления R мала по сравнению с гравитационной и реактивной силами и на первом этапе этой силой мы можем пренебречь. Так как влияние Луны, Солнца и других планет на ракету мало по сравнению с силой притяжения Земли, то внешнюю силу можно записать в виде

$$F = -\gamma \cdot (m \cdot M / r^2) \cdot e_r = -m \cdot (g / (1 + y/R)^2) \cdot e_r, \quad (3.21)$$

где $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ - гравитационная постоянная, $M = 5.96 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ - масса Земли, m - масса ракеты, r - радиус-вектор ракеты, y - высота ракеты над "стандартной" поверхностью Земли (уровнем моря), которая имеет сферическую форму радиуса $R = 6380 \text{ км}$, $e_r = (y + R) \cdot e_y$ и $e_r = r/r$, $g = \gamma \cdot M / R^2 = 9.81 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения. В декартовых координатах уравнение движения высотной ракеты запишется так, если ось OY направить вверх

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = -\gamma \cdot m \cdot M / (y + R)^2 - dm/dt \cdot u, \end{cases} \quad (3.22)$$

где dm/dt - скорость сгорания топлива, а u - эффективная скорость истечения продуктов реакции относительно ракеты. Зависимость $m = m(t)$ определяет динамические свойства модели. В теоретической ракетодинамике различают следующие основные законы изменения массы:

- 1) изменение массы с постоянной скоростью

$$dm/dt = \text{const} = w, \quad (3.23)$$

- 2) изменение массы с постоянным ускорением

$$d^2m/dt^2 = \text{const} = a, \quad (3.24)$$

- 3) экспоненциальный закон изменения массы

$$dm/dt = -\beta \cdot m, \quad (\beta = \text{const}). \quad (3.25)$$

В качестве первого приближения используем закон изменения массы (3.23). Вычислительная схема имеет вид

$$\begin{cases} y(t + \Delta t) = y(t) + v(t) \cdot \Delta t, \\ v(t + \Delta t) = v(t) - (g / (1 + y/R)^2 + w \cdot u/m) \cdot \Delta t, \\ m(t + \Delta t) = m(t) - w \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (3.26)$$

Программная реализация этой модели имеет вид

10 REM Старт ракеты/Модель 1 уровень 0/mu33.bas

20 g = 9.8

30 R = 6.38E+6

40 dt = 0.01

50 hp = 2

60 np = hp/dt

70 w = 125

80 u = 2000

90 m = 12790

100 mm = 3870

110 y = 1220

120 v = 0

140 t = 0

150 for i = 1 to np

160 y = y + v * dt

170 if m > mm then v = v + (w*u/m - g/(1 + y/R)^2) * dt
else v = v - g/(1 + y/R)^2 * dt

180 if m > mm then m = m - w * dt

190 t = t + dt

200 if y < 0 then 240

210 next i

220 print t,y,v,m

230 goto 150


```
240 print t,y,v,m
250 end
```

Результаты расчета приведены на рис. 3.4, где на (а) представлена зависимость высоты ракеты $y = y(t)$ (кривая 1) и на (б) показана скоростная зависимость $v = v(t)$ (кривая 1). На активном участке АВ ракета двигалась с возрастающим ускорением, определяемым работой реактивного двигателя. На оставшейся части BD ракета двигалась с постоянным ускорением в поле тяжести Земли. Точка С на кривой 1 соответствует наибольшей высоте подъема равной 197 км, тогда как реальная высота $y_{\max} = 158$ км. Относительная ошибка составляет около 25% и указывает на то, что разработанная математическая модель (3.19) не соответствует реальному процессу движения ракеты. Расчетная высота больше реальной, следовательно, в математической модели необходимо учесть фактор, который уменьшает высоту подъема. Будем считать, что этим фактором является сила лобового сопротивления R . Таким образом, на втором этапе разработки математической модели вертикального старта ракеты учтем силу лобового сопротивления

$$R = -C \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S \cdot e_v, \quad (3.27)$$

где $0.5 \cdot \rho \cdot v^2$ - скоростной напор (динамическое давление), S - площадь наибольшего поперечного сечения; C - аэродинамический коэффициент лобового сопротивления, $e_v = v/v$. Здесь плотность атмосферы уже не является постоянной величиной и в первом приближении аппроксимируется следующим выражением

$$\rho(y) = \rho_0 \cdot \exp(-y/y_s), \quad (3.28)$$

где ρ_0 - плотность воздуха на уровне моря ($y = 0$), $y_s = 7160$ м - параметр "стандартной атмосферы". Аэродинамический коэффициент сопротивления зависит от числа Маха, но в первом грубом приближении будем считать C постоянным варьируемым параметром. Таким образом, математическая модель вертикального старта ракеты имеет вид

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = -\gamma \cdot m \cdot M / (y + R)^2 - C \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S \cdot e_v - dm/dt \cdot u. \end{cases} \quad (3.29)$$

Вычислительная схема имеет вид

$$\begin{cases} y(t + \Delta t) = y(t) + v(t) \cdot \Delta t, \\ v(t + \Delta t) = v(t) - (g / (1 + y/R)^2 + C \cdot 0.5 \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S / m + w \cdot u / m) \cdot \Delta t, \\ m(t + \Delta t) = m(t) - w \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (3.30)$$

Программная реализация этой модели имеет вид

```
10 REM Старт ракеты/Модель 1 уровень 1/mu34.bas
20 g = 9.81
30 R = 6.38E+6
40 dt = .1
50 hp = 4
60 np = hp/dt
70 w = 125
80 u = 2000
90 m = 12790
100 mm = 3870
110 rr = 1.65/2
120 S = 3.1415926# * rr * rr
130 y0 = 1220
140 yS = 7160
150 r0 = 1.2
160 ym = y0
170 y = y0
180 vy = 0
190 t = 0
200 INPUT "Введите коэффициент сопротивления C="; c
210 FOR i = 1 TO np
220 fy = c * S * r0 * EXP(-y / yS) * ABS(vy) * vy / 2 / m
230 IF m > mm THEN vy = vy - (g / (1 + y / R) ^ 2 + fy - w * u / m) * dt
240 IF m <= mm THEN vy = vy - (g / (1 + y / R) ^ 2 + fy) * dt
250 IF m > mm THEN m = m - w * dt
260 y = y + vy * dt
270 IF y > ym THEN ym = y
280 t = t + dt
290 IF y < y0 THEN 330
```



```

300 NEXT i
310 PRINT t; y; vy; m
320 GOTO 210
330 PRINT t; y; vy; m; ym
340 END

```

Результаты расчета приведены на рис. 3.4, где на (а) представле- на зависимость высоты ракеты $y = y(t)$ (кривая 2) и на (b) показана

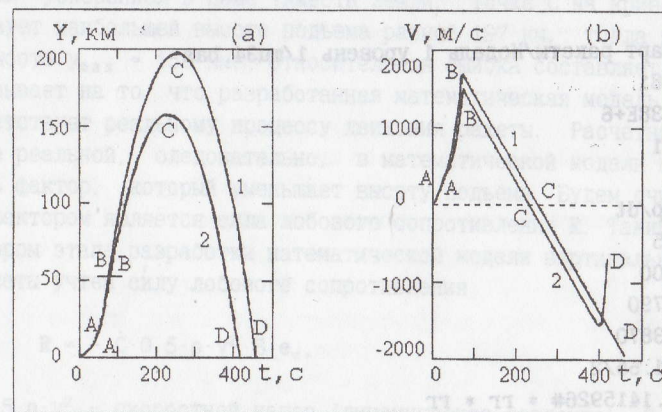


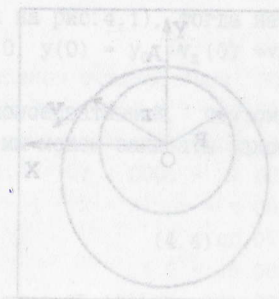
Рис. 3.4. Вертикальный старт высотной ракеты "Фай-2" на полигоне "Уайт-Сэндз". Точка А - старт ракеты, точка В - выключение реактивно- го двигателя, точка С - наибольшая высота подъема ракеты, точка D - падение ракеты на Землю

скоростная зависимость $v = v(t)$ (кривая 2). Точка С на кривой 2 со- ответствует наибольшей высоте подъема равной 158 км при значении ко- эффициента $C=0.45$. Интересная особенность для этой математической модели нами была обнаружена при проведении расчетов. Кривые 1 и 2 на рис. 3.4. (b) имеют сходное строение на участках АВ, ВС и на части CD. Но с момента времени, равного 400 с, модуль скорости ракеты начинает быстро уменьшаться (кривая 2). Причина такого изменения может быть понята, если исследовать соотношение компонентов результирующей си- лы, а именно: силы тяжести и силы сопротивления R . Последняя имеет нелинейную зависимость от высоты и скорости ракеты. При уменьшении высоты плотность воздуха увеличивается, соответственно начинает рас-

ти сопротивление воздуха, которое, в свою очередь, уменьшает ско- рость падения ракеты. Необходимо отметить приближенный характер мо- дели (3.28), т.к. мы не учитываем влияние числа Маха на величину ко- эффициента лобового сопротивления, поэтому результаты наших расчетов носят приближенный характер.

Задание 3.3.1. Глубокий космос (первая задача Циолковского). Начиная с 50-х годов, в связи с успехами как советской, так и аме- риканской космонавтики было опубликовано множество научно-фантасти- ческих произведений, посвященных героическому освоению космического пространства. Необходимо отметить, что у истоков этого направления стоял Константин Эдуардович Циолковский (1857 - 1935), который в своих научных и научно-фантастических произведениях детально разра- ботал многие практические вопросы ракетодинамики. Рассмотрите простей- ший пример такого рода задач.

Космический корабль с термоядерным двигателем [17], совершающий дальний перелет в глубоком космосе, ускоряется на прямолинейном участке. В начале разгонного участка скорость космического корабля $v_0 = 1000$ км/с, в конце участка требуется достичь скорости $v_1 = 2500$ км/с. Найти закон движения корабля и длину разгонного участка, если известны следующие параметры: масса корабля без топлива $m_s = 10^8$ кг, запас топлива $m_0 = 10^{11}$ кг, эффективная скорость истечения газов 10^4 км/с, выгорание топлива подчиняется экспоненциальному закону (3.25), где $\beta = 10^{-5}$ с $^{-1}$.



4. ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

Пример 4.1. Движение первого искусственного спутника Земли.

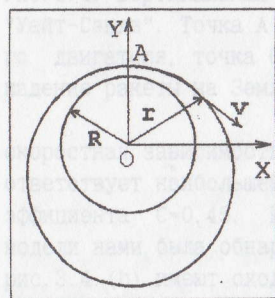
Рассчитайте траекторию движения первого искусственного спутника (ИСЗ), запущенного в СССР 4 октября 1957 года, если известны следующие данные: максимальное удаление спутника от поверхности Земли 947 км, период обращения спутника вокруг Земли 96.2 минут.

При движении тела в поле тяготения планеты на него действует сила гравитационного притяжения. Систему уравнений движения можно записать в векторном виде

$$\begin{cases} dr/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot r/r^3, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ - гравитационная постоянная, $M = 5.96 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ - масса Земли, m - масса спутника, r - радиус-вектор спутника.

Из курса общей физики известно (см., например, [1]), что орбита спутника лежит в плоскости, следовательно, удобно выбрать систему координат лежащей в плоскости орбиты и поместить начало координат в центр планеты, как показано на рис. 4.1



$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ m \cdot dv_x/dt = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot x/r^3, \\ m \cdot dv_y/dt = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot y/r^3. \end{cases} \quad (4.2)$$

Рис. 4.1

Выберем новую систему единиц измерения, так как удобно измерять расстояния в радиусах Земли (средний радиус Земли равен $6.378 \cdot 10^6 \text{ м}$), а время - в минутах, тогда переход от СИ к новой системе единиц такой:

$$\begin{aligned} 1 \text{ м} &= 1.568 \cdot 10^{-7} R, \\ 1 \text{ с} &= 1.667 \cdot 10^{-2} \text{ мин}, \\ 1 \text{ м/с} &= 60/6.378 \cdot 10^6 = 9.407 \cdot 10^{-6} R/\text{мин}, \\ 1 \text{ м/с}^2 &= 3600/6.378 \cdot 10^6 = 5.644 \cdot 10^{-4} R/\text{мин}^2. \end{aligned}$$

Ускорение свободного падения в этих единицах будет равно

$$g \text{ м/с}^2 = \gamma \cdot M/R^2 = 9.81 \cdot 1\text{м}/1\text{с}^2 = 5.537 \cdot 10^{-3} R/\text{мин}^2.$$

С учетом новых единиц измерения система (4.2) принимает вид

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ dv_x/dt = -g \cdot x/r^3, \\ dv_y/dt = -g \cdot y/r^3. \end{cases} \quad (4.3)$$

Выберем начальные условия в перигее, в этом случае начальная скорость будет перпендикулярна к направлению на центр Земли. Установим декартовую систему координат так, чтобы центр Земли находился в начале координат, а перигей - на оси Y (точка A на рис. 4.1), тогда начальные условия можно записать в виде $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$, $v_x(0) = v_0$, $v_y(0) = 0$.

Замкнутая система из двух тел является консервативной, поэтому в дополнение к уравнениям движения (4.3) мы можем записать закон сохранения механической энергии

$$E = m \cdot v^2/2 - \gamma \cdot m \cdot M/r. \quad (4.4)$$

Преобразуем (4.4) с учетом новых единиц измерения ($R=1$) к виду

$$E/m = v^2/2 - g/r. \quad (4.5)$$

Сохранение постоянной E/m в процессе счета служит указанием на правильность вычислительного процесса.

Используя разностную схему Эйлера (1.7), представим систему (4.3) к следующему виду:

$$\begin{cases} r(t) = (x^2(t) + y^2(t))^{1/2}, \\ e(t) = 0.5 \cdot (v_x^2(t) + v_y^2(t)) - g/r(t), \\ x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \cdot \Delta t, \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \cdot \Delta t, \\ v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - g \cdot x(t) / r^3(t) \cdot \Delta t, \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - g \cdot y(t) / r^3(t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (4.6)$$

Программная реализация представленной схемы аналогична рассмотренным выше и имеет вид

```
10 rem Движение спутника / модель 1 уровень 0/mu41.bas
20 g = 0.0055376
25 RZ = 6.371e+6
27 ra = 947
29 tt = 96.2
30 x = 0
40 vy = 0
50 input "Введите начальную высоту в км ":y0
52 y = 1 + 1000 * y0/RZ
54 input "Введите начальную скорость в км/с ":v0
56 vx = 1000 * v0 * 9.407e-6
60 r = sqr(x * x + y * y)
70 hp = 2
80 dt = 0.1
90 np = hp/dt
100 t = 0
110 rmax = r
120 tmax = 500
125 tp = 0
130 for i = 1 to np
```

```
140 r = sqr(x * x + y * y)
150 e = 0.5 * (vx * vx + vy * vy) - g/r
160 xx = x + vx * dt
170 yy = y + vy * dt
180 gr = g/r/r/r
190 vx = vx - gr * x * dt
200 vy = vy - gr * y * dt
205 if (tp=0)and(x<=0)and(xx>=0)and(y>0)and(t>0) then tp = t
210 x = xx
220 y = yy
230 t = t + dt
240 if rmax < r then rmax = r
250 if r <= 1 then 290
260 next i
270 print t,x,y,vx,vy,e
280 if t > tmax then 300
290 goto 130
300 print "Период обращения в минутах ";tp
310 ha = (rmax - 1) * 6370
320 print "апогей в км над поверхностью Земли"; ha
330 er = 100 * (abs(ha - ra)/ra + abs(tp - tt)/tt)
340 print "относительная ошибка определения орбиты ";er;" %"
350 end
```

Пояснение к программе mu41.bas. В строках 160, 170 переменные xx,yy используются для хранения "новых" x_{i+1} и y_{i+1} координат спутника, так как в строках 190, 200 используются "старые" координаты спутника x_i и y_i . В строке 205 определяется период обращения спутника вокруг планеты. Логическое выражение $(tp = 0) \text{ and } (x \leq 0) \text{ and } (xx \geq 0) \text{ and } (y > 0) \text{ and } (t > 0)$ определяет нахождение спутника в окрестности начальной точки с погрешностью не большей $vx \cdot dt$, соответственно период обращения спутника определяется с погрешностью не большей dt .

Расчет по программе траектории спутника производится путем вариации начальной высоты и скорости спутника так, чтобы максимальное удаление спутника от поверхности Земли составило 947 км ($1.148 \cdot R$), а период обращения - 96.2 минут. Определим интервал изменения начальных условий: начальная высота сверху ограничена значением апогея

реальной траектории, т.е. 947 км, а снизу высотой 160 км [17, с. 64]. Так как известно, что на высотах ниже 160 км торможение за счет столкновений спутника с молекулами верхней атмосферы будет настолько значительным, что будет происходить интенсивный разогрев спутника; дальнейшее быстрое снижение и сгорание, если спутник не оборудован специальным теплозащитным экраном, или разрушение, если спутник не обладает достаточным запасом прочности, начальная скорость будет определяться значением круговых скоростей в апогее и в перигее выражением [17, с. 64]

$$v_c = (K/r)^{1/2} = (K/(R + h))^{1/2},$$

где $K = 3.986005 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$ (для Земли), r - радиус-вектор спутника, h - высота тела над поверхностью Земли, R - радиус Земли. Начальная скорость ограничена снизу значением v_c , соответствующим апогею, и равна 7.38 км/с, а сверху ограничена значением параболической скорости 11.045 км/с, соответствующей минимальной высоте, равной 160 км, устойчивых орбит.

Контроль значений интеграла энергии, как показывают расчеты по программе mu41.bas, обнаруживает неустойчивость (изменение E/m) классической конечно-разностной схемы Эйлера (1.7). В таблице 4.1 приведены результаты расчетов интеграла энергии E/m в зависимости от величины шага Δt на протяжении пяти оборотов спутника вокруг планеты.

Таблица 4.1. Интеграл движения спутника E/m . Классическая конечно-разностная схема Эйлера

t, мин	$\Delta t=0.1$	$\Delta t=0.01$	$\Delta t=0.001$	$\Delta t=0.0001$
0	-0.0025367	-0.0025367	-0.0025367	-0.0025367
100	-0.0023517	-0.0025152	-0.0025345	-0.0025365
200	-0.0022132	-0.0024944	-0.0025324	-0.0025363
300	-0.0020992	-0.0024744	-0.0025302	-0.0025360
400	-0.0020003	-0.0024550	-0.0025280	-0.0025359
500	-0.0019220	-0.0024363	-0.0025259	-0.0025356

Как уже отмечалось в Примечании 1.2, если уменьшение шага сетки не приводит к приемлемому результату, то необходимо изменить метод расчета. Рассмотрим различные модификации конечно-разностного метода

Эйлера. Для этого проинтегрируем (1.5) в пределах одного 1-го интервала:

$$\int_{y_1}^{y_{1+1}} dy = \int_{x_1}^{x_{1+1}} f(x) \cdot dx. \quad (4.7)$$

Для вычисления интеграла в правой части используем теорему о среднем (см. [4, раздел 4.7])

$$\int_{x_1}^{x_{1+1}} f(x) \cdot dx = f(\xi) \cdot (x_{1+1} - x_1), \quad (4.8)$$

где ξ - нефиксированное значение x внутри интервала (x_1, x_{1+1}) .

Если $\xi = x_1$, то получим из (4.7) классическую схему Эйлера

$$y_{1+1} - y_1 = f(x_1) \cdot \Delta x, \quad (4.9)$$

где $\Delta x = x_{1+1} - x_1$.

Если $\xi = x_{1+1}$, то получим из (4.7) модифицированную схему Эйлера

$$y_{1+1} - y_1 = f(x_{1+1}) \cdot \Delta x. \quad (4.10)$$

Если же взять значение производной $f(x)$ в средней точке, то получим метод полушага

$$y_{1+1} - y_1 = f(x_1 + \Delta x/2) \cdot \Delta x. \quad (4.11)$$

(Метод полушага для решения уравнений движения тела подробно рассмотрен Р.Фейнманом в первом томе известной серии "Фейнмановские лекции по физике" [5]).

Применим рассмотренные вычислительные конечно-разностные схемы (4.9)-(4.11) для интегрирования уравнений движения

$$\begin{cases} dr/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = F. \end{cases} \quad (4.12)$$

1. Классическая схема Эйлера (см., например, (1.8), (1.11))

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \cdot \Delta t, \\ \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (4.13)$$

2. Модифицированная схема Эйлера

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + (\mathbf{F}_i/m) \cdot \Delta t, \\ \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_{i+1} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (4.14)$$

3. Метод полушага

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1/2} = \mathbf{v}_{i-1/2} + (\mathbf{F}_i/m) \cdot \Delta t, \\ \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_{i+1/2} \cdot \Delta t, \end{cases} \quad (4.15)$$

где $\mathbf{v}_{i+1/2} = \mathbf{v}(t_i + \Delta t/2)$, $\mathbf{v}_{i-1/2} = \mathbf{v}(t_i - \Delta t/2)$.

Исследуем, как изменится качество расчета, если от схемы (4.13) реализованной в программе mi41.bas, перейдем к схеме (4.14). Для этого необходимо строку 160 записать на место строки 210, а строку 170 на 220. Фрагмент программы имеет вид:

```
130 for i = 1 to np
140 r = sqr(x * x + y * y)
150 e = 0.5 * (vx * vx + vy * vy) - g/r
160 gr = g/r/r
170 vx = vx - gr * x * dt
180 vy = vy - gr * y * dt
190 xx = x + vx * dt
200 yy = y + vy * dt
205 if (tp=0)and(x<=0)and(xx >= 0)and(y > 0)and(t > 0) then tp = t
210 x = xx
220 y = yy
230 t = t + dt
```

Запишем модернизированную программу под именем mi41a.bas, проведем расчет траектории спутника и исследуем интеграл движения Е/м. В таблице 4.2 приведены результаты расчетов интеграла энергии Е/м в зави-

симости от величины шага Δt на протяжении пяти оборотов спутника вокруг планеты.

Таблица 4.2. Интеграл движения спутника Е/м. Модифицированная конечно-разностная схема Эйлера

t, мин	$\Delta t=0.1$	$\Delta t=0.01$	$\Delta t=0.001$
0	-0.0025367	-0.0025367	-0.0025367
100	-0.0025365	-0.0025367	-0.0025367
200	-0.0025363	-0.0025367	-0.0025367
300	-0.0025361	-0.0025367	-0.0025367
400	-0.0025360	-0.0025367	-0.0025367
500	-0.0025359	-0.0025367	-0.0025367

Сравнивая таблицы 4.1 и 4.2, видим, что расчеты по модифицированной схеме даже для шага $\Delta t=0.1$ точнее, чем по классической схеме $\Delta t=0.0001$. В дальнейшем мы будем использовать в расчетах все три схемы в зависимости от класса задач. Все же следует подчеркнуть, что все три метода, рассмотренные нами, обладают глобальным недостатком, а именно накоплением погрешностей расчета, поэтому при проведении расчетов существенно необходим контроль точности вычислений.

В результате численного моделирования по программе mi41a.bas был найден целый набор начальных условий (вторая и третья колонка в таблице 4.3), соответствующих наибольшему удалению от поверхности Земли на 947 км и периоду обращения 96.2 минуты с относительной ошибкой расчета не более 0.25%.

Таблица 4.3. Набор начальных условий для первого ИСЗ

N	h_p , км	V, км/с	T_p , мин	h_a , км	ошибка
1	225	7.9735	96.34	947.64	0.214%
2	226	7.9725	96.34	947.22	0.169%
3	227	7.9715	96.35	946.79	0.178%
4	228	7.9705	96.35	946.36	0.223%
5	230	7.9690	96.39	947.44	0.244%

Согласно принципу минимальной ошибки оптимальный вариант представлен второй строкой таблицы 4.3. Реальное значение перигея над поверхностью Земли (точка А на рис. 4.1) равно 228 км, следовательно, отно-

сительная погрешность определения наименьшей высоты орбиты над поверхностью Земли составляет $(226 - 228)/228 = 0.0088$ или 0.88%. Причина расхождения расчетных характеристик от реальных в основном обусловлена несферичностью формы Земли, неоднородным распределением гравитирующих масс Земли. Расчетная траектория первого советского ИСЗ представлена на рис. 4.2.

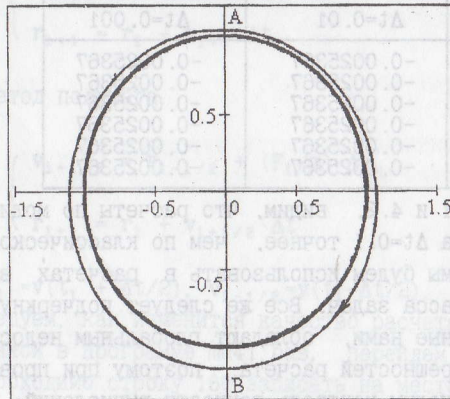


Рис. 4.2. Траектория первого советского спутника

Задание 4.1.1. Рассчитайте траекторию движения третьего искусственного спутника Земли, запущенного в СССР 15 мая 1958 года, если известны следующие данные: наибольшее удаление ИСЗ от поверхности Земли составляет 1880 км, начальный период обращения спутника – 106 минут.

Задание 4.1.2. В газете "Правда" от 27 апреля 1958 года была опубликована статья, посвященная успехам советской космонавтики, в которой было написано следующее: "Плотность атмосферы быстро падает с удалением от поверхности Земли. Поэтому сила сопротивления на различных участках эллиптической орбиты не одинакова. При достаточно вытянутой орбите сила сопротивления в перигее много больше, чем в апогее. Поэтому основное торможение происходит в районе перигея. Такой характер переменного торможения приводит к тому, что уменьшение высоты апогея орбиты происходит значительно быстрее, чем уменьшение высоты её перигея. Эволюция вытянутой орбиты спутника совершается таким образом, что её форма постепенно приближается к круговой".

С помощью компьютерного моделирования требуется проверить превращение эллиптической орбиты ИСЗ в круговую. Для определенности воспользуйтесь необходимыми данными из задания 4.1.1 для третьего советского ИСЗ. Кроме тех данных, необходимо учесть, что спутник имел форму, близкую к конусу; длина спутника – 3.57 м, наибольший диаметр – 1.73 м, масса – 1327 кг. Силу трения, с которой атмосфера действует на ИСЗ, в простейшем случае можно выбрать в виде выражения (1.17), где плотность среды определена (3.28). Известно, что этот спутник за все время существования на орбите (с 15.05.1958 года по 05.04.1960 года) совершил более 10 тысяч оборотов вокруг Земли, поэтому при компьютерном моделировании необходимо завязать коэффициент лобового сопротивления C до таких значений, чтобы трансформация эллиптической орбиты в круговую происходила за 5 – 10 "витков" модели ИСЗ.

Пример 4.2. Солнечный ветер. Рассмотрите влияние слабого "солнечного ветра" (давление солнечного излучения) на спутник. Реальное ускорение тела, обусловленное "солнечным ветром", мало, поэтому для модельных расчетов необходимо принять завышенное значение этого ускорения, например, 1.0% от ускорения свободного падения. Влияние "солнечного ветра" на спутник происходит на участке траектории ABC, причем на участке АВ орбиты (спутник вращается по часовой стрелке) "солнечный ветер" тормозит спутник, а на участке ВС ускоряет. В области геометрической тени планета экранирует солнечное излучение, следовательно, на участке траектории CDA это воздействие равно нулю. Уравнение движения спутника можно записать в виде;

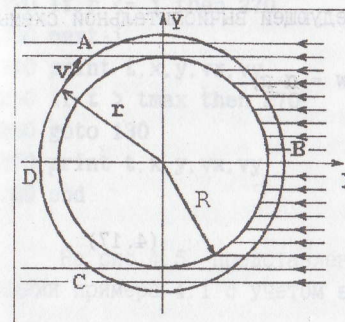


Рис. 4.3. "Солнечный ветер" в околоземном пространстве

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ m \cdot dv_x/dt = -m \cdot g \cdot x/r^3 - m \cdot w(x, y), \\ m \cdot dv_y/dt = -m \cdot g \cdot y/r^3. \end{cases} \quad (4.16)$$

Функция $w(x, y)$ описывает воздействие "солнечного ветра" на спутник на участке траектории ABC. Представим действие, описываемое функцией $w(x, y)$, в виде следующей блок-схемы (рис. 4.4):

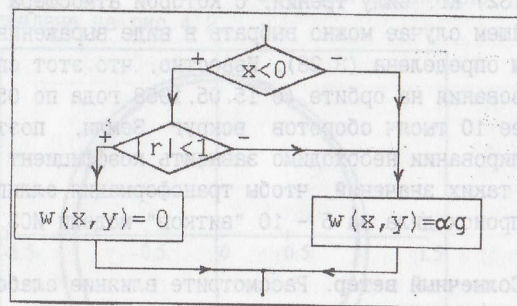


Рис. 4.4

Здесь $\alpha \cdot g$ есть ускорение тела, обусловленное давлением "солнечного ветра", $\alpha = 0.01$ по условию задачи. Программная строка, реализующая алгоритм, представленный на рис. 4.4, имеет вид

if $x < 0$ and $\text{abs}(y) < 1$ then $w=0$ else $w=\alpha \cdot g$.

Программная реализация приведенной ниже следующей вычислительной схемы

if $x < 0$ and $|y| < 1$ then $w = 0$ else $w = \alpha \cdot g$,

$$r(t) = (x^2(t) + y^2(t))^{1/2},$$

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - (g \cdot x/r^3 + w) \cdot \Delta t,$$

$$v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - (g \cdot y/r^3) \cdot \Delta t,$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x \cdot \Delta t,$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y \cdot \Delta t,$$

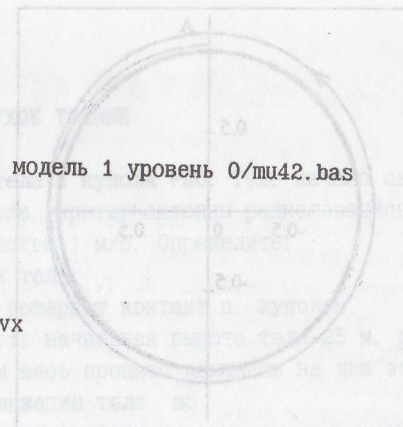
(4.17)

имеет вид

```

10 rem Солнечный ветер / модель 1 уровень 0/mu42.bas
20 g = 0.0055376
30 alpha = 0.01
40 x = 0
50 vy = 0
60 input "Введите y, vx": y, vx
70 r = sqrt(x * x + y * y)
80 hp = 2
90 dt = 0.01
100 np = hp/dt
110 t = 0
120 tmax = 1000
130 for i = 1 to np
140 if x < 0 and abs(y) < R then w = 0 else w = alpha * g
150 r = sqrt(x * x + y * y)
160 gr = g/r/r/r
170 vx = vx - (gr * x + w) * dt
180 vy = vy - gr * y * dt
190 x = x + vx * dt
200 y = y + vy * dt
210 t = t + dt
220 if r <= 1 then 270
230 next i
240 print t, x, y, vx, vy
250 if t > tmax then 270
260 goto 130
270 print t, x, y, vx, vy
280 end
  
```

На рис. 4.5 представлена траектория спутника с начальными условиями примера 4.1 с учетом воздействия "солнечного ветра".



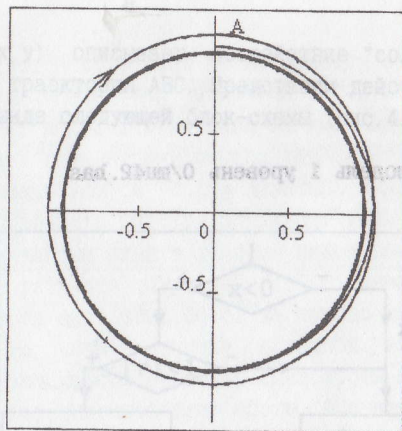


Рис. 4.5. Траектория спускающегося спутника под действием "солнечного ветра"

Как видно из расчетов, "солнечный ветер" является одним из основных факторов "выдувания" спутников и прочего космического мусора из околоземного космического пространства. Другим важным фактором, приводящим к прекращению существования спутников на орбите, является сопротивление атмосферы движению тела.

Задание 4.2.1. Космическая яхта. Известный советский ученый, основоположник ракетодинамики Фридрих Артурович Цандер (1887 - 1933) в 1924-1925 годах серьезно изучал проблему использования светового давления для перемещения космических кораблей в межзвездном пространстве. "Особая привлекательность" такого движения заключается в отсутствии затрат ракетного топлива на движение и достижения в принципе больших параболических скоростей под воздействием "малых толкающих сил". В задании предлагается рассмотреть простейший пример движения корабля в околоземном пространстве под воздействием малой тяги, причем на участке орбиты ВС (рис. 4.3), где солнечные лучи "дуют в корму", плоскость паруса должна быть перпендикулярна к лучам, а там, где корабль движется навстречу свету (участок АВ на рис. 4.3), парус ориентирован ребром к Солнцу. В этом задании будем считать, что интенсивность солнечного излучения E постоянная и равна 1373 Вт/м^2 . Учесть экранировку солнечного света Землей (тень Земли, см. пример 4.2), когда космический корабль находится в тени Земли на участке СДА орбиты (см. рис. 4.3). Масса корабля 1000 кг , диаметр идеально отражающего паруса 450 м . Исследовать изменение большой полуоси орбиты в зависимости от числа оборотов корабля вокруг Земли.

5. СУХОЕ ТРЕНИЕ

Пример 5.1. Падение тела с купола РЛС. Тело начало скатываться с вершины сферического купола укрытия антенны радиолокационной станции (РЛС) с начальной скоростью 1 м/с . Определите:

1. Траекторию движения тела.
2. В каком месте тело потеряет контакт с куполом.

Коэффициент трения равен 0.1 ; начальная высота тела 25 м , радиус купола равен 10 м . Разобьем весь процесс движения на два этапа.

Первый этап - это скольжение тела по поверхности купола. Уравнение движения тела имеет вид

$$\begin{cases} dr/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = m \cdot g + N + F, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $m \cdot g$ - сила тяжести, действующая на тело, F - сила трения скольжения, N - сила реакции поверхности купола. Во время скольжения по сферической поверхности ускорение тела определяется ее скоростью и в проекции на радиус-вектор тела от центра C сферической поверхности мы получаем следующее выражение

$$-m \cdot v^2/R = N - mg \cdot \cos(\alpha). \quad (5.2)$$

По мере скольжения скорость тела растет, проекция силы тяжести на радиус-вектор убывает, следовательно, сила реакции опоры N должна убывать быстрее, чем $mg \cdot \cos(\alpha)$, с тем чтобы обеспечить равенство (5.2). В некоторый момент времени сила реакции N обращается в нуль, именно это и определяет условие отрыва тела от поверхности. Преобразуем (5.2) к виду

$$N = m \cdot g \cdot h/R - m \cdot v^2/R = (m/R) \cdot (g \cdot h - v^2), \quad (5.3)$$

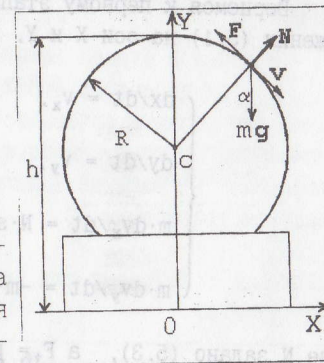


Рис. 5.1. Купол РЛС

тогда условие отрыва запишется в виде

$$g \cdot h - v^2 = 0. \quad (5.4)$$

Второй этап - свободное падение. Такой тип движения мы уже рассматривали в разделе 2 (пример 2.1). В качестве начальных условий будем использовать значения t , x , y , v_x и v_y , определяемые в момент отрыва тела от поверхности купола, и с помощью программы mu21.bas можно провести расчет остальной части траектории (начальный угол можно не определять, так как этот параметр используется только для определения начальных значений проекций вектора скорости v_x и v_y).

Вернемся к первому этапу. Проектируя векторные величины в вы-
ражении (5.1) на оси X и Y , получим

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ m \cdot dv_x/dt = N \cdot \sin(\alpha) - F \cdot \cos(\alpha), \\ m \cdot dv_y/dt = -m \cdot g + N \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\alpha), \end{cases} \quad (5.5)$$

где N задано (5.3), а $F = \mu \cdot N$. Условие выхода - выражение (5.3). В качестве метода решения выберем модифицированный метод Эйлера (4.14), тогда вычислительная схема принимает вид

$$\begin{cases} v^2(t) = v_x^2(t) + v_y^2(t), \\ cr = g \cdot yr - v^2/R, \\ v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + cr \cdot (xr - fr \cdot yr) \cdot \Delta t, \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + (-g + cr \cdot (yr + fr \cdot xr)) \cdot \Delta t, \\ x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t + \Delta t) \cdot \Delta t, \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t + \Delta t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (5.6)$$

Программная реализация этой схемы имеет вид

10 REM Сухое трение. Падение с купола защиты РЛС

20 REM модель 1 уровень 0 / mu51.bas

30 g = 9.8

40 fr = .1

50 R = 10

60 x = 0

70 y = 25

80 vx = 1

90 vy = 0

100 hp = .1

110 dt = .001

120 np = hp / dt

130 t = 0

140 FOR i = 1 TO np

150 xr = x / R

160 x2 = xr * xr

170 y2 = 1 - x2

180 yr = SQR(y2)

190 v2 = vx * vx + vy * vy

200 cr = g * yr - v2/R

210 vx = vx + cr * (xr - fr * yr) * dt

220 vy = vy + (-g + cr * (yr + fr * xr)) * dt

230 x = x + vx * dt

240 y = y + vy * dt

250 t = t + dt

260 IF cr <= 0 THEN 300

270 NEXT i

280 P

RINT t; x; y; vx; vy; cr

290 GOTO 140

300 PRINT "

310 PRINT "

320 PRINT " Орыв от поверхности купола : "

330 PRINT " Время X Y "

340 END

В таблице 5.1 приведены результаты вычислений по программе mu51.bas, а на рис. 5.2 эти результаты представлены участком траектории АВ.

Таблица 5.1. Траектория скольжения тела по сферическому куполу

t, с	x, м	y, м	v _x , м/с	v _y , м/с	(5.4)
0.0	0.0000	25.0000	1.0000	0.0000	10.0000
1.0	0.6431	24.9793	0.3887	-0.0251	9.7645
2.0	0.9108	24.9584	0.1900	-0.0174	9.7576
3.0	1.0885	24.9406	0.1941	-0.0213	9.7380
4.0	1.3659	24.9062	0.4052	-0.0559	9.6914
5.0	2.0366	24.7904	1.0414	-0.2166	9.4815
6.0	3.7748	24.2601	2.6626	-1.0853	8.2485
7.0	7.7082	21.3706	4.9427	-5.9795	0.2264
7.013	7.7515	21.2933	4.9437	-6.1039	-0.0007

В точке В отрыва тела от поверхности купола значения t , x , y , v_x , v_y (см. последнюю строку таблицы 5.1) являются начальными значениями для расчета оставшейся части траектории, которую, как мы уже упоминали, рассчитаем по программе mu21.bas. Результаты вычислений приведены в таблице 5.2, а на рис. 5.2 эти результаты представлены участком траектории ВС.

Таблица 5.2. Траектория свободного падения тела

t, с	x, м	y, м	v _x , м/с	v _y , м/с
7.01	7.75	21.29	4.94	-6.10
7.51	10.24	17.01	4.94	-11.0
8.01	12.71	10.28	4.94	-15.9
8.51	15.18	1.10	4.94	-20.8
8.56	15.44	-0.00	4.94	-21.3

Итак, согласно расчетам траектория определена таблицами 5.1 и 5.2, а также представлена на рис. 5.2. Точка отрыва характеризуется координатами: $x_B = 7.75$ м, $y_B = 21.29$ м. Полное время падения составляет 8.57 с, при этом отклонение от начала координат равно $x_C = 15.4$ м.

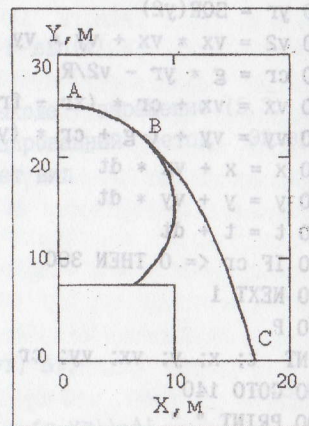


Рис. 5.2 Траектория падения тела с купола РЛС

Задание 5.1.1. Исследуйте зависимость времени падения и отклонения x от коэффициента трения и от начальной скорости. Решите вопрос об оптимальном расположении ограждения.

Задание 5.1.2. Тело соскальзывает с крыши с высоты 5 м над ее краем. Угол крыши с горизонтом равен 30° , край крыши находится на высоте 20 м над землей. На каком расстоянии от края крыши упадет тело? Коэффициент трения равен 0.1.

Пример 5.2. Соскальзывание цепочки. На гладком столе лежит тонкая стальная цепочка с мелкими звеньями, часть ее свешивается через край стола. Общая длина цепочки $l = 1$ м. Найдите максимальную длину свешивающейся части цепочки, при которой цепочка находится в покое, а также время соскальзывания, если это равновесие нарушено. Коэффициент сухого трения равен 0.1.

На цепочку действуют две силы: сила тяжести и сила трения. Сила тяжести свешивающейся части цепочки является причиной движения, а сила трения оставшейся части, лежащей на столе, уменьшает скорость скольжения. Уравнения движения цепочки можно написать в виде:

$$\begin{cases} dx/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = \rho \cdot S \cdot g \cdot x - \mu \cdot \rho \cdot g \cdot S \cdot (1-x), \end{cases} \quad (5.7)$$

где $m = \rho \cdot S \cdot l$, ρ — "усредненная" погонная плотность цепочки; S — "эффективное поперечное" сечение цепочки. Найдём максимальную x , при которой еще возможно равновесие

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \cdot S \cdot g \cdot x_{\max} - \mu \cdot \rho \cdot S \cdot g \cdot (1-x_{\max}) \\ x_{\max} &= \mu \cdot l / (\mu + 1). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Таким образом, для того чтобы цепочка пришла в движение, необходимо выполнение условия нарушения равенства сил

$$x(0) = x_{\max} + \delta, \quad (5.9)$$

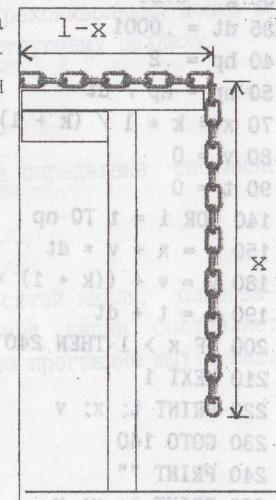


Рис. 5.3.

где δ - маленькая "затравка", нарушающая баланс сил.

Составим на базе классического конечно-разностного метода Эйлера (4.13) следующую вычислительную схему:

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t, \\ v(t + \Delta t) = v(t) + ((\mu + 1) \cdot g \cdot x(t) / l - g) \cdot \Delta t \end{cases} \quad (5.10)$$

с начальными условиями (5.9) и $v(0) = 0$. Программная реализация этой схемы аналогична рассмотренной выше mu11a.bas и имеет вид

```
10 REM Скольжение цепочки / модель 1 уровень 0 / mu52.bas
15 k = .1
20 l = 1
25 d = .01
30 g = 9.81
35 dt = .0001
40 hp = .2
50 np = hp / dt
70 x = k * l / (k + 1) + d
80 v = 0
90 t = 0
140 FOR i = 1 TO np
150 x = x + v * dt
180 v = v + ((k + 1) * x / l - k) * g * dt
190 t = t + dt
200 IF x > l THEN 240
210 NEXT i
220 PRINT t; x; v
230 GOTO 140
240 PRINT ""
250 PRINT t; x; v
260 END
```

Для условий примера максимальная длина свешивающейся части цепочки составляет 0.101 м, и время соскальзывания равно 1.58 с.

Задание 5.2.1. Тонкая стальная цепочка с очень мелкими звеньями, имеющая длину 1.0 м и массу 250.0 г, лежит на горизонтальном

столе (см. рис. 5.3). Цепочка вытянута в прямую линию, перпендикулярную к краю стола. Когда длина свешивающейся части составляет 0.275 всей длины цепочки, она начинает соскальзывать со стола вниз. Считая цепочку однородной по длине, найти: 1) коэффициент трения между цепочкой и столом; 2) работу силы трения цепочки о стол за время соскальзывания; 3) скорость цепочки в конце соскальзывания.

6. УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

Данный раздел носит справочный характер и не предназначен для линейного чтения (от страницы к странице). В этом разделе приведены решения и ответы почти всех заданий, также к части решений сформулированы задания, имеющие четырехсимвольный номер, для самостоятельной проработки и обдумывания изучаемого вопроса. Трехсимвольный номер в начале абзаца означает номер задания к соответствующему разделу.

1. Падение тела

1.1.1. Математическая модель движения тела определена системой уравнений (1.3) с начальными условиями:

первая капля $t=0$ с $y(0)=0$ м $v(0)=0$ м/с,

вторая капля $t=0.25$ с $y(0)=0$ м $v(0)=0$ м/с.

Время движения определяется временем отрыва десятой капли, следовательно, время движения с момента отрыва первой капли составляет $t_{\max} = (10-1) \cdot 0.25 = 2.25$ с. Проведем расчет по программе mu11a.bas. Для этого отредактируем программные строки

30 dt = 0.005

40 hp = 0.25

60 h0 = 100

150 if t > 2.25 then 190

Запишем программы под именем mu111.bas. Шаг dt и интервал децимации hp выбраны так, чтобы выводить на экран моменты времени отрыва очередных капель с крыши. Результат прогона программы для первой капли

t, c	y, м	v, м/с
2.25	24.78	22.07

Для расчета движения второй капли необходимо отредактировать программную строку 90

$$90 \quad t = 0.25$$

Результат прогона программы для второй капли

t, c	y, м	v, м/с
2.25	19.57	19.62

Следовательно, расстояние между первой и второй каплями составляет $\Delta y = 24.78 - 19.57 = 5.21$ м, а скорость первой капли относительно второй составляет $\Delta v = 22.07 - 19.62 = 2.45$ м/с. Итого: $\Delta y = 5.21$ м, $\Delta v = 2.45$ м/с.

Задание 1.1.1.1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. Используйте программу mu11a.bas для вычисления времени между двумя моментами прохождения телом отметки половины максимальной высоты. Сопротивление воздуха не учитывать. Проверьте решение аналитически.

Задание 1.1.1.2. Из одной и той же точки вертикально вверх с интервалом в 1 секунду выброшены два шарика со скоростью 15 м/с и 20 м/с соответственно. С помощью программы mu11a.bas рассчитайте, через какое время после вылета второго шарика они столкнутся?

Задание 1.1.1.3. С балкона бросили мячик вертикально вверх с начальной скоростью 10 м/с. Через 4 с мячик упал на землю. Определить высоту балкона над землей и скорость мячика в момент удара о землю, а также среднюю скорость мячика с момента бросания до момента падения на поверхность Земли.

1.2.1. С помощью программы mu12.bas проведем расчет падения тела. Для нижней границы скорости установившегося падения были получены следующие значения:

66

фрагмент расчетной таблицы (mu12.bas)

Параметры: $a = 3.73$, $b = 0$, $c = 0.004$.

t, c	h, м	y, м	v, м/с
135	3419	6580	50
140	3169	6830	50

Чтобы найти более точный результат, чем приведенный выше временной интервал 135...140 секунд, воспользуемся процедурой интерполяции табличных значений (см. Приложение). В силу "грубости" исходной модели падения тела достаточно использовать процедуру линейной интерполяции по программе mu71.bas. Итак, продолжительность падения тела составляет $t_2^* = 137$ с, это значение определяет верхнюю границу временного интервала падения. Для определения времени падения с установившейся скоростью 60 м/с воспользуемся результатами примера 1.2, приведенными в таблице 1.3. Проводя линейную интерполяцию следующего фрагмента таблицы 1.3,

Фрагмент расчетной таблицы (mu12.bas)

Параметры: $a = 4.233$, $b = 0$, $c = 0.002$.

t, c	h, м	y, м	v, м/с
115	3351	6648	60.0
120	3051	6948	60.0

получаем следующий результат $t_1^* = 117$ с, определяющий нижнюю границу временного интервала падения тела. Итак, продолжительность падения тела составляет от 117 до 137 секунд.

1.2.2. Согласно условию задачи средняя скорость падения тела составляет 20 м/с. Из таблицы 1.3 видно, что скорость тела на третьей секунде составляет более 26 м/с и тело пролетело 42 м, следовательно, достаточно рассчитать движение тела в течение первых трех секунд. Для простоты программной реализации зафиксируем промежуток времени h_p , равный времени падения тела в пределах окна, и будем определять расстояние, которое тело пролетает за h_p . Для этого отредактируем и дополним программу mu12.bas

$$40 \quad hp = 0.1$$

$$60 \quad h0 = 100$$

$$65 \quad uy = uy$$


```

175 if abs(y-yy)-2 < 0.04 then 195
176 yy = y
195 print t,y,v

```

Расчет по программе приводит к результату, представленному в таблице 6.1.

Таблица 6.1. Падение тела

t, c	y, м	$\Delta y = y_1 - y_{1-1} , \text{м}$	v, м/с
0	0	0	0
0.1	0.048	0.048	0.98
0.2	0.194	0.146	1.95
0.3	0.437	0.243	2.91
0.4	0.777	0.339	3.88
0.5	1.212	0.435	4.83
0.6	1.742	0.530	5.78
0.7	2.366	0.625	6.72
0.8	3.085	0.719	7.66
0.9	3.897	0.812	8.58
1.0	4.802	0.905	9.51
1.1	5.799	0.997	10.43
1.2	6.887	1.088	11.34
1.3	8.066	1.179	12.25
1.4	9.335	1.269	13.15
1.5	10.694	1.359	14.04
1.6	12.142	1.448	14.92
1.7	13.678	1.536	15.80
1.8	15.301	1.623	16.67
1.9	17.011	1.710	17.53
2.0	18.806	1.796	18.39
2.1	20.688	1.881	19.23
2.2	22.653	1.966	20.08
2.3	24.702	2.049	20.91

Из таблицы видно, что для момента времени $t = 2.2$ с тело пролетает расстояние 2 м за 0.1 секунды с погрешностью 0.034 м, а для момента

времени 2.3 секунды тело пролетает 2 м с погрешностью 0.049 м. Таким образом, определен интервал высот, соответствующий восьмому $([22.65/4] + 3 = 8)$ и девятому $([24.70/4] + 3 = 9)$ этажам здания. Итак, человек выпал из 8 или 9 этажа. В заключение отметим, что этот расчет имеет чисто иллюстративный оценочный характер, так как форма ускоренного участка траектории падения зависит от коэффициентов a , b и c в выражении (1.19), а математическое моделирование падения тела опиралось лишь на значение скорости равномерного движения, следовательно, полученное нами решение не единственное, и любой другой набор параметров a , b и c , приводящий к тому же значению скорости 60 м/с на равномерном участке падения, имеет такой же статус решения, что и найденный ранее. Для оценочных расчетов, по нашему мнению, можно использовать любой набор параметров a , b и c . Сохраните разработанную программу под именем mu121.bas.

Задание 1.2.2.1. Рассмотрите вопрос устойчивости полученного решения по отношению к набору параметров a , b и c . Для этого подберите другой набор параметров a , b и c (см. пример 1.2) и выполните расчет по программе mu121.bas, аналогичный проведенным выше. Заметим, что, несмотря на затраченные усилия, строго обосновать правильность решения нельзя, однако с увеличением числа рассмотренных вариантов можно "укрепить веру" в полученный результат.

1.2.3. На шарик, падающий в вязкой жидкости, действует сила тяжести mg , выталкивающая (подъемная) сила F_a , сила сопротивления R (1.15). Математическая модель движения шарика имеет вид

$$\begin{cases} dr/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = m \cdot g + F_a + R, \end{cases} \quad (6.3)$$

причем направление действия выталкивающей силы совпадает с направлением силы сопротивления среды R (см. рис.1.4), тогда, проектируя силы на ось Y , получаем следующую систему уравнений движения

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = m \cdot g - \rho_2 \cdot V \cdot g - 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v, \end{cases} \quad (6.4)$$

где $m = \rho_1 \cdot V$. Перегруппируем и упростим систему уравнений (6.4)

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ dv/dt = (1 - \rho_2/\rho_1) \cdot g - 4.5 \cdot \eta \cdot v / (\rho_1 \cdot r^2) \end{cases} \quad (6.5)$$

с начальными условиями $t=0$ с, $y(0)=0.5$ м, $v(0)=0$ м/с. Таким образом, для расчета падения шарика в вязкой жидкости необходимо дополнить и отредактировать программу mu12.bas. Введем имена переменных для параметров модели:

Плотность тела ρ_1 кг/м³ R1
Плотность среды ρ_2 кг/м³ R2
Радиус шарика r м R
Коэффициент динамической вязкости η Па·с nu
Число π π - pi
Число Рейнольдса Re Rd

Фрагмент программных вставок имеет вид

```
25 pi = 3.1415926
60 h0 = 0.5
95 R1 = 7800
100 R2 = 1260
105 R = 0.001
110 nu = 1.48
115 r = 0.001
140 v = v + ((1 - R2/R1) * g + 4.5 * nu * v/R1/R^2) * dt
145 Rd = R2 * v * R/nu
190 print t, y, v, Rd
```

Сохраните разработанную программу под именем mu122.bas. Данная математическая модель допускает аналитическое решение

$$h^*(t) = h_0 - (\gamma/\beta^2) \cdot (1 - \exp(-\beta \cdot t)) - (\gamma/\beta) \cdot t, \quad (6.6)$$

где $\gamma = (1 - \rho_2/\rho_1) \cdot g$, $\beta = 4.5 \cdot \eta / (\rho_1 \cdot r^2)$.

Проведем расчет по программе и полученные результаты представим в виде таблицы 6.2.

Таблица 6.2. Падение шарика радиуса 1.0 мм в вязкой жидкости

t, с	h, м	h*, м	v, м/с	Re
0	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000
5	0.4519	0.4519	0.0096	0.0082
10	0.4037	0.4037	0.0096	0.0082
15	0.3555	0.3555	0.0096	0.0082
20	0.3074	0.3074	0.0096	0.0082
25	0.2592	0.2592	0.0096	0.0082
30	0.2110	0.2110	0.0096	0.0082
35	0.1629	0.1629	0.0096	0.0082
40	0.1147	0.1147	0.0096	0.0082
45	0.0665	0.0665	0.0096	0.0082
50	0.0186	0.0186	0.0096	0.0082
51.905	0.0000	0.0000	0.0096	0.0082

На рис. 6.1 представлена зависимость $y(t)$ (сплошная линия), квадратами отмечено аналитическое решение задачи (6.6). Максимальное зна-

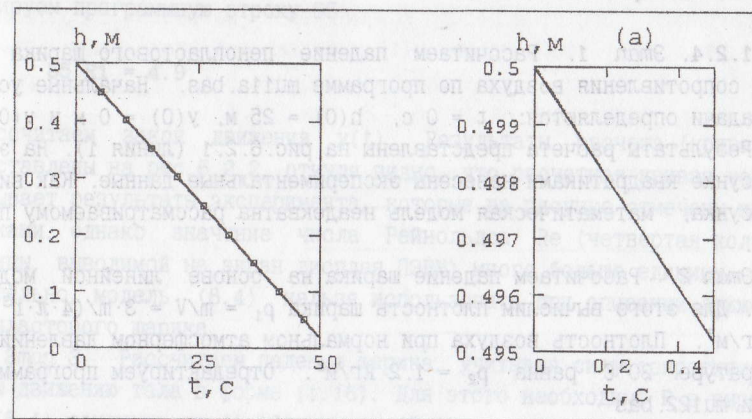


Рис. 6.1. К заданию 1.2.2

чение числа Рейнольдса составляет 0.0082, а переход от ламинарного обтекания шарика (область применимости гидродинамической формулы (1.15)) к турбулентному происходит при числе Рейнольдса равного 0.25. Следовательно, использование (1.15) в данной математической модели обосновано. Начальный режим падения шарика показан на вставке (рис. 6.1.а). Как видно из рисунка, участок траектории выхода на установившийся режим, при котором сила сопротивления движению шарика равна силе тяжести, очень мал (переход происходит на 0.0056 секунде, при этом шарик "пролетает" 0.0007 м, убедитесь в этом самостоятельно).

Определим критический размер шарика, для которого еще возможно использование данной модели. Изменяем радиус шарика (программная строка 95) и получаем следующую таблицу значений.

Таблица 6.3. Зависимость числа Рейнольдса Re от радиуса шарика

Радиус, мм	Число Рейнольдса	Радиус, мм	Число Рейнольдса
1.00	0.0082	2.50	0.1281
1.25	0.0160	2.75	0.1706
1.50	0.0277	3.00	0.2214
1.75	0.0440	3.25	0.2853
2.00	0.0656	3.50	0.3517
2.25	0.0934	3.75	0.4325

Итак, для шарика, радиус которого больше 3.0 мм, необходимо изменить математическую модель и в качестве выражения для силы сопротивления среды взять выражение (1.16).

1.2.4. Этап 1. Рассчитаем падение пенопластового шарика без учета сопротивления воздуха по программе mu11a.bas. Начальные условия задачи определяются: $t = 0$ с, $h(0) = 25$ м, $y(0) = 0$ м и $v(0) = 0$ м/с. Результаты расчета представлены на рис. 6.2.1 (линия 1). На этом же рисунке квадратиками нанесены экспериментальные данные. Как видно из рисунка, математическая модель неадекватна рассматриваемому процессу.

Этап 2. Рассчитаем падение шарика на основе линейной модели (6.5). Для этого вычислим плотность шарика $\rho_1 = m/V = 3 \cdot m / (4 \cdot \pi \cdot r^3) = 3.7$ кг/м³. Плотность воздуха при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°C равна $\rho_2 = 1.2$ кг/м³. Отредактируем программные строки mu122.bas

60 y = 10

85 R1 = 3.7

90 R2 = 1.2

95 R = 0.0254

100 nu = 1.82e-5

и запишем полученную программу под именем mu123a.bas. Проведем расчет и результаты представим на рис. 6.2.1 (линия 2). Как видно из рисунка, расчетная кривая находится ниже экспериментальных точек, что свидетельствует о значительном трении поверхности шарика о воздух. В качестве проверки рассчитаем по программе mu123a.bas движение шарика при отсутствии трения $\eta = 0$. Результаты расчета представлены кружочками на рис. 6.2.1, которые практически лежат на кривой 2. Следовательно, модель (6.4) с используемыми параметрами не описывает процесс падения пенопластового шарика. В качестве исходной гипотезы предположим, что приведенное в [16, с. 60] значение массы шарика $m = 0.254$ грамма определялось путем взвешивания и, следовательно, архимедова поправка учтена в массе шарика, а это значит, что истинная масса шарика будет равна $m = (\rho_1 + \rho_2) \cdot V$. Обозначим истинную плотность пенопластового шарика как ρ_1 , тогда $\rho_1 = 3.7 + 1.2 = 4.9$ кг/м³. Такое переобозначение необходимо сделать, чтобы согласовать параметры модели с именами переменных в программе mu123a.bas. Отредактируем программную строку 85

85 R1 = 4.9

и рассчитаем закон движения $y(t)$. Результаты расчета (кривая 1) представлены на рис. 6.2.2, откуда видно, что расчетная кривая хорошо описывает результаты эксперимента, которые на рисунке отмечены квадратиками, однако значение числа Рейнольдса Re (четвертая колонка таблицы, выводимой на экран дисплея ПЗВМ) много больше единицы, следовательно, модель (6.4) нельзя использовать при описании движения пенопластового шарика.

Этап 3. Рассчитаем падение шарика, учитывая силу сопротивления среды движению тела в форме (1.16). Для этого необходимо R в выражении (6.4) заменить на (1.16), тогда (6.4) принимает вид:

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = m \cdot g - \rho_2 \cdot V \cdot g - 0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_2 \cdot v^2, \end{cases} \quad (6.7)$$

где $m = \rho \cdot V$. Перегруппируем и упростим систему уравнений (6.7)

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ dv/dt = (1 - \rho_2/\rho_1) \cdot g - 0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_2 \cdot v^2 / m. \end{cases} \quad (6.8)$$

Введем новые имена переменных

Коэффициент аэродинамического сопротивления C C
Площадь поперечного сечения S m^2 C
Постоянная $0.5 \cdot C \cdot S \cdot \rho_2 / m$ cm

Фрагмент программных вставок в программу mu123a.bas имеет вид

```
55 input C
102 m=0.000254
104 cm=C*0.5*R2*S*/m
140 v=v+((R2/R1-1)*g+cm*v*v)*dt
```

Полученную программу сохраним под именем mu123.bas. Проведем расчет по программе, при этом подбор коэффициента лобового сопротивления проводится так, чтобы график $y(t)$ проходил как можно ближе к экспериментальным точкам, нанесенным на рисунке 6.5. Результат расчета представлен кружочками на рис. 6.2.2 при $C=0.5$.

Таблица 6.4. Скорость пенопластового шарика

t, c	v, м/с
0.5	3.701
1.0	7.411
1.5	11.138

1.4.1. Для расчета отклонения от линии отвеса изменим условия опыта, т.е. отредактируем значение широты ϕ (строка 40) и высоты h

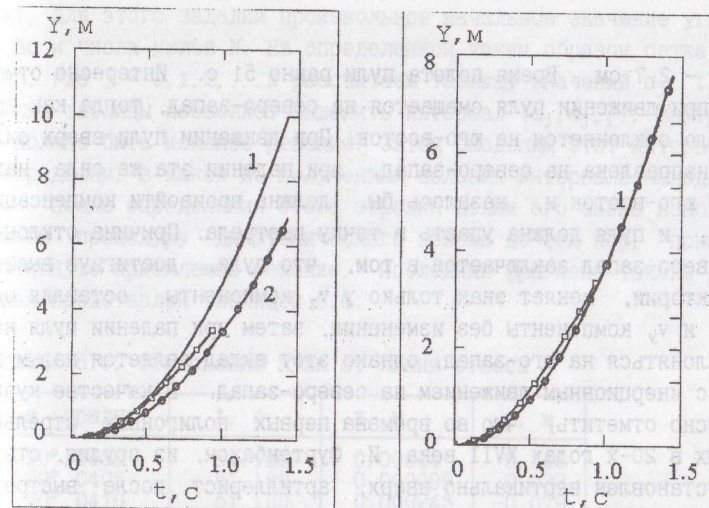


Рис. 6.2.1. К заданию 1.2.3

Рис. 6.2.2. К заданию 1.2.3

(строка 30) в программе mu14.bas. Результаты численного моделирования сведены в таблицу 6.5.

Таблица 6.5. Отклонение свободно падающего тела от линии отвеса

опыт	ϕ , градус	высота, м	Δx , мм	Δy , мм	эксперимент
И. Ф. Бенценберг	55°, 46	76	-0.00099	-8.66	-9.0
Ф. Райх	48°	158	-0.0045	-29.1	-28.3

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что математическая модель (1.17) адекватно описывает опыты Бенценберга и Райха.

1.4.2. В программе отредактируем следующие программные строки

```
30 h = 0
40 phi=55*pi/180
160 vz=250
```

и проведем расчет. Полученное отклонение на запад составляет 9.05 м

и на север - 2.7 см. - Время полета пули равно 51 с. Интересно отметить, что при движении пуля смещается на северо-запад, тогда как при падении тело отклоняется на юго-восток. При движении пули вверх сила Кориолиса направлена на северо-запад, при падении эта же сила направлена на юго-восток и, казалось бы, должна произойти компенсация отклонений, и пуля должна упасть в точку выстрела. Причина отклонения на северо-запад заключается в том, что пуля, достигнув высшей точки траектории, меняет знак только у v_z компоненты, оставляя остальные v_x и v_y компоненты без изменения, затем при падении пуля начинает отклоняться на юго-запад, однако этот вклад является малым по сравнению с инерционным движением на северо-запад. В качестве курьёза интересно отметить, что во времена первых полигонных стрельб, проведенных в 20-х годах XVII века И. Фуртенбахом, из орудия, ствол которого установлен вертикально вверх, артиллерист после выстрела садился на пушку, интуитивно считая это место самым безопасным.

1.4.3. Для решения задачи необходимо определить начальные условия. Пусть угол α определяет наклон ствола к горизонту, тогда начальная скорость будет равна (программа mu142)

$$140 \quad v_x = v \cdot \cos(\alpha)$$

$$150 \quad v_y = 0$$

$$160 \quad v_z = v \cdot \sin(\alpha)$$

Скорость пули определим в строке 25

$$25 \quad v = 25$$

Отредактируем и дополним программу

```
105 INPUT "Введите угол наклона в градусах ";a1
```

```
106 a = a1*pi/180
```

```
310 goto 105
```

```
320 end
```

Программу сохраним под именем mu143.bas. Проведем расчет по программе, основываясь на стратегии дихотомического поиска (деление попо-

лам). Для этого зададим произвольное начальное значение угла α_0 , шага $\Delta\alpha$ и числа узлов N . На определенной таким образом сетке $\alpha_j = \alpha_0 + j \cdot \Delta\alpha$, где $j = 0, 1, 2, \dots, N$ рассчитаем таблицу значений α_j , t_j , x_j , y_j . Анализ таблицы позволяет выделить интервал (α_j, α_{j+1}) , внутри которого должно быть искомое решение. Затем разделим этот интервал пополам и определим, в какой из полученных половин интервала находится решение. После определения этого отрезка делим его снова пополам и повторяем процедуру дихотомического поиска до тех пор, пока не будет достигнуто приемлемое решение. Последний фрагмент такого поиска решения представлен таблицей 6.6.

Таблица 6.6. Отклонение пули от линии отвеса

α , градус	t , с	x , м	y , м
90°,0400	51.180	0.00044	0.146
90°,0405	51.180	0.000099	0.033
90°,0410	51.180	0.000243	-0.079

Из анализа таблицы следует, что пуля упадет обратно в точку выстрела при $\alpha = 90^\circ.04064 = 1.5715056$. Теоретическое значение этого угла равно $\alpha^* = \pi/2 - (2/3) \cdot v \cdot \omega \cdot \cos(\varphi)/g = 1.570086$. Следовательно, относительная ошибка нашего расчета составляет 0.1%, что, несомненно, может считаться приемлемым результатом.

2. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

2.1.1. Разобьем весь процесс движения шарика на два этапа - АВ и ВС. На первом этапе рассчитаем свободное падение шарика с помощью программы mu11a.bas с начальными условиями $t_A = 0.0$ с, $h_A = 2.0$ м, $v_A = 0.0$ м/с. В момент падения на плоскость шарик имел следующие кинематические характеристики: $t_B = 0.6390$ с, $y_B(t_B) = 2.000$ м, $v_B(t_B) = 6.2686$ м/с. Так как выполняется закон отражения для упругого удара, то скорость по модулю не меняется, а угол α между направлением скорости после отражения и горизонтом составляет 50° . Таким образом, начальные условия для расчета баллистической траектории по программе mu21.bas равны $t_B = 0.6390$ с, $y_B(t_B) = 10$ м, $v_B(t_B) = 6.2686$ м/с, угол $\alpha = 50^\circ$. Уравнение наклонной плоскости имеет вид

$$y - y_B = k \cdot (x - x_B), \quad (6.9)$$

где $k = -\tan(\beta)$, β - угол наклона плоскости к горизонту, $\beta = 20^\circ$,

$k = -0.36397$, $x_B = 0$ м, $y_B = 10$ м. Наиболее простой путь решения – это расчет баллистической кривой и построение её графика, затем с помощью транспортира и линейки необходимо провести на том же рисунке линию, проходящую через точку падения В, под углом β к оси абсцисс, точка пересечения С этой линии с графиком траектории определяет точку падения. Измеряем линейкой расстояние ВС, пересчитываем это значение в метрах и получаем искомый ответ. Более сложный путь решения состоит в программной модернизации mu21.bas, которая заключается в учете уравнения (6.9) и изменении условия выхода из циклических вычислений, суть которого – в проверке равенства совпадения у-координат баллистической кривой и линии наклонной плоскости. Для нахождения ответа выберем второй путь. Добавим и отредактируем программу mu21.bas.

```
52 b = 20 * pi/180
54 k = -tan(b)
56 e = 0.001
60 v = 6.2686
80 y0 = 10
85 y = y0
90 t = 0.6390
200 if x > e and abs(y - k * x - y0) < e then 240
240 print "Длина первого отрезка L="; sqrt(x^2 + (y0 - y)^2)
```

Запишем модернизированный вариант программы под именем mu211.bas. Расчет по программе приводит к следующему результату: общее время движения шарика составляет 1.9009 с, длина отрезка ВС – 5.378 м, результат, полученный графическим методом, менее точный и равен 5.5 м.

2.1.2. Для расчета траектории падения авиабомбы необходимо отредактировать следующие программные строки в программе mu21.bas:

```
30 dt = 0.01
60 v = 420/3.6
80 h = 7000
```

Расчет траектории бомбы необходимо провести с начальным значением угла α равным нулю. В результате прогона программы получены следующие

результаты: время падения 37.79 с, расстояние до цели в момент сбрасывания 4009 м и угол $\beta = 41^\circ 75'$.

2.1.3. По условию задачи фиксирована дальность полета 30 м и величина вертикального смещения (свободного падения вниз) равна 0.1 м, угол α фиксирован и равен нулю. Следовательно, необходимо изменить следующие программные строки mu21.bas:

```
30 dt = 0.0001
40 hp = 0.001
60 input "Начальная скорость v="; v
80 y = 0.1
100 a = 0
```

Запишем модернизированный вариант программы под именем mu213.bas. Проведение компьютерного моделирования при различных значениях начальной скорости добиваемся, чтобы дальность полета пули, при которой она опускается на 0.1 м вниз, была равна 30 м. Итоговый результат: при начальной скорости $v = 209$ м/с дальность составляет 30 метров. Вычислительная ошибка определения скорости пули в случае, когда не учитывается сопротивление воздуха, равна

$$\Delta v = |v - v^*| = |209 - L \cdot (g/2 \cdot y_0)^{1/2}| = |209 - 210| = 1 \text{ м/с.}$$

Следовательно, относительная ошибка составляет $(1/210) \cdot 100\% = 0.48\%$, что является приемлемым результатом.

2.3.1. В движении участвуют два тела. Движение зенитного снаряда описывается системой (2.7), а самолета – следующей системой кинематических уравнений:

$$\begin{cases} x_A(t) = x_0 - v_A \cdot t, \\ y_A(t) = y_A(0), \end{cases} \quad (6.10)$$

где знак "-" у скорости v_A самолета указывает на направление полета, начальные координаты бомбардировщика определяются из условия наблю-

дения его на луче, направленном под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонту, т.е.

$$y_A(0) = k \cdot x_A(0) \quad , \quad (6.11)$$

где $k = \operatorname{tg}(60^\circ)$. Таким образом, задавая начальную высоту $y_A(0)$ и вычисляя по (6.11) $x_A(0)$, получаем начальные условия $(x_A(0), y_A(0))$. Кроме этого, из-за неизбежных ошибок вычислений точного попадания в цель достичь очень трудно, практически невозможно, поэтому необходимо ввести новый параметр - радиус поражения R_d , и если расстояние между снарядом и самолетом R , равное

$$R = ((X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2)^{1/2} \quad (6.12)$$

меньше, чем R_d , то будет считаться, что цель поражена.

Чтобы рассчитать значение коэффициента аэродинамического сопротивления C_x , необходимо в программе mu23.bas отредактировать программные строки

$$40 \text{ cb} = 0.0762$$
$$80 \text{ m} = 6.5$$

```
90 input "Введите коэффициент сопротивления ";sx
```

$$140 \text{ v} = 730$$
$$180^\circ - a = 90^\circ$$

335 goto 80

Сохраните полученную программу под именем mi231a.bas. При поиске такого значения C_x , при котором наибольшая высота подъема снаряда составляет 8000 м, рекомендуется использовать стратегию дихотомического поиска. Значение коэффициента C_x , полученного в результате численного моделирования, равно 0.3106.

Чтобы рассчитать высоту, на которой был сбит Юнкерс-88, необходимо модифицировать программу mu23.bas следующим образом:

$$90 \text{ cx} = 0.3106$$

```
91 k = tan(60 * pi/180)
```

93 $v_0 = 400/3.6$

$$94 \text{ RD} = 0.5$$

```
95 input "Введите высоту самолета"; y0
```

$$96 \quad x_0 = y_0/k$$
$$172 \text{ ym} = y$$
$$174 \text{ rm} = r$$

```
222 xx = x0 - v0 * t
```

271 if $y_m < y$ then $y_m = y$

272 if $y_m < y$ then $x_m = x$

```
273 rr = SQR((x - x0) * (x - x0) + (y - y0) * (y - y0))
```

```
274 if rr < rd then rm = rr
```

```
276 if y < 0 then 330
```

```
277 if xx < 0 then 330
```

```
330 print t, x, y, y0, vx, vy, rm
```

335 goto 95

После отладки программы перенумеруйте её и запишите на диск под именем `mu231b.bas`. Для того чтобы найти решение, необходимо сначала провести сквозные расчеты крупным шагом по высоте y_0 , затем, выделив из рассчитанной таблицы $\{t, x, y, u, v_x, v_y, r_m\}$ наиболее "загадочные" интервалы по y_0 , искать корень в выделенных интервалах, руководствуясь стратегией дихотомического поиска. Итоговый результат:

t, c	x, m	y, m	y0, m	v _x , m/c	v _y , m/c	rr, m
13.844	1704.28	5615.87	5616.00	87.68	225.83	0.13

Итак, фашистский бомбардировщик был сбит на высоте 5616 метров через 13.84 секунд после выстрела.

Примечание 6.1. В тех случаях, когда разработана программа с достаточно сложным управлением обработки данных, важным вопросом является проверка правильности работы программы. Для тестирования программы используются задачи с известным решением, которое сверяется с решением, полученным путем численного моделирования. Для тестирования `mu231b.bas` рассмотрим задачу, в которой не учитывается сопротивление воздуха - $C_x = 0$, в этом случае системы (2.7) и (6.10) принимают вид

81

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} \cdot t, \\ y(t) = v_{0y} \cdot t - g \cdot t^2 / 2, \\ x_A(t) = x_0 - v_A \cdot t, \\ y_A(t) = y_A(0), \end{cases} \quad (6.13)$$

с начальными координатами снаряда $x(0) = 0$ м, $y(0) = 0$ м и самолета $y_A(0) = y_0$ м, $x_A(0) = x_0 = y_0/k$ м. Используя условия попадания снаряда в цель

$$\begin{cases} x(t) = x_A(t), \\ y(t) = y_A(t), \end{cases} \quad (6.14)$$

получаем решение

$$y_A^* = 2 \cdot K^2 \cdot (v_{0x} + v_A) \cdot (v_{0y}/K - v_{0x} - v_A) / g. \quad (6.15)$$

Численные значения аналитического решения системы (6.13) с данными задания 2.3.1 следующие: $t_A^* = 37.803$ с, $x_A^* = 7142$ м, $y_A^* = 19642$ м. "Прогоняя" тест по программе mu231b.bas, получаем таблицу решений для тех вариантов решения, у которых минимальное расстояние между снарядом и целью меньше радиуса поражения ($R_d = 0.5$ м).

Таблица 6.7. Варианты решений при $C_x = 0$

N	t, с	x, м	y, м	vx, м/с	vy, м/с	невязка
1	37.802	7142.23	19646.151	188.938	334.288	0.318
2	37.803	7142.42	19646.485	188.938	334.278	0.486
3	37.804	7142.61	19646.819	188.938	334.269	0.315
4	37.805	7142.79	19647.154	188.938	334.259	0.160
5	37.807	7143.17	19647.822	188.938	334.239	0.189
6	37.808	7143.36	19648.156	188.938	334.229	0.397
7	37.810	7143.74	19648.825	188.938	334.210	0.426

Для выбора оптимального варианта используем принцип минимума невяз-

ки, тогда оптимальный вариант определен строкой 4 таблицы 6.7. Сравнивая полученный результат с ранее полученным аналитическим, убеждаемся в приемлемой точности численного моделирования. Основным результатом тестирования является уверенность в правильности разработанной программы, следовательно, полученная выше численная оценка высоты полета бомбардировщика, с учетом сопротивления воздуха, соответствует действительности.

3. Движение тела переменной массы

3.1.1. Математическая модель движения дождевой капли в облаке имеет вид

$$\begin{cases} m \cdot dv/dt = m \cdot g - dm/dt \cdot v, \\ dy/dt = v, \\ dm/dt = \rho_3 \cdot v \cdot S, \\ S = k \cdot m^q, \end{cases} \quad (6.16)$$

а вычислительная конечно-разностная схема, построенная по типу (4.14), имеет вид

$$\begin{cases} v(t + \Delta t) = v(t) + (g - \rho_3 \cdot v^2 \cdot S(t)/m(t)) \cdot \Delta t, \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v(t) \cdot \Delta t, \\ S(t + \Delta t) = S(t) + k \cdot m(t)^q \cdot \Delta t, \\ m(t + \Delta t) = m(t) + \rho_3 \cdot v(t) \cdot S(t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (6.17)$$

Программная реализация этой схемы разрабатывается аналогично программе mu31.bas и имеет вид

```
10 REM Падение капли в облаке/модель 2 уровень 0/mu311.bas
20 pi = 3.1415926#
30 g = 9.8
```



```

40 dt = .001
50 hp = 1
60 np = hp / dt
70 r1 = 1000
80 r3 = .1
90 n1 = 1 / 3
100 n2 = 2 / 3
110 q = n2
120 k = pi * (3 / (4 * pi * r1)) ^ (2 / 3)
130 r0 = .001
140 m = 4 * r1 * pi * r0 ^ 3 / 3
150 S = k * m ^ q
160 y = 0
170 h0 = 100
180 v = 0
190 t = 0
200 FOR i = 1 TO np
210 vv = v
220 v = v + (g - v * v * S * r3 / m) * dt
230 y = y + v * dt
240 SS = S
250 S = S + k * m ^ q * dt
260 m = m + r3 * vv * SS * dt
270 h = h0 - y
280 t = t + dt
290 IF h < 0 THEN 340
300 NEXT i
310 rr = (3 * m / 4 / pi / r1) ^ n1
320 PRINT t; y; v; m; rr
330 GOTO 200
340 PRINT t; y; v; m; rr
350 END

```

В программных строках 240 и 270 сохраняются значения скорости v и площади поперечного сечения S в текущий момент времени t . В строке 340 рассчитывается радиус поперечного сечения rr в точках децимации (узлах временной сетки). Проводим расчет по программе, результаты отражены в таблице 6.8.

Таблица 6.8. Закон движения дождевой капли в облаке

t, с	y, м	v, м/с	m, кг	r, мм
0	0.000	0.0000	0.00000419	0.0000000
1	4.253	7.4444	0.00000644	0.0011540
2	13.124	9.9225	0.00001465	0.0015179
3	23.755	11.2964	0.00003232	0.0019760
4	35.626	12.4485	0.00006688	0.0025181
5	48.601	13.5181	0.00013091	0.0031499
6	62.623	14.5478	0.00024440	0.0038786
7	77.662	15.5562	0.00043801	0.0047112
8	93.702	16.5528	0.00075747	0.0056549
8.369	100.013	16.9270	0.00092362	0.0056549

Итак, дождевая капля с начальной нулевой скоростью проходит слой облака толщиной 100 метров за 8.369 секунд с конечной скоростью 16.93 м/с, при этом масса капли 0.92 грамма и радиус 5.65 мм.

Задание 3.1.1.1. При моделировании падения капли не учитывались силы сопротивления среды, которые при увеличении размеров капли возрастали, поэтому следующим этапом исследования падения дождевой капли в облаке является учет сопротивления среды. Пренебрегая линейным трением, обусловленным вязкостью воздуха, рассмотрим сопротивление среды в виде

$$R(v) = -C \cdot 0.5 \cdot \rho_2 \cdot v^2 \cdot S \cdot e_v, \quad (6.18)$$

где S – площадь поперечного сечения капли, ρ_2 – плотность воздуха, C – аэродинамический коэффициент сопротивления. Параметры среды принять равными $\rho_2 = 1.29 \text{ кг/м}^3$, $\rho_3 = 0.1 \text{ кг/м}^3$, $q = 2/3$, $C = 0.5$, $k = 0.012$. Необходимые данные взять из решения задания 3.1.1.

3.2.1. Расстояние от верхней горизонтальной подставки до нижней больше, чем длина цепи, следовательно, характер движения будет зависеть от рассматриваемого участка падения. На первом участке, когда y меньше L , падение цепи сопровождается увеличением массы, следовательно, математическая модель этого процесса может быть представлена (3.17). На втором участке происходит свободное падение цепи, здесь

можно воспользоваться математической моделью, представленной системой (1.9). Таким образом, в точке с координатой $y = L$ будут "сшиваться" два режима падения. Чтобы рассчитать падение цепи, необходимо отредактировать программу mu32.bas.

```
25 h = 10
110 if (y < L) and (y > 0) then v = v + (g - v * v/y) * dt
120 if (y > L) or (y = 0) then v = v + g * dt
110 if y > h then 190
```

Сохраните на диске модифицированную таким образом программу под именем mu321.bas. Результаты расчета приведены в таблице 6.9 и на рис. 6.3.

Таблица 6.9. Падение цепи длиной L на участке высотой h

t, с	y, м	vy, м/с	t, с	y, м	vy, м/с
0.000	0.000	0.000	1.3000	2.777	4.259
0.100	0.017	0.336	1.4000	3.219	4.586
0.200	0.067	0.663	1.5000	3.694	4.912
0.300	0.150	0.990	1.6000	4.202	5.239
0.400	0.266	1.317	1.7000	4.742	5.566
0.500	0.414	1.644	1.8000	5.315	5.893
0.600	0.595	1.971	1.9000	5.921	6.219
0.700	0.809	2.298	2.0000	6.560	6.546
0.800	1.055	2.625	2.1000	7.231	6.873
0.900	1.334	2.952	2.2000	7.935	7.200
1.000	1.646	3.279	2.3000	8.671	7.526
1.100	1.990	3.605	2.4000	9.440	7.853
1.200	2.367	3.932	2.4710	10.006	8.085

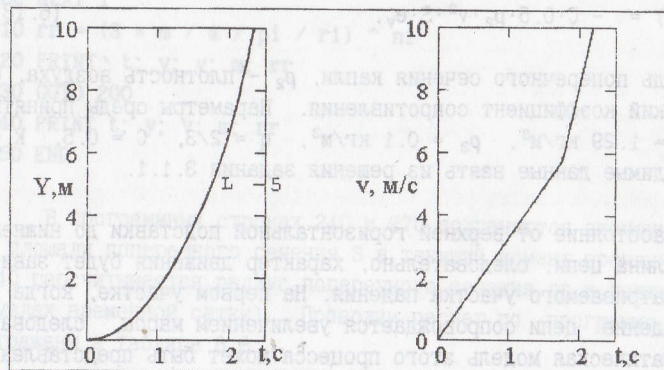


Рис. 6.3. К заданию 3.2.1

Задание 3.2.1.1. Задача Мещерского. Тяжелая однородная цепь висит, спускаясь по вертикали с верхней горизонтальной площадки на нижнюю горизонтальную площадку, расстояние между которыми h , причем h меньше длины цепи. В некоторый момент приспособление, удерживающее цепь в покое, устраняется, тогда цепь будет переходить с верхней площадки на нижнюю; требуется определить движение цепи. Длина цепи $L = 10$ м, а $h = 5$ м, длину свисающей части цепи в начальный момент времени принять равной 1 м.

Указание. Найдите закон движения $y = y(t)$ для обоих концов и середины цепи, трением пренебречь.

Задание 3.2.1.2. Якорная задача. Морской якорь массой 1000 кг, прикрепленный к концу А якорной цепи AC, длиной 50 м, помещен таким образом, что часть AB цепи длиной 1 м с якорем висит, а остальная часть цепи BC свернута у точки B. В некоторый момент времени приспособление, удерживающее цепь в покое, устраняется, тогда якорь будет падать, вытягивая при этом цепь. Требуется определить движение якоря и выяснить особенности задачи. Принять, что масса одного метра якорной цепи равна 25 кг, трением пренебречь.

3.2.2. При подъеме аэростата воздушного ограждения его масса увеличивается за счет массы вытягиваемого троса. Математическая модель подъема аэростата может быть построена на основе уравнения Мещерского (3.2):

$$m \cdot dv/dt = (dm/dt) \cdot u + F, \quad (6.19)$$

где u — относительная скорость присоединяющейся массы троса, равная $u = v' - v = -v$ (т.к. до присоединения к движущейся части троса его элементы покоятся), F — результирующая внешняя сила, действующая на аэростат

$$F = m \cdot g + \rho_2 \cdot V \cdot g \cdot j + R. \quad (6.20)$$

Здесь $\rho_2 = \rho \cdot \mu / (R \cdot T)$ — плотность среды, j — единичный вектор вдоль оси Y , R — сила аэродинамического сопротивления, которую выберем в форме (1.17). Для простоты будем считать, что оболочка аэростата жесткая, и изменением объема с высотой будем пренебрегать. Начальные

условия: $t = 0$, $y(0) = 0$, $v(0) = 0$, $m(0) = m_0 + \rho_1 \cdot V$, где ρ_1 - плотность газа заполнителя оболочки аэростата. Проектируем векторные величины на ось Y и получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} dy/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = -m \cdot g + \rho_2 \cdot V \cdot g - c \cdot 0.5 \cdot \rho_2 \cdot v^2 \cdot S - \lambda \cdot v^2, \\ m(t) = m_0 + \rho_1 \cdot V + \lambda \cdot y. \end{cases} \quad (6.21)$$

Третье уравнение системы определяет закон изменения массы $m = m(t)$. Введем имена (идентификаторы) переменных для параметров модели:

Параметры	Обозначение	Ед. измер.	Идентификаторы
Объем аэростата	V	м ³	VV
Плотность газа-заполнителя	ρ_1	кг/м ³	R1
Плотность воздуха	ρ_2	кг/м ³	R2
Линейная плотность троса	λ	кг/м	W
Масса оболочки	m_0	кг	m
Давление атмосферного воздуха	p	Па	p
Площадь поперечного сечения	S	м ²	S
Коэффициент аэродинамического сопротивления	c	-	C
Начальная высота	h_0	м	HO

Программная реализация представленной модели разработана на базе программы mu32.bas и имеет вид

```
10 REM Подъем аэростата воздушного ограждения / mu322.bas
20 g = 9.81
30 p1 = 3.1415926
40 VV = 1400
50 S = VV/24
60 P = 101300
70 R1 = P * 0.029/8.31/273
80 R2 = 0.0899
90 W = 0.37
100 m = 644
110 f = R2 * VV * g
```

```
120 c = 0.5
130 c1 = c * 0.5 * R2 * S
140 mm = m + R1 * VV
150 dt = 0.001
160 hp = 4
170 np = hp/dt
180 h0 = 1000
190 y = 0
200 v = 0
210 t = 0
220 for i = 1 to np
230 v = v + (f/m - g - (c1 + W)/m * v * v) * dt
240 y = y + v * dt
250 m = mm + W * y
260 t = t + dt
270 if y > h0 then 310
280 next i
290 print t,y,v,m
300 goto 220
310 print t,y,v,m
320 end
```

Сохраните на диске программу под именем mu322.bas. Расчет по программе при различных значениях высот подъема аэростата приводит к результатам, приведенным в таблице 6.10.

Таблица 6.10. Время подъема аэростата и его конечная масса. Аэродинамический коэффициент сопротивления равен 0.5

Высота подъема, h_0 , м	Длительность подъема, t, с	Конечная скорость аэростата, v, м/с	Конечная масса аэростата, кг
1000	44.06	18.66	1140
1500	77.93	15.97	1325
2000	112.79	12.72	1510
2500	160.44	8.27	1695

Как видно из таблицы 6.10, продолжительность вывода аэростата на боевое дежурство составляет порядка одной-трех минут. Эта оценка явля-

ется нижней границей продолжительности подъема, реально же необходимо учитывать динамические свойства разматывающего устройства, судя по известному отечественному фильму "Крепкий орешек" (реж. Т. Ю. Вульфвич, Мосфильм, 1968 г.), где был показан драматический эпизод подъема аэростата воздушного заграждения, это устройство представляет собой лебедку с вращающимся массивным барабаном.

Задание 3.2.2.1. Дополнить математическую модель подъема аэростата динамическим уравнением вращательного движения барабана переменной массы (трос сматывается с барабана). Принять массу привязного троса $m_t = 1000$ кг, массу барабана $m_b = 200$ кг, радиус барабана $R_b = 0.25$ м.

Задание 3.2.2.2. В задании 3.2.2 пренебрегается изменением плотности (давления) воздуха с высотой. Фактически, по мере увеличения высоты аэростата, возникают два обратных эффекта: *первый* - плотность (давление) воздуха падает, соответственно уменьшается подъемная сила аэростата; *второй эффект* - при понижении давления воздуха при постоянном давлении газа наполнителя увеличиваются размеры аэростата, следовательно, возрастает его подъемная сила. Согласно опубликованным в широкой печати фотографиям времен Великой Отечественной войны аэростат ПВО уже на земле туго накачан, следовательно, его возможности увеличения размеров с увеличением высоты подъема ограничены, и этим вторым эффектом можно пренебречь. В этом задании требуется рассчитать максимальную высоту подъема аэростата ПВО с учетом уменьшения подъемной силы. В качестве математической модели плотности атмосферы принять международную формулу для стандартной атмосферы, справедливой для высот до 11 км (тропосфера)

$$\rho(y) = 1.2255 \cdot (1 - 0.0065 \cdot y/288)^{4.255}$$

Необходимые данные взять из задания 3.2.2.

3.3.1. Космический корабль находится в глубоком космосе, следовательно, внешние гравитационные силы, действующие на корабль пренебрежимо малы, тогда уравнение Мещерского (3.2), описывающее полет корабля, имеет вид

$$m \cdot dv/dt = (dm/dt) \cdot u, \quad (6.22)$$

где изменение массы определяется экспоненциальным законом (3.25)

$$m(t) = m_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t) + m_s. \quad (6.23)$$

Проектируем векторные величины на направление движения корабля и с учетом (6.23) получаем следующую математическую модель

$$\begin{cases} dx/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = m_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t) \cdot u, \\ m(t) = m_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t) + m_s, \end{cases} \quad (6.24)$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $m(0) = m_0 + m_s$, $v(0) = v_0 = 10^6$ м/с. Для проведения расчетов необходимо перейти к более удобным единицам измерения физических величин, например:

$$1 \text{ м} = 10^{-6} \text{ R}$$

$$1 \text{ с} = 1 \text{ с}$$

$$1 \text{ м/с} = 10^{-6} \text{ R/с}$$

$$1 \text{ м/с}^2 = 10^{-6} \text{ R/с}^2$$

$$1 \text{ кг} = 10^{-6} \text{ M}$$

Программная реализация математической модели (6.24) разработана на базе mu33.bas и имеет вид

10 REM Разгонный участок /mu331.bas

20 m0 = 100000

30 ms = 100

40 b = 0.000001

50 u = 10

60 dt = 0.1

70 hp = 1000

80 np = hp/dt

90 m = m0 + ms

100 x = 0

110 v = 1

120 vm = 2.5

130 t = 0

140 c = m0 * b * u


```

150 for i = 1 to np
160 e = exp(- b * t)
170 v = v + (c * e/m)*dt
180 x = x + v * dt
190 m = m0 * e + ms
200 if v >= vm then 250
210 t = t + dt
220 next i
230 print t, x, v, m
240 goto 150
250 print t, x, v, m
260 end

```

Сохраните на диске эту программу под именем mu331.bas. Результаты расчета по программе приведены в таблице 6.11 (с первой по четвертую колонки).

Таблица 6.11. Закон движения космического корабля

t, c	x, 10 ³ км	m, 10 ⁶ кг	v, 10 ³ км/с	v*, 10 ³ км/с
0.00	0.00	100100.00	1.0000	1.0000
1000.00	1049.95	99105.08	1.0999	1.0899
2000.00	2199.81	98119.97	1.1998	1.1898
3000.00	3449.56	97144.65	1.2997	1.2897
4000.00	4799.21	96179.04	1.3996	1.3896
5000.00	6248.75	95223.04	1.4995	1.4895
6000.00	7798.19	94276.55	1.5994	1.5894
7000.00	9447.53	93339.48	1.6993	1.6893
8000.00	11196.75	92411.73	1.7992	1.7892
9000.00	13045.87	91493.21	1.8991	1.8891
10000.00	14994.88	90583.83	1.9989	1.9889
11000.00	17043.78	89683.50	2.0988	2.0888
12000.00	19192.56	88792.13	2.1987	2.1887
13000.00	21441.24	87909.63	2.2986	2.2886
14000.00	23789.80	87035.91	2.3985	2.3885
15000.00	26238.24	86170.88	2.4984	2.4884
15016.10	26278.73	86156.94	2.5000	2.4900

Модель (6.24) допускает точное решение для скорости (пятая колонка таблицы)

$$v^*(t) = v(0) + u \cdot (\beta \cdot t - \ln(m_s/m_0 \cdot \exp(\beta \cdot t) + 1)). \quad (6.25)$$

Сравнивая четвертую и пятую колонки таблицы, видим хорошее совпадение теоретического расчета с численным моделированием. При $\beta \cdot t \gg 1$ из (6.25) получим выражение

$$v_{\max}^*(t) = v(0) + u \cdot \ln(m_0/m_s). \quad (6.26)$$

Поскольку из формулы "выпал" параметр, определяющий конкретный механизм изменения массы топлива, то (6.26) носит универсальный характер. Отметим, что (6.26) совпадает со знаменитым результатом К.Э. Циолковского, полученного им в 1903 году (формула Циолковского).

Максимальную скорость, которую может развить наш космический корабль, можно определить из (6.26), т.е. $v_{\max} = 7.0 \cdot 10^4$ км/с. Перелет космического корабля с такой скоростью до ближайшей к Солнечной системе звезды Проксима Центавра занял бы около 20 лет.

4. Движение спутника

4.1.1. Прежде чем выполнить расчет траектории спутника в широком диапазоне параметров, попытаемся оценить значения искомых параметров. Такие оценки рекомендуется всегда проделывать, предваряя сложный расчет. Начальные условия, в нашем случае скорость и высота перигея, находятся из следующих формул [17, с.62]

$$v^2 = K \cdot (2/r - 1/a), \quad (6.27)$$

$$T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot a^3 / K, \quad (6.28)$$

где $a = (r_a + r_p)/2$ - большая полуось орбиты, гравитационный параметр для Земли $K = 3.986 \cdot 10^5$ км³/с², T - период обращения спутника, r_a - афелий, r_p - перигей орбиты. Из (6.28) следует $a = 7419$ км.

В результате численного моделирования по программе mu41a.bas был найден целый набор начальных условий (вторая и третья колонка в таблице 6.12), соответствующих наибольшему удалению от поверхности Земли на 1868.17 км и периоду обращения 106.12 минуты с относитель-

ной ошибкой расчета не более 0.75%.

Таблица 6.12. Набор начальных условий для третьего ИСЗ

N	h _p , км	v, км/с	T _p , мин	h _A , км	ошибка
1	225	8.2000	106.83	1938.86	3.914%
2	226	8.1800	105.90	1851.97	1.585%
3	226	8.2000	106.88	1942.97	4.179%
4	227	8.1800	105.96	1856.02	1.313%
5	227	8.2000	106.94	1947.08	4.455%
6	228	8.1800	106.01	1860.07	1.070%
7	228	8.2000	106.99	1951.19	4.721%
8	229	8.1800	106.07	1864.12	0.911%
9	229	8.2000	107.05	1955.30	4.996%
10	230	8.1800	106.12	1868.17	0.742%

Согласно принципу минимальной ошибки оптимальный вариант представлен десятой строкой таблицы 6.12. Реальное значение перигея над поверхностью Земли (точка А на рис.4.1) равно 226 км, следовательно, относительная погрешность определения наименьшей высоты орбиты над поверхностью Земли составляет $((230 - 226)/226 = 0.0177$ или 1.77%. Причина расхождения расчетных характеристик от реальных в основном обусловлена несферичностью формы Земли, неоднородным распределением гравитирующих масс Земли.

4.1.2. Эволюция орбиты. Математическая модель движения спутника имеет вид

$$\begin{cases} dr/dt = v, \\ m \cdot dv/dt = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot r/r^3 - 0.5 \cdot C \cdot \rho(r) \cdot S \cdot v \cdot v, \\ \rho(r) = \rho_0 \cdot \exp(-(r - R)/R^*), \end{cases} \quad (6.29)$$

где $R^* = 6371.00 + 7.16$ км - параметр стандартной атмосферы, $\rho_0 = 1.29$ кг/м³. Переходя стандартным образом к проекциям на декартовы координаты, имеем

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ dv_x/dt = -g \cdot x/r^3 - 0.5 \cdot C \cdot \rho(r) \cdot S \cdot v \cdot v_x/m, \\ dv_y/dt = -g \cdot y/r^3 - 0.5 \cdot C \cdot \rho(r) \cdot S \cdot v \cdot v_y/m, \\ \rho(r) = \rho_0 \cdot \exp(-(r - 1)/R^*). \end{cases} \quad (6.30)$$

Здесь R^* уже в единицах R.

Программная реализация разработанной математической модели с применением модифицированной схемы Эйлера (4.14) имеет вид

10 REM Динамика орбиты / модель 1 уровень 1/mu412.bas

20 pi = 3.1415926#

30 OPEN "mu412.000" FOR OUTPUT AS #1

40 g = .0055376#

50 RZ = 6378000#

60 INPUT "Введите начальную высоту в км"; y0

70 INPUT "Введите начальную скорость в км/с"; v0

80 y = 1000 * y0 / RZ + 1

90 vx = 60000 * v0 / RZ

100 x = 0

110 vy = 0

120 R = SQR(x * x + y * y)

130 hp = 20

140 dt = .01

150 np = hp / dt

160 t = 0

170 rmax = R

180 tmax = 1000

190 ro = 1.29

200 r0 = (6371 + 7.16) / 6371

210 c = 1

220 rm = 1.73 / 2

230 S = pi * rm ^ 2

240 m = 1327


```

250 c1 = .5 * ro * S * c / m
260 FOR i = 1 TO np
270 R = SQR(x * x + y * y)
280 v = SQR(vx * vx + vy * vy)
290 e = .5 * (vx * vx + vy * vy) - g / R
300 gr = g / R / R / R
310 ee = c1 * v * EXP((1 - R) / r0)
320 fx = ee * vx
330 fy = ee * vy
340 vx = vx - (gr * x + fx) * dt
350 vy = vy - (gr * y + fy) * dt
360 xx = x + vx * dt
370 yy = y + vy * dt
380 t = t + dt
390 x = xx
400 y = yy
410 IF rmax < R THEN rmax = R
420 IF R <= 1 THEN 480
430 NEXT i
440 IF t > tmax THEN 480
450 PRINT t; x; y; vx; vy
460 PRINT #1 t; x; y; vx; vy
470 GOTO 260
480 PRINT t; x; y; vx; vy
490 PRINT #1 t; x; y; vx; vy
500 CLOSE #1
510 END

```

Комментарии к программе. В строке 30 открывается файл mu412.dat для записи результатов расчета (t, x, y, vx, vy). В строках 460 и 490 производится запись результатов расчета в файл данных. В строке 500 закрывается файл mu412.dat.

Точка с координатами (0, y_p), где $y_p > 0$, определяет перигей орбиты, а точка (0, y_a), где $y_a < 0$, определяет апогей орбиты, тогда $a = (y_p + |y_a|)/2$ задает большую полуось орбиты. Загружая файл данных в любой доступный текстовый файл данных, можно исследовать его содержание. Анализ расчетов по смене знака x-координаты орбиты позволяет составить таблицу, включающую данные по периоду обращения T, y_p , y_a и большой полуоси a.

Для проведения расчетов воспользуемся в качестве начальных условий данными таблицы 6.12 (10-ая строка) из предыдущего задания. После выполнения вычислений анализируем обширный файл данных (250 кбайт) и выделяем строки со сменой знака x-координаты, которые фиксируют момент пересечения орбиты оси Y.

Таблица 6.13. Фрагменты из файла mu142.dat

t, мин	x, R	y, R	vx, R/мин	vy, R/мин
0.00	0.0008	1.0361	0.077	-0.000
52.72	0.0003	-1.2816	-0.062	0.000
52.73	-0.0003	-1.2816	-0.062	0.000
105.10	-0.0002	1.0295	0.077	0.000
105.11	0.0005	1.0295	0.077	-0.000
157.25	0.0003	-1.2713	-0.062	0.000
157.26	-0.0004	-1.2713	-0.062	0.000
209.06	-0.0003	1.0229	0.077	0.000
209.07	0.0005	1.0229	0.077	-0.000
260.64	0.0005	-1.2612	-0.063	0.000
260.65	-0.0002	-1.2612	-0.063	0.000
311.89	-0.0002	1.0164	0.078	0.000
311.90	0.0005	1.0164	0.078	-0.000
362.91	0.0003	-1.2511	-0.063	0.000
362.92	-0.0003	-1.2511	-0.063	0.000

Первая строка определяет начальное состояние, вторая-третья строки – момент пересечения орбиты ИСЗ оси Y в нижней полуплоскости, четвертая-пятая – момент пересечения орбиты ИСЗ оси Y в верхней полуплоскости. Следовательно, "период обращения", т.е. промежуток времени между двумя последовательными пересечениями прямой (оси Y) в одной полуплоскости, равен $105.11 - 0 = 105.11$ мин, а большая полуось орбиты первого витка ИСЗ есть $(1.0295 + |-1.2816|)/2 = 1.15555$ R или $a = 1.15555 \cdot 6371 = 7362$ км. Занесем данные в таблицу 6.14. Шестая-седьмая строки определяют момент пересечения орбиты ИСЗ оси Y в нижней полуплоскости на втором витке, а восьмая-девятая строки – момент пересечения орбиты ИСЗ оси Y в верхней полуплоскости, тогда "период обращения" равен $209.07 - 105.11 = 103.96$ мин, а большая полуось орбиты второго витка ИСЗ есть $(1.0299 + |-1.2713|)/2 = 1.1506$ R или $a = 1.1506 \cdot 6371 = 7330$ км. Занесем данные в таблицу.

Продолжая таким образом обрабатывать данные файла, получаем следующую таблицу.

Таблица 6.14. Время полного оборота t и большая полуось a орбиты ($x(0) = 0$, $y(0) = 6601$ км, $v_x(0) = 8.18$ км/с, $v_y(0) = 0$ км/с)

t , мин	y , R	y , R	a , R	a , км
105.11	1.0295	-1.2816	1.1555	7362
103.96	1.0229	-1.2713	1.1506	7330
102.83	1.0164	-1.2611	1.1388	7255
101.71	1.0099	-1.2510	1.1305	7202
100.60	1.0034	-1.2411	1.1223	7150

Как явствует из таблицы, с ростом числа витков уменьшается как перигейное, так и апогейное расстояние, причем скорость уменьшения апогейного расстояния выше, чем скорость уменьшения перигейного расстояния, значит, с увеличением числа витков эллиптическая орбита спутника постепенно деформируется, приближаясь к круговой. "Период обращения" спутника при этом уменьшается. Интересный дополнительный вывод можно получить, анализируя четвертую и пятую колонки таблицы 6.13, которые представляют собой перигейную для положительных y и апогейную для отрицательных y скорости спутника. Как видно из таблицы, с уменьшением высоты спутника над поверхностью планеты его скорость монотонно возрастает. Это явление известно как "аэродинамический парадокс спутника" (см. [17, с.97]).

4.2.1. Космическая яхта. Математическая модель движения космического корабля - яхты с солнечным парусом может быть записана следующим образом (см. примеры 4.1 и 4.2)

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ m \cdot dv_x/dt = -m \cdot g \cdot x/r^3 - f_x(x, y), \\ m \cdot dv_y/dt = -m \cdot g \cdot y/r^3 - f_y(x, y). \end{cases} \quad (6.31)$$

Здесь вектор f моделирует воздействие солнечного излучения на космическую яхту. Если выбрать систему координат так, что начало координат поместить в центр Земли, а ось X направить к Солнцу (см. рис.4.3), тогда воздействие f на космический корабль, движущийся по часовой стрелке вокруг Земли, можно представить в виде (схема управления Ф.А.Цандера)

$$\begin{cases} f_x = f \cdot (\theta(x) \cdot \theta(-y) + \theta(-x) \cdot \theta(-y-1)), \\ f_y = 0, \end{cases} \quad (6.32)$$

где $\theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда, которая определяется в виде

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (6.33)$$

а величина f определяет значение силы давления солнечного излучения и равна [3, с.705]

$$f = E \cdot S \cdot (1 + \rho) / c. \quad (6.34)$$

Здесь S - площадь паруса, ориентированного перпендикулярно солнечным лучам; ρ - коэффициент отражения от поверхности паруса, будем считать, что парус идеально отражает свет, тогда $\rho = 1$; E - поток лучистой энергии Солнца, определяемое по формуле

$$E = P / (4 \cdot \pi \cdot R^2), \quad (6.35)$$

где $P = 3.86 \cdot 10^{26}$ Вт - мощность излучения Солнца (светимость), R - расстояние между Солнцем и космическим кораблем. Если рассматриваем эволюцию орбиты космического корабля в околоземном пространстве и R полагаем равным среднему расстоянию между Солнцем и Землей $R = 1.496 \cdot 10^{11}$ м, то E называется солнечной постоянной и

$$E = 3.86 \cdot 10^{26} / 2.812 \cdot 10^{23} = 1373 \text{ Вт/м}^2,$$

(прямые измерения E дают почти такое же значение $E^* = 1369 \pm 14 \text{ Вт/м}^2$).

Перейдем стандартным способом к безразмерным переменным (см. пример 4.1) и преобразуем математическую модель к виду, удобному для построения вычислительного алгоритма (модифицированная схема Эйлера (4.14))

$$\begin{cases} v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - (g \cdot x/r^3 + w_x) \cdot \Delta t, \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - (g \cdot y/r^3) \cdot \Delta t, \\ x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t + \Delta t) \cdot \Delta t, \\ y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t + \Delta t) \cdot \Delta t, \end{cases} \quad (6.36)$$

где $w_x = f_x/m$.

В качестве основы для программной разработки возьмем программу mu42.bas. Построим таблицу соответствия между физическими величинами и идентификаторами переменных программы, не выписанные в таблицу переменные определены ранее в программах mu41.bas и mu42.bas.

Таблица 6.15. Физические величины

Величина	Обозначение	Размерность	Идентификатор
Солнечная постоянная	E	Вт/м ²	E
Коэффициент отражения	ρ	-	RF
Скорость света	c	м/с	c
Масса корабля	m	кг	m
Площадь паруса	S	м ²	S
Ускорение, обусловленное светом	w	м/с ²	w
Проекция на ось X этого ускорения	w	м/с ²	wx

Таблица 6.16. Вспомогательные переменные и массивы

Наименование	Размерность	Идентификатор
Максимальный размер массивов	-	NN
Большая полуось орбиты за оборот корабля	км	a(NN)
Пересечение орбиты оси Y в верхней полуплоскости	R	a1(NN)
Пересечение орбиты оси Y в нижней полуплоскости	R	a2(NN)
Промежутки времени оборота корабля	мин	tt(NN)
Счетчик орбит	-	j
Число орбит	-	N
Продолжительность полного оборота	мин	tz

Действие солнечного излучения удобно модифицировать через логическое высказывание, внедренное в условный оператор перехода

$w = E \cdot S \cdot (1 + \rho) / (m \cdot c)$
 if (x > 0 AND y < 0) OR (x < 0 AND -y > 1) then wx = w else wx = 0.

Программная реализация представленного выше алгоритма имеет вид

```
10 REM Солнечный парус / модель 2 уровень 0/mu421.bas
20 NN = 10
30 DIM a(NN), a1(NN), a2(NN), tt(NN)
40 ts = 60
50 pi = 3.1415926#
60 g = .0055376#
70 RZ = 6371000#
75 RF = 1
80 E = 1360
90 c = 3E+08
100 m = 1000
110 S = 159000!
120 w = E * S * ts ^ 3 * (1 + RF) / (RZ * m * c)
130 INPUT "Введите начальную высоту в км"; y0
140 INPUT "Введите начальную скорость в км/с"; v0
150 y = 1000 * y0 / RZ + 1
160 vx = 60000 * v0 / RZ
170 x = 0
180 vy = 0
190 R = SQR(x * x + y * y)
200 hp = 2
210 dt = .01
220 np = hp / dt
230 t = 0
250 rmax = R
260 tmax = 1000
270 j = 1
280 tt(0) = 0
290 a1(1) = y
300 FOR i = 1 TO np
310 IF (y < 0 AND x > 0) OR (x < 0 AND y > 1) THEN wx = w ELSE wx = 0
```



```

320 R = SQR(x * x + y * y)
340 gr = g / R / R / R
350 vx = vx - (gr * x + wx) * dt
360 vy = vy - gr * y * dt
370 xx = x + vx * dt
380 yy = y + vy * dt
390 IF x <= 0 AND xx > 0 AND y > 0 THEN a1(j) = y
400 IF x <= 0 AND xx > 0 AND y > 0 THEN tt(j) = t
410 IF not(x >= 0 AND xx < 0 AND y < 0) THEN 440
420 a2(j) = y
430 j = j + 1
440 t = t + dt
450 x = xx
460 y = yy
470 IF rmax < R THEN rmax = R
480 IF R <= 1 THEN 520
490 NEXT i
500 IF t > tmax THEN 520
510 GOTO 300
520 N = j
530 FOR j = 1 TO N - 1
540 a(j) = (a1(j) - a2(j)) * RZ / 2000
550 tz = tt(j) - tt(j - 1)
560 PRINT tz; a1(j); a2(j); a(j)
570 NEXT j
580 END

```

Комментарии к программе. Исследование изменения большой полуоси можно выполнить двумя способами. Первый способ заключается в изучении обширной таблицы рассчитанных данных $\{t_j, x_j, y_j\}$ и визуального определения времени полного оборота, а также координат точек пересечения орбиты с осью Y в верхней и нижней полуплоскостях, расстояние между этими точками и определяет большую полуось орбиты за данный оборот космического корабля. Второй способ заключается в автоматическом регистрировании по мере движения корабля времени полного оборота, координат пересечения орбиты оси Y, а также вычисления большой полуоси орбиты. Для этого в строке 20 объявляется целая переменная NN определяющая максимальный размер массивов, а в строке 30 описываются сами массивы (см. таблицу 6.16). В строке 270 устанавливается

начальное значение счетчика оборотов. В строке 280 фиксируется начальный момент времени. В строке 290 - координата y в начальный момент времени. В строке 390 определяется момент пересечения орбиты оси Y и записывается в массив координата y в верхней полуплоскости. В строке 400 фиксируются последовательные моменты времени пересечения орбиты оси Y в верхней полуплоскости, тогда разность между двумя последовательными элементами массива определяет время одного полного оборота корабля (строка 550). В строках 410-430 находится момент пересечения орбиты оси Y нижней полуплоскости и увеличивается значение счетчика оборотов на единицу. В строке 520 окончательно фиксируется число рассчитанных полных оборотов, а в строках 530-570 вычисляется большая полуось орбиты в км и время полного оборота в минутах и выводится на экран компьютера. Необходимо отметить, что, задавая начальные условия таким образом, что вектор скорости параллелен оси X, тем самым мы определяем *перигентр* или *апоцентр* (в нашем случае перигей или апогей) в зависимости от величины скорости и удаления от центра планеты.

Сохраните программу на диске под именем mu421.bas. Проводим расчет по разработанной программе, результаты приведены в таблице.

Таблица 6.17. Время полного оборота t и большая полуось a орбиты ($x(0) = 0$, $y(0) = 6871$ км, $v_x(0) = 8$ км/с, $v_y = 0$ км/с)

t, мин	y, R	y, R	a, км
115.680	1.1966	-1.3181	8010.5518
124.190	1.3303	-1.3108	8413.0137
134.190	1.4828	-1.3035	8875.8057
146.090	1.6585	-1.2963	9412.3115
160.380	1.8628	-1.2891	10040.4277
177.810	2.1034	-1.2821	10784.4531
150.710	1.3758	-1.6555	9656.0498
168.770	1.6446	-1.6402	10463.7178
192.540	1.9824	-1.6251	11491.6689
224.820	2.4190	-1.6103	12835.2227

Анализируя таблицу, видим, что солнечное давление на парус приводит к двум эффектам. Первый эффект заключается в увеличении большой полуоси (четвертая колонка таблицы), второй эффект - в относительной стабилизации орбиты в нижней полуплоскости (третья колонка таблицы). Следовательно, апогей орбиты космического корабля будет все больше и больше удаляться от планеты, тем самым доказывая возможность космического путешествия под солнечным парусом.

Задание 4.2.1.1. Вычислить конечную скорость космической яхты, развернувшей солнечный парус и имеющей в начальный момент времени в перигее параболическую скорость. Конечную скорость определить на границе планетной системы, которая определяется радиусом крайней планеты - Плутона, равной 39.75 а.е. (а.е. - астрономическая единица длины численно равна среднему расстоянию Земли от Солнца, 1 а.е. = $1.496 \cdot 10^{11}$ м). Необходимые данные взять из задания 4.2.1. Интересно отметить, что несколько космических аппаратов после выполнения своих программ научных исследований уже пересекли границу Солнечной системы и отправились к другим звездным мирам. Например, космический зонд Пионер-10 стартовал 3 марта 1972 года, а уже в январе 1997 года был на расстоянии 9.66 млрд км (64.57 а.е.) и имел скорость 12.38 км/с. Связь с этим аппаратом была прекращена в марте 1998 года.

5. Сухое трение

5.1.1. Указание. На основе программы mu51.bas и mu21.bas рассчитайте траектории движения тела в зависимости от начальной скорости и коэффициента трения. Вопрос об оптимальности установки ограждения ставится по условию его наименьшей длины ограждения, опоясывающего купол РЛС с одной стороны, с другой стороны требованием наибольшего "охвата" защищаемой площади поверхности купола РЛС. Проведите анализ полученного движения и сформулируйте вывод.

5.1.2. Разобьем все движение на два этапа: первый этап - тело соскальзывает с крыши с нулевой начальной скоростью; второй этап - падение тела, "брошенного под углом к горизонту" (на этом этапе удобно воспользоваться программой mu21.bas).

Первый этап. Пусть система декартовых координат XY так построена, что тело в начальный момент времени имеет координаты $x(0) = 0$ м $y(0) = 25$ м. В конце первого этапа тело имеет координаты

$$x(t_1) = 10 \cdot \cos(30^\circ) = 8.66 \text{ м},$$

$$y(t_1) = 20 \text{ м}.$$

Система уравнений движения в проекции на оси координат имеет вид

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ m \cdot dv_x/dt = N \cdot \sin(\alpha) - F \cdot \cos(\alpha), \\ m \cdot dv_y/dt = -m \cdot g + N \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\alpha), \end{cases} \quad (6.37)$$

где N - сила реакции поверхности крыши, $F = \mu \cdot N$ - сила трения скольжения. Чтобы определить силу реакции опоры, воспользуемся связью N с силой тяжести. Эту связь легко получить, проектируя N и $m \cdot g$ на нормаль к поверхности крыши

$$0 = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) - N. \quad (6.38)$$

Подставляя формулу (6.37) в (6.38), получаем следующую математическую модель скольжения тела по крыше дома

$$\begin{cases} dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y, \\ dv_x/dt = g \cdot (\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha)), \\ dv_y/dt = g \cdot (-1 + \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \mu \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)). \end{cases} \quad (6.39)$$

Программная реализация разработанной модели (6.39) имеет стандартный вид

```
10 REM Соскальзывание тела с наклонной крыши / модель 1 / mu512.bas
15 pi = 3.1415926#
20 g = 9.81
30 dt = .00001
40 hp = .1
```



```

50 np = hp / dt
60 a = 30
70 al = a * pi / 180
80 cc = COS(al) ^ 2
90 cs = COS(al) * SIN(al)
95 mu = .1
100 x = 0
110 y = 25
120 vx = 0
130 vy = 0
135 t = 0
140 FOR i = 1 TO np
150 vx = vx + g * (cs - mu * cc) * dt
160 vy = vy + g * (cc + mu * cs - 1) * dt
170 x = x + vx * dt
180 y = y + vy * dt
190 t = t + dt
200 IF y < 20 THEN 240
210 NEXT i
220 PRINT t; x; y; vx; vy
230 GOTO 140
240 PRINT ""
250 PRINT t; x; y; vx; vy
260 END

```

Проводим расчет по программе, получаем на экране компьютера таблицу значений - t, x, y, vx, vy. Нужная для нас информация содержится в последней строчке таблицы

t, с	x, м	y, м	vx, м/с	vy, м/с
2.22	8.66026	20.00000	7.79944	-4.50301

Можно проверить расчеты, вычисляя значение скорости в точке отрыва от поверхности крыши $v = (vx^2 + vy^2)^{1/2} = 9.0060$ м/с со значением, вычисленным аналитически из соображения сохранения энергии (проделайте расчет самостоятельно)

$$v^* = (2 \cdot g \cdot \Delta h - 2 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot s)^{1/2}, \quad (6.40)$$

где $\Delta h = 5$ м - изменение высоты тела, а $s = \Delta h / \sin(\alpha) = 10$ м - длина пройденного пути. Подставляя численные значения в (6.40), получаем следующий результат $v^* = 9.0060$ м/с. Сравнивая полученные значения скорости, убеждаемся в правильности работы программы и адекватности математической модели скольжения тела по наклонной поверхности.

Второй этап. Начальными условиями для расчета падения тела будут значения t, x, y, vx, vy в точке отрыва от крыши. С помощью программы mi21.bas рассчитаем движение тела. Для этого отредактируем следующие строчки

```

x = 8.66026
y = 20.00000
vx = 7.79944
vy = -4.50301
t = 2.22

```

Рассчитывая по программе, получаем следующий результат (последняя строка таблицы данных, выводимых на экран компьютера)

t, с	x, м	y, м	vx, м/с	vy, м/с
3.832	21.232	-0.002	7.79944	-20.316

Итак, искомое расстояние, на которое тело удалится от края крыши, составляет $21.232 - 8.660 = 12.572$ м.

5.2.1. Для расчета коэффициента трения воспользуемся условием равновесия (см. формулы (5.7), (5.8))

$$0 = \lambda \cdot g \cdot x_{\max} - \mu \cdot g \cdot \lambda \cdot (1 - x_{\max}), \quad (6.41)$$

тогда коэффициент трения равен

$$\mu = x_{\max} / (1 - x_{\max}). \quad (6.42)$$

Для $x_{\max} = 0.275 \cdot 1$ получаем $\mu = 0.379$. Чтобы подсчитать работу силы трения при движении пепочки по поверхности стола, необходимо аналитически проинтегрировать следующее выражение

$$A = - \int_{1-x_{\max}}^0 F dx = - \int_{1-x_{\max}}^0 \mu \cdot g \cdot \lambda \cdot (1-x) dx = \quad (6.43)$$

$$= -\mu \cdot m \cdot g \cdot (1-x_{\max}) / (2 \cdot 1).$$

Подставляя численные значения физических величин μ , m , g , 1 , $x_{\max}$, получаем $A = -0.244$ Дж. Скорость движения цепочки рассчитаем по программе mu52.bas. Для этого отредактируем строки программы

15 k = 0.379

70 x = 0.275

Результат расчета выводится на экран компьютера в виде таблицы значений t , x , v . Итак, время скольжения цепочки $t = 2.472$ с, а скорость цепочки в момент ее соскальзывания со стола составляет 2.668 м/с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА

Для нахождения промежуточных значений табличных данных используют интерполяционные формулы Лагранжа [4]:

а) линейная интерполяция на сетке $[x_i, x_j]$

$$P_1(x) = y_i \cdot (x - x_j) / (x_i - x_j) + y_j \cdot (x - x_i) / (x_j - x_i); \quad (1)$$

б) квадратичная интерполяция на сетке $[x_i, x_j, x_k]$

$$P_2(x) = y_i \cdot (x - x_j) \cdot (x - x_k) / (x_i - x_j) \cdot (x_i - x_k) +$$

$$+ y_j \cdot (x - x_i) \cdot (x - x_k) / (x_j - x_i) \cdot (x_j - x_k) +$$

$$+ y_k \cdot (x - x_i) \cdot (x - x_j) / (x_k - x_i) \cdot (x_k - x_j). \quad (2)$$

Программная реализация этих формул проста и имеет вид

10 REM Линейная интерполяция Лагранжа/ mu71.bas

20 input "xi, yi, xj, yj: "; xi, yi, xj, yj

30 INPUT "Введите x="; x

40 IF x = xi THEN 80

50 y = yi * (x - xj) / (xi - xj) + yj * (x - xi) / (xj - xi)

60 PRINT x, y

70 GOTO 30

80 END

10 REM Квадратичная интерполяция Лагранжа/ mu72.bas

20 input "xi, yi, xj, yj, xk, yk: "; xi, yi, xj, yj, xk, yk

30 INPUT "Введите x="; x

40 IF x = xi THEN 110

50 s1 = yi * (x - xj) * (x - xk) / (xi - xj) * (xi - xk)

60 s2 = yj * (x - xi) * (x - xk) / (xj - xi) * (xj - xk)

70 s3 = yk * (x - xi) * (x - xj) / (xk - xi) * (xk - xj)

80 y = s1 + s2 + s3

90 PRINT x, y

100 GOTO 30

110 END

Проверим действие программы mu71.bas и mu72.bas на примере интерполяции логарифмической функции $y = \ln(x)$. Пусть имеется таблица

x	ln(x)
2.0	0.693
3.0	1.097
4.0	1.386

Требуется найти значение логарифма при $x = 2.5$ (точное значение $\ln(2.5) = 0.916$. Линейная интерполяция при $x = 2.5$ равна $y_1 = 0.895$ с относительной погрешностью 2.2 %. Квадратичная интерполяция равна $y_2 = 0.909$ с относительной погрешностью 0.8 %.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. - М.: Наука, 1979. -520с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - 3-е изд., испр. - М.: Наука, 1986. -432с.
3. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. - М.: Наука, 1977. -944с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1978. - 832с.
5. Фейнман Р.П., Лейтон Р.В., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Современная наука о природе. Законы механики. Пространство. Время. Движение. - Т.1, 2. - 3-е изд. /Под ред. Смородинского Я.А. - М.: Мир, 1977. -440 с.
6. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. -4-е изд., доп. и перераб. - М.: Наука, 1976. -888 с.
7. Бурсиан Э.В. Задачи по физике для компьютера. - М.: Просвещение, 1991. -256 с.
8. Кондратьев А.С., Лаптев В.В. Физика и компьютер. - Л.: ЛГУ, 1989. -328 с.
9. Векуа Н.П. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и приложения в механике. - М.: Наука, 1991. -256 с.
10. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. - М.: МГУ, 1990. - 336 с.
11. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. -М.: Мир, 1980. - 280 с.
12. Зейферт Г.С., Миллс М.М., Саммерфильд М. Физика ракеты// Успехи физических наук. -1948. -Т.34. -Вып.1. -С.34-71; -Вып.3. -С.334-369; -Вып.4. -С.560-591.
13. Лей В. Ракеты и полет в космос. -М.: Военное издательство Министерства обороны СССР, 1961. -440 с.
14. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. -10-е изд., доп. - М.: Наука, 1987. -432 с.
15. Павленко Ю.Г. Задачи по теоретической механике. -М.: МГУ, -1988. -344 с.
16. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2 частях / Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. -ч.1. - 349 с.
17. Левантовский В.И. Механика космического полета в элементарном изложении. 3-е изд. -М.: Наука, 1980. -512 с.
18. Partovi M.H., Aston D.R. The generalized raindrop problem//Am. J. Phys. -1989. -V.57. -N.10. -P.912-920.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Падение тела	5
Пример 1.1. Свободное падение тела	5
Пример 1.2. Затыжной прыжок. Общее решение	12
Пример 1.3. Затыжной прыжок с высоты 7000 метров	14
Пример 1.4. Отклонение тела при падении от отвесной линии	18
2. Движение тела, брошенного под углом к горизонту	22
Пример 2.1. Определение угла бросания тела	22
Пример 2.2. Движение мяча, брошенного под углом к горизонту	25
Пример 2.3. Дальность 406-мм орудия береговой обороны	27
3. Движение тела переменной массы	31
Пример 3.1. Падение в облаке дождевой капли	31
Пример 3.2. Задача А. Кейли	36
Пример 3.3. Старт ракеты (вторая задача Циолковского)	39
4. Движение спутника	46
Пример 4.1. Движение первого искусственного спутника Земли	46
Пример 4.2. Солнечный ветер	55
5. Сухое трение	59
Пример 5.1. Падение тела с купола РДС	59
Пример 5.2. Соскальзывание цепочки	63
6. Указания, решения и ответы	65
Раздел 1. Падение тела	65
Раздел 2. Движение тела, брошенного под углом к горизонту	77
Раздел 3. Движение тела переменной массы	83
Раздел 4. Движение спутника	93
Раздел 5. Сухое трение	104
Приложение	108
Интерполяция Лагранжа	108
Библиографический список	111

Штыгашев Александр Анатольевич

ПРИМЕНЕНИЕ ПЭВМ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ (МЕХАНИКА)

Методическое пособие

Редактор О. В. Ильных

Компьютерная верстка А. А. Штыгашев

Лицензия ЛР N020059 от 24.03.97

Сдано в набор 01.08.99	Подписано в печать 16.12.1999
Формат бумаги 60x84/16	Печать RISO
Усл. печ. л. 6.51	Уч.-изд. л. 7.0
Заказ N 12	Тираж 100 экз.

Полуниверситет, 630126, г.Новосибирск, Вилуйская, 28