

**Вопросы к экзамену по курсу «Математический анализ»
(2-й семестр, гр. ФО-01, ФФ-01, И. М. Пупышев)**

1 Ряды

1. Числовые ряды с положительными членами. Признаки сравнения.
2. Числовые ряды с положительными членами. Признаки Даламбера и Коши.
3. Числовые ряды с положительными членами. Интегральный признак Коши.
4. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.
5. Функциональный ряд. Область сходимости.
6. Функциональный ряд. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса (без док.). Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование (без док.).
7. Степенной ряд. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда (центр, радиус и интервал сходимости).
8. Свойства степенных рядов: непрерывность суммы, почленное дифференцирование и интегрирование.
9. Ряд Тейлора. Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора (равномерная ограниченность производных). Ряды Тейлора для некоторых элементарных функций.

2 Функции многих переменных: дифференциальное исчисление

1. Евклидово пространство. Кривые и области.
2. Функции многих переменных. область определения.
3. Предел и непрерывность. Свойства функций, имеющих предел в точке, и функций, непрерывных в точке. Теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на замкнутой ограниченной области (без док.).
4. Отображения. Непрерывность суперпозиции.
5. Частные производные функций многих переменных.
6. Дифференцируемость функции двух переменных. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке (существование частных производных). Достаточное условие дифференцируемости функции в точке (существование в окрестности точки частных производных, непрерывных в самой точке — без док.). Дифференциал.

7. Касательная плоскость к графику функции, вывод уравнения.
8. Дифференцирование суперпозиции.
9. Теоремы о неявных функциях. Дифференцирование неявной функции. Касательная плоскость к поверхности, заданной неявно.
10. Градиент. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению.
11. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных (без док.).
12. Формула Тейлора для функции двух переменных.
13. Экстремум функции многих переменных. Необходимое условие (стационарная точка). Достаточное условие (знакоопределенность матрицы вторых производных).

3 Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. ОДУ 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения (без док.). Общее и частное решения. Особое решение.
2. ОДУ n -го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения (без док.). Общее и частное решения.
3. Линейное однородное уравнение n -го порядка. Линейность дифференциального оператора. Множество всех решений уравнения как линейное подпространство в пространстве $C^n(a, b)$.
4. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского. Необходимое и достаточное условия линейной зависимости системы функций — решений однородного линейного уравнения n -го порядка.
5. Линейное однородное уравнение n -го порядка. Структура общего решения. Размерность и базис пространства решений.
6. Линейное однородное уравнение n -го порядка. Понижение порядка уравнения при известном частном решении.
7. Линейное однородное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение.
8. Линейное неоднородное уравнение n -го порядка. Свойства решений. Вид общего решения.
9. Линейное неоднородное уравнение n -го порядка. Метод вариации постоянных.
10. Линейное неоднородное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Поиск частного решения в зависимости от вида правой части.
11. Нормальная система ОДУ 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения (без док.). Общее и частное решения.

12. Однородная система линейных ОДУ 1-го порядка. Определитель Вронского для системы вектор-функций. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости решений однородной системы линейных уравнений.
13. Однородная система линейных ОДУ 1-го порядка. Структура общего решения. Размерность и базис пространства решений.
14. Неоднородная система линейных ОДУ 1-го порядка. Свойства решений. Вид общего решения.
15. Неоднородная система линейных ОДУ 1-го порядка. Метод вариации постоянных.
16. Однородная система линейных ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Нахождение общего решения в случае, когда собственные числа матрицы действительны и различны.
17. Однородная система линейных ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Нахождение общего решения в случае комплексных собственных чисел.

4 Кратные интегралы

1. Двойной интеграл. Свойства, геометрический смысл.
2. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному.
3. Замена переменных в двойном интеграле (идея док-ва). Примеры (полярные и обобщенные полярные координаты).
4. Тройной интеграл. Свойства, вычисление.
5. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.

5 Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля

1. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, вычисление.
2. Векторное поле. Криволинейный интеграл 2-го рода: определение, вычисление.
3. Потенциальное векторное поле на плоскости. Односвязная область. Теорема о независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.
4. Потенциальное векторное поле в пространстве. Ротор векторного поля. Поверхностно-односвязная область. Теорема о независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования в пространстве (без док.).
5. Формула Грина.

6. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, вычисление.
7. Поверхностный интеграл 2-го рода: определение, вычисление.
8. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция. Формула Гаусса — Остроградского.
9. Циркуляция векторного поля. Ротор. Формула Стокса (без док.).

Рейтинг в семестре

1. **Ряды:** 12 баллов (контр. работа: 9 баллов, РГЗ (7 задач): 3 балла).
2. **Функции многих переменных: дифференциальное исчисление:** 12 баллов (контр. работа: 9 баллов, РГЗ (7 задач): 3 балла).
3. **Обыкновенные дифференциальные уравнения:** 12 баллов (контр. работа: 9 баллов, РГЗ (12 задач): 3 балла).
4. **Кратные интегралы:** 12 баллов (контр. работа: 9 баллов, РГЗ (7 задач): 3 балла).
5. **Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля:** 12 баллов (контр. работа: 9 баллов, РГЗ (4 задачи): 3 балла).

Минимум (допуск к экзамену): 30 баллов. Максимум: 60 баллов.

Каждую из контрольных работ разрешается переписать один раз, а РГЗ принимаются до установленного срока.

Соответствие баллов за контрольную работу традиционной 5-балльной оценке: «5» — 9 баллов, «5-» — 8 баллов, «4» — 7 баллов, «4-» — 6 баллов, «3» — 5 баллов, «3-» — 4 балла, «2» — 3 и менее баллов.

Для допуска к экзамену необходимо в семестре набрать 30 баллов.

Рейтинг на экзамене

1. **Практическая часть экзамена:** 30 баллов — 10 задач по 2 на каждый из 5 разделов, оцениваются в 3 балла каждая. Если практическая часть выполнена менее, чем на 13 баллов, работа оценивается оценкой «неудовлетворительно». От 13 до 20 баллов — предлагается решить дополнительные задачи или ответить на дополнительные вопросы на оценку «удовлетворительно». От 21 балла до 30 баллов — предлагается ответить на теоретические вопросы на оценку «хорошо» или «отлично».
2. **Теоретическая часть экзамена:** 10 баллов — 2 теоретических вопроса по 5 баллов каждый. Знание определений и формулировок теорем оценивается в 2 балла, умение доказывать теоремы — в 3 балла. Теоретическая часть экзамена проводится для студентов, имеющих достаточно высокий балл за работу в семестре и за практическую часть экзамена, претендующих на оценки «хорошо» или «отлично».

3. **Коллоквиум:** Если все контрольные работы выполнены на оценки «хорошо» или «отлично» и РГЗ также полностью выполнены, студент получает право сдать экзамен досрочно, для этого в течение семестра будут проводиться коллоквиумы по отдельным разделам.

Минимум (оценка «удовлетворительно»): 20 баллов. Максимум: 40 баллов.

Пример экзаменационного билета (практическая часть)

Билет № 0

1. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n}$$

2. Разложить функцию $y = \sin 2x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
3. Найти производную функции $u = x^2\sqrt{y} + \ln(y^2 + z)$ в точке $M_0(2, 1, 0)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M_1(1, 4, 1)$.
4. Исследовать функцию $z = x^3 - 3xy - 3y$ на экстремум.
5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}.$$

6. Найти решение задачи Коши:

$$xy' - 3y = x^4e^x, \quad y(1) = e.$$

7. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = x$ по области

$$D : x \geq 0, y \leq 3 - 2x, y \geq x^2.$$

8. Найти объем области V в пространстве, ограниченной поверхностями:

$$y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, z + x = 4.$$

9. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x + y^2 + z^3, 2y + e^z, z - x^3\}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности:

$$\sigma : z = 4 - x^2 - y^2, z = 0.$$

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{2y, -2x, z\}$ вдоль контура

$$L : x^2 + y^2 = 16, z = 3,$$

ориентированного против часовой стрелки относительно оси Oz .