

1 Ряды

1. Числовые ряды. Арифметические свойства сходящихся рядов. Теорема об остатке ряда. Необходимый признак сходимости ряда.
2. Числовые ряды с положительными членами. Интегральный признак Коши. Признаки сравнения. Признаки Даламбера и Коши.
3. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.
4. Степенной ряд. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда (центр, радиус и интервал сходимости). Свойства степенных рядов: непрерывность суммы, почленное дифференцирование и интегрирование. Приложение в теории вероятностей.
5. Ряд Тейлора. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора. Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора (равномерная ограниченность производных). Ряды Тейлора для некоторых элементарных функций.

2 Функции многих переменных: дифференциальное исчисление

1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Кривые и области.
2. Функции многих переменных. Пределы и непрерывность функций многих переменных. Непрерывность сложной функции.
3. Частные производные и дифференцируемость функции двух переменных. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке (существование частных производных). Достаточное условие дифференцируемости функции в точке (существование в окрестности точки частных производных, непрерывных в точке).
4. Дифференцирование сложной функции.
5. Дифференцирование функции, заданной неявно.
6. Градиент. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению.
7. Касательный вектор к кривой. Касательная плоскость к поверхности, заданной неявно.
8. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных (без док.).
9. Формула Тейлора для функции двух переменных (без док.).

10. Экстремум функции многих переменных. Необходимое условие. Достаточное условие. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой ограниченной области.
11. Условный экстремум функции двух переменных. Необходимое условие. Достаточное условие (без док.).

3 Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. ОДУ 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения (без док.). Общее и частное решения. Особое решение.
2. Некоторые типы уравнений 1-го порядка. Уравнения с разделяющимися переменными, линейные уравнения, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.
3. ОДУ n -го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения (без док.). Общее и частное решения.
4. Линейное однородное уравнение n -го порядка. Линейность дифференциального оператора. Множество всех решений уравнения как линейное подпространство в пространстве $C^n(a, b)$. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского. Необходимое и достаточное условия линейной зависимости системы функций — решений однородного линейного уравнения n -го порядка. Структура общего решения линейного однородного уравнения порядка n . Размерность и базис пространства решений.
5. Линейное неоднородное уравнение n -го порядка. Свойства решений. Вид общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.
6. Линейное однородное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение. Линейное неоднородное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Поиск частного решения в зависимости от вида правой части.
7. Нормальная система ОДУ 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения (без док.). Общее и частное решения.
8. Однородная система линейных ОДУ 1-го порядка. Определитель Вронского для системы вектор-функций. Необходимое и достаточное условия линейной зависимости решений однородной системы линейных уравнений. Структура общего решения. Размерность и базис пространства решений.
9. Неоднородная система линейных ОДУ 1-го порядка. Свойства решений. Вид общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.
10. Однородная система линейных ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение.

4 Кратные интегралы

1. Двойной интеграл. Свойства, геометрический смысл.
2. Теорема о сведении двойного интеграла к повторному (без док.).
3. Замена переменных в двойном интеграле (без док.). Полярные координаты.
4. Приложения двойного интеграла: площадь плоской фигуры, объем тела. Приложения в теории вероятностей.

План практических занятий

1. Числовые ряды. Сумма ряда. Ряды с положительными членами. Интегральный признак Коши. Признаки сравнения.
2. Ряды с положительными членами. Признаки Даламбера и Коши. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.
3. Степенные ряды. Область сходимости. Ряд Тейлора.
4. Ряд Тейлора.
5. Функции многих переменных: область определения, линии и поверхности уровня.
6. Частные производные и полный дифференциал функций многих переменных.
7. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование функции, заданной неявно.
8. Градиент, производная по направлению. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
9. Частные производные и дифференциалы высоких порядков. Формула Тейлора. Экстремум.
10. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Условный экстремум.
11. Контрольная работа «Ряды. Функции многих переменных.»
12. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные уравнения 1-го порядка.
13. Уравнения в полных дифференциалах. Линейные однородные уравнения высоких порядков с постоянными коэффициентами.
14. Линейные неоднородные уравнения высоких порядков с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных. Метод подбора частного решения по виду правой части.
15. Системы линейных однородных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами.
16. Двойной интеграл в декартовых координатах.
17. Двойной интеграл в полярных координатах. Вычисление площадей и объёмов с помощью двойных интегралов.
18. Контрольная работа «Двойные интегралы. Обыкновенные дифференциальные уравнения.»

Демо-вариант контрольной работы № 1

1. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 2} \sin \frac{2}{n^2}.$$

2. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 3^n}{2^{2n+1}}.$$

3. Найти область сходимости степенного ряда (исследовать сходимость на концах интервала):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 5)^n}{3^n \sqrt{n + 2}}.$$

4. Разложить функцию $f(x) = \sin 3x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

5. Найти частные производные z'_x и z'_y функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$x^2 z^3 + 2xy^3 z^2 - 3y^2 = 0.$$

6. Найти производную функции

$$z = x^2 e^{x^3 - y^2}$$

в точке $M(1; 1)$ в направлении вектора $\overrightarrow{MA}$, где $A(-3; 4)$.

7. Найти точки экстремума функции

$$z = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

8. Найти точки экстремума функции $z = xy$ при условии $x + 3y = 6$.

Демо-вариант контрольной работы № 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = y^2 \cos 3x.$$

2. Найти решение задачи Коши

$$y' - \frac{3}{x}y = x^3 e^{x-1}, \quad y(1) = 1.$$

3. Найти общее решение однородного линейного уравнения

$$y'' - 8y' + 25y = 0.$$

4. Найти общее решение неоднородного линейного уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = e^{2x}.$$

5. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D y \, dx \, dy$$

по области

$$D : x \geq 0, y \geq x^2, y \leq \sqrt{2 - x^2}.$$

6. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x \, dx \, dy$$

по области

$$D : x^2 + y^2 \leq 2y, y \geq -x, y \geq x.$$

Пример экзаменационного билета

Билет № 0

1. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n}$$

2. Разложить функцию $y = \sin 2x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Найти производную функции $u = x^2\sqrt{y} + \ln(y^2 + z)$ в точке $M_0(2, 1, 0)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M_1(1, 4, 1)$.

4. Исследовать функцию $z = x^3 - 3xy - 3y$ на экстремум.

5. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x \, dx \, dy$$

по области

$$D : x \geq 0, y \leq 3 - 2x, y \geq x^2.$$

6. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint_D y \, dx \, dy$$

$$D : x \geq 0, y \leq x, x^2 + y^2 \leq 2x.$$

7. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}.$$

8. Найти решение задачи Коши:

$$xy' - 3y = x^4 e^x, y(1) = e.$$