

Пусть ф-ые $K(x, t)$ опред. в обл. $a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$,
а ф-ии $f(x), g(x)$ опред. на $a \leq x \leq b$.

Опр. Ур-е вида $g(x)y(x) + \int_a^b K(x, t)y(t)dt + f(x) = 0$

наз. линейным интегр. ур-ием. Ф-ие $y(x)$, опред. на (a, b)
наз. его решением, если при подстановке её в ур-е
оно преврат. в тождество.

Мы будем рассм. важные частные случаи интегр. ур-ий — ур-е Фредгольма или Вольтерра.

Ур-е Фредгольма 2го рода: $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt + f(x)$
(λ — числовой параметр, для удобства)

Ур-е Фредгольма 1го рода: $\lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt + f(x) = 0$

Если $f(x) = 0$, то ур-е наз. однородным.

Ф-ие $K(x, t)$ наз. ядром ур-ия.

Мы будем рассм. только ур-е 2го рода (ур-е 1го рода намного сложнее)

Если $K(x, t) = 0$ при $t < x$, то ур-е Фредгольма будет наз.
ур-ием Вольтерра.

$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt + f(x)$ — ур-е Вольтерра 2го рода

$\lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt + f(x) = 0$ — ур-е Вольтерра 1го рода.

§ 1. Решение ур-ий Фредгольма и Вольтерра
результативным методом.

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt + f(x)$$

Будем искать реш-е $y(x)$ в виде суммы ряда по степеням λ ,
считая λ достаточно малым:

$$y(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots$$

Подст. в ур-е:

$$u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) (u_0(t) + \lambda u_1(t) + \dots + \lambda^{n-1} u_{n-1}(t) + \dots) dt$$

Приравнивая коэф-ты при одинаковых
степенях λ , получим:

2

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= f(x) \\
 u_1(x) &= \int_a^b K(x,t) u_0(t) dt = \int_a^b K_1(x,t) f(t) dt, \text{ где } K_1(x,t) = K(x,t), \\
 u_2(x) &= \int_a^b K(x,t) u_1(t) dt = \int_a^b K(x,t) \left(\int_a^b K_1(\tau,t) f(t) dt \right) d\tau = \\
 &= \int_a^b f(t) \left[\int_a^b K(x,\tau) K_1(\tau,t) d\tau \right] dt = \int_a^b K_2(x,t) f(t) dt, \\
 &\text{где } K_2(x,t) = \int_a^b K(x,\tau) K_1(\tau,t) d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_n(x) &= \int_a^b K(x,\tau) u_{n-1}(\tau) d\tau = \int_a^b K(x,\tau) \left[\int_a^b K_{n-1}(\tau,t) f(t) dt \right] d\tau = \\
 &= \int_a^b f(t) \left[\int_a^b K(x,\tau) K_{n-1}(\tau,t) d\tau \right] dt = \int_a^b K_n(x,t) f(t) dt, \\
 &\text{где } K_n(x,t) = \int_a^b K(x,\tau) K_{n-1}(\tau,t) d\tau
 \end{aligned}$$

и т.д.

Ф-ции $K_n(x,t)$ наз. итерированными ядрами.

Теорема 1. Если ядро $K(x,t)$ ур-ия Фредгольма 2 рода непрерывно в квадрате $a \leq x, t \leq b$, $|\lambda| < \frac{1}{(b-a) \cdot \max_{a \leq x, t \leq b} |K(x,t)|}$, и ф-ция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x)$ равносходен на $[a,b]$, и его сумма $y(x)$ ~~явл.~~ единств. непрерывн. реш-ем ур-ия Фредгольма.

(следует из)

Зам. 1 Усл-е на λ можно записать как $|\lambda| < \frac{1}{\left(\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt \right)^{1/2}}$.

Зам. 2 Ф-ну где реш-е $y(x)$ можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K(x,t) f(t) dt \text{ или}$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t) dt + f(x), \text{ где } R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t)$$

наз. резольвентой (разрешающим ядром) ядра $K(x,t)$.

Ряд в прав. части наз. рядом Неймана.

Задача состоит в том, что $y(x)$ похожа на вид самого ур-ия.

Зам. 3 В действительности формула где $y(x)$ задаёт реш-е ур-ия где более широким мн-вом значений параметра λ .

Пр. $y(x) = x + \lambda \int_0^1 x t^2 y(t) dt$

$K(x, t) = x t^2$

$(b-a) \max_{a \leq x, t \leq b} |K(x, t)| = 1 \times 1 = 1$

при $|\lambda| < 1$ упр-е теор. разрешимо.

Найдем непрерывные ядра:

$K_1(x, t) = x t^2$

$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, \tau) K_1(\tau, t) d\tau = \int_0^1 x \tau^2 \cdot \tau \cdot t^2 d\tau = x t^2 \int_0^1 \tau^3 d\tau = \frac{1}{4} x t^2$

$K_3(x, t) = \int_0^1 K(x, \tau) K_2(\tau, t) d\tau = \int_0^1 x \tau^2 \cdot \frac{1}{4} \tau t^2 d\tau = \frac{1}{4} x t^2 \int_0^1 \tau^3 d\tau = \frac{1}{4^2} x t^2$

$K_n(x, t) = \frac{1}{4^{n-1}} x t^2$

Решение $R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^{n-1} x t^2 = \left\{ |\lambda| < 1 < 4 \right\} = x t^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{4}} = \frac{4 x t^2}{4 - \lambda}$

$y(x) = x + \lambda \int_0^1 \frac{4 x t^2}{4 - \lambda} \cdot t dt = x + \frac{\lambda}{4 - \lambda} \cdot 4 x \int_0^1 t^3 dt = x + \frac{\lambda x}{4 - \lambda} = \frac{4 x}{4 - \lambda}$

Зам. Вот ϕ -я, где разрешено решение при $|\lambda| < 1$, на самом деле ϕ -я $y(x) = \frac{4}{4 - \lambda} x$ стр. реш-е упр-е при любом (компл.) $\lambda \neq 4$.

§ 2. Упр-е Вольтерра 2 рода.

$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt + f(x)$

т.е. $K(x, t) = 0$ при $t > x$

Тогда $K_n(x, t) = \int_a^b \int_{x \geq \tau \atop t \leq \tau \leq x} K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, t) d\tau = \int_t^x K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, t) d\tau$

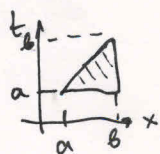
$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t), \quad y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t, \lambda) f(t) dt$

Теор. 2

Если ядро $K(x, t)$ непрерывно в обл. $Q_1: a \leq x \leq b, a \leq t \leq x$,

ϕ -я $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\int_a^b dx \int_a^x K^2(x, t) dt < \infty$, то

функция $y(x)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n(x)$ равномерно на $[a, b]$ сходится к единств. реш-ю $y(x)$ упр-е Вольтерра.



Зам. Для упр-е Вольтерра не возникает ограничений на λ .

$$y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt, \quad 0 \leq x \leq b$$

$$K_1(x, t) = K(x, t), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq x$$

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, \tau) K_1(\tau, t) d\tau = \int_t^x e^{x-\tau} e^{\tau-t} d\tau = e^{x-t} \int_t^x d\tau = (x-t) e^{x-t}$$

$$K_3(x, t) = \int_t^x K(x, \tau) K_2(\tau, t) d\tau = \int_t^x e^{x-\tau} (\tau-t) e^{\tau-t} d\tau = e^{x-t} \int_t^x (\tau-t) d\tau = \frac{(x-t)^2}{2!} e^{x-t}$$

$$\text{Еще } K_n(x, t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{x-t}, \quad n$$

$$K_n(x, t) = \int_t^x K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, t) d\tau = \int_t^x e^{x-\tau} \frac{(\tau-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\tau-t} d\tau = e^{x-t} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \int_t^x (\tau-t)^{n-1} d\tau =$$

$$= e^{x-t} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(\tau-t)^n}{n} \Big|_t^x = e^{x-t} \cdot \frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t) = e^{x-t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{x-t} \cdot e^{\lambda(x-t)} = e^{(\lambda+1)(x-t)}$$

$$y(x) = e^x + \lambda \int_0^x R(x, t, \lambda) \cdot f(t) dt = e^x + \lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-t)} \cdot e^t dt =$$

$$= e^x + \lambda e^{(\lambda+1)x} \int_0^x e^{-\lambda t} dt = e^x - e^{(\lambda+1)x} e^{-\lambda t} \Big|_0^x = e^x - e^{(\lambda+1)x} (e^{-\lambda x} - 1) = e^{(\lambda+1)x}$$

при $\lambda = 1$:

$$y(x) = e^{2x}$$

§ 3. Ур-ия Фредгольма с вырожд. ядром.

Ядро $K(x, t)$ ур-ия Фредгольма наз. вырожденным, если

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^m p_k(x) q_k(t) \quad \text{где ф-ции } p_k(x), q_k(t) \text{ непр. на } [a, b].$$

Будем так же считать, что $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\}$ лин. незав. на (a, b) , и $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)\}$ - тоже.

В этом случае фред-е ур-ия Фредгольма можно свести к реш-ию системы лин. алгебр. ур-ий.

Ур-ие с вырожд. ядром имеет вид:

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^m p_k(x) \int_a^b q_k(t) y(t) dt + f(x)$$

Ищем его реш-е в виде $y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^m C_k p_k(x).$

подст. в ур-ие:

$$f(x) + \sum_{k=1}^m C_k p_k(x) = \lambda \sum_{k=1}^m p_k(x) \cdot \int_a^b q_k(t) \cdot \left(f(t) + \sum_{j=1}^m C_j p_j(t) \right) dt + f(x)$$

Т.к. $p_k(x)$ лин. незав., то коэффициенты при $p_k(x)$ в левой и правой частях равны.

15

$$C_k = \lambda \int_a^b q_k(t) f(t) dt + \lambda \sum_{j=1}^m C_j \int_a^b p_j(t) q_k(t) dt, \quad k=1, \dots, m$$

$$C_k - \lambda \sum_{j=1}^m C_j \int_a^b p_j(t) q_k(t) dt = \lambda \int_a^b q_k(t) f(t) dt$$

Обозн. $f_k = \lambda \int_a^b q_k(t) f(t) dt, \quad a_{kj} = \int_a^b p_j(t) q_k(t) dt,$

тогда $C_k - \lambda \sum_{j=1}^m a_{kj} C_j = f_k$

Т.е. $\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix}$

— нем-е сист. лин. анр. ур-ий

$$(E - \lambda A) \bar{C} = \bar{F}, \text{ где } F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Пр.

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \cdot \sin t + \pi t) y(t) dt + \sin 2x$$

$K(x, t) = \sin x \cdot \sin t + \pi t$ — берем. ещо
 $p_1(x) \quad q_1(t) \quad p_2(x) \quad q_2(t)$

$p_1(x) = \sin x, \quad p_2(x) = \pi$ — лин. незав.

$q_1(t) = \sin t, \quad q_2(t) = t$ — лин. незав.

Ищем нем-е в виде $y(x) = C_1 \underbrace{\sin x}_{p_1(x)} + C_2 \underbrace{\pi}_{p_2(x)} + \underbrace{\sin 2x}_{f(x)}$

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} p_1(t) q_1(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi$$

$$a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} p_1(t) q_2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \pi \sin t dt = 0$$

$$a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} p_2(t) q_1(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt = -t \cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt = -\pi \cos \pi - \pi \cos(-\pi) = 2\pi$$

$$a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} p_2(t) q_2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \pi t dt = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E - \lambda A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda q_1(t) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \sin 2t dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - \cos 3t) dt = 0$$

$$f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda q_2(t) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin 2t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2t dt = -\frac{1}{\pi} t \cos 2t \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2t dt = -\frac{1}{\pi} \cdot \pi \cos 2\pi = -1$$

6]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-2c_1 + c_2 = -1$$

$$c_2 = 2c_1 - 1$$

$$c_1 = C - \text{любое}, \quad c_2 = 2C - 1$$

$$y = C \sin x + (2C - 1) \pi + \sin 2x$$

§4. Сведения ур-ий Вольтерра

к задачам Коши для обыкновенных дифф. ур-ий и их систем.
Рассм. задачу Коши для ОДУ 1-го порядка: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Интегрируя обе части, получим
интегр. ур-ие: $\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$; $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$, эквив-е задаче Коши.

Иногда удобно исслед-ть интегр. ур-ия Вольтерра, сводя их к задачам

Коши для обыкновенных дифф. ур-ий или их систем. Это не всегда возможно.

Важный класс ур-ий, для кот-х это всегда удается свести —

ур-ия, ядра кот-х при $t < x$ совпадет с вырожденным:

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^m p_k(x) q_k(t), \quad t < x$$

$$y(x) = \sum_{k=1}^m p_k(x) \int_0^x q_k(t) y(t) dt + f(x)$$

Обозн. $\int_0^x q_k(t) y(t) dt = u_k(x)$, тогда $u_k'(x) = q_k(x) y(x)$, $k = 1, \dots, m$

т.о., получаем систему ОДУ: $\frac{u_j'(x)}{q_j(x)} = \sum_{k=1}^m p_k(x) u_k(x) + f(x)$

Нач. усл-е: $u_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, m$

$$j = 1, \dots, m$$

Пр. $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt$

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) y(t) dt$$

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sin x \int_0^x \cos t \cdot y(t) dt - \cos x \int_0^x \sin t \cdot y(t) dt$$

Обозн. $u_1(x) = \int_0^x \cos t \cdot y(t) dt$, $u_2(x) = \int_0^x \sin t \cdot y(t) dt$,

тогда $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 0$, $u_1'(x) = \cos x \cdot y(x)$, $u_2'(x) = \sin x \cdot y(x)$

$$\begin{cases} \frac{u_1'(x)}{\cos x} = \frac{1}{1+x^2} + \sin x \cdot u_1 - \cos x \cdot u_2 \\ \frac{u_2'(x)}{\sin x} = \frac{1}{1+x^2} + \sin x \cdot u_1 - \cos x \cdot u_2 \end{cases}$$

7

$$\begin{cases} u_1'(x) = \frac{\cos x}{1+x^2} + \sin x \cdot \cos x \cdot u_1 - \cos^2 x \cdot u_2 \\ u_2'(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} + \sin^2 x \cdot u_1 - \sin x \cos x \cdot u_2 \end{cases} \begin{matrix} \cdot \cos x \\ \cdot \sin x \end{matrix}$$

$$u_1'(x) \cos x + u_2'(x) \sin x = \frac{1}{1+x^2} + \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) u_1 - \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) u_2$$

$$u_1' \cos x + u_2' \sin x = \frac{1}{1+x^2} + u_1 \sin x - u_2 \cos x$$

$$u_1' \cos x - u_1 \sin x + u_2' \sin x + u_2 \cos x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(u_1 \cos x)' + (u_2 \sin x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(u_1 \cos x + u_2 \sin x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$u_1 \cos x + u_2 \sin x = \arctg x + C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_1(0) = u_2(0) = 0; \quad C_1 = 0$$

$$u_1 \cdot \cos x + u_2 \cdot \sin x = \arctg x$$

$$\frac{u_1'}{\cos x} = \frac{u_2'}{\sin x}; \quad u_1' \sin x - u_2' \cos x = 0 \quad - \text{множим на } \sin x$$

$$u_1' \sin x + u_1 \cos x - u_2' \cos x + u_2 \sin x = \arctg x$$

$$(u_1 \sin x)' - (u_2 \cos x)' = \arctg x$$

$$(u_1 \sin x - u_2 \cos x)' = \arctg x$$

$$u_1 \sin x - u_2 \cos x = \int \arctg x \, dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_1(0) = u_2(0) = 0;$$

$$u_1 \sin x - u_2 \cos x = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\begin{cases} u_1 \cos x + u_2 \sin x = \arctg x \\ u_1 \sin x - u_2 \cos x = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{cases} \begin{matrix} \cdot \cos x \\ \cdot \sin x \end{matrix}$$

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sin x \cdot u_1 - \cos x \cdot u_2 = \frac{1}{1+x^2} + x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

§5. Ур-ие типа свёртки.

ур-ие Вольтерра вида $y(x) = \int_a^x K(x-t)y(t)dt + f(x)$

наз. ур-ием типа свёртки

Будем считать, что $a=0$ (это всегда можно добиться, сделав замену $x-a=\tilde{x}$, $t-a=\tilde{t}$),

и ф-ции K , f и неув. ф-ция y опред. на $[0; \infty)$

Предп., что ф-ции $f(x)$ и $K(t)$ евл. оригиналами где изобр-й при преобр-ии Лапласа.

Тогда реш-е ур-ие $y(x)$ тоже евл. оригиналом.

Применим к обеим частям ур-ие

$$y(x) = \int_0^x K(x-t)y(t)dt + f(x) \quad \text{преобр-е Лапласа:}$$

$$y(x) \doteq Y(p), \quad f(x) \doteq F(p), \quad K(t) \doteq \bar{K}(p), \quad \int_0^x K(x-t)y(t)dt = (K * y)(x) \doteq \bar{K}(p)Y(p),$$

$$Y(p) = \bar{K}(p)Y(p) + F(p)$$

$$Y(p) \cdot (1 - \bar{K}(p)) = F(p)$$

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \bar{K}(p)}$$

$\Rightarrow$ находим оригинал $y(x)$

Пр.1)

$$y(x) = 1 + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)dt$$

$$y(x) \doteq Y(p), \quad 1 \doteq \frac{1}{p}, \quad \operatorname{ch} x \doteq \frac{p}{p^2-1}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2-1} \cdot Y(p);$$

$$Y(p) \cdot \left(1 - \frac{p}{p^2-1}\right) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) \cdot \frac{p^2-p-1}{p^2-1} = \frac{1}{p};$$

$$Y(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2-p-1)} = \frac{(p^2-p-1)+p}{p(p^2-p-1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2-p-1} =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{2})^2}$$

$$y(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{\frac{1}{2}x} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)$$

прим. 1.1.

1) Разложение в ряд.

ауд. 2.2.1, 2.2.2, 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5, гом. 2.2.4, 2.2.5, 2.5.2, 2.5.6

2) Ур-ие с вырост. ядром

ауд. 2.4.1, 2.4.3, 2.4.9, 2.4.10, 2.4.14, гом. 2.4.5, 2.4.6, 2.4.12, 2.4.13

3) Сведение ур-ий Вольтерра к задан. коши

ауд. 2.6.6, 2.6.8, 2.6.9, гом. 2.6.5, 2.6.10

4) Ур-ие типа свёртки

ауд. 2.7.1, 2.7.3, 2.7.4, гом. 2.7.2, 2.7.5, 2.7.6

Вариационное исчисление.

§1.

Функционал $I[y]$ - отображение, кот-е ставит в соотв-е кажд. ф-цию из нек. функц. пространства M опред. число $I[y]$.

Напр., $M = C[a, b]$ - мн-во всех непр. на $[a, b]$ ф-ций, или $M = C^1[a, b]$ - мн-во всех ф-ций $y(x)$, непр-х на $[a, b]$ вместе с произв-й $y'(x)$.

Пр. $I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y \in C^1[a, b].$

В пр-ве $C[a, b]$ определена норма: $\|y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|,$

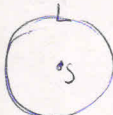
в $C^1[a, b]$: $\|y\|_{C^1[a, b]} = \|y\|_{C[a, b]} + \|y'\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|.$

Вариационное исчисление - раздел матем. анализа, посвященный различным методам исследования на экстремума функционалов. Важность вар. исчисления связана с наличием приложений в физике, механике и разл. разделах математики. (Пр. - принцип наим. действия, з-н сохранения энергии и т.д.)

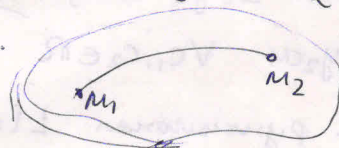
Примеры задач, приводящих к задачам вар. исчисления

1) На пов-ти S : $F(x, y, z) = 0$ найти линию наименьшей длины (геодезическую), соединяющую 2 заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

2) Найти кривую заданной длины L , огран. максимальной площадью S (изопериметрическая задача).



(это окружность)



Простейшая задача вариацион. исчисления:

найти ф-цию $y(x)$, непр-ую на $[a, b]$ вместе с произв-й $y'(x)$ ($y \in C^1[a, b]$),

такую, что функционал $I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ достигает на ф-ции $y(x)$ наибольшего (наим.) значения среди всех ф-ций $y(x) \in C^1[a, b]$.

В такой постановке задача может не иметь реш-я.

Обычно требуют, чтобы $I[y]$ достигал наиб. (наим.) значения среди всех ф-ций, удовл-х граничным усл-ям (краевым):

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad \text{где } A, B - \text{заданные числа.}$$

Гран. усл-я могут быть и более общего вида; напр.

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = A, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = B.$$

Усл-я такого типа наз. локальными, т.к. они не связывают между собой значения ф-ции и ее производных в разных точках.

2

Далее задача вариацион. исчисления будет рассм-ся в локальной постановке. Это означает, что мы будем искать лок. экстремумы функционалов, кот-е явл. максимумами (минимумами) в нек. окрестности функции $y(x)$.

Функционал $I[y]$ достигает сильного максимума [мин.] на ф-ции $y_0(x)$, если $\exists r > 0$; $\forall$ ф-ции $y(x)$, удовл. данным гранич. усл-ям, таких, что $\|y - y_0\|_{C[a,b]} < r$ выполн $I[y] \leq I[y_0]$ ($I[y] \geq I[y_0]$).

Функционал $I[y]$ достигает слабого макс. [мин.] на ф-ции $y_0(x)$, если $\exists r > 0$: $\forall$ ф-ции $y(x)$, удовл. данным гранич. усл-ям, таких, что $\|y - y_0\|_{C^1[a,b]} = \|y - y_0\|_{C[a,b]} + \|y' - y_0'\|_{C[a,b]} < r$ выполн $I[y] \leq I[y_0]$ ($I[y] \geq I[y_0]$).

В дальнейшем будем рассматривать слабые экстремумы, и символом $\|\dots\|$ будем обозначать норму $\|\dots\|_{C^1[a,b]}$.

Функционал $L[y]$ наз. линейным, если

$$\forall y_1, y_2 \in M \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2].$$

Линейный функционал $L[y]$ наз. непрерывным, если $\exists c > 0$:

$$\forall y \in M \quad |L[y]| \leq c \|y\|.$$

§2. Вариация функционала. Ур-е Эйлера. Экстремум

Рассм. простейшую задачу вариацион. исчисления.

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \max (\min)$$

$$\text{где } y \in C^1[a, b], \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Если $y(x)$ - ф-ция из рассм-го мн-ва, $h(x) \in C^1[a, b]$, $h(a) = h(b) = 0$.
(Область опр-е функционала)

то $y(x) + h(x)$ - тоже ф-ция из рассм-го мн-ва.

Обозн. через $\Delta I[y]$ приращ-е функционала:

$$\Delta I[y] = I[y + h] - I[y].$$

3

опр. Функционал $I[y]$ наз. дифференцируемым на ф-ции y , если его приращ-е можно предст. в виде

$$\Delta I[y] = I[y+h] - I[y] = L[h] + o(\|h\|),$$

где $L[h]$ - линейный непр-й функционал, наз-й первой вариацией функционала $I[y]$, обозн. $L[h] = \delta_y[h]$.

(Т) (необх. усл-е экстремума)

Если $y(x)$ доставляет функционалу $I[y]$ экстремум, то

$$\delta_y[h] = 0 \quad \text{для любых приращ-е } h. \quad (\text{без грк.})$$

Пр. $I[y] = \int_a^b (y^2 + (y')^2) dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$

$$\begin{aligned} \Delta I[y] &= I[y+h] - I[y] = \int_a^b (y+h)^2 + (y'+h')^2 - y^2 - (y')^2 dx = \\ &= \int_a^b (y^2 + 2yh + h^2 + (y')^2 + 2y'h' + (h')^2 - y^2 - (y')^2) dx = \\ &= \underbrace{\int_a^b (2yh + 2y'h') dx}_{L[h] - \text{лин. функционал от } h} + \underbrace{\int_a^b (h^2 + (h')^2) dx}_{o(\|h\|)}. \end{aligned}$$

Первое вариация: $\delta_y[h] = \int_a^b (2yh + 2y'h') dx$.

Если $y \in C^2[a, b]$, то ^{можно} выполнить интегрир-е по частям:

$$\begin{aligned} \delta_y[h] &= \int_a^b 2yh dx + \int_a^b 2y'h' dx = \left\{ \begin{array}{l} u = y', du = y'' dx \\ dv = h' dx, v = h \end{array} \right\} = \int_a^b 2yh dx + \underbrace{2y'h(x)}_0 \Big|_a^b - \\ &- \int_a^b 2y'' h dx = 2 \int_a^b (y'' - y) h dx. \end{aligned}$$

Если функционал достигает экстремума на ф-ции $y(x)$, то

$$2 \int_a^b (y'' - y) h dx = 0 \quad \forall h \in C^1[a, b] \text{ такой, что } h(a) = h(b) = 0.$$

Отсюда след., что $2(y'' - y) = 0, \quad \underline{y'' - y = 0}.$

4

(Т) (необх. усл-е экстремума)

Если $y(x)$ - ф-ция, доставляющая экстремум функционалу

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad \text{при усл-ях } y(a) = A, y(b) = B,$$

где $F(x, y, y')$ дважды дифф-ма, и $\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \neq 0$, то

$y(x)$ - дважды дифф-ма и удовл. уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} (x, y, y') \right) = 0.$$

Реш-е ур-ия Эйлера наз. экстремалью функционала.

Док. Пусть $I[y]$ достиг. локального экстр. на ф-ции $y(x)$.

Пусть $h \in C^1[a, b]$, $h(a) = h(b) = 0$.

Рассм. ф-цию $\varphi(\varepsilon) = I[y + \varepsilon h] = \int_a^b F(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') dx$.

Она непр. и дифф-на по ε и имеет при $\varepsilon = 0$ лок. экстремум.

Сл-но, $\varphi'(\varepsilon) = 0$.

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') \cdot h + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') \cdot h' \right) dx \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') \cdot h + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') \cdot h' \right) dx = \begin{cases} u = \frac{\partial F}{\partial y'}, du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \\ dv = h' dx, v = h \end{cases} =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \cdot h dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot h(x)}_0 \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot h dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) h dx = 0$$

для любой $h \in C^1[a, b]$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$.

Отсюда след., что $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$. $\square$

Зам. Необх. усл-е экстремума не явл. достаточным.

Дост. усл-е формулируется достаточно сложно, и мы его рассматривать не будем.

Но зачастую из физических, геометрических и др. соображений бывает ясно, доставляет ли данное экстремаль $y(x)$ функционалу максимум или минимум.

5

Частные случаи:

1) Если $F(x, y, y') = F(y')$, то $-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y'' = 0$$

Т.к. $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$, то $y'' = 0$, $y = C_1 x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2) $F = F(x, y')$ (не зав. от y)

уравнение Эйлера: $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$, $-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$

3) $F = F(y, y')$ (не зав. от x)

$\frac{\partial F}{\partial y'} \rightarrow y' \rightarrow x$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y'' \right) = 0$$

Умножив на y' : $y' \frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \cdot (y')^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y' y'' \right) = 0$

это уравнение равносильно уравнению: $\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$, $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1$

$F \rightarrow y \rightarrow x$
 $\rightarrow y' \rightarrow x$

действительно, преобразуем его:

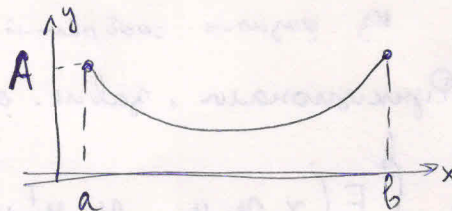
$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot y'' - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' \right) = 0$$

Пр.

Рассм. нерастетимую тонкую однородную цепь, закрепленную на концах:

$$y(a) = y(b) = A$$

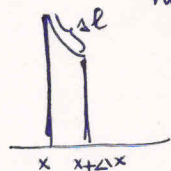
$y(x)$ - высота цепи в точке $x \in [a, b]$.



Найдем, какую форму должна иметь цепь, чтобы её потенциальная энергия была минимальной.

Пусть $\rho = \text{const}$ - плотность.

потенциальная энергия участка от x до $x + \Delta x$



$$\Delta E \approx \rho g y(x) \cdot \Delta l \approx \rho g \cdot y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} \Delta x$$

$$I[y] = \underbrace{\rho g}_C \int_a^b \underbrace{y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}}_{F(y, y')} dx \rightarrow \min, \quad y(a) = y(b) = A$$

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1$$

6

$$y \sqrt{1+(y')^2} - y \cdot y' \cdot \frac{xy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

$$y \frac{1+(y')^2 - (y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

$$\frac{y}{C_1} = \sqrt{1+(y')^2}$$

$$\frac{1}{C_1} = \tilde{C}_1$$

$$(C_1 y)^2 = 1 + (y')^2$$

$$(y')^2 = (C_1 y)^2 - 1$$

$$y' = \pm \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \pm dx$$

$$\frac{1}{C_1} \operatorname{Arch} C_1 y = \pm (x + C_2)$$

$$\operatorname{Arch}(C_1 y) = \pm C_1 (x + C_2)$$

$$C_1 y = \operatorname{ch}(C_1 (x + C_2))$$

$$y = \frac{1}{C_1} \operatorname{ch}(C_1 (x + C_2)) \quad - \text{экстремали}$$

$$\text{Г.к. } y(a) = y(b) = A, \text{ то } \frac{1}{C_1} \operatorname{ch}(C_1 (a + C_2)) = \frac{1}{C_1} \operatorname{ch}(C_1 (b + C_2))$$

$$a + C_2 = -(b + C_2)$$

$$2C_2 = -(a+b), \quad C_2 = -\frac{a+b}{2}$$

$$y = \frac{1}{C_1} \operatorname{ch}\left(C_1 \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)$$

$$\text{где } C_1 \text{ находим из условия } y(b) = A; \quad A = \frac{1}{C_1} \operatorname{ch}\left(C_1 \left(b - \frac{a+b}{2}\right)\right), \\ C_1 A = \operatorname{ch}\left(\frac{C_1}{2}(b-a)\right)$$

из физик-х соображений понятно, что экстремаль дост. функционалу минимум.

§ 3. Функционалы, завис. от неск. ф-ций.

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx \rightarrow \min (\max) \\ \text{при } y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Теор. (необх. усл-е экстремума)

Если набор ф-ций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ составляет функционалу

$I[y_1, y_2, \dots, y_n]$ экстремум, то этот набор явл. р-ем-ем системы дифф. ур-ий Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

(без гом.)

7

Пр. Найти кривую мин. длины, сог. 2 заданные точки в пр-ве: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \quad I[y] = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2+(z')^2} dx \rightarrow \min$$

граница кривой

$$y(a)=y_1, \quad z(a)=z_1, \quad y(b)=y_2, \quad z(b)=z_2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0; \quad 0 - \frac{d}{dx} \left(\frac{z' y'}{z \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}} \right) = 0$$

$$- \frac{y'' \sqrt{1+(y')^2+(z')^2} - y' \cdot \frac{z y' y''}{z \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}}{1+(y')^2+(z')^2} = 0$$

$$- \frac{y''(1+(y')^2+(z')^2 - (y')^2)}{\sqrt{(1+(y')^2+(z')^2)^3}} = 0; \quad y''(1+(z')^2) = 0, \quad y'' = 0, \quad y = C_1 x + C_2$$

Аналогично из ур-ия $\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0, \quad z'' = 0, \quad z = C_3 x + C_4$

Экстремали: $\begin{cases} y = C_1 x + C_2 \\ z = C_3 x + C_4 \end{cases}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ находятс из гранич. усл-ий.}$

Из пом. соображений ясно, что экстремали доставляет функционалу минимум.

§4. Функционалы, завис. от произв-х высших порядков

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \rightarrow \min (\max)$$

$$y \in C^n[a, b],$$

$$y^{(k)}(a) = A_k, \quad y^{(k)}(b) = B_k, \quad k=0, 1, \dots, n-1$$

Зам. Могут быть краевые усл-я более сложного вида, где связаны знат-е ф-ции и её произв-х.

Теор. (необх. усл-е экстремума)

Если ф-ция $y(x)$ доставляет функционалу $I[y]$ экстремум при заданных краевых усл-ях, то она евл. реш-ем уравн. Эйлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0.$$

(без док.)

8

Пр.

$$I[y] = \int_0^1 (y^2 + (y'')^2) dx$$

Найти экстремали функционала при усях

$$y(0) = A_1, \quad y'(0) = A_2, \quad y(1) = B_1, \quad y'(1) = B_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$$

$$2y - \frac{d}{dx}(0) + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$$

$$y^{(4)} + y = 0$$

$$\lambda^4 + 1 = 0$$

$$\lambda^4 = e^{i\pi}$$

$$\lambda_k = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{4}}$$

$$\lambda_{1,2} = \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \cos \frac{3\pi}{4} \pm i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = c_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 можно найти из краевых усях

1) ауд. 3.2.1, 3.2.3, 3.2.5, 3.2.8

гол. 3.2.2, 3.2.6, 3.2.7

2) ауд. 3.4.3, 3.4.6, 3.5.1, 3.5.4

гол. 3.4.1, 3.4.5, 3.5.2

Функции Бесселя

Ур-ие Бесселя индекса ν :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

Это лнн. ур-ие 2го порядка с перем. коэф-тами

$$(T) \text{ Ф-ции } J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad \text{и} \quad J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

есть его реш-ния

Док. подст. $y = J_\nu(x)$ в ур-ие $x^2 y'' + x y' - \nu^2 y = -x^2 y$.

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \cdot \frac{(\nu+2k) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \cdot \frac{(\nu+2k)(\nu+2k-1) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-2}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}$$

$$x^2 y'' + x y' - \nu^2 y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left((\nu+2k)(\nu+2k-1) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-2} \cdot x^2 + (\nu+2k) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1} \cdot x - \nu^2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{(\nu+2k)(\nu+2k-1) + (\nu+2k) - \nu^2}{4} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{4k(\nu+k)}{4} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \cdot 4(k+\nu)k \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)! \Gamma(k+\nu)} \cdot 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} = \left\{ \begin{matrix} k-1=m \\ k=m+1 \\ 0 \leq m < \infty \end{matrix} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \cdot 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k+2}$$

$$= -x^2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} = -x^2 y. \quad \text{Для } J_{-\nu} \text{ - аналогично}$$

Если ν - целое, то $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ лнн. незав., и общее реш-е ур-ия Бесселя имеет вид

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

Если $\nu = \frac{1}{2} + k$, где k - целое, то $J_\nu(x)$ выраз. через элем. ф-ции.

Напр., где $\nu = \frac{1}{2}$:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} = \left\{ \Gamma(k+\frac{3}{2}) = (k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2}) = (k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2}) \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1) \sqrt{\pi}}{2^{k+1}} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1) \sqrt{\pi}}{2^{k+1}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x}{2}} \cdot x^{2k}}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1)}{2^{k+1}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x}{2}} \cdot x^{2k}}{2^{2k}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi} x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{2}{\sqrt{\pi} x} \sin x$$

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} = \left\{ \Gamma(k+\frac{1}{2}) = (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \sqrt{\pi}}{2^k} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \sqrt{\pi}}{2^k}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} =$$

$$\boxed{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \cdot 2^k}{2^k k! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdot 2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

Пр. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

$$y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$$

$$y = c_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x + c_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

⊕

Еще $\nu = n$ - целое, то $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

Доказ. $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{n+2k}}{k! \Gamma(k+n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{n+2k}}{k! (k+n)!}$

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{-n+2k}}{k! \Gamma(k-n+1)} = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(k-n+1) = \infty \\ \text{при } k-n+1 \leq 0 \\ k \leq n-1 \\ \text{множим } n \leq k < \infty \end{array} \right\} = \sum_{k \geq n} (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{-n+2k}}{k! \underbrace{\Gamma(k-n+1)}_{(k-n)!}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} k-n=m \\ 0 \leq m < \infty \\ k=m+n \end{array} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} (\frac{x}{2})^{-n+2(m+n)}}{m! (m+n)!} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{-n+2m}}{m! (m+n)!} = (-1)^n J_n(x)$$

□

Как записать общее решение ур-ия Бесселя 2 рода и целое $\nu = n$?
 Для этого определим ф-цию Бесселя 2 рода:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (\nu - \text{нечетное}),$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) \quad (n - \text{целое})$$

$J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ - л.н.зав., и $Y_\nu(x)$ - решение ур-ия Бесселя порядка ν (без гр.к.)

Общее решение ур-ия Бесселя можно записать в виде

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$$

(в том числе и где целое $\nu = n$).

⊕

Для целого $\nu = n$ справедлива ф-ла

$$J_n(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3]

$$\begin{aligned}
 \text{Dok. } \int_0^\pi e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi &= \int_0^\pi e^{-in\varphi} \cdot e^{ix \sin \varphi} d\varphi = \int_0^\pi e^{-in\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix \sin \varphi)^k}{k!} d\varphi = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \int_0^\pi e^{-in\varphi} (\sin \varphi)^k d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \int_0^\pi e^{-in\varphi} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^k d\varphi = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k \cdot k!} \int_0^\pi e^{-in\varphi} \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} (e^{i\varphi})^m (e^{-i\varphi})^{k-m} d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{x^k \cdot (-1)^{k-m}}{2^k \cdot m!(k-m)!} \int_0^\pi e^{i\varphi(-n+m-k+m)} d\varphi = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{x^k \cdot (-1)^{k-m}}{2^k \cdot m!(k-m)!} \int_0^\pi e^{i\varphi(2m-n-k)} d\varphi.
 \end{aligned}$$

Если $2m-n-k = a \neq 0$, то $\int_0^\pi e^{i\varphi a} d\varphi = \frac{1}{ai} e^{i\varphi a} \Big|_0^\pi = -\frac{i}{a} (e^{i\pi a} - 1) = -\frac{i}{a} (\cos \pi a + i \sin \pi a - 1) =$

это ненулевое число.

Если $2m-n-k = 0$, то $\int_0^\pi e^{i\varphi \cdot 0} d\varphi = \pi$ — ненулевое число

Т.о., $\int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi = \operatorname{Re} \int_0^\pi e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{x^k \cdot (-1)^{k-m}}{2^k \cdot m!(k-m)!} \int_0^\pi e^{i\varphi(2m-n-k)} d\varphi$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{останется только} \\ \text{слагаемое,} \\ \text{где } 2m-n-k=0 \\ m=\frac{n+k}{2}, k=2m-n \end{array} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=m \\ k=2m-n \\ 2m-n \geq m, m \geq n}}^{\infty} (\dots) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{x^{2m-n} \cdot (-1)^{2m-n-m}}{2^{2m-n} \cdot m!(2m-n-m)!} =$

$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{x^{2m-n} \cdot (-1)^{m-n}}{2^{2m-n} \cdot m! \cdot (m-n)!} = \left\{ \begin{array}{l} m-n=j \\ 0 \leq j < \infty \\ m=j+n \end{array} \right\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+2n-n} \cdot (-1)^j}{2^{2j+2n-n} \cdot (j+n)! \cdot j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}}{j! \cdot (j+n)!} = J_n(x)$

