

В декартовой системе координат $x; y; z$; $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, оператор «набла»

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{П7})$$

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (\text{П8})$$

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv (\nabla \cdot \mathbf{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (\text{П9})$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = [\nabla \times \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right), \quad (\text{П10})$$

2. Интегральные тождества

Интегральная теорема о градиенте (рис. П1)

$$\int_V \text{grad } \varphi dV = \oint_S \varphi d\mathbf{S}. \quad (\text{П29})$$

Интегральная формула Гаусса–Остроградского (интегральная теорема о дивергенции) (рис. П2)

$$\int_V \text{div } \mathbf{a} dV = \oint_S \mathbf{a} d\mathbf{S} \quad (\text{П30})$$

и родственная ей векторная формула (*интегральная теорема о роторе*) (рис. П3)

$$\int_V \text{rot } \mathbf{a} dV = \oint_S [d\mathbf{S} \times \mathbf{a}], \quad (\text{П31})$$

где S – произвольная поверхность, ограничивающая объем V ; $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ – векторный элемент поверхности; $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к элементу dS поверхности.

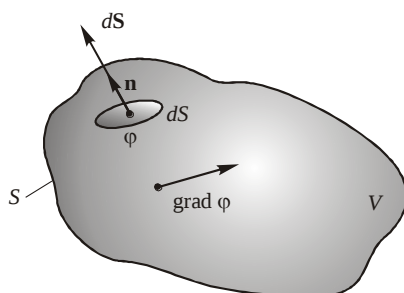


Рис. П1

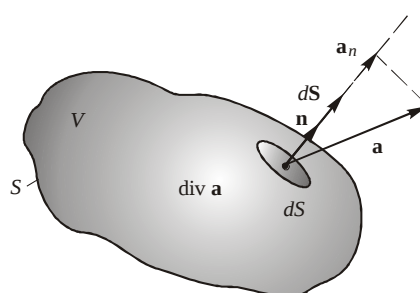


Рис. П2

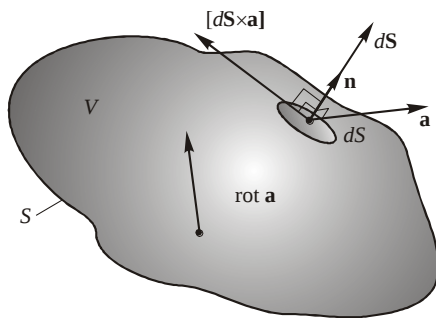


Рис. П3

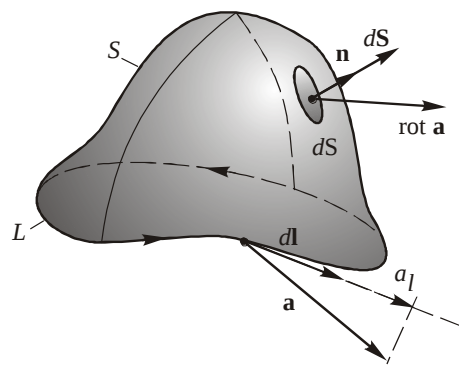


Рис. П4

Интегральная формула Стокса (рис. П4)

$$\oint_L \mathbf{a} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{a} d\mathbf{S}, \quad (\text{П32})$$

где S – произвольная поверхность, опирающаяся на замкнутый контур L . Направление $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ ($\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к элементу dS поверхности) связано с направлением обхода контура правилом правого винта, $\mathbf{a} d\mathbf{l} = a_l dl$, где $dl = |d\mathbf{l}|$, a_l – проекция вектора $\mathbf{a}$ на $d\mathbf{l}$.

Отсюда следуют предельные определения $\text{grad } \phi$, $\text{div } \mathbf{a}$ и $\text{rot } \mathbf{a}$:

$$\text{grad } \phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \phi d\mathbf{S}}{V}, \quad \text{div } \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{a} d\mathbf{S}}{V}, \quad (\text{rot } \mathbf{a})_{\mathbf{n}} = \lim_{S_{\mathbf{n}} \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{a} d\mathbf{l}}{S_{\mathbf{n}}}, \quad (\text{П33})$$

где V – объем, ограниченный поверхностью S ; $(\text{rot } \mathbf{a})_{\mathbf{n}}$ – проекция $\text{rot } \mathbf{a}$ на нормаль $\mathbf{n}$ к произвольно ориентированной бесконечно малой площадке $S_{\mathbf{n}}$, ограниченной замкнутым контуром L , обход которого в интеграле связан с направлением $\mathbf{n}$ правилом правого винта.

