

Лекция 19. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$. Закон Био-Савара-Лапласа и использование его для расчёта магнитных полей. Сила Ампера. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле. Эффект Холла

(29.04.08, 01.09.10, 12.02.13, 09.02.14, 01.09.15, 31.08.18)

Обязательно прочитать из Гл.14 §109, §110, §111, §112, §113, §114, §115, §116 по учебнику Т.И.Трофимовой. Курс физики.

Практикум 16.

По пособию «Задачи по физике», Часть 2: практикум 1, практикум 2 Разобрать Примеры и сделать домашнее задание.

Магнитостатика. Магнитное поле

Термин «магнитное поле» был введен 1845 году английским физиком М.Фарадеем. Магнитным полем называют материальную субстанцию, посредством которой передается силовое взаимодействие между движущимися электрическими зарядами. Это взаимодействие оказалось родственным взаимодействию между постоянными магнитами. Магнитные свойства железа и железной руды известны с глубокой древности. В 1820 году Х.К.Эрстед открыл, что магнитная стрелка компаса отклоняется вблизи проводника с током. Примерно в то же время А.М.Ампер обнаружил взаимное действие двух проводников с током.

Элемент тока

Если проводник, по которому течет электрический ток, имеет малые поперечные размеры и при этом нас не интересует распределение тока по его сечению, то при решении многих задач такой проводник можно считать *бесконечно тонким проводом* (своеобразный аналог моделей точечного и линейного зарядов). В этом случае вместо *объемного элемента тока* $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)dV$ удобно использовать так называемый *линейный элемент тока* $I d\mathbf{l}$, где $d\mathbf{l}$ – векторный элемент длины контура, образованного бесконечно тонким проводом, вдоль которого течет электрический ток I . Действительно, всякий короткий участок тонкого провода можно считать малым цилиндром с образующей $d\mathbf{l}$ (высоты $dl = |d\mathbf{l}|$) и основанием, являющимся поперечным сечением провода S . Объем такого цилиндра $dV = S d\mathbf{l}$, текущий вдоль него ток $I = \mathbf{j}S$, поэтому для него выполня-

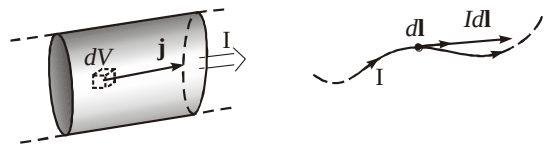


Рис. 1

ется равенство $\mathbf{j}dV = Id\mathbf{l}$ (рис. 1). Таким образом, при введении модели *бесконечно тонкого провода* (при $S \rightarrow 0$) справедлив интегральный предельный переход

$$\int_V f(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dV \Rightarrow \int_L f(\mathbf{r}, t) Id\mathbf{l}, \quad (0)$$

где L – контур, образуемый проводом, а $f(\mathbf{r}, t)$ – некоторая функция.

Вектор магнитной индукции. Закон Био-Савара-Лапласа

Опыт показывает, что между проводниками, по которым протекают постоянные электрические токи, возникают силы взаимодействия, зависящие от величины токов и взаимного расположения проводников в пространстве. Оказывается, что по своей физической природе и свойствам эти силы родственны силам, возникающим между постоянными магнитами, а также между проводниками с током и магнитами. Взаимодействие токов с самого начала удобно описывать в соответствии с принципом близкодействия, применяя понятие **магнитного поля** (этот термин введен М. Фарадеем в 1845 году). Магнитное поле создается движущимися зарядами и действует на движущиеся заряды, те и другие заряды образуют токи, о взаимодействии которых мы говорим. Стационарные (постоянные во времени) токи создают постоянное магнитное поле, взаимодействие постоянных токов и постоянного магнитного поля изучает **магнитостатика**. Подчеркнем, что здесь, как и в электростатике, речь идет о макроскопических, усредненных по микроскопическим масштабам пространства и времени характеристиках реальных токов и электромагнитного поля.

Линейные токи

Основная силовая характеристика магнитного поля называется **вектором индукции магнитного поля** $\mathbf{B}$. Любой линейный элемент стационарного (постоянного) тока $I_1 d\mathbf{l}_1$ создает в окружающем пространстве не зависящее от времени (*постоянное*) **магнитное поле**, характеризуемое вектором индукции $d\mathbf{B}$ и

описываемое (в вакууме или в однородной и изотропной среде) установленным на опыте **законом Био-Савара-Лапласа**

:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента тока $I_1 d\mathbf{l}_1$ в точку наблюдения поля $d\mathbf{B}$. Безразмерный параметр μ в числителе называется *магнитной проницаемостью вещества*, он учитывает влияние макроскопической среды. Вектор $d\mathbf{B}$ перпендикулярен векторам $I_1 d\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r}$ (**по правилу правого винта** или **правой руки**), его силовые линии являются окружностями, нанизанными на прямую, проходящую через вектор $I_1 d\mathbf{l}_1$.

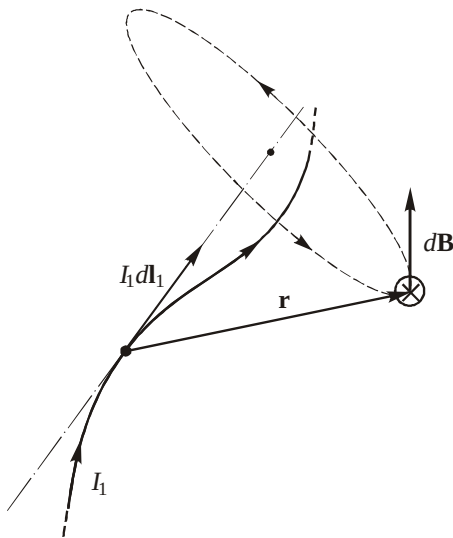


Рис. 2

Абсолютная величина $d\mathbf{B}$ равна

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \sin \alpha}{r^2}$$

то есть $|d\mathbf{B}| \sim 1/r^2$ убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от элемента тока (рис. 2).

В системе единиц СИ единицей индукции магнитного поля является Тесла (Тл), ей соответствует размерность $[B] = MT^{-2}I^{-1}$, это связано с введением *магнитной постоянной*

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}} \approx 12,566 \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}}.$$

Принцип суперпозиции

В данной точке пространства индукция магнитного поля **B**, порождаемого системой движущихся зарядов, равна векторной сумме индукций магнитных полей, порождаемых в этой точке каждым движущимся зарядом

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_j \quad (1.1)$$

Принцип суперпозиции для магнитного поля позволяет в любой точке пространства найти вектор магнитной индукции **B**, создаваемый системой линейных токов, интегрированием по всем контурам с током *L*:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (2)$$

Сила Ампера.

Также экспериментально установлено, что на помещенный в магнитное поле с индукцией **B** линейный элемент тока $I_2 d\mathbf{l}_2$ действует механическая **сила Ампера**

$$d\mathbf{F}_A = I_2 [d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}]. \quad (3)$$

Это выражение можно использовать для экспериментального определения индукции магнитного поля **B**. Направление вектора $d\mathbf{F}_A$ определяется векторным произведением $[I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}]$ (правый винт), что в данном случае соответствует правилу левой руки (рис. 3).

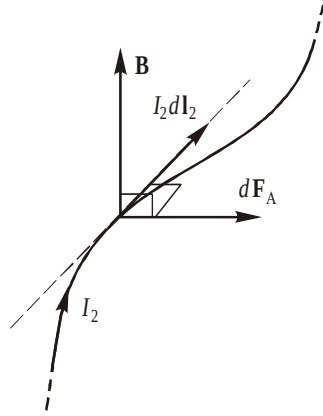


Рис. 3

Поворачивая элемент тока, нетрудно *измерить* абсолютную величину индукции магнитного поля, она равна максимальной (при $I_2 dl_2 \perp \mathbf{B}$) силе действия поля на единичный элемент тока, выражаемой отношением $B = |d\mathbf{F}_{A \max}| / |I_2 dl_2|$. Модуль силы Ампера равен

$$dF_A = I_2 dl_2 B \sin \alpha$$

где α - угол между векторами dl_2 и $\mathbf{B}$.

Полная сила Ампера, действующая на контур с током I , дается интегралом

$$\mathbf{F}_A = \oint_L I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (4)$$

Аналогия с электростатикой

Соотношения (1) и (3) по своему физическому смыслу аналогичны соотношениям (0.1) электростатики,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{e_1}{r^2} \mathbf{n}, \quad \mathbf{F} = e_2 \mathbf{E}, \quad (0.1)$$

когда в соответствии с принципом близкодействия кулоновскую силу

$$\mathbf{F} = k \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2} \mathbf{n}, \quad (0.2)$$

с которой заряд e_1 действует на заряд e_2 , записывают в виде двух формул (0.1).

Закон Ампера. Сила Лоренца

Следует только помнить, что в отличие от точечного заряда элемент тока не может быть изолированным, он всегда является частью некоторой цепи. Действительно, магнитный аналог закона Кулона мы получим, если в (3) вместо величины $\mathbf{B}$ подставим $d\mathbf{B}$ из (1), это даст выражение для силы dF_{12} , с которой линейный элемент тока $I_1 d\mathbf{l}_1$ действует на другой линейный элемент тока $I_2 d\mathbf{l}_2$ (*закон Ампера*):

$$dF_{12} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r^3} [d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}]], \quad (5)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента тока $I_1 d\mathbf{l}_1$ к элементу тока $I_2 d\mathbf{l}_2$. Взаимодействие элементов тока не подчиняется третьему закону Ньютона: легко видеть, что сила $-dF_{12}$ не равна силе dF_{21} , действующей на первый элемент тока со стороны второго (она получается из (5) перестановкой $d\mathbf{l}_1$ с $d\mathbf{l}_2$ и изменением знака $\mathbf{r}$).

Объемные токи и магнитная сила Лоренца

Если мы имеем дело не с линейными, а с *объемными токами*, то, применяя правило замены $I d\mathbf{l} \Rightarrow \mathbf{j} dV$ (см. (0)), легко выписать соответствующие предыдущим выражения закон **Био-Савара-Лапласа** для поля элемента *объемного тока*

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (8)$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'$ – объемный элемент тока, расположенный в точке $\mathbf{r}'$ и создающий в точке $\mathbf{r}$ магнитное поле с индукцией $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$; вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ проведен из точки $\mathbf{r}'$ в точку наблюдения поля $\mathbf{r}$ (рис. 4).

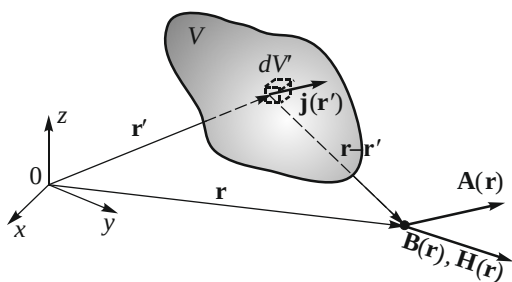


Рис.4

Тогда магнитная индукция $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ поля токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$, текущих в объеме V , дается интегралом

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (9)$$

Это соотношение является магнитным аналогом соотношения электростатики

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Сила Ампера, действующая в магнитном поле $\mathbf{B}$ на объемный элемент тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})dV$, есть

$$d\mathbf{F}_A(\mathbf{r}) = [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] dV, \quad (10)$$

а полная сила, действующая на все токи в объеме V , равна

$$\mathbf{F}_A = \int_V [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] dV. \quad (11)$$

Пусть стационарный ток создается точечными зарядами e_i , движущимися с постоянными скоростями $\mathbf{v}_i$, тогда плотность тока можно записать как

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_i e_i \mathbf{v}_i n_i(\mathbf{r}), \quad (12)$$

здесь $n_i(\mathbf{r})$ - концентрация зарядов e_i . Количество заряженных частиц сорта e_i в элементе объема dV равно $dN_i = n_i(\mathbf{r})dV$, где N_i - полное число зарядов e_i , поэтому после интегрирования (11) можно записать в виде суммы по отдельным заряженным частицам

$$\mathbf{F}_A = \sum_i e_i [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)] N_i = \sum_i N_i \mathbf{F}_{\text{Л}i}. \quad (13)$$

Через $\mathbf{F}_{\text{Л}i}$ обозначена векторная величина

$$\mathbf{F}_{\text{Л}i} = e_i [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}]. \quad (14)$$

которую называют *силой Лоренца*, с которой магнитное поле $\mathbf{B}$ действует на i -ю заряженную частицу. В обозначениях заряда $e_i = q$ и скорости $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$ частицы *силу Лоренца* записывают в виде

$$\mathbf{F}_{\text{Л}} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (15)$$

Направление силы Лоренца определяется так же, как и направление силы Ампера по правилу векторного произведения $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$, т.е. по **правилу правого винта (буравчика)**, но ему соответствует **правило левой руки** (пальцы левой руки ориентируем по току, силовые линии входят в ладонь, а отведенный большой палец указывает направление действия силы). Модуль силы Лоренца равен

$$dF_A = qBv \sin \alpha$$

где α - угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$. **Сила Лоренца (магнитное поле) не совершает работу!** Действительно, работа по перемещению заряда q на перемещении $d\mathbf{r}$ равна

$$A = \mathbf{F}_{\text{Л}} d\mathbf{r} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] d\mathbf{r} = q([\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\mathbf{v}) dt = 0$$

так как скорость частицы $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и ее перемещение $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, а смешанное произведение $([\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\mathbf{v}) = 0$, потому что сила Лоренца всегда перпендикулярна вызываемому ей перемещению.

Поле одного движущегося точечного заряда

В классической электродинамике изучаются поля зарядов, движущихся медленно по сравнению со скоростью света $v \ll c$, в этих условиях поле точечного заряда e на расстоянии $\mathbf{R}$ от него

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{R^2} \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{R}]}{R}, \quad (\times)$$

Эти выражения характеризуют поле точечного заряда, движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью. Абсолютные величины $|\mathbf{E}|$ и $|\mathbf{B}|$ убывают обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда R . Но это отнюдь не статическое кулоновское электрическое поле и магнитное поле Био–Савара. Поля $(\times)$ перемещаются в пространстве вместе с движущимся зарядом, и поскольку $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, то в каждой фиксированной точке наблюдения $\mathbf{r}$ поле является переменным по времени (нарастает по мере приближения и убывает по мере удаления заряда).

Магнитное поле всегда имеет релятивистскую природу, то есть его происхождение принципиально объясняется теорией относительности !!!!!!!!!. Оно появляется за счет перехода в систему отсчета, относительно которой заряд, создающий поле, движется. Этот переход описывается формулами преобразований Лоренца. При этом с ростом скорости заряда происходит своеобразное «сплющивание» электрического поля в направлении движения, а вектор индукции магнитного поля пропорционален векторному произведению напряженности электрического поля и скорости заряда, т. е. перпендикулярен к ним (рис. 1, б)

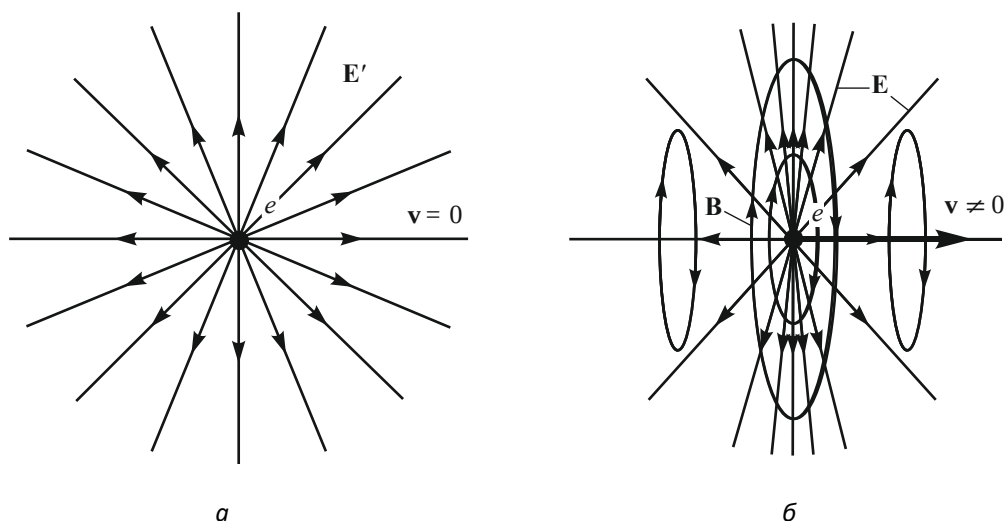


Рис. 1

Если в системе отсчета (а) заряд покоится и магнитного поля нет, то

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{(r')^2} \frac{\mathbf{r}'}{r'}, \quad \mathbf{B}' = 0,$$

при этом в системе отсчета (б), относительно которой заряд движется со скоростью $\mathbf{v}$, появляется магнитное поле и электрическое поле сплющивается в направлении $\mathbf{v}$, так что

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}].$$

где θ - направление на точку наблюдения поля, $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$.

Закон Био-Савара-Лапласа

Пусть по тонкому проводнику течет ток I , скорость упорядоченного движения носителей заряда (дрейфовая скорость) $\mathbf{v}$, тогда вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$ определяется так

$$d\mathbf{B} = \tilde{k} \frac{dq\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.2)$$

где $\tilde{k} = \mu_0\mu / 4\pi$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м, $dq = enSdl$, $dq\mathbf{v} = enSdl\mathbf{v}$, $\mathbf{j} = en\mathbf{v}$, $dq\mathbf{v} = \mathbf{j}Sdl$, $\mathbf{j}Sdl = Idl$, $dq = Idt$, таким образом, (1.2) можно представить в виде

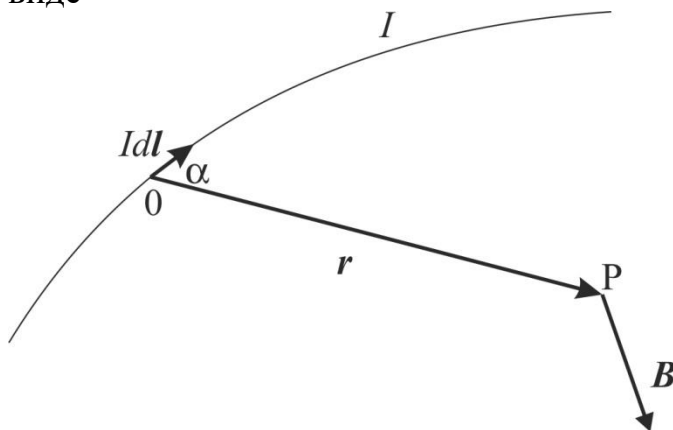


Рис.1.1.

$$d\mathbf{B} = \tilde{k} \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.3)$$

Био и Савар в 1820 году накопили экспериментальный материал, а Лаплас на этой основе установил выражение для индукции магнитного поля (1.3). Вектор $d\mathbf{B}$ перпендикулярен плоскости, проходящей векторы Idl и $\mathbf{r}$, направление $d\mathbf{B}$ определяется правилом правого винта (буравчика), по модулю $d\mathbf{B}$ из (1.3) равно

$$dB = \tilde{k} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}. \quad (1.4)$$

Согласно принципу суперпозиции магнитная индукция $\mathbf{B}$ от бесконечно тонкого проводника с током есть

$$\mathbf{B} = \int_{\Gamma} d\mathbf{B} = \int_{\Gamma} \tilde{k} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.5)$$

где интегрирование производится по длине проводника.

Пример 1.1. Магнитное поле, создаваемое прямолинейным участком проводника с током.

Найдем индукцию магнитного поля, создаваемого прямолинейным участком проводника с током I в точке, удаленной от проводника на расстояние R

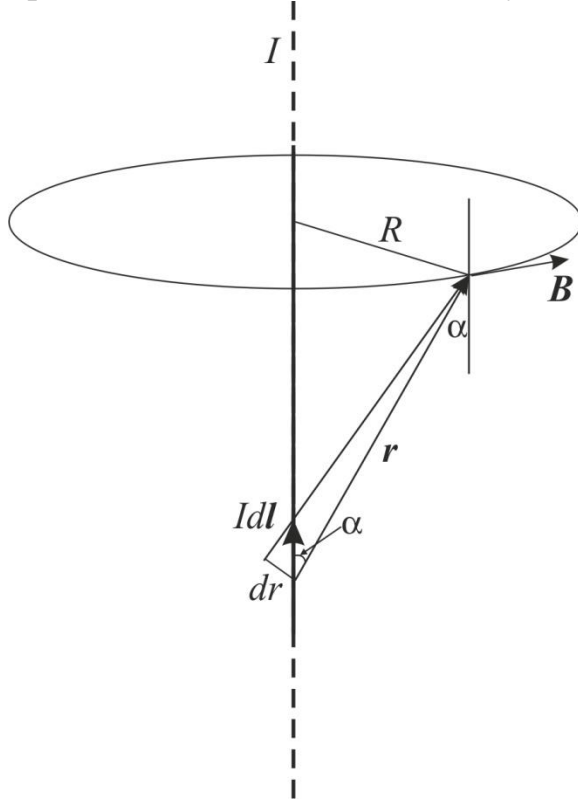


Рис.1.2. К задаче о магнитном поле прямого провода с током

$dr = dl \sin \alpha$ и $dr = r d\alpha$, тогда

$$dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}$$

$$R = r \sin \alpha$$

$$B = \int_{\Gamma} \tilde{k} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tilde{k} \frac{I d\alpha \sin \alpha}{R}$$

$$B = -\tilde{k} \frac{I \cos \alpha}{R} \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \tilde{k} \frac{I}{R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$B = \tilde{k} \frac{I}{R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \tilde{k} \frac{I}{R} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2), \quad (1.6)$$

где углы α_1 и α_2 (а также β_1 и β_2) обозначены на рисунке 1.2

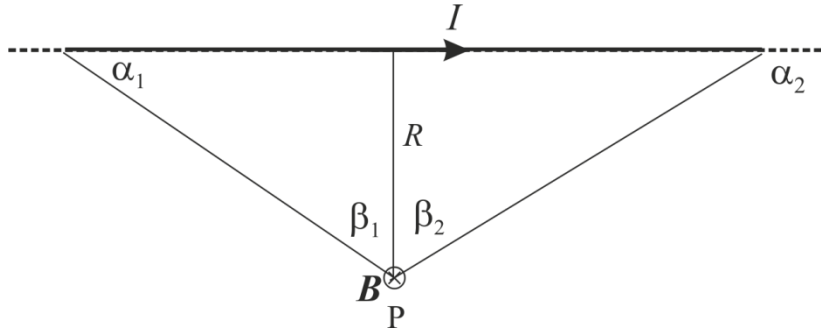


Рис.1.2. Проводник конечной длины с током I

Для бесконечно длинного прямолинейного проводника с током, учитывая, что $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$, получаем следующее выражение

$$B = \tilde{k} \frac{2I}{R} = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R} \quad (1.7)$$

Силовые линии магнитного поля, создаваемого **бесконечно длинным прямолинейным проводником с током**, есть концентрические окружности радиуса R с центрами на проводнике, лежащие в плоскостях, перпендикулярных проводнику с током.

Пример 1.2. Магнитное поле на оси кругового тока. Найдем магнитное поле, создаваемое током, текущим по круговому витку с током, на линии, перпендикулярной плоскости, в которой лежит виток с током, и проходящей через центр витка с током.

Пусть виток с током лежит в плоскости xy , а требуется найти поле в точке P , лежащей на оси z , тогда из соображения симметрии ясно, что вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ будет коллинеарен оси z . Используя (1.7) и учитывая $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ (см. рис. 1.3), получаем

$$\mathbf{B} = \left(\int_{\Gamma} \tilde{k} \frac{Idl}{r^2} \right) \mathbf{k} \quad (1.8)$$

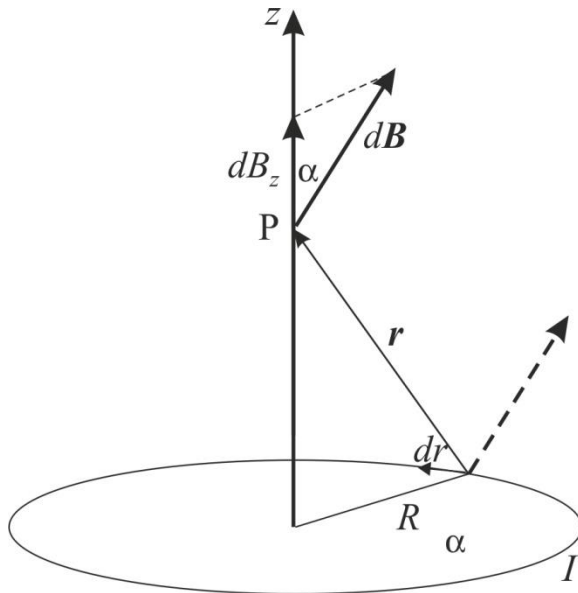


Рис.1.3.

$$B_z = B \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{R}{r}$$

$$B_z = \int_{\Gamma} \tilde{k} \frac{Idl}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi R}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi R^2}{r^3}$$

Учитывая, что площадь кольца стоком $\pi R^2 = S$, а $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, *определим магнитный момента витка*, модуль которого равен

$$p_m = IS, \quad (1.9)$$

а направление *определяется* правилом буравчика, тогда индукцию магнитного поля в точке P с координатами $P = (0, 0, z)$ можно представить формулой

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.10)$$

Следствие. Магнитное поле в центре витка с током равно

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3}. \quad (1.11)$$

Сила и закон Ампера

Обобщая экспериментальные данные по поведению проводников с током в магнитном поле Ампер установил что на элемент тока Idl в магнитном

поле с индукцией $\mathbf{B}$ действует сила, названная силой Ампера, и равная (см.рис.1.4)

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (1.12)$$

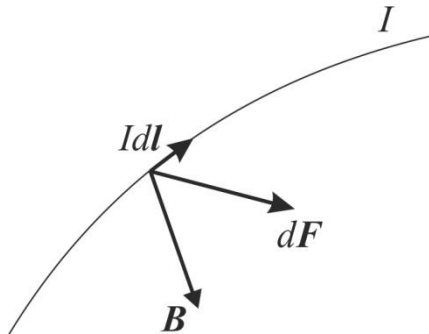


Рис.1.4.

Скалярная величина силы Ампера равна

$$dF = IdlB \sin \alpha \quad (1.13)$$

Сила Ампера, действующая на участок контура Γ с током, есть

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (1.14)$$

а сила Ампера, действующая на контур с током, есть

$$\mathbf{F} = \oint_{\Gamma} Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (1.15)$$

Пусть в пространстве имеются два проводника с током, то сила, с которой элемент тока $I_1 d\mathbf{l}_1$ действует на элемент тока $I_2 d\mathbf{l}_2$, равна

$$d\mathbf{F}_{12} = \tilde{k} \frac{I_1 I_2}{r^3} [d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}]]$$

Это выражение называется *законом Ампера*.

Взаимодействие двух параллельных проводников с током

Найдем силу взаимодействия двух параллельных проводников с током, длиной l , отстоящих друг от друга на расстояние R , такое, что $R \ll l$. Будем считать, что первый проводник с током I_1 создает в окружающем пространстве магнитное поле $\mathbf{B}_1$ (1.7)

,

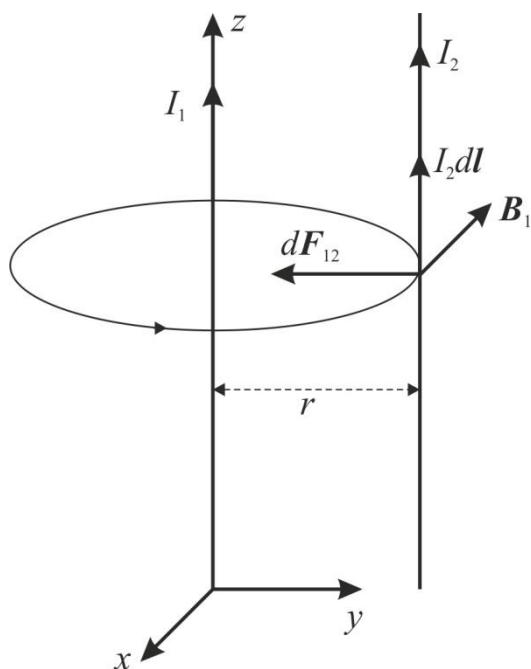


Рис.1.5.

$$B_1 = \tilde{k} \frac{2I_1}{R}, \quad (1.16)$$

которое воздействует, согласно (2.31), на второй проводник с током I_2 , как показано на рис.2.5

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1, \quad (1.17)$$

Так как угол между векторами $I_2 d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}_1$ прямой, то не трудно выписать выражение для модуля силы

$$dF_{12} = I_2 dl B_1$$

С учетом (1.7) получим

$$dF_{12} = \tilde{k} \frac{2I_1 I_2}{R} dl \quad (1.18)$$

На длине провода l действует сила взаимодействия между проводниками с токами, равная

$$F_{12} = \int_0^l \tilde{k} \frac{2I_1 I_2}{R} dl, \text{ или } F_{12} = \tilde{k} \frac{2I_1 I_2}{R} l \quad (1.19)$$

Если токи параллельны, то F_{12} есть сила взаимного притяжения двух проводников с током. Не трудно установить, что если токи в проводниках антипараллельны, то проводники взаимно отталкиваются с той же по модулю силой.

Явление взаимодействия параллельных проводников с током положено в основу метрологического определения важнейшей характеристики – силы тока. Один Ампер это сила постоянного тока, который, проходя по двум длинным параллельным проводникам ничтожно малого сечения, расположенным на расстоянии одного метра один от другого, вызвал бы силу притяжения в 2×10^{-7} Н (0.2 мкН) на каждый метр длины.

Сила Лоренца

На электрический заряд, движущийся в электрическом и магнитном поле, действует **полная** сила Лоренца, равная

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B \quad (2.1)$$

Движение электрического заряда в постоянном однородном магнитном поле.

Запишем второй закон Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_B \quad (2.2)$$

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.3)$$

Выберем систему координат так, чтобы вектор магнитной индукции был направлен вдоль оси z , т.е. $\mathbf{B} = B\mathbf{k} = (0, 0, B)$, тогда

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = v_y B \mathbf{i} - v_x B \mathbf{j} \quad (2.4)$$

Подставляем (2.4) в (2.3), компоненты вектора ускорения равны

$$\begin{cases} a_x = \frac{q}{m} v_y B \\ a_y = -\frac{q}{m} v_x B \\ a_z = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Учитывая, что $a_x = dv_x / dt$, $a_y = dv_y / dt$, $a_z = dv_z / dt$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} v_x B \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Дифференцируя первое уравнение по времени и подставляя в правую часть получившегося дифференциального уравнения второго порядка dv_y / dt из второго уравнения системы (2.6), получаем

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{q}{m} B \frac{dv_y}{dt} \rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\left(\frac{q}{m} B\right)^2 v_x \quad (2.7)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v_x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.8)$$

Чтобы найти v_y , надо взять производную по времени от v_x и учесть первое уравнение (2.6), получаем

$$v_y = B \cos \omega t - A \sin \omega t \quad (2.9)$$

Кроме того, из третьего уравнения системы имеем

$$v_z = \text{const}, \quad (2.10)$$

где частота $\omega = qB / m$. Для определения постоянных интегрирования, необходимо учесть начальные условия:

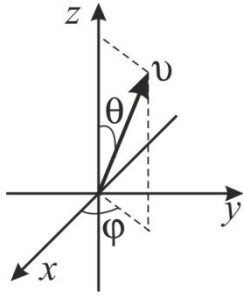


Рис.2.1.

$$t = 0, x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \\ v_x(0) = v_{0x}, v_y(0) = v_{0y}, v_z(0) = v_{0z}.$$

Введем сферические координаты (Рис.2.1):

$$v_{0x} = v_0 \cos \varphi \sin \theta, \quad (2.11)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \varphi \sin \theta, \quad (2.12)$$

$$v_{0z} = v_0 \cos \theta. \quad (2.13)$$

где φ - азимутальный угол, θ - полярный угол направления вектора начальной скорости, по модулю равной v_0 , при этом $v_{0\perp} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = v_0 \sin \theta$ - перпендикулярная к магнитному полю составляющая начальной скорости. Из (2.8)-(2.10) и второй строки начальных условий следует, что

$$A = v_{0x},$$

$$B = v_{0y}$$

$$v_{0z} = \text{const}$$

Подставляя эти значения в (2.8) и (2.9), приводя подобные члены, имеем

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos(\omega t - \varphi) \sin \theta, \\ v_y = -v_0 \sin(\omega t - \varphi) \sin \theta, \\ v_z = v_0 \cos \theta. \end{cases} \quad (2.14)$$

Видно, что не зависят от времени модуль перпендикулярной к магнитному полю составляющей скорости $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_{0\perp} = v_0 |\sin \theta|$, модуль полной скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v_0$, а значит и есть кинетическая энергия частицы.

Учитывая, что $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$, $dz/dt = v_z$, интегрируем выражения (2.14) по времени, получаем

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - \varphi) \sin \theta + C_1, \\ y = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t - \varphi) \sin \theta + C_2, \\ z = v_0 t \cos \theta + C_3. \end{cases} \quad (2.15)$$

Учитывая первую строку начальных условий, имеем

$$\begin{cases} C_1 = x_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin \varphi \sin \theta \\ C_2 = y_0 + \frac{v_0}{\omega} \cos \varphi \sin \theta \\ C_3 = z_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Обозначим

$$R \equiv \frac{v_{0\perp}}{\omega} = \frac{v_0 \sin \theta}{\omega} = \frac{mv_0 \sin \theta}{qB}, \quad (2.17)$$

Эта величина имеет размерность длины и называется **Ларморовским радиусом**. Величина

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

называется **циклотронной частотой**.

Тогда параметрическое уравнение (2.15) **пространственной траектории движения заряда q в однородном магнитном поле** запишется в виде

$$\begin{aligned} x &= R(\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi) + x_0, \\ y &= R(\cos(\omega t - \varphi) - \cos \varphi) + y_0, \\ z &= v_0 \cos \theta t + z_0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Эта траектория представляет собой **винтовую линию с Ларморовским радиусом** $R = m\nu_0/qB$, с осью, параллельной оси z , и пересекающей плоскость $z = 0$ в точке $(x_0 + R\sin\varphi, y_0 - R\cos\varphi)$. **Период прохода частицей одного витка** винтовой линии есть

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{m}{qB},$$

а **шаг этой винтовой линии**, равен.

$$h = \nu_z T = 2\pi \frac{m\nu_0 \cos\theta}{qB} \quad (2.19)$$

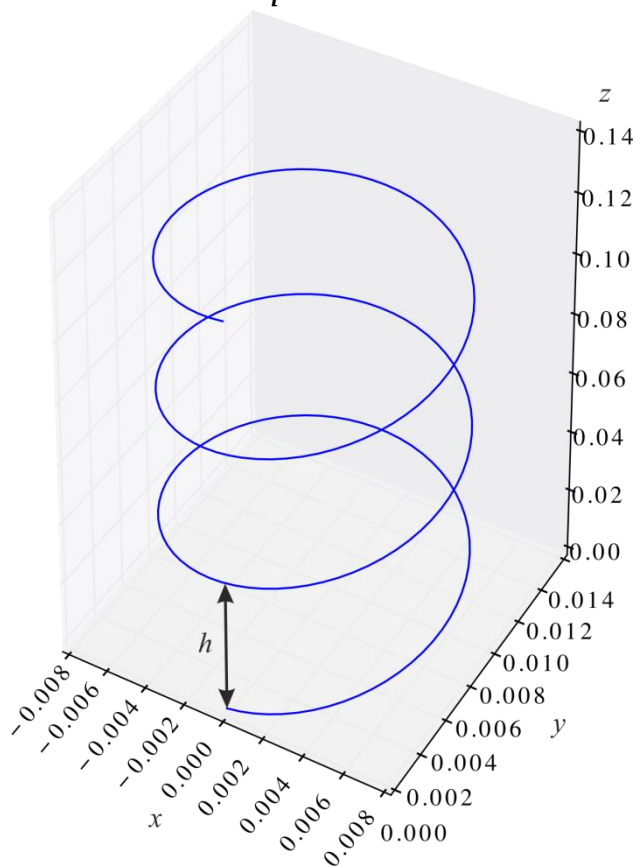


Рис.2.2.

Если заряд влетает в однородное магнитное поле так, что **вектор его скорости перпендикулярен вектору магнитной индукции**, то $\theta = \pi/2$, $\nu_{0\perp} = \nu_0$ и $R = \frac{m\nu_0}{qB}$. Систему координат выберем так, чтобы $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\varphi = \pi/2$, т.е. вектор начальной скорости параллелен оси y , тогда (2.18) приобретает более простой вид

$$\begin{cases} x = -R \cos \omega t + R, \\ y = R \sin \omega t, \\ z = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Это есть уравнение окружности, а R есть радиус окружности с центром $(R, 0, 0)$. Проекции скорости движения равны

$$\begin{cases} v_x = v_0 \sin(\omega t), \\ v_y = v_0 \cos(\omega t), \\ v_z = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

но модуль скорости в этом случае не зависит от времени

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v_0 \quad (2.22)$$

то есть происходит равномерное движение по окружности и период обращения равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{m}{qB} \quad (2.23)$$

Период обращения не зависит от скорости заряда, это свойство используется в ускорителях элементарных частиц – циклотронах.

Эффект Холла

В 1879 г. Э.Холл обнаружил, что при пропускании постоянного электрического тока вдоль тонкой металлической пластинки, помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное пластинке, между на перпендикулярными полю гранями пластинки возникает поперечная току разность потенциалов (см. Рис. 2.3). Это явление было названо **эффектом Холла**.

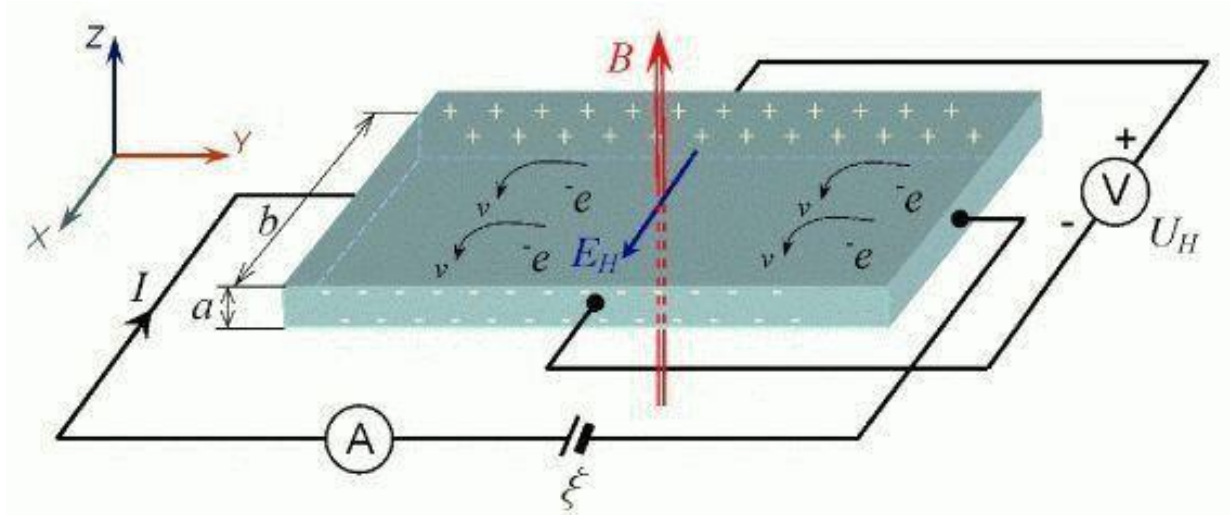


Рис.2.3.

На опыт было установлено установили, что поперечная холловская разность потенциалов U_H пропорциональна силе тока I , индукции магнитного поля B и обратно пропорциональна толщине пластинки a (величины I, a, B указаны на рисунке 2.3).

$$U_H \sim \frac{IB}{a} \text{ или } U_H = R_H \frac{IB}{a} \quad (2.26)$$

Коэффициент пропорциональности R_H называется постоянной Холла, оказалось, что он зависит от величины заряда и концентрации носителей тока в пластине. Рассмотрим вывод выражения R_H для металлических проводников. Ток в пластине равен

$$I = qn v_y ab \quad (2.27)$$

где n - концентрация, v_y - продольная скорость зарядов q , ab - площадь поперечного сечения пластины. На носители заряда в однородном магнитном поле действует сила Лоренца, которая отклоняет заряды

$$\mathbf{F}_L = q \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & -v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = -qv_y B \mathbf{i} - qv_x B \mathbf{j} \quad (2.28)$$

в поперечном положительном направлении $x > 0$ (здесь $q < 0$ и $v_y < 0$). При этом поперечные грани при $x = b/2$ заряжаются отрицательно, а при $x = -b/2$ - положительно. Одновременно возникает отталкивающее поперечное электрическое поле, напряженность которого возрастает до тех пор,

пока не установится равенство электрической и магнитной сил и динамическое равновесие, при этом

$$qE_x + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x = 0 \text{ или } qE_x - qv_y B = 0$$

откуда напряженность поперечного электрического поля

$$E_x = v_y B$$

Найдем соответствующую ей (холловскую) разность потенциалов

$$U_H = \int_{-b/2}^{b/2} E_x dx = v_y B b,$$

где скорость выразим через измеряемую величину – силу тока (2.27)

$$v_y = \frac{I}{q n a b}$$

Тогда получим

$$R_H \frac{IB}{a} = \frac{I}{q n a b} B b$$

или

$$R_H = \frac{1}{qn}$$

Этот результат имеет важное прикладное значение, поскольку по измеренным величинам I, B, U_H можно определить концентрацию электронов в металле (или тип носителей заряда и их концентрацию в полупроводниках).

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. Том 2. М.: Наука, 1988. – 496 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 3. Электричество. М.: Наука, 1983. -688 с.
3. Пейсахович Ю.Г. Классическая электродинамика. Новосибирск, НГТУ, 2017. - 649 с.