

Лекция 20. Магнитный поток. Вихревой характер магнитного поля. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Закон полного тока. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент. Магнитный момент контура с током. Механический вращающий момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле.

(15.05.04, 08.09.10, 19.02.13, 20.02.14, 07.09.18)

Обязательно прочитать из Гл.14 §118, §119, §130, §121, §113, §114, §115, §116 по учебнику Т.И.Трофимовой. Курс физики.

Практикум 17, Практикум 18.

По пособию «Задачи по физике», Часть 2: практикум 3, Практикум 14. Разобрать Примеры и сделать домашнее задание.

Магнитный поток.

Магнитным потоком называется *поток вектора магнитной индукции* через заданную поверхность S :

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \quad (1)$$

В теории магнитного поля понятие о **магнитном потоке** является одним из важнейших понятий. Определение (1) соответствует частному случаю понятия **потока векторного поля**, изображенного на Рис.1 горизонтальными силовыми линиями. Эта величина подобна потоку вектора напряженности электрического поля $\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S}$ и потоку вектора электрической индукции $\int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$.

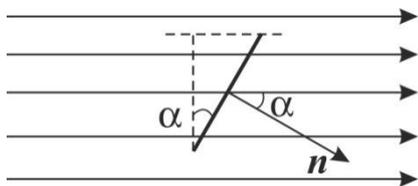


Рис.1

Элементарный магнитный поток через векторный элемент площади $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ равен $d\Phi = \mathbf{B}d\mathbf{S} = B_n dS = B dS \cos \alpha$, где \mathbf{n} - единичный вектор нормали к элементарной площадке dS , α - угол между векторами \mathbf{B} и \mathbf{n} , $B_n = B \cos \alpha$ - нормальная к поверхности составляющая вектора \mathbf{B} на элементе площади dS .

Магнитный поток (1) через плоскую поверхность S равен

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha.$$

В системе СИ единицей измерения магнитного потока Φ является Вебер, $1\text{Вб}=1\text{Тл}\times 1\text{м}^2$.

Соленоидальность магнитного поля. Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах

Опыт показывает, что магнитное поле имеет *вихревой характер* (обладает свойством *соленоидальности*), то есть силовые линии вектора \mathbf{B} не имеют начала и конца (они обязательно замкнуты). Физически это означает, что поток вектора \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (2)$$

Это выражение можно назвать *теоремой Гаусса для магнитного поля в интегральной форме*. Число силовых линий, входящих в область, находящуюся внутри произвольной замкнутой поверхности, равно числу выходящих силовых линий. Если воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского из векторного анализа

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{B} dV, \quad (3)$$

где V - объем, охватываемый поверхностью S . В силу произвольности S и равенства (2) в каждой точке пространства должно выполняться равенство

$$\text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Полученное соотношение называется *теоремой Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме*.

Уравнения (2) и (4) дают условия *соленоидальности* (т. е. *вихревого характера*) *магнитного поля*: силовые линии вектора \mathbf{B} не имеют начала и конца, они всегда замкнуты, хотя бы на бесконечности. Эти уравнения следует сравнить с уравнениями электростатики $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q$ и $\text{div} \mathbf{D} = \rho$, в правые части которых входят электрические

заряды, поэтому уравнения (2) и (4) также выражают экспериментальный факт *отсутствия в природе магнитных зарядов (магнитных монополей)*.

Вектор напряженности магнитного поля

Вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в однородной и изотропной среде без дисперсии в отсутствие спонтанного магнитного порядка в магнитостатике *можно определить* феноменологическим материальным соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (5)$$

То есть в каждой точка пространства $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r})$.

Вектор $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ служит вспомогательной характеристикой магнитного поля в веществе. Как и вектор индукции электрического поля $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ в электростатике, его удобно использовать для компактной записи формул, в частности, включающих индукцию магнитного поля и магнитную проницаемость среды.

Напряженность магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ не зависит от магнитной проницаемости, поскольку в соответствии с законом Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6)$$

для поля объемного тока или

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I[d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.1)$$

для поля линейного тока, индукция магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ в любой точке среды пропорциональна $\mu_0\mu(\mathbf{r})$, поэтому из (5) получаем, что напряженность магнитного поля, может быть рассчитана по формуле

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (7)$$

для поля объемного тока или

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{I[d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.1)$$

для поля линейного тока. В эти формулы не входят характеристики среды $\mu(\mathbf{r})$. Напряженность $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ характеризует магнитное поле, которое создавалось бы в данной точке пространства в отсутствие среды (в вакууме) тем же распределением макроскопических токов, что и $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

В системе единиц СИ величина \mathbf{H} имеет размерность ампер на метр [А/м], отличную от размерности величины \mathbf{B} , измеряемой в единицах тесла [Тл].

Закон полного тока.

В предыдущей лекции, с помощью закона Био-Савара-Лапласа (6.1) для линейного тока мы показали, что силовые линии магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямолинейным проводником с током I , представляют собой концентрические окружности разного радиуса R с центрами на проводнике, лежащие в плоскостях, перпендикулярных проводнику с током, и получили выражение модуля вектора индукции этого поля

$$B = \frac{\mu_0\mu I}{2\pi R} \quad (8)$$

Разделив на $\mu_0\mu$ и подставив $B = \mu\mu_0 H$ из (5), перепишем это выражение в виде формулы $2\pi R H = I$, где $2\pi R$ - длина силовой линии. Очевидно, что последнее выражение можно представить в виде

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I \quad (9)$$

С помощью методов векторного анализа, выходящих за рамки настоящего курса общей физики можно строго показать, что соотношение (9) между постоянным током I и создаваемым им магнитным полем \mathbf{H} справедливо для любого распределения тока I в пространстве и для любой конфигурации контура интегрирования L , соотношение (9) можно вывести из любого выражения закона Био-Савара-Лапласа (6)-(7.1). Соотношение (9) выражает **закон полного тока** (иногда называемый **законом Эрстеда** или **теоремой о циркуляции вектора напряженности магнитного поля**), оно означает, что *циркуляция вектора напряженности \mathbf{H} по произвольному замкнутому контуру равна полному току $I = \sum I_i$, охватываемому этим контуром*. Полным током называют алгебраическую сумму $I = \sum I_i$ токов, охватываемых произвольным замкнутым контуром L , причем положительное направление каждого тока I_i определяется правилом буравчика относительно обхода контура L при интегрировании (9).

В случае объемных токов полный ток равен $I = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) d\mathbf{S}$, где S - произвольная поверхность, натянутая на контур L . Применяя к (9) теорему Стокса из векторного анализа, получим

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = I,$$

то есть

$$\int_S \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

или

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}) d\mathbf{S} = 0$$

Откуда в силу произвольности поверхности S следует равенство нулю подынтегрального выражения

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (10)$$

Это уравнение выражает *закон полного тока в дифференциальной форме*.

В случае однородных и изотропных сред или вакуума (когда множитель μ_0 не зависит от координат и его можно вынести из-под знака интеграла) выражение (10) эквивалентно выражению

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{j}. \quad (10.1)$$

а выражение (9) эквивалентно выражению

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu\mu_0 I \quad (9.1)$$

Уравнения Максвелла магнитостатики

Систему уравнений Максвелла магнитостатики образуют два дифференциальных уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (11)$$

Первое из них есть условие соленоидальности магнитного поля (4), а второе в дифференциальной форме (10) выражает закон Био и Савара. Систему замыкает материальное соотношение величин \mathbf{B} и \mathbf{H} , в простейшем случае линейное

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (5)$$

в вакууме $\mu = 1$. В интегральной форме уравнения Максвелла магнитостатики (2) и (3.4.12) с тем же физическим смыслом, что и (9), имеют вид

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \\ \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I. \end{cases} \quad (12)$$

Применение закона полного тока для расчета напряженности и индукции магнитного поля симметричных систем токов.

Закон полного тока (9) можно применять для оценки величины напряженности и индукции магнитного поля, создаваемого некоторыми симметричными распределениями токов. Это применение родственно применению интегральной теоремы Гаусса для нахождения напряженности и индукции электрического поля симметричных распределений зарядов. Для некоторых систем токов, когда из соображений симметрии или из других расчетов известна структура силовых линий магнитного поля, можно подобрать контур L так, что интегрирование в левой части (9) сводится к умножению величины напряженности H на длину соответствующей части контура.

Наиболее простыми и известными примерами являются расчеты магнитного поля:

- 1) цилиндрически-симметричной системы токов, текущих параллельно оси;
- 2) тока, текущего в некотором направлении вдоль бесконечного плоского слоя;
- 3) длинного соленоида с густой намоткой.

При этом надо помнить, что реальные проводники с электрическим током всегда имеют некоторые конечные размеры, а силовые линии создаваемого ими магнитного поля замкнуты. Модели с бесконечно длинными проводами, слоями, катушками возникают в результате формального устремления к бесконечности некоторых из этих размеров и позволяют оценить магнитное поле вблизи реальных проводников соответствующей геометрической формы на малых по сравнению с такими размерами расстояниях. При таких предельных переходах область замыкания магнитных силовых линий в масштабах применяемой модели тоже может отодвинуться на бесконечность.

1. Система, образованная проводниками цилиндрической симметрии с текущим вдоль них током, плотность которого зависит только от радиальной координаты $j = j(r)$, создает магнитное поле с силовыми линиями \mathbf{H} , имеющими вид окружностей, плоскости которых перпендикулярны к оси системы, а центры лежат на оси; направление \mathbf{H} относительно тока определяется правилом правого винта. Выбирая в (9) контур L , совпадающий с

силовой линией, и учитывая, что в цилиндрических координатах с осью z вдоль тока $\mathbf{H} = H e_\alpha$, $d\mathbf{l} = r d\alpha e_\alpha$, $dS = 2\pi r dr$ (рис. 2), получаем уравнение

$$2\pi r H = I(r), \quad I(r) = 2\pi \int_0^r j(r) r dr. \quad (13)$$

Например, для *бесконечно длинного однородного провода* радиусом a с током I , равномерно распределенным по его сечению $j = I/\pi a^2$, имеем $I(r) = I$ при $r \geq a$ и $I(r) = I(r/a)^2$ при $r < a$, откуда

$$H = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r}, & r \geq a, \\ \frac{I r}{2\pi a^2}, & r < a; \end{cases} \quad B = \begin{cases} \frac{\mu_e \mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq a, \\ \frac{\mu_i \mu_0 I r}{2\pi a^2}, & r < a, \end{cases} \quad (14)$$

где в правой колонке приведена величина индукции $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ для однородных сред:

$\mu = \mu_e$ – магнитная проницаемость вещества вне провода, $\mu = \mu_i$ – внутри провода.

Если ток I течет по *бесконечно тонкой цилиндрической оболочке (трубе)* радиусом a , то $I(r) = I$ при $r \geq a$ и $I(r) = 0$ при $r < a$. Вне такой оболочки поле описывается выражениями первых строк (14), а внутри $H = 0$ и $B = 0$ (*магнитная экранировка*). В пределе $a \rightarrow 0$ внутренняя область исчезает и мы получаем магнитное поле $H = I/2\pi r$, $B = \mu_e \mu_0 I/2\pi r$ *бесконечной прямой нити* с током I .

2. Если ток плотности \mathbf{j} течет в некотором направлении вдоль *бесконечного плоского слоя* толщиной $2a$ и равномерно распределен по его сечению, то из соображений симметрии ясно, что силовые линии \mathbf{H} перпендикулярны к току и параллельны поверхностям слоя. Введем декартову систему координат, начало которой лежит на середине слоя, направим ось y вдоль тока, ось x – перпендикулярно к току и слою, тогда при $x > 0$ вектор \mathbf{H} направлен вдоль оси z , а при $x < 0$ – против оси z . Выберем контур L в виде прямоугольника в плоскости xz , центр которого совпадает с началом координат, две стороны коллинеарны оси z и имеют длины l , а две другие стороны перпендикулярны к \mathbf{H} и имеют длины $2x$ (рис. 3). Тогда левая часть (9) равна $2lH$, а ток в правой части равен $I = j2xl$ при $x \leq a$ и $I = j2al$ при $x > a$. Откуда получаем

$$H_z = ja \begin{cases} -1, & x \leq -a, \\ \frac{x}{a}, & |x| \leq a, \\ 1, & x \geq a; \end{cases} \quad B_z = ja \begin{cases} -\mu_e \mu_0, & x \leq -a, \\ \mu_i \mu_0 \frac{x}{a}, & |x| \leq a, \\ \mu_e \mu_0, & x \geq a, \end{cases} \quad (15)$$

где μ_e – магнитная проницаемость вне слоя, μ_i – внутри слоя.

Вне слоя с каждой стороны поле является однородным параллельно слою, его напряженность равна $H = aj = i/2$, где $i = 2aj = I_1/l$ – линейная плотность тока, равная силе тока, текущего через полосу единичной ширины перпендикулярно к ней. В пределе $a \rightarrow 0$ внутренняя область полосы исчезает и мы получаем однородное магнитное поле *бесконечной плоскости* $H_z = \pm i/2$ (+ при $x > 0$, – при $x < 0$).

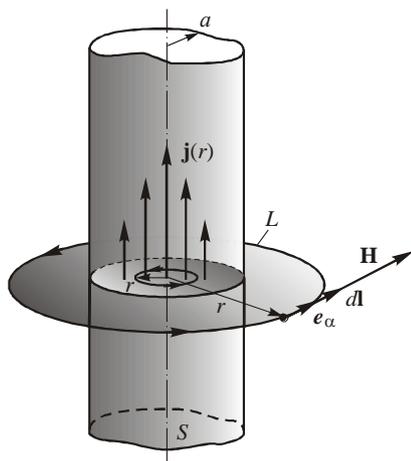


Рис. 2

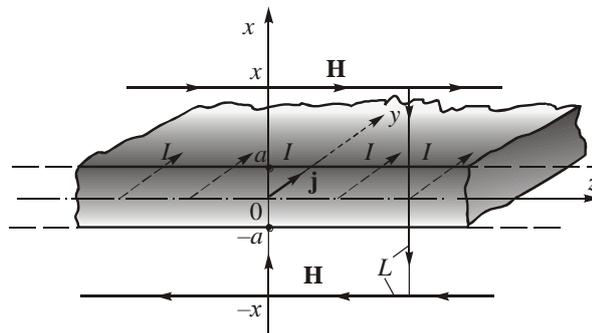


Рис. 3

3. **Соленоидом** называют катушку в виде проволочной спирали из проводника, густо намотанного на цилиндрическую или иную трубчатую поверхность, так что длина l и радиус a трубки велики по сравнению с толщиной провода и шагом спирали. При пропускании по соленоиду тока магнитные поля, создаваемые отдельными витками, складываются. Строгий теоретический и числовой расчет такого поля в общем случае довольно сложен.

Достаточно просто найти поле *длинного* ($l \gg a$) *прямого соленоида цилиндрической формы* с равномерной намоткой. *Внутри* (в средней части) такого соленоида магнитное поле почти *однородно* и направлено параллельно оси по правилу правого винта относительно тока.

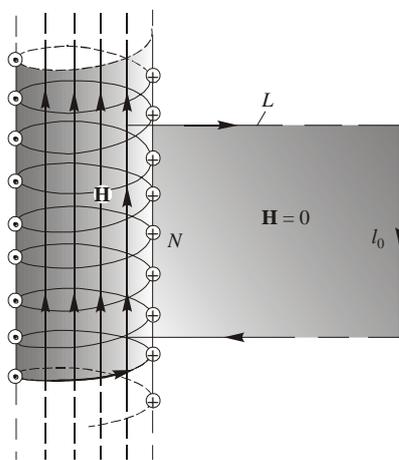


Рис. 4

Переходя к пределу $l \rightarrow \infty$, получаем модель *бесконечно длинного прямого соленоида цилиндрической формы* радиусом a , по которому течет ток I . Напряженность и индукция магнитного поля такого соленоида *вне его равны нулю*, а *внутри* – легко выводятся с помощью закона полного тока (9). При этом контур L выбирают прямоугольной формы так, что две стороны его перпендикулярны к оси соленоида (на них $\mathbf{H} \perp d\mathbf{l}$, и они дают нулевой вклад в контурный интеграл), две другие стороны контура (длиной l_0) параллельны оси и лежат одна снаружи (на ней $\mathbf{H} = 0$), а другая – внутри соленоида, только она и дает вклад в интеграл левой части (9), равный Hl_0 (рис. 4). Полный ток в правой части (9), охватываемый контуром, здесь равен NI , где N

– число «проколов» плоскости контура витками катушки, т. е. число витков на длине l_0 (витки такого соленоида с хорошей точностью можно представлять себе кольцами радиусом a). В итоге мы получаем равенство $Hl_0 = NI$, из которого и следует, что внутри такого соленоида магнитное поле однородно с напряженностью $H = nI$ и индукцией $B = \mu_0 nI$, где $n = N/l_0$ – число витков на единицу длины, μ – магнитная проницаемость однородного вещества внутри соленоида (*сердечник*). Направляя ось z цилиндрической системы координат вдоль оси соленоида, результат для поля *бесконечно прямого соленоида цилиндрической формы* можно записать в виде

$$H_z = \begin{cases} nI = i_S, & r < a, \\ 0, & r > a; \end{cases} \quad B_z = \begin{cases} \mu\mu_0 nI = \mu\mu_0 i_S, & r < a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \quad (16)$$

где r – расстояние от оси соленоида. Этот результат является точным решением для модели бесконечно длинной цилиндрической поверхности, по которой перпендикулярно к ее образующей течет аксиальный ток с поверхностной плотностью $\mathbf{i}_S = (dl/dl_\perp)\mathbf{e}_\alpha$, по модулю равной $i_S = |\mathbf{i}_S| = NI/l_0 = nI$ (где dl – сила тока, текущего по цилиндрической поверхности перпендикулярно к бесконечно малому отрезку dl_\perp на ней; \mathbf{e}_α – единичный аксиальный вектор цилиндрической системы координат). Такой ток образуется, если равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда ρ_S цилиндрическая поверхность радиусом a вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω , тогда $i_S = \rho_S a \omega$.

У реального длинного соленоида магнитное поле сосредоточено практически полностью внутри соленоида, где оно может быть оценено выражениями

$$H = nI, \quad B = \mu\mu_0 nI, \quad (17)$$

в которых $n = N/l$ – число витков на единицу длины, N – полное число витков соленоида, μ – магнитная проницаемость сердечника.

Соленоиды применяют в качестве накопителей энергии магнитного поля, индуктивных элементов цепей, а также для создания однородного магнитного поля. Соленоид с сердечником, обладающим большой магнитной проницаемостью, является хорошим электромагнитом. Выражения (6) также можно использовать для оценки магнитного поля внутри *длинного тороидального соленоида* – катушки, намотанной на тороидальную трубку, радиус a которой мал по сравнению с радиусом образованного ею тора. Тороидальные катушки являются одним из основных элементов устройств «Токамак» (тороидальная камера с магнитными катушками) для удержания высокотемпературной плазмы с помощью сильного магнитного поля в установках управляемого термоядерного синтеза.

Теорема о циркуляции вектора \mathbf{B} в однородной среде и в вакууме

Теорема. Циркуляция вектора индукции \mathbf{B} магнитного поля вдоль произвольного контура Γ равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром.

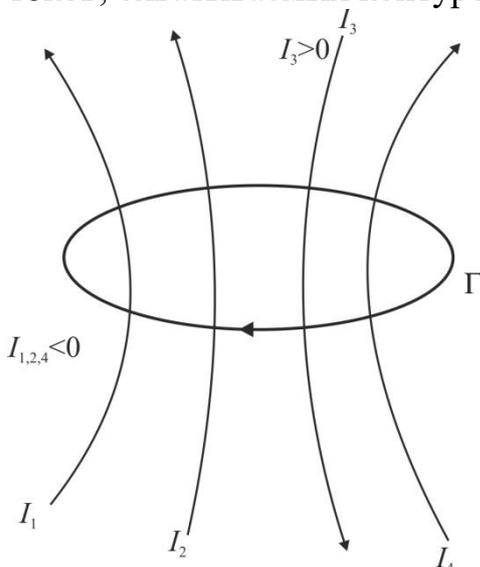


Рис.5.

$$\oint_S \mathbf{B} dl = \mu_0 \mu \sum_m I_m \quad (9.1)$$

Ток I_m считается положительным, если его направление связано с направлением обхода контура Γ по правилу буравчика, в противном случае ток I_m считается отрицательным, как показано на рис.5

Пример 3.1. Найти индукцию магнитного поля от прямолинейного проводника с током I при помощи теоремы о циркуляции.

Рассмотрим силовую линию индукции \mathbf{B} от прямолинейного проводника с током – окружность радиуса R . Найдем циркуляцию \mathbf{B} вдоль контура Γ , совпадающего с силовой линией, тогда левая часть (9.1) равна

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} dl = B 2\pi R$$

Применяя теорему о циркуляции, запишем

$$B 2\pi R = \mu \mu_0 I$$

или

$$B = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

т.е. снова получен найденный выше результат.

Пример 3.2. Найти индукцию магнитного поля соленоида и тороида.

Соленоидом (катушкой) называется цилиндрическая обмотка из провода. Тороид – тело, образуемой вращением круга вокруг прямой, лежащей в плоскости круга, но не пересекающей ее.

Запишем (9.1) как

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} dl = \mu \mu_0 NI$$

где контур Γ выберем в виде прямоугольника $L=ABCD$, ненулевой вклад в циркуляцию будет давать участок AB длины l внутри соленоида, направление которого параллельно силовой линии, остальные участки не дают вклада в циркуляцию,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} dl = \int_{AB} \mathbf{B} dl + \int_{BC} \mathbf{B} dl + \int_{CD} \mathbf{B} dl + \int_{DA} \mathbf{B} dl \approx \int_{AB} \mathbf{B} dl ,$$

таким образом

$$Bl = \mu\mu_0 NI \text{ или } B = \mu\mu_0 nI$$

где N - число витков, укладываемых на длине l катушки, а $n = N / l$ - число витков, укладываемых на единице длины.

Аналогичная формула применима и для тороида в случае, если радиус тороида R много больше радиуса витка тороидальной катушки.

$$B2\pi R = \mu\mu_0 NI \text{ или } B = \mu\mu_0 nI$$

где $n = N / 2\pi R$, $2\pi R$ - длина силовой линии вдоль центральной линии тороида.

Пример 3.3. Найти индукцию магнитного поля в сечении цилиндрического провода с током и вне провода.

Пусть R - радиус провода с током I . Запишем (9.1) как

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu\mu_0 I$$

где I сила тока, протекающая через поверхность, натянутую на контур Γ . Рассмотрим два случая: случай (а) контур лежит в плоскости поперечного сечения провода и радиус контура r меньше радиуса R провода ($r < R$), случай (б) - контур лежит в плоскости поперечного сечения провода и радиус контура r больше радиуса R провода ($r > R$).

А) $\oint_{\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu\mu_0 \int_S j dS$. Циркуляция индукции поля равна $\oint_{\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{l} = B2\pi r$, а ток

равен $\int_S j dS = j\pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = I \left(\frac{r}{R} \right)^2$, тогда $B2\pi r = \mu\mu_0 j\pi r^2$, откуда

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{I}{\pi R^2} r$$

б) $\oint_{\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S j dS$ Циркуляция индукции поля равна $\oint_{\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{l} = B2\pi r$, а ток

равен $\int_S j dS = j\pi R^2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi R^2 = I$, тогда $B2\pi r = \mu\mu_0 I$, откуда

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{I}{\pi r}$$

$$\text{Ответ: } B = \begin{cases} \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{I}{\pi R^2} r, & r < R \\ \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{I}{\pi r}, & r > R \end{cases}$$

Граничные условия магнитостатики на поверхности раздела сред

На резкой границе (поверхности) раздела двух макроскопических сред происходит скачкообразное изменение магнитной проницаемости $\mu(\mathbf{r})$, а значит, и компонент векторов поля \mathbf{B} и \mathbf{H} . Соответствующие граничные соотношения компонент этих векторов выводятся аналогично выводу граничных условий для компонент векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} в электростатике, который был проведен ранее. А именно в любой точке O на поверхности S раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 задаются направленный во вторую среду единичный вектор нормали \mathbf{n} к поверхности S и единичный вектор касательной $\boldsymbol{\tau}$ (см. рис. 6 и 7). Векторы поля и потенциал в первой среде обозначим индексом 1, а во второй среде – индексом 2.

Граничные условия для нормальных составляющих векторов \mathbf{B} и \mathbf{H}

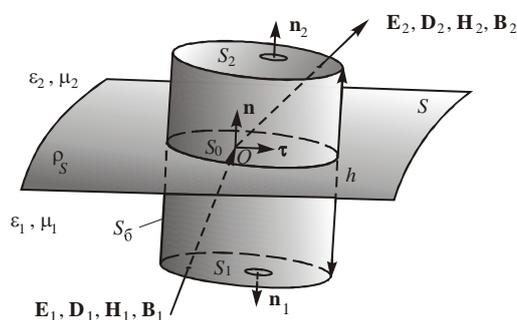


рис. 6

Уравнения магнитостатики, записанные в первых строках (11) и (12), по своей структуре аналогичны уравнениям электростатики. Для вывода граничных условий для нормальных составляющих, построим вокруг точки O малый цилиндр с образующей, параллельной вектору нормали \mathbf{n} и с параллельными границе основаниями в разных средах (см. рис. 6). В первом уравнении (11) возьмем интеграл по поверхности такого цилиндра и сожмем цилиндр к точке O . Тогда *граничное условие для нормальных составляющих вектора \mathbf{B}* имеет вид

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (18)$$

откуда и из материального соотношения следует *граничное условие для нормальных составляющих вектора \mathbf{H}*

$$\mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0. \quad (19)$$

На границе раздела двух сред нормальная составляющая вектора индукции \mathbf{B} всегда непрерывна, а нормальная составляющая вектора напряженности \mathbf{H} испытывает скачок.

3.8.2. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов \mathbf{H} и \mathbf{B}

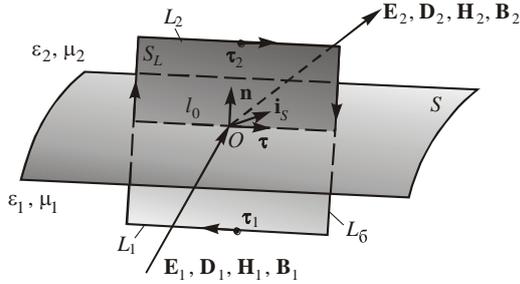


рис. 7

Аналогично уравнения магнитостатики, записанные во вторых строках (11) и (12), по своей структуре похожи на уравнения электростатики, но они имеют не равную нулю правую часть. Для вывода граничных условий для тангенциальных составляющих построим вокруг точки O малый прямоугольный контур L , лежащий в плоскости векторов касательной τ и нормали \mathbf{n} , одна сторона которого расположена в среде 2 и проходит параллельно τ , противоположная сторона расположена в среде 1 и проходит антипараллельно τ , а боковые стороны длины h перпендикулярны τ (см. рис. 7). Контур L пересекает поверхность раздела сред по линии l_0 . Применяя к контуру второе уравнение (12) и сжимая контур к точке O мы получим предельное соотношение $(H_{2\tau} - H_{1\tau})dl_0 = dI$, где dl_0 – бесконечно малая длина линии, по которой плоскость контура L пересекает поверхность раздела сред, а $dI = \mathbf{j}d\mathbf{S}_L = jdS_L \cos \alpha$ – ток, охватываемый контуром L , где $d\mathbf{S}_L$ – векторный элемент площади $dS_L = hdl_0$ внутри малого контура L , перпендикулярный к контуру L и к вектору τ , причем его направление связано с обходом контура правилом правого винта; α – угол между $d\mathbf{S}_L$ и вектором плотности тока \mathbf{j} в окрестности точки O . Значит, dI есть ток, текущий по поверхности поперек линии dl_0 (это часть приповерхностного тока, для которой $\lim dI \neq 0$ при $d\mathbf{S}_L \sim h \rightarrow 0$, $dl_0 \neq 0$). В итоге в пределе $h \rightarrow 0$ мы получим выражения, правые части будут содержать величину $i_\tau = dI/dl_0$, перпендикулярную к вектору касательной τ составляющую поверхностной плотности тока, текущего по границе раздела сред. Таким образом, граничное условие для тангенциальных составляющих вектора \mathbf{H} имеет вид

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_\tau, \quad (20)$$

а из материального соотношения следует граничное условие для тангенциальных составляющих вектора \mathbf{B} :

$$\frac{B_{2\tau}}{\mu_2} - \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \mu_0 i_\tau. \quad (21)$$

Величина $i_\tau \neq 0$, только если $\cos \alpha \neq 0$, т. е. имеется перпендикулярная к τ составляющая плотности приповерхностного тока \mathbf{j} , если же ток \mathbf{j} коллинеарен вектору касательной τ , то $i_\tau = 0$. Вектор касательной τ можно ориентировать произвольным образом в касательной плоскости, поэтому условия (20) и (21) запишем в векторном виде:

$$\mathbf{H}_{2\tau} - \mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{i}_\tau, \quad (22)$$

$$\frac{\mathbf{B}_{2\tau}}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_{1\tau}}{\mu_1} = \mu_0 \mathbf{i}_\tau, \quad (23)$$

вводя векторы $\mathbf{H}_\tau = H_\tau \tau$, $\mathbf{B}_\tau = B_\tau \tau$ и $\mathbf{i}_\tau = i_\tau \tau$. При этом вектор \mathbf{i}_τ не есть тангенциальная компонента вектора поверхностной плотности тока. $\mathbf{i}_s = (dI/dl_\perp) \mathbf{v}$, где dI – ток, текущий по поверхности раздела сред в направлении единичного вектора \mathbf{v}

перпендикулярно к бесконечно малому отрезку dl_{\perp} , но величина i_{τ} равна проекции вектора i_S на перпендикуляр к вектору касательной τ , лежащий в плоскости, касательной к поверхности раздела сред.

Прямоугольная рамка с током в однородном магнитном поле

Хорошо известно, что на прямоугольную рамку с постоянным током I , помещенную в однородное магнитное поле \mathbf{B} действует вращающий момент сил. Действительно, расположим рамку так, что две ее стороны длиной a будут перпендикулярны полю, нормаль \mathbf{n} к плоскости рамки связана с направлением тока правилом буравчика и образует с направлением магнитной индукции \mathbf{B} угол α , как показано на (рис. 5.a). На каждую из сторон рамки действуют силы Ампера. На горизонтальные участки рамки (длиной b) действуют две равные по модулю и противоположно направленные силы \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_4 , которые, растягивая рамку по вертикали, взаимно компенсируют друг друга и влияния на движение рамки не оказывают.

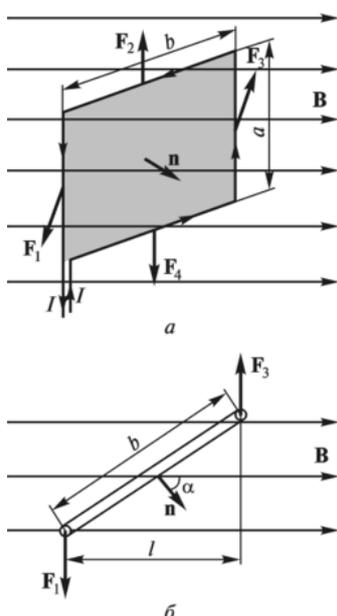


Рис. 5

На вертикальные участки (длиной a) действуют две противоположно направленные силы Ампера \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_3 , в соответствии с правилом левой руки, их направление перпендикулярно как вертикальным сторонам, так и вектору \mathbf{B} , а модули равны $F_1 = F_3 = Iba$.

Очевидно, что равнодействующая всех четырех сил, т.е. их векторная сумма \mathbf{F} , равна нулю

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = 0. \quad (24)$$

Однако силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_3 образуют пару сил, плечи которых относительно вертикальной оси, проходящей через середины горизонтальных сторон (рис.5. а), равны $l/2 = (b/2)\sin\alpha$ (см. рис.5, б), и создают момент сил, модуль которого равен

$$M = (l/2)F_1 + (l/2)F_3 = IBabsin\alpha = IBS\sin\alpha \quad (25)$$

где $S = ab$ - площадь рамки. Вектор момента сил \mathbf{M} связан с направлением сил \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_3 правилом буравчика и с учетом (25) может быть представлен в виде векторного произведения

$$\mathbf{M} = I[\mathbf{S} \times \mathbf{B}] = [I\mathbf{S} \times \mathbf{B}] \quad (26)$$

где $\mathbf{S} = S\mathbf{n} = ab\mathbf{n}$ - вектор ориентированной площади рамки. Запишем последнее выражение в виде

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \times \mathbf{B}], \quad (27)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{p}_m = I\mathbf{S} \quad (28)$$

Эта величина \mathbf{p}_m равная произведению силы тока в рамке и вектора ориентированной площади рамки называется **магнитным моментом** рамки с током.

Из (25) видно, что момент сил \mathbf{M} становится равен нулю при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, то есть момент сил (27) стремится повернуть плоскость рамки перпендикулярно вектору индукции \mathbf{B} , а вектор \mathbf{p}_m - параллельно вектору индукции \mathbf{B} . Это свойство рамок с током позволяет строить электрические моторы.

Соотношения (27) и (28) удобно использовать для определения единицы и измерения величины магнитной индукции B : из (1) видно, что момент сил, действующий на рамку с током, максимален, когда $\alpha = \pi/2$, т.е. когда плоскость рамки устанавливается параллельно силовым линиям магнитной индукции \mathbf{B} . В этом случае $M_{\max} = ISB = p_m B$, откуда

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} = \frac{M_{\max}}{IS}$$

Контур (виток) с током произвольной формы в однородном магнитном поле

Покажем, что основные результаты (24) и (27) предыдущего раздела справедливы и для контура (витка) с током произвольной формы, помещенного в однородное магнитное поле. На линейный элемент тока $I dl$ такого контура в магнитном поле \mathbf{B} действует сила

Ампера $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. При этом, **результатирующая сила \mathbf{F}** , действующая на контур Γ с током I , дается интегралом

$$\mathbf{F} = \oint_{\Gamma} d\mathbf{F} = \oint_{\Gamma} I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (29)$$

Вынося постоянные величины I налево, а \mathbf{B} направо, убеждаемся, что эта **равнодействующая \mathbf{F}** сил Ампера, действующих на контур в магнитном поле \mathbf{B} , **равна нулю:**

$$\mathbf{F} = \oint_{\Gamma} d\mathbf{F} = I \left(\oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = 0, \quad (30)$$

так как интеграл в круглых скобках $\oint_{\Gamma} d\mathbf{l} = 0$ дает вектор полного

перемещения любой точки при обходе контура по замкнутому пути, очевидно, этот вектор результирующего перемещения равен нулю. Результат (30) обобщает на произвольный контур результат (24).

Результирующий **механический момент сил \mathbf{M}** , действующих на контур Γ с током I , определенный относительно произвольной точки отсчета O (в которой расположены начала векторов \mathbf{r} , силы Ампера $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ приложены в концах векторов \mathbf{r}), дается интегралом

$$\mathbf{M} = \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}, \quad (31)$$

Убедимся, что момент сил \mathbf{M} не зависит от выбора точки отсчета. Действительно, относительно другой точки O' , которая сдвинута относительно O на вектор \mathbf{b} момент сил дается интегралом

$$\mathbf{M}' = \oint_{\Gamma} \mathbf{r}' \times d\mathbf{F},$$

где $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{b}$, тогда

$$\mathbf{M}' = \oint_{\Gamma} [(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \times d\mathbf{F}] = \oint_{\Gamma} [\mathbf{r} \times d\mathbf{F}] + \oint_{\Gamma} [\mathbf{b} \times d\mathbf{F}] = \mathbf{M} + \left[\mathbf{b} \times \oint_{\Gamma} d\mathbf{F} \right] = \mathbf{M},$$

так как в предпоследнем равенстве интеграл $\oint_{\Gamma} d\mathbf{F} = 0$ равен нулю в

соответствии с (29) как равнодействующая сил Ампера, действующих на контур в магнитном поле \mathbf{B} . Таким образом, в однородном магнитном поле результирующий механический момент сил Ампера не зависит от положения

точки отсчета O , относительно которой рассчитывается этот момент, и дается интегралом

$$\mathbf{M} = \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times [I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = I \oint_{\Gamma} [\mathbf{r} \times [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]].$$

Поскольку контурная кривая Γ считается заданной, а элемент длины контура $d\mathbf{l}$ отсчитывается от конца вектора \mathbf{r} , то при интегрировании по контуру $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$, т.е. элемент длины совпадает с дифференциальным приращением вектора \mathbf{r} вдоль контура и искомый интеграл можно записать в виде

$$\mathbf{M} = \oint_{\Gamma} \mathbf{r} \times [I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}] = I \oint_{\Gamma} [\mathbf{r} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{B}]]. \quad (31)$$

В векторной алгебре доказывается следующая широко известная формула преобразования двойного векторного произведения

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}), \quad (32)$$

обычно называемая, ««бац» минус «цаб»». Она позволяет записать подынтегральное выражение (31) в виде

$$[\mathbf{r} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{B}]] = d\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{r}d\mathbf{r}). \quad (33)$$

Во втором слагаемом (33) \mathbf{r} и \mathbf{B} легко внести под знак дифференциала, представив (33) в виде

$$[\mathbf{r} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{B}]] = d\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{B}) - \mathbf{B}d\left(\frac{1}{2}\mathbf{r}^2\right) = d\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{B}) - d\left(\frac{\mathbf{B}}{2}\mathbf{r}^2\right) \quad (34)$$

Рассмотрим также другое двойное векторное произведение с подобной (32) структурой

$$[\mathbf{B} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{r}]] = d\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{B}) - \mathbf{r}(\mathbf{B}d\mathbf{r}) \quad (35)$$

Второе слагаемое правой части (35) можно представить в виде равенства

$$\mathbf{r}(\mathbf{B}d\mathbf{r}) = d(\mathbf{r}(\mathbf{B}\mathbf{r})) - d\mathbf{r}(\mathbf{B}\mathbf{r}), \quad (36)$$

которое легко проверить, раскрывая дифференциал произведения

$$d(\mathbf{r}(\mathbf{B}\mathbf{r})) = \mathbf{r}(\mathbf{B}d\mathbf{r}) + d\mathbf{r}(\mathbf{B}\mathbf{r})$$

с учетом того, что $\mathbf{B} = \text{const}$. Подставляя (36) в (35), имеем

$$[\mathbf{B} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{r}]] = 2d\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{B}) - d(\mathbf{r}(\mathbf{B}\mathbf{r})),$$

откуда находим выражение первого слагаемого правой части (34)

$$d\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{B}) = \frac{1}{2}[\mathbf{B} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{r}]] + d\left(\frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{B}\mathbf{r})\right). \quad (37)$$

Подставляя (37) в (34) придаем подынтегральному выражению момента сил (31) вид

$$[\mathbf{r} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{B}]] = \frac{1}{2}[\mathbf{B} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{r}]] + d\left(\frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{B}\mathbf{r})\right) - d\left(\frac{\mathbf{B}}{2}\mathbf{r}^2\right) \quad (38)$$

Два последних слагаемых этого выражения имеют вид полных дифференциалов пространственных переменных $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ и при подстановке (38) в (31) дают нулевой вклад в интеграл по замкнутому контуру Γ . Таким образом, момент (31) сил Ампера, действующих на контур Γ , равен

$$\mathbf{M} = I \oint_{\Gamma} \frac{1}{2}[\mathbf{B} \times [d\mathbf{r} \times \mathbf{r}]] = \left[\mathbf{B} \times I \oint_{\Gamma} \frac{1}{2}[d\mathbf{r} \times \mathbf{r}] \right], \quad (39)$$

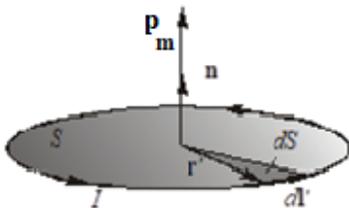
где постоянная векторная величина \mathbf{B} вынесена из-под знака интеграла налево, а постоянная скалярная величина внесена под знак векторного произведения. Формула (39) является обобщением формулы (27) на случай произвольного контура с током

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \times \mathbf{B}], \quad (27)$$

где теперь магнитный момент контура (витка) с линейным током (или магнитный дипольный момент контура (витка) с линейным током) можно представить поверхностным интегралом

$$\mathbf{p}_m = I \oint_{\Gamma} \frac{1}{2}[d\mathbf{r} \times \mathbf{r}] = I \int_S \mathbf{n} dS = I \int_S d\mathbf{S}, \quad (28)$$

поскольку $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}]/2 = [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}]/2$ есть построенный на векторах \mathbf{r} и $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ треугольный векторный элемент площади с нормалью \mathbf{n} , где S – произвольная



поверхность, натянутая на контур с током I . В частности, для плоского замкнутого контура (витка) с током магнитный момент равен произведению силы тока на площадь, ограниченную контуром, и на вектор нормали, ориентированный по правилу правого винта относительно направления тока (рис. 6).

$$\mathbf{p}_m = I \mathbf{S} \mathbf{n} \quad (29)$$

и \mathbf{S} - ориентированная площадь, опирающаяся на контур Γ

$$\mathbf{S} = S \mathbf{n} = \oint_{\Gamma} \frac{1}{2} [d\mathbf{r} \times \mathbf{r}] \quad (30)$$

Направление вектора \mathbf{p}_m определяется направлением \mathbf{n} и связано с направлением обхода контура правилом буравчика.

Понятие **магнитного момента** \mathbf{p}_m оказывается полезным и играет важную роль не только для прямоугольных рамок с током, но и для *любых замкнутых контуров* или *витков с током* (ток может быть как линейным, так и объемным), а также для *отдельных заряженных частиц*, совершающих вращательное движение.

Так, для системы объемных токов, заменяя обычным образом $I d\mathbf{l} \Leftrightarrow \mathbf{j} dV$ и переходя от линейного интеграла к объемному, вместо (28) получим выражение для **магнитного момента (или магнитного дипольного момента) системы объемных токов**.

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})] dV \quad (31)$$

Очень важным является случай, когда *стационарные* магнитное поле и магнитный момент создаются токами точечных зарядов e_i , которые совершают *стационарные* (обычно вращательные) движения с мгновенными значениями радиусов-векторов $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ и скоростей \mathbf{v}_i . При этом $\mathbf{j} = n_i e_i \mathbf{v}_i$, а интегральная формула (31) переходит в сумму

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \sum_i e_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i], \quad (32)$$

которая дает **магнитный момент системы точечных зарядов**. Каждое слагаемое этой суммы естественно назвать **классическим магнитным моментом i -й частицы**.

$$\mathbf{p}_{mi} = \frac{1}{2} e_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i] \quad (33)$$

так что

$$\mathbf{p}_m = \sum_i \mathbf{p}_{mi} \quad (34)$$

Во многих важных системах **магнитный момент i -й частицы** пропорционален **механическому моменту импульса частицы** $\mathbf{L}_i = m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i]$, где m_i – масса частицы (так бывает при движении заряженных частиц в силовом поле с центральной и цилиндрической симметрией).

Коэффициент пропорциональности γ между магнитным моментом \mathbf{p}_m частицы и ее моментом импульса \mathbf{L} называется магнитомеханическим (гиромагнитным) коэффициентом (или отношением)

$$\mathbf{p}_m = g\mathbf{L}. \quad (35)$$

Для классической частицы i -го сорта $\mathbf{p}_{mi} = g_i\mathbf{l}_i$ этот коэффициент равен $g_i = e_i/2m_i$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Магнитные моменты атомов

Атом любого элемента состоит из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженных электронов. В атомах электроны находятся на электронных оболочках. В хорошем приближении магнитные свойства атомов можно рассматривать на основе теории Н. Бора, согласно которой каждый электрон с зарядом e на оболочке атома движется по круговой орбите радиуса r со скоростью v и периодом T , при этом каждый электрон образует орбитальный ток, равный

$$I_e = -e\frac{1}{T}, \quad T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (36)$$

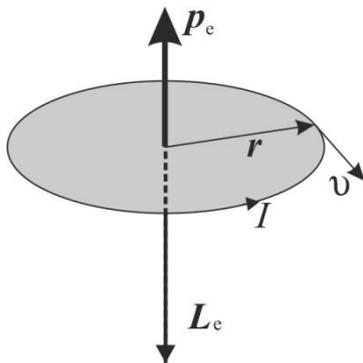


Рис.7.

Магнитный дипольный момент электрона p_e равен

$$p_e = I_e S, \quad S = \pi r^2. \quad (37)$$

Подставляя (36) в (37) получаем (33), т.е.

$$p_e = -\frac{1}{2}erv. \quad (38)$$

Магнитный момент электрона p_e , обусловленный движением электрона вокруг ядра, называют **орбитальным магнитным моментом электрона** (см.

рисунок). Механический момент L_e импульса электрона относительно ядра равен

$$L_e = r \times m\boldsymbol{v}, \quad L_e = rm\boldsymbol{v} \quad (39)$$

Магнитный момент электрона и механический момент импульса электрона антипараллельны (см. рис.7) друг другу, поскольку первый вектор определяется направлением тока, образованного круговым движением отрицательного заряда, тогда как второй вектор определяется механическим движением электрона.

Отношение

$$g_e = \frac{p_e}{L_e} = -\frac{e}{2m} \quad (40)$$

называется **магнитомеханическим отношением**.

Орбитальным магнитным моментом атома называется вектор p_m равный сумме магнитных моментов всех электронов атома

$$p_m = \sum_{n=1}^Z p_{mn} \quad (41)$$

где Z - число электронов в атоме.

Орбитальным (механическим) моментом импульса атома называется вектор L_a равный сумме механических моментов импульса всех электронов атома

$$L_a = \sum_{n=1}^Z L_{en} \quad (42)$$

где L_{en} - механический момент импульса электрона в атоме.

Согласно (40)

$$p_e = g_e L_e \quad \text{или} \quad p_e = -|g_e| L_e. \quad (43)$$

С учетом (41) и (42), получаем

$$p_m = g_e \sum_{n=1}^Z L_{en} \quad \text{или} \quad p_m = g_e L_a \quad (44)$$

Атом в магнитном поле

Механический момент сил M , действующий на атом в магнитном поле B равен

$$M = p_m \times B \quad (45)$$

с учетом (44)

$$M = g_e L_a \times B \quad (46)$$

Используя закон изменения момента импульса

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (47)$$

запишем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = g_e \mathbf{L}_a \times \mathbf{B} = -g_e \mathbf{B} \times \mathbf{L} \text{ или } \frac{d}{dt} g_e \mathbf{L} = -g_e \mathbf{B} \times g_e \mathbf{L}, \text{ то есть}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_m = -g_e \mathbf{B} \times \mathbf{p}_m \quad (48)$$

По аналогии с выражением из механики для скорости вращательного движения

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (49)$$

Закключаем, что вектор \mathbf{p}_m вращается вокруг вектора индукции магнитного поля с угловую скорость, равной произведению магнитомеханического отношения на индукцию магнитного поля

$$\boldsymbol{\omega}_L = -g_e \mathbf{B} = \frac{e\mathbf{B}}{2m} \quad (50)$$

(угловая скорость линейно зависит от индукции магнитного поля).

Под влиянием магнитного поля векторы магнитного и орбитального моментов атома вращаются с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_L$, описывая при этом соосные конические поверхности. Движение этих векторов и орбит электронов в атоме называется прецессией Лармора. (Прецессия - явление, при котором момент импульса тела меняет своё направление в пространстве, как при наклоне оси волчка)

Теорема Лармора

Результатом влияния магнитного поля на орбиты электронов в атоме является прецессия орбит и векторов $\mathbf{p}_m, \mathbf{L}_a$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_L$ вокруг оси, проходящей через ядро атома и параллельной направлению вектора магнитной индукции \mathbf{B} .

Опытное обоснование магнитомеханических соотношений

В опытах Эйнштейна-де Хааза (1915) исследовалось возникновение механического вращения железного стержня при его намагничивании. Если стержень покоится, то его механический момент L равен нулю. При намагничивании магнитные моменты электронов ориентируются по полю, и из-за магнитомеханической связи возникает не нулевой механический момент сил, направленный против поля и приводящий к вращению стержня.

В опытах Барнетта (1914) вращение не намагниченного стержня приводило к его намагничиванию. В этих опытах было обнаружено, что магнитомеханическое отношение свободного электрона **ровно в два раза больше** орбитального магнитомеханического отношения, рассчитанного по

(40). Таким образом, необходимо дополнить картину. Оказалось, что кроме орбитального момента импульса электрон обладает собственным механическим моментом – спином - L_s и собственным магнитным моментом p_s , определяемый из экспериментов (Штерн, Герлах), их отношение равно

$$g_s = \frac{p_s}{L_s} = -\frac{q}{m} \quad (51)$$

и оказалось в два раза больше магнитомеханического отношения g_e .

Спин электрона должен быть полуцелым кратным постоянной Планка $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ Дж·с, для электрона

$$L_s = \frac{1}{2} \hbar \quad (52)$$

Из (51)

$$p_s = g_s L_s = -\frac{e\hbar}{2m} = -\mu_B \quad (53)$$

где $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ Дж/Тл – магнетон Бора.

Магнетон Бора – естественная единица изменения магнитного момента системы, используется для измерения магнитного момента в атомах и молекулах.

Для многоэлектронных атомов и молекул результирующий орбитальный магнитный момент определяется суммированием отдельных орбитальных и спиновых магнитных моментов всех электронов с учетом законов квантовой механики, причем у полностью заполненных электронных оболочек атома результирующий орбитальный и спиновый магнитный момент p_e равен нулю.

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. Том 2. М.: Наука, 1988. – 496 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 3. Электричество. М.: Наука, 1983. -688 с.
3. Пейсахович Ю.Г. Классическая электродинамика. Новосибирск, НГТУ, 2017. - 649 с.