Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

53 **№ ----**

Штыгашев А.А., Пейсахович Ю.Г.

Задачи по физике.

Электромагнетизм. Электромагнитные волны.

Волновая и квантовая оптика.

Элементы квантовой физики и физики твердого тела.

Элементы ядерной физики.

Учебное пособие для студентов АВТФ

НОВОСИБИРСК, 2018

Рецензенты: канд. техн. наук В.В. Христофоров

докт. физ.-мат. наук Я.С. Гринберг

Учебное пособие соответствует второй части рабочей программы по физике для студентов АВТФ НГТУ обучающихся по направлениям: «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии», «Программная инженерия», «Информационная безопасность», «Биотехнические системы и технологии», «Машиностроение», «Приборостроение», «Управление в технических системах» и по специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем». Пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы. Приведены примеры решения и задачи по всем темам разделов Электромагнетизм. Электромагнитные волны. Волновая и квантовая оптика. Элементы квантовой физики и физики твердого тела. Элементы ядерной физики.

.

Работа подготовлена на кафедре общей физики НГТУ

© Штыгашев А.А.
Пейсахович Ю.Г.
Новосибирский государственный технический университет, 2018

Весь материал пособия распределен по темам, соответствующим календарному плану курса физики АВТФ. Каждая тема содержит краткий теоретический раздел справочного характера, примеры решения типовых задач, список задач для аудиторной работы и задания на дом.

Задачи подбирались из апробированных задачников для студентов и преподавателей естественнонаучных дисциплин, список которых приведен в конце пособия [1-3].

Практикум 1.
Расчет магнитного поля по формуле Био- Савара- Лапласа

Закон Био-Савара-Лапласа для линейного тока

$$d\boldsymbol{B} = \tilde{k}\frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3},$$

$$\boldsymbol{B} = \int_{\Gamma} d\boldsymbol{B} = \tilde{k}\int_{\Gamma}\frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}, \quad (1.1)$$

где $Id\boldsymbol{l}$ - линейный элемент тока I, $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения поля относительно элемента тока, Γ - контур с током; $\tilde{k} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} = 10^{-7}$ Гн/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $= 12.566 \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ - магнитная проницаемость однородной среды.

Закон Био-Савара-Лапласа для объемного тока

$$d\boldsymbol{B} = \tilde{k}\frac{\mathbf{j} \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV,$$

$$\boldsymbol{B} = \int_{V} d\boldsymbol{B} = \tilde{k}\int_{V}\frac{\mathbf{j} \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{j}$ - плотность тока в элементе объема dV, $\mathbf{j}dV$ - объемный элемент тока, $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения поля относительно элемента тока, V - объем, в котором текут токи плотности $\mathbf{j}$.

Направление индукции магнитного поля определяется правилом правого винта (буравчика) или правилом правой руки.

Принцип суперпозиции

$$\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{B}_j \qquad (1.3)$$

Модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого отрезком прямого проводника с током

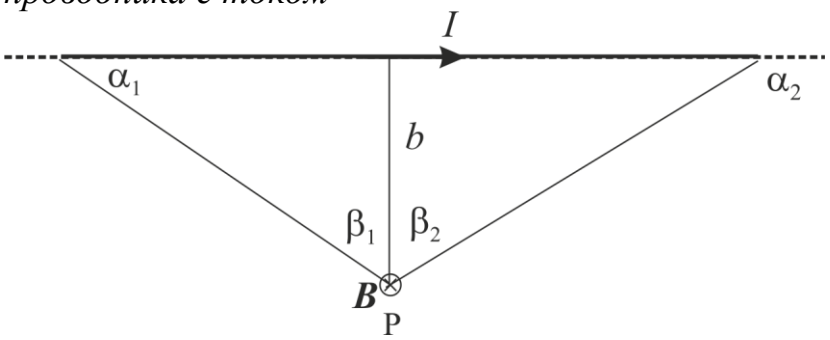


Рис.1.1. Отрезок проводника с током

$$B = \tilde{k}\frac{I}{b}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \tilde{k}\frac{I}{b}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1), \qquad (1.4)$$

где b - расстояние от точки наблюдения поля до проводника с током, α_1 - угол между направлением тока и направлением от начала проводника в точку

наблюдения, α_2 - угол между направлением тока и направлением от конца проводника в точку наблюдения; β_1 и β_2 - алгебраические значения углов между перпендикуляром к проводнику и направлениями, в которых концы проводника видны из точки наблюдения поля.

Модуль вектора индукции магнитного поля бесконечного прямого проводника с током I

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi b}, \qquad (1.5)$$

где b - расстояние от точки наблюдения поля до проводника с током.

Модуль вектора индукции магнитного поля кругового тока I *в центре витка*

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}, \qquad (1.6)$$

Модуль вектора индукции магнитного поля кругового тока I на оси симметрии

$$B = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}, \qquad (1.7)$$

где z - расстояние от точки наблюдения поля до центра витка, R - радиус витка.

Пример 1.1. Найти индукцию магнитного поля проводника с током $I = 1$А в точке 0 (рис.1.2). Угол между прямолинейными участками проводника равен $\beta = 120^\circ$, радиус дуги $r = 0.1$ м.

Решение

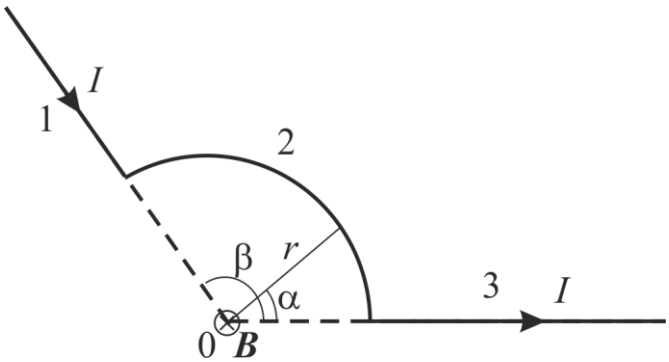


Рис.1.2. К примеру 1.1.

Вектор индукции магнитного поля дается криволинейным интегралом (1.1)

$$\boldsymbol{B} = \tilde{k} \int_{\Gamma} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3},$$

который целесообразно разбить на сумму трех интегралов по частям контура $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, пронумерованным на Рис.1.2:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_3 = \tilde{k} \int_{\Gamma_1} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} + \tilde{k} \int_{\Gamma_2} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} + \tilde{k} \int_{\Gamma_3} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Очевидно, что $B_1 = B_3 = 0$, так как на участках 1 и 3 векторы $d\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{r}$ коллинеарны, поэтому их векторное произведение равно нулю. На втором участке проводника с током $d\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{r}$, $|d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}| = r\,dl$, вектор $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_2$ направлен за плоскость рисунка, а величину $r = \text{const}$ можно вынести за знак интеграла, так что

$$B = \tilde{k} \int_{\Gamma_2} \frac{I\,|d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}|}{r^3} = \tilde{k} \int_{\Gamma_2} \frac{I\,r\,dl}{r^3} = \tilde{k}\,\frac{I}{r^2} \int_{\Gamma_2} dl\,.$$

Элемент дуги окружности $dl = r\,d\alpha$, а $\beta = 2\pi/3$, поэтому

$$B = \tilde{k}\,\frac{I}{r} \int_0^{\beta} d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I}{r}\,\beta = \frac{\mu_0}{6}\,\frac{I}{r} = 2.1 \times 10^{-6}\,\text{Тл}.$$

Ответ: $B \approx 2.1$ мкТл.

Пример 1.2. Найти индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника с током $I = 20\,\text{А}$, в точке, расположенной на расстоянии $b = 0.05$ м от середины отрезка. Угол между направлениями, в которых концы проводника видны из точки наблюдения поля, равен 60° ($\beta_1 + \beta_2 = \pi/3$).

Решение

Модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого отрезком прямого проводника с током (рис.1.1), дается формулой (1.4), в данном случае $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = 2\pi/3$ ($\beta_1 = -\pi/6$, $\beta_2 = \pi/6$), то есть

$$B = \tilde{k}\,\frac{I}{b}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \tilde{k}\,\frac{I}{b}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \tilde{k}\,\frac{I}{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

получаем $B = \tilde{k}\,\dfrac{I}{b} = 4 \times 10^{-5}\,\text{Тл}$.

Ответ: $B = 4 \cdot 10^{-5}\,\text{Тл}$.

Пример 1.3. Определить магнитную индукцию поля в центре квадратного контура со стороной $a = 0.1$ м, образованного проводом, по которому в направлении часовой стрелки (Рис.1.3) течет ток $I = 20\,\text{А}$.

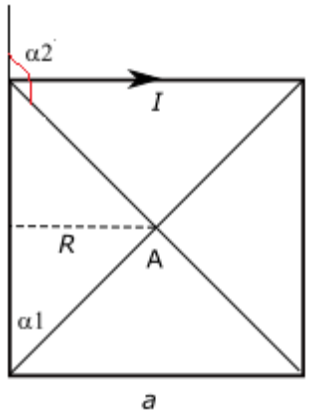


Рис.1.3. К примеру 1.3.

Решение

Согласно принципу суперпозиции индукция магнитного поля равна векторной сумме $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_4$, взаимно равных индукций $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_4$, каждая из которых создается током одной из четырех сторон квадрата, т.е. $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{B}_1$ и направлен за плоскость рисунка. Величину B_1 находим по (1.4) с учетом $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = 3\pi/4$, ($\beta_1 = -\pi/6$, $\beta_2 = \pi/6$), $b = a/2$ (рис.1.1), что дает

$$B = 4B_1 = \tilde{k}\frac{I}{b}(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)) = 8\sqrt{2}\tilde{k}\frac{I}{a} = 2.26\times10^{-4} \approx 2.3\times10^{-4} \text{ Тл.}$$

Ответ: $B \approx 2.3\times10^{-4}$Тл.

Пример 1.3. В одной из моделей, объясняющих природу земного магнетизма, было предположено, что внутри Земли в плоскости экватора течет кольцевой ток радиусом $R \approx 5000$ км. Оценить величину такого тока, если известно, что вблизи магнитного полюса Земли индукция магнитного поля равна 0.1 мТл. Землю считать сферой радиуса $R_0 = 6380$ км.

Решение

Из формулы (1.7) выражаем силу кольцевого тока, считая, что на поверхности Земли $z = R_0$ и $\mu \approx 1$

$$I = \frac{2B\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}{\mu_0 R^2}.$$

Подставляя численные значения величин, получаем $I = 3.39\times10^9 \approx 3.4\times10^9$ А.

Ответ: $I \approx 3.4\times10^9$ А.

Пример 1.4. Прямой бесконечный проводник с изоляцией образует круговую петлю радиусом $R = 0.8$ м (рис.1.4). Определить силу тока в проводнике, если известно, что в центре витка магнитная индукция $B = 12.5$ мкТл.

Решение

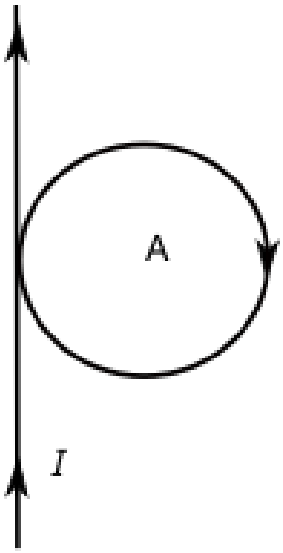


Рис.1.4. К примеру 1.4.

Согласно принципу суперпозиции индукция магнитного поля равна векторной сумме поля $\boldsymbol{B}_1$ прямого бесконечного проводника и поля $\boldsymbol{B}_2$ петли. По правилу буравчика векторы $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ в центре витка направлены перпендикулярно плоскости витка. Тогда модуль вектора индукции суммарного поля в центре витка равен $B = B_1 + B_2$, где B_1 дается выражением (1.4) с $b = R$, а B_2 - выражением (1.6), в итоге

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi b} + \frac{\mu_0 \mu I}{2R} = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right),$$

Откуда при $\mu = 1$ имеем

$$I = \frac{2RB}{(\pi^{-1} + 1)\mu_0} \approx 12.1\,\text{А}.$$

Ответ: $I \approx 12.1\,\text{А}$.

Пример 1.5. Кольцо из диэлектрика, внешний радиус которого $b = 0.08\,\text{м}$, а внутренний $a = 0.05\,\text{м}$, равномерно заряжено с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1.25\,\text{Кл/м}^2$ (рис.1.5). Кольцо вращается с угловой скоростью $\omega = 750$ рад/с вокруг оси перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Определить индукцию магнитного поля в центре кольца.

Решение

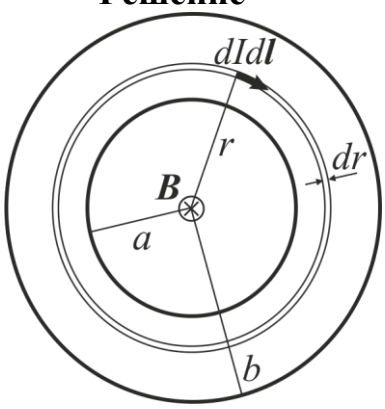


Рис.1.5. К Примеру 1.5.

Способ 1. Движущиеся по окружностям заряды образуют электрический ток, который создает магнитное поле. Введем полярную систему координат с началом в центре кольца. Бесконечно малый элемент площади кольца $dS = rdrd\varphi$ несет заряд $dq = \sigma dS = \sigma rdrd\varphi$, который за промежуток времени dt перемещается вдоль окружности радиуса r на расстояние $dl = rd\varphi$, образуя ток $I = dq/dt = \sigma rdr\,d\varphi/dt = \sigma\omega rdr$ (где $\omega = d\varphi/dt$ - угловая скорость кольца) и линейный элемент тока по модулю равный $Idl = \sigma\omega r^2 drd\varphi$. Очевидно, что $Id\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{r}$ в формулах (1.1) и вектор индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$ направлен вдоль оси кольца за плоскость Рис.1.5, а по абсолютной величине равен интегралу по поверхности кольца

$$B=\tilde{k}\int_a^b dr\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{\sigma\omega r^2}{r^2}=\tilde{k}2\pi\sigma\omega(b-a)=\frac{1}{2}\mu_0\mu\sigma\omega(b-a)$$

Подставляя численные значения заданных величин и $\mu=1$, получаем $B\approx 17.7$ мкТл.

Способ 2. Разобьем заданное кольцо на бесконечно тонкие концентрические кольца радиуса r с площадью $dS_к=2\pi rdr$ и зарядами $dq_к=\sigma dS_к=\sigma 2\pi rdr$, создающими круговые токи $dI=\frac{dq}{T}=\frac{\sigma 2\pi rdr}{T}=\sigma\omega rdr$, где $T=2\pi/\omega$ - период вращения кольца. Каждое бесконечно тонкое кольцо создает в центре индукцию в соответствии с формулой (1.6), в которой надо сделать замены $R\to r$, $I\to dI$, $B\to dB$, где $dB=\frac{\mu_0\mu dI}{2r}=\frac{\mu_0\mu}{2r}\sigma\omega rdr=\frac{\mu_0\mu}{2}\sigma\omega dr$ - поле такого тонкого кольца. Суммарное поле всех колец дается интегралом

$$B=\int_a^b dB=\int_a^b\frac{\mu_0\mu}{2}\sigma\omega drdr=\frac{\mu_0\mu\sigma\omega}{2}(b-a)$$

Ответ: $B\approx 17.7$ мкТл.

Задачи для аудиторной работы

А1.1. Найти индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника с током $I=1$А, в точке, расположенной на расстоянии 10 см от отрезка, из которой концы отрезка видны под углами 45° и 60°.

А1.2. Ток $I=10$ А течет по бесконечно длинному проводнику, согнутому под прямым углом. Найти магнитную индукцию в точке, лежащей на биссектрисе угла на расстоянии $a=0.2$ м от вершины.

А1.3. По круговому витку радиуса $R=0.1$ м циркулирует ток силы $I=1.00$ А. Найти магнитную индукцию $\boldsymbol{B}$: а) в центре витка; б) на оси витка на расстоянии $z=0.1$ м от его центра.

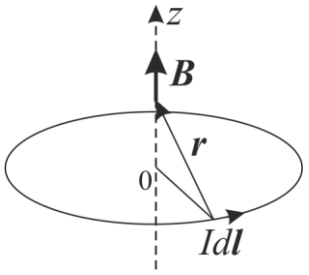


Рис.1.6. К примерам А1.3 и А1.4

А1.4. Чему равна магнитная индукция поля на оси кругового витка радиуса $R=0.30$ м в точке, расположенной на расстоянии $z=0.40$ м от центра, если в центре витка индукция $B_0=25$ мкТл?

А1.5. Непроводящий тонкий диск радиуса $R=0.08$ м, равномерно заряженный с поверхностной плотностью заряда $\sigma=1.25$ Кл/м^2, вращается с угловой скоростью $\omega=100$ рад/с вокруг оси перпендикулярной плоскости диска и про-

ходящей через его центр. Определить индукцию магнитного поля в центре диска.

Задания на дом

В1.1. При какой силе тока, текущего по тонкому проводящему кольцу радиусом 20 см, магнитная индукция в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние 30 см станет равной 20 мкТл?

В1.2. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами равно 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого провода и на 40 см от второго провода.

В1.3. По бесконечно длинному проводу, согнутому под углом 120 градусов, течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины на расстояние 5 см.

В1.4. Два круговых соосных витка радиусом 8 см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии 1 см друг от друга. По виткам текут в одном направлении токи $I_1 = 1$А и $I_2 = 2$ А. Найти индукцию магнитного поля на оси витков в точке, находящийся на равном расстоянии от витков.

В1.5. Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из 100 плотно расположенных витков, по которому течет ток 8 мА. Радиусы внутреннего и внешнего витков равны $a = 50$мм, $b = 100$мм. Найти индукцию магнитного поля в центре плоской спирали.

Практикум 2. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях

Сила Лоренца

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B} \qquad (2.1)$$

где

$$\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (\upsilon_y B_z - \upsilon_z B_y)\boldsymbol{i} + (\upsilon_z B_x - \upsilon_x B_z)\boldsymbol{j} + (\upsilon_x B_y - \upsilon_y B_x)\boldsymbol{k} \qquad (2.2)$$

В однородном магнитном поле $\boldsymbol{B}$ траектория заряженной частицы представляет собой *винтовую линию*, ось которой направлена вдоль вектора магнитной индукции. Если начальная скорость $\boldsymbol{\upsilon}_0$ частицы массы m направлена под углом θ к силовой линии магнитного поля, то *радиус винтовой линии (ларморовский радиус)* или (при $\theta = \pi/2$) – *радиус окружности*

$$R = m\upsilon_0 \sin\theta / qB. \qquad (2.3)$$

Циклотронная частота

$$\omega = qB / m \qquad (2.4)$$

Шаг винтовой линии

$$h = T\upsilon_0 \cos\theta = 2\pi m\upsilon_0 \cos\theta / qB, \qquad (2.5)$$

где $T = 2\pi m / qB$ - *время прохождения одного витка спирали* или (при $\theta = \pi/2$) - *период движения по окружности*.

Пример 2.1. Внутри зазора между горизонтально расположенными обкладками плоского конденсатора находится заряженная пылинка массой $m = 6.4 \cdot 10^{-16}$ кг. Расстояние между обкладками $d = 1$ см. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости пылинки. В отсутствии напряжения между обкладками пылинка падает с постоянной скоростью $\upsilon_1 = 0.078$ мм/с. После подачи на конденсатор напряжения $U = 94.5$ В пылинка движется вверх с постоянной скоростью $\upsilon_2 = 0.016$ мм/с. Определить заряд пылинки.

Решение

В отсутствии электрического поля пылинка падает равномерно под действием силы тяжести $m\boldsymbol{g}$ и силы сопротивления среды $\boldsymbol{F}_\mu = -k\boldsymbol{\upsilon}_1$, которую считаем пропорциональной скорости падения пылинки $\boldsymbol{\upsilon}_1$ с коэффициентом k. Второй закон Ньютона $0 = mg - k\upsilon_1$ позволяет выразить коэффициент сопротивления среды есть $k = mg / \upsilon_1$. После включения напряжения на пылинку начинает действовать и электрическое поле с направленной против силы тяжести силой $\boldsymbol{F}_q = q\boldsymbol{E}$, где q - заряд пылинки, $\boldsymbol{E}$ - напряженность электрического поля. В итоге заряженная пылинка начинает двигаться вверх с постоянной скоростью υ_2 и из второго закона Ньютона имеем уравнение $0 = qE - mg - k\upsilon_2$, откуда

$q=(mg+k\upsilon_2)/E$. Напряженность однородного поля плоского конденсатора равна $E=U/d$, тогда $q=(mg+mg\upsilon_2/\upsilon_1)d/U$. Подставляя численные значения величин, получаем $q\approx 8\cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $q\approx 8\cdot 10^{-19}$ Кл, т.е. $q=5|e|$, где $|e|=1.6\cdot 10^{-19}$ Кл –элементарный электрический заряд.

Пример 2.2 Сначала электрон двигался свободно со скоростью $\upsilon_0=10^6$ м/с. В некоторый начальный момент времени $t=0$ было включено однородное электрическое поле напряженностью $E=10^5$ В/м, образующей с направлением начальной скорости $\boldsymbol{\upsilon}_0$ угол $\alpha=\pi/3$. По какой траектории движется электрон после включения поля? Найти радиус кривизны R траектории в той точке, где скорость минимальна?

Решение

Выберем декартову систему координат, в которой ось y направлена вдоль вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$, т.е. $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{j}$, а ось x лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_0$. Запишем второй закон Ньютона $m\boldsymbol{a}=e\boldsymbol{F}_E$ для электрона (e - заряд, m - масса, $\boldsymbol{a}=d\mathbf{v}/dt$ - ускорение электрона) с учетом электрической составляющей силы Лоренца (2.1) $\boldsymbol{F}_E=e\boldsymbol{E}=-qE\boldsymbol{j}$, где $q=|e|=1.6\cdot 10^{-19}|e|=1.6\cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный электрический заряд. В проекциях на оси выбранной системы координат уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} ma_x=0, \\ ma_y=-qE. \end{cases}$$

Учитывая дифференциальные связи между ускорением $\boldsymbol{a}=d\mathbf{v}/dt$, скоростью $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ и радиус-вектором $\mathbf{r}$ электрона, проинтегрируем эту систему дифференциальных уравнений с учетом начальных условий: $x_0=y_0=0$, $\upsilon_{0x}=\upsilon_0\sin\alpha$, $\upsilon_{0y}=\upsilon_0\cos\alpha$. Получим соотношения

$$\begin{cases} a_x=0, \\ a_y=-\dfrac{q}{m}E, \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon_x=\upsilon_{0x}, \\ \upsilon_y=\upsilon_{0y}-\dfrac{q}{m}Et, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\upsilon_{0x}t, \\ y=\upsilon_{0y}t-\dfrac{q}{m}E\dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Последние два соотношения представляют собой систему уравнений параметрического задания кривой траектории электрона ($x=x(t), y=y(t)$, параметром является время t). Очевидно, что кривая траектории является *параболой*, явное уравнение которой получается исключением параметра путем выражения времени $t=x/\upsilon_{0x}$ из первого уравнения и подстановки его во второе уравнение. В итоге получаем явное уравнение траектории движения заряда $y=p_1x-p_2x^2$, где $p_1=\mathrm{ctg}\alpha$, $p_2=qE/2m\upsilon_{0x}^2$. В системе координат $y=(x)$ максимум параболы соответствует моменту времени t_1, в который скорость электрона $|\mathbf{v}|$ минимальна, так как в этой точке величина $\upsilon_y=\upsilon_{0y}+a_yt_1=0$ равна нулю, а

$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sin\alpha$ вообще не зависит от времени, т.е. $t_1 = -\upsilon_{0y} / a_y = m\upsilon_{0y} / qE$. Кроме того, в точке максимума полное ускорение направлено по нормали к вектору скорости и равно нормальному ускорению $|a| = |a_n| = |\mathbf{v}|^2 / R$, где R - радиус кривизны траектории в этой точке, а $|\mathbf{v}| = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sin\alpha$. Следовательно, радиус кривизны в точке максимума траектории равен $R = |\upsilon_x^2 / a_y| = m\upsilon_0^2 \sin^2\alpha / qE$. Подставляя численные значения величин, получаем значение радиуса кривизны в вершине параболы $R(t_1) = 0.43$ мкм.

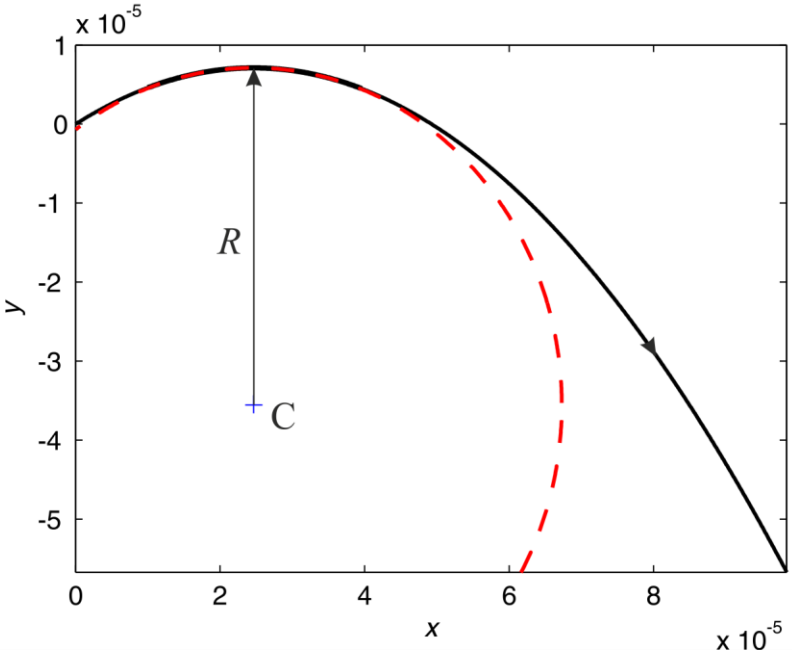


Рис.2.1. Сплошная линия - параболическая траектория движения электрона, штриховая линия - окружность кривизны в вершине параболы, точка С – мгновенный центр кривизны в момент времени t_1.

Ответ: 1. Траектория есть парабола (рис.2.1), 2. $R(t_1) = 0.43$ мкм.

Пример 2.3. В установке для разделения изотопов U^{238} и U^{235} пучок однократно ионизованных ускоренных ионов урана с энергией $E_K = 5$ кэВ попадает от источника через щель S (рис.2.2) в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рисунка. В магнитном поле ионы разных масс движутся по разным окружностям и, совершив полуоборот, попадают в приемники. Конструкция приемников должна быть такова, чтобы расстояние между пучками U^{238} и U^{235} на выходе было не меньше $\Delta x = 5$ мм. Каково должно быть магнитное поле, удовлетворяющее этому условию? Найти время, необходимое для полного разделения $M = 1$ кг природного урана, если ионный ток, создаваемый источником, $I = 5$ мА. Принять молярную массу природного урана равной $\mu = 0.238$ кг/моль, $m_1 = 3.9526 \cdot 10^{-25}$ кг - масса ядра U^{238}, $m_2 = 3.9029 \cdot 10^{-25}$ кг масса ядра U^{235}.

Решение

Уравнение движение однозарядных положительных ионов дается вторым законом Ньютона $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B}$ - магнитная сила Лоренца.

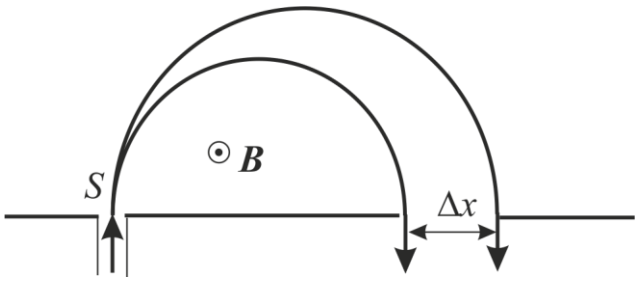


Рис.2.2. Схема траекторий пучков изотопов урана в установке по разделению изотопов

Проецируя на радиальное направление, получаем $ma = q\upsilon B$, где $a = \upsilon^2 / R$ - центростремительное ускорение, откуда $R = m\upsilon / qB$ - ларморовский радиус пучка ионов со скоростью υ. Из кинетической энергии иона $E_K = m\upsilon^2 / 2$ (нерелятивистский случай) выражаем его скорость $\upsilon = \sqrt{2E_K / m}$ и радиус пучка ионов с массой m равен $R = \sqrt{2E_K m} / qB$. У однозарядных ионов изотопов U^{238} и U^{235} заряды равны $q_1 = q_2 = q = 1.6 \cdot 10^{-19}$Кл, тогда радиусы их траекторий $R_1 = \sqrt{m_1}\sqrt{2E_K} / qB$ и $R_2 = \sqrt{m_2}\sqrt{2E_K} / qB$, т.е. $\Delta R = R_1 - R_2 = \left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right)\sqrt{2E_K} / qB$. Принимая что $\Delta R = \Delta x / 2$, определяем верхнюю границу значений индукции магнитного поля $B = \left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right)\sqrt{2E_K} / q\Delta R$. Подставляя численные значения величин, получаем для этой верхней границы индукции значение $B = 0.396 \approx 0.4$ Тл.

Природный уран содержит 99.3% изотопа U^{238} и 0.7% изотопа U^{235}. Источник ионов с током I в течение времени t выдает заряд равный $Q = I\,t$. Для полного разделения N ионов изотопов вещества урана массой M в течение времени t необходимо, чтобы этот заряд был равен $Q = qN = qMN_A / \mu$, тогда необходимое время $t = qMN_A / \mu I \approx 8.1 \cdot 10^7$ с ≈ 2.6 года

Ответ: $B \le 0.4$ Тл; $t \approx 2.6$ года.

Пример 2.4. В электронно-лучевой трубке после прохождения ускоряющей разности потенциалов $U = 20$ кВ пучок электронов попадает в магнитное поле катушек вертикального отклонения пучка. Внутри катушек магнитное поле можно считать однородным с индукцией $B = 5$ мТл, направленной вдоль оси y, как показано на рисунке (рис.2.3), за плоскость чертежа. Электроны влетают в магнитное поле слева, так что $\boldsymbol{\upsilon}_{0x} = \upsilon_0$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_{0z} = 0$; $x = 0, y = 0, z = 0$ в начальный момент времени $t = 0$. Вне катушек магнитное поле пренебрежимо мало. На какой угол отклонится пучок, если длина рабочей области катушек $l = 2$ см?

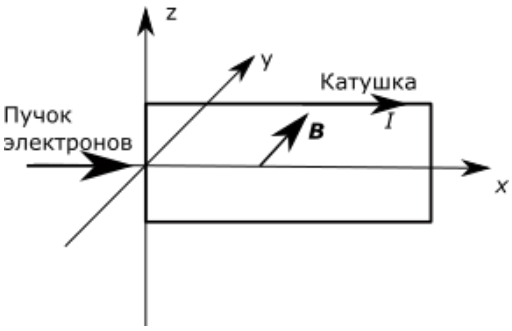


Рис.2.3. К примеру 2.4.

Решение

Сила Лоренца, действующая на электрон в магнитном поле равна $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{j} = (0, B, 0)$ и $e\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B} = -e\upsilon_z B\boldsymbol{i} - e\upsilon_x B\boldsymbol{k}$. Второй закон Ньютона для электрона $m\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B}$ в декартовых координатах дает три уравнения

$$\begin{cases} ma_x = q\upsilon_z B, \\ ma_y = 0, \\ ma_z = -q\upsilon_x B, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{\upsilon}_x = \omega\upsilon_y, \\ \dot{\upsilon}_y = 0, \\ \dot{\upsilon}_z = -\omega\upsilon_x, \end{cases}$$

так как $a_{x,y,z} = \dot{\upsilon}_{x,y,z}, \omega = qB/m$, $q = |e|$ (здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени). Первое уравнение из правой системы продифференцируем по переменной t и подставим в полученный результат $\dot{\upsilon}_z$ из третьего уравнения, получим дифференциальное уравнение второго порядка $\ddot{\upsilon}_x + \omega^2\upsilon_x = 0$. Общее решение этого однородного дифференциального уравнения для x-компоненты скорости имеет вид $\upsilon_x = A\cos\omega t + C\sin\omega t$. Продифференцируем это решение по переменной t и подставив результат в верхнее уравнение найдем общее решение для z-компоненты скорости электрона $\upsilon_z = -A\sin\omega t + C\cos\omega t$. Постоянные интегрирования A и C найдем, воспользовавшись начальными условиями $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 = A$, $\upsilon_{0y} = 0$, $\upsilon_{0z} = 0 = C$ при $t = 0$. Таким образом, компоненты вектора скорости электрона изменяются со временем по закону:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dot{x} = \upsilon_0 \cos\omega t, \\ \upsilon_y = \dot{y} = 0. \\ \upsilon_z = \dot{z} = -\upsilon_0 \sin\omega t, \end{cases}$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения по времени с начальными условиями $x = 0, y = 0, z = 0$ при $t = 0$, найдем зависимость координат электрона от времени

$$\begin{cases} x = R\sin\omega t, \\ y = 0. \\ z = R(\cos\omega t - 1), \end{cases}$$

где $R = \upsilon_0 / \omega = m\upsilon_0 / qB$. Поскольку $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$, это означает, что каждый электрон движется в xz-плоскости по окружности радиуса R с центром в точке $x = 0, y = 0, z = -R$, уравнение которой $x^2 + (z + R)^2 = R^2$.

Начальную скорость электрона найдем из закона сохранения энергии $m\upsilon_0^2 / 2 = qU$, т.е. $\upsilon_0 = \sqrt{2qU / m}$. В условиях задачи $R = m\upsilon_0 / qB = 0.095$ м, длина катушки $l = 0.02$ м, то есть $R > l$ и внутри катушки умещается только часть ларморовской окружности (Рис.2.3). Если t_1 - время пролета активной области катушки, то в точке вылета из катушки x-координата электрона равна $l = R\sin\omega t_1$, откуда $t_1 = \omega^{-1}\arcsin(l / R)$. Угол отклонения φ_1 пучка электронов после прохождения отклоняющей системы найдем из соотношения $\mathrm{tg}\varphi_1 = \upsilon_z(t_1) / \upsilon_x(t_1) = -\mathrm{tg}\,\omega t_1$. $\varphi_1 = \arctan(\upsilon_z(t_1) / \upsilon_x(t_1))$ и $\varphi_1 = -\omega t_1 = -\arcsin(l / R)$. Подставляя численные значения величин, получаем $\varphi_1 = -0.211$ или $\varphi_1 = -12.1^{\circ}$.

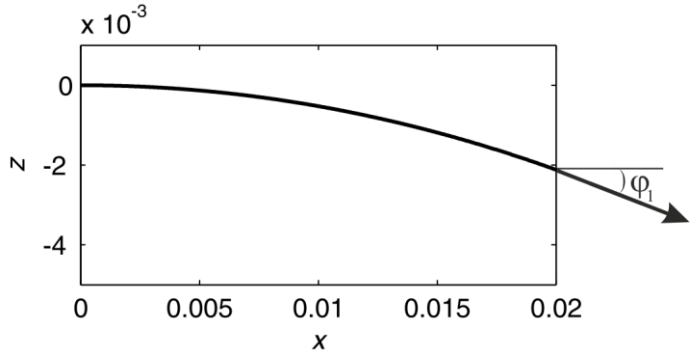


Рис.2.3. Участок траектории электрона внутри катушки

Ответ: $\varphi_1 = -0.211$рад $= -12.1^{\circ}$.

Пример 2.5. Электрон, движущейся в вакууме со скоростью $\upsilon_0 = 2\times10^6$ м/с, попадает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1.2$ мТл под углом 45 градусов к силовым линиям поля. Определить радиус винтовой линии, по которой будет двигаться электрон, и её шаг.

Решение

Воспользуемся результатами предыдущего примера. Направим ось z вдоль вектора индукции магнитного поля, а начало координат и направления осей x и y выберем так, чтобы в начальный момент времени $t = 0$ компоненты радиус-вектора и скорости электрона имели значения: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и $\upsilon_{0x} = \upsilon_0\sin\theta$, $\upsilon_{0y} = 0$, $\upsilon_{0z} = \upsilon_0\cos\theta$. Тогда компоненты скорости в любой момент времени даются выражениями: $\upsilon_x = \upsilon_{0x}\cos\omega t$, $\upsilon_y = -\upsilon_{0x}\sin\omega t$, $\upsilon_z = \upsilon_0\cos\theta$, где $\omega = qB / m = 2\pi/T$ - циклотронная частота. Интегрируя еще раз и учитывая координатные начальные условия, получаем выражения координат электрона: $x = R\sin\omega t$, $y = R - R\cos\omega t$, $z = \upsilon_0 t\cos\theta$, где $R = \upsilon_0\sin\theta / \omega$ - радиус цилиндра, на который навивается траектория электрона (рис.2.4). Шаг винтовой линии равен $h = \upsilon_{0y}T = 2\pi\upsilon_0\cos\theta / \omega$. Подставляя численные значения величин, получаем: $R = 0.0067$ м и $h = 0.042$ м

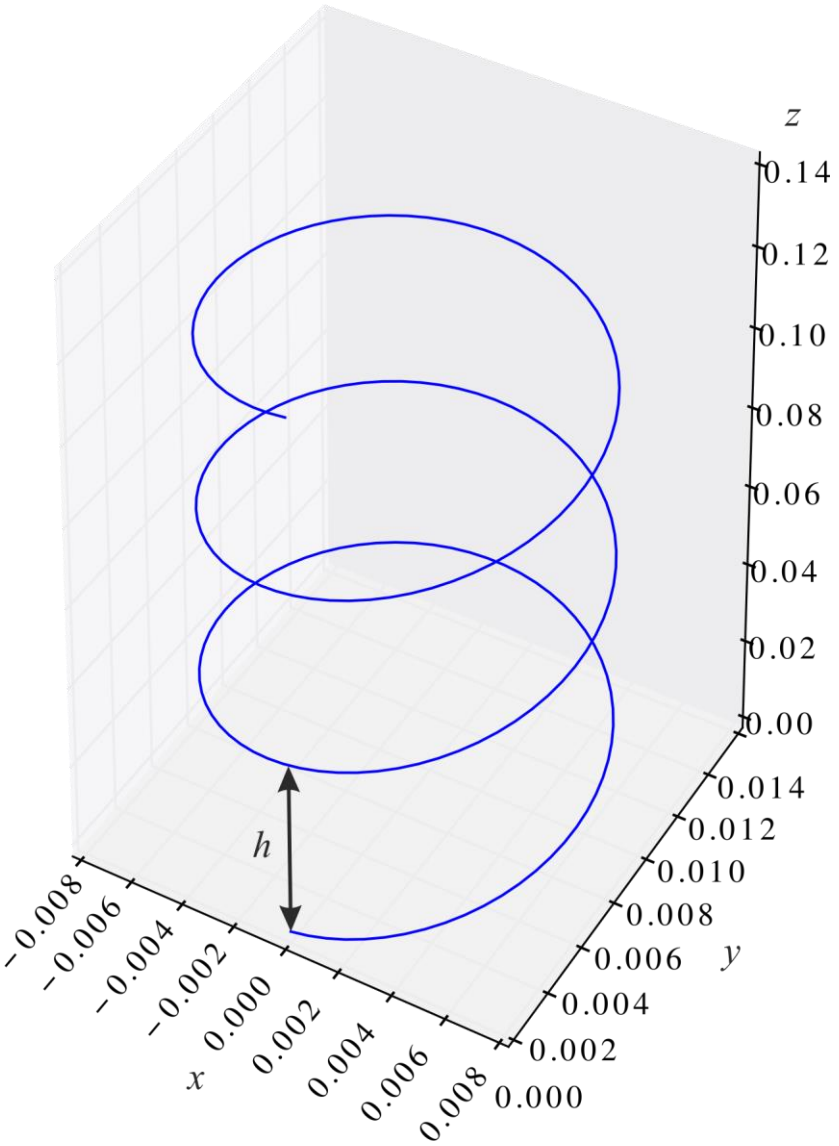


Рис.2.4.

Ответ: $R = 0.0067$ м и $h = 0.042$ м

Задачи для аудиторной работы

А2.1. Вычислить скорость, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов: 1) 100 В; 2) 100 кВ. Сравнить значения скоростей, получающиеся с применением: а) классической ($E_K = m\upsilon^2/2$) и б) релятивистской ($E_K = mc^2(1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} - 1)$) формул для кинетической энергии.

А2.2. Электрон двигался свободно со скоростью $\upsilon_0 = 10^6$ м/с. В момент времени $t = 0$ включается однородное электрическое поле с напряженностью $E = 10^5$ В/м, образующее с направлением скорости υ_0 угол $\alpha = \pi/3$. Чему равно приращение импульса электрона за время $t_2 = 50$ пс?

А2.3. Два однозарядных иона, пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям индукции. Один ион, масса которого равна 12 аем (ион углерода), описал дугу окружности радиусом 4 см. Определить массу другого иона, который описал дугу окружности радиусом 6 см.

А2.4. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кэВ, пролетает область пространства, в которой имеется поперечное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0.51$ Тл. Толщина области с полем $l = 10$ см. Найти угол отклонения протона от первоначального направления движения.

А2.5. Определите силу Лоренца, действующую на электрон, влетевший со скоростью $\upsilon_0 = 4 \times 10^6$ м/с в однородное магнитное поле под углом 30 градусов к линиям индукции. Магнитная индукция поля равна 0.2 Тл.

Задания на дом

В2.1. Электрон летел свободно со скоростью $\upsilon_0 = 10^6$ м/с. В момент времени $t = 0$ включается однородное электрическое поле с напряженностью $E = 10^5$ В/м, образующее с направлением $\boldsymbol{\upsilon}_0$ угол $\alpha = \pi / 3$. Как изменяется со временем момент импульса $\boldsymbol{L}$ электрона относительно точки, в которой находился электрон в момент включения электрического поля? Чему равно приращение момента импульса $\boldsymbol{L}$ электрона за время $t = 50$ пс?

В2.2. Электрон, движущийся с нерелятивистской скоростью $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_0 \boldsymbol{i}$, влетает в область $0 < x < a$, где создано постоянное электрическое поле вида $\boldsymbol{E} = E_0 \boldsymbol{i}$. Определить приращение кинетической энергии электрона после выхода из области поля. Принять $\upsilon_0 = 10^6$ м/с, $a = 0.01$ м и $E_0 = 10^5$ В/м.

В2.3. Вычислить радиус дуги окружности, которую описывает протон в магнитном поле с индукцией 15 мТл, если скорость протона равна $2 \cdot 10^6$ м/с.

В2.4. Электрон со скоростью $8 \cdot 10^6$ м/с влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0.1 Тл. Вектор скорости составляет угол 60 градусов с направлением линии индукции. Определить радиус и шаг винтовой линии, по которой движется электрон в магнитном поле.

Практикум 3.
Сила Ампера. Закон полного тока и его применение для расчета магнитных полей. Магнитный поток

Сила Ампера

$$d\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{F} = \int_{\Gamma} Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}. \qquad (3.1)$$

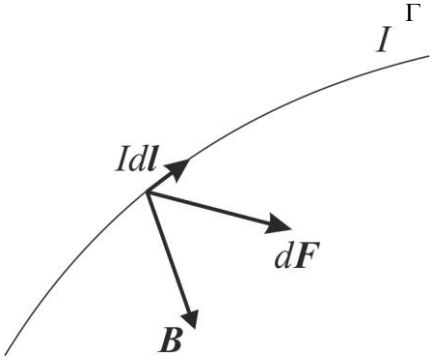


Рис.3.1. к формуле (3.1)

Сила взаимодействия на единицу длины для двух параллельных бесконечно длинных проводников с токами

$$dF/dl = \tilde{k}2I_1I_2 / R, \qquad (3.2)$$

где R - расстояние между проводниками.

Вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ в однородных изотропных средах связан с вектором магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ *материальным соотношением*

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}. \qquad (3.3)$$

Циркуляцией C_a *вектора* $\boldsymbol{a}$ *вдоль замкнутого контура* Γ называется криволинейный интеграл

$$C_a = \oint_{\Gamma} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{l}, \qquad (3.4)$$

где $\boldsymbol{a}d\boldsymbol{l} = a\cos\alpha dl$ - скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $d\boldsymbol{l}$, α - угол между ними.

Закон полного тока (закон Эрстеда)

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l} = I, \qquad I = \sum_m I_m \qquad (3.5)$$

- *циркуляция вектора напряженности магнитного поля* вдоль произвольного замкнутого контура Γ равна *полному току* I, охватываемому этим контуром. *Полный ток* равен алгебраической сумме токов I_m, охватываемых контуром, *знаки токов* I_m связаны с направлением обхода контура *правилом правого винта.*

Соленоидом называется проволочная спираль с током, характеризуемая числом витков на единицу длины n, длиной l и диаметром d. Толщина провода и шаг винтовой линии малы по сравнению с d и l.

Напряженность и индукция магнитного поля внутри длинного цилиндрического соленоида и внутри тороидального соленоида с однородным сердечником магнитной проницаемости μ

$$H = nI, \qquad B = \mu\mu_0 nI. \qquad (3.6)$$

Магнитным потоком через поверхность S называется поверхностный интеграл

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} \qquad (3.7)$$

где $\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = B\cos\alpha dS$ - скалярное произведение векторов $\boldsymbol{B}$ и $d\boldsymbol{S} = \mathbf{n}dS$, α - угол между ними, $\mathbf{n}$ - единичный вектор нормали к элементу площади поверхности dS.

Пример 3.1. По медному стержню массой $m = 0.14$ кг, лежащему поперек двух параллельных рельсов, расположенных друг от друга на расстоянии 0.3 м, течет ток $I = 50$ А (рис.3.2.). Система помещена в магнитное поле, перпендикулярное плоскости рельсов. Определить минимальную индукцию магнитного поля, при которой проводник начнет движение по рельсам, если коэффициент трения скольжения стержня по рельсам 0.6.

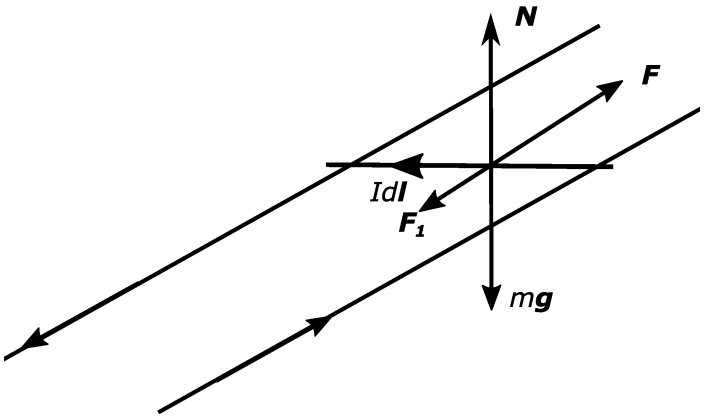


Рис.3.2. К примеру 3.1

Решение

На движущийся стержень действуют сила тяжести $m\boldsymbol{g}$, сила нормальной реакции рельсов $\boldsymbol{N}$, сила Ампера $\boldsymbol{F}$ и сила трения $\boldsymbol{F}_\mu$. Проецируя уравнение Ньютона $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_\mu$ на направление движения стержня с учетом того, что $m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} = 0$, $F_\mu = \mu mg$, а $F = I\,l\,B$, получаем $ma = F - \mu mg$. Минимальное значение B, при котором движение перемычки становится равномерным, т.е. $a = 0$, получаем из условия $0 = IlB_{\min} - \mu mg$, что дает $B_{\min} = \mu mg / Il$. Подставляя численные значения величин, получаем $B_{\min} = 0.055$ Тл.

Ответ: $B_{\min} = 0.055$ Тл.

Пример 3.2. Генератор и нагрузку соединяют два тонких параллельных провода длиной $l = 2$ м, отстоящие друг от друга на расстоянии $b = 0.2$ м (рис.3.3). Оценить силу F взаимного отталкивания проводов в случае короткого замыкания, когда по ним течет ток $I = 10$ кА.

Решение

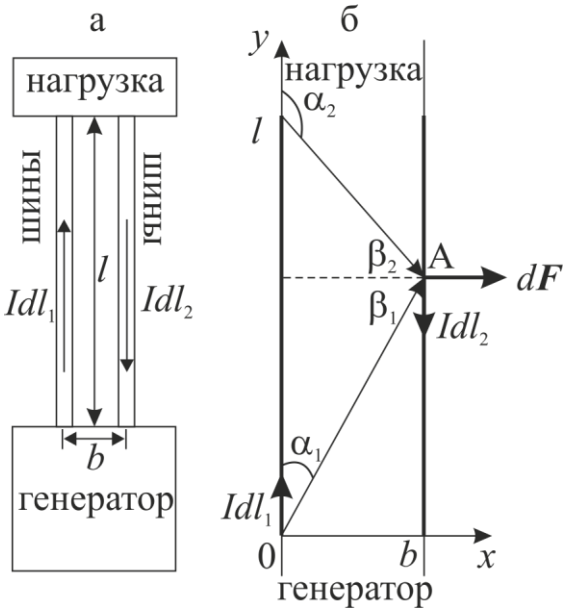


Рис.3.3. К примеру 3.2

По условию задачи длина проводов на порядок больше расстояния между ними. Грубую оценку силы их взаимного отталкивания получим, применяя формулу (3.2) для силы на единицу длины бесконечно длинных параллельных проводов с антипараллельными токами: на участке $l = 2$ м сила их отталкивания равна $F_0 = \tilde{k} 2 I^2 l / b \ = 200$ Н.

Однако провода конечной длины создают более слабое магнитное поле и сила их взаимодействия должна быть меньше. В соответствии с формулой (1.4) занятия 1 первый провод создает в некоторой точке А на втором проводе магнитное поле с индукцией:

$$B = \tilde{k} \frac{I_1}{b} (\sin\beta_2 - \sin\beta_1) ,$$

где β_1 и β_2 - алгебраические значения углов между перпендикуляром из точки А к первому проводнику и направлениями, в которых концы первого проводника видны из точки А на втором проводнике, I_1 - ток, текущий по первому проводу. Начало декартовой системы координат поместим в начале первого провода, ось y направим вдоль тока этого провода, а ось x в направлении ко второму проводу. Синусы $\sin\beta_1$ и $\sin\beta_2$ легко выразить через y-координату точки А, рассматривая соответствующие прямоугольные треугольники

$$\sin\beta_1 = -\frac{y}{\sqrt{b^2 + y^2}} \text{ и } \sin\beta_2 = \frac{l - y}{\sqrt{b^2 + (l - y)^2}}$$

В точке А вектор индукции $\mathbf{B}$ направлен за плоскость рисунка, а сила Ампера – вправо. Полная сила Ампера, действующая на второй провод со стороны первого дается интегралом по длине второго провода

$$F = \int_0^l I_2 B dy = \tilde{k} \frac{I_1 I_2}{b} \int_0^l (\sin\beta_2 - \sin\beta_1) dy ,$$

где I_2 - ток, текущий по первому проводу. Учитывая предыдущие выражения для синусов и то, что $I_1 = I_2 = I$, имеем

$$F = \tilde{k}\frac{I^2}{b}\int_0^l \left(\frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}} + \frac{l-y}{\sqrt{b^2+(l-y)^2}} \right) dy = \tilde{k}\frac{2I^2}{b}\left(\sqrt{l^2+b^2} - b\right).$$

Подставляя численные значения величин, получаем

$$F = \tilde{k}\frac{2I^2}{b}\left(\sqrt{l^2+b^2} - b\right) = 181 \text{ Н}.$$

Видно, что поскольку $\sqrt{l^2+b^2} - b < l$, то начальная оценка F_0 является завышенной. Погрешность такой оценки в нашем случае: $\delta F = |F_0 - F|/F = 0.105$, т.е. чуть больше 10%, однако эта погрешность становится малой при $b/l \ll 1$.

Ответ: $F = 181$ Н.

Пример 3.3. По сечению проводника равномерно распределен ток плотностью $j = 2\times10^6$ А/м^2. Найти циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль окружности радиуса $R = 5$мм, проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол 30 градусов с вектором плотности тока.

Решение

Из (3.3) и (3.5) следует, что в однородной среде закон полного тока можно записать в виде

$$C_B = \oint_\Gamma \boldsymbol{B}d\boldsymbol{l} = \mu_0\mu I$$

Сила тока, охватываемого контуром Γ, равна потоку вектора плотности тока $\boldsymbol{j}$ через поверхность S, натянутую на этот контур $I = \int_S \boldsymbol{j}d\boldsymbol{S}$, поэтому

$$C = \mu\mu_0\int_S \boldsymbol{j}d\boldsymbol{S} = \mu\mu_0\int_S \boldsymbol{jn}dS = \mu\mu_0 jS\cos\alpha = \mu\mu_0 j\pi R^2\cos\alpha,$$

так как векторный элемент площади $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$, dS - элемент площади, $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор нормали к нему, $\boldsymbol{jn} = j\cos\alpha$, α - угол между $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{j}$, $S = \pi R^2$ - площадь круга, охватываемого контуром Γ. В нашем случае $\alpha = 60^\circ$, $\mu = 1$. Подставляя численные значения параметров, получаем $C = 1.7\times10^{-4}$ Тл м.

Ответ: $C = 1.7\times10^{-4}$ Тл м.

Пример 3.4. Вдоль длинного однородного проводника цилиндрической формы радиусом $R = 0.01$м течет ток $I = 50$ А, равномерно распределенный по сечению проводника. Определить напряженность и магнитную индукцию поля, создаваемого этим током а) вне проводника на расстоянии $r_1 = 5.0$ см от осевой линии б) внутри проводника на расстоянии $r_2 = 0.8$ см от осевой линии. Маг-

нитная проницаемость вещества внутри проводника $\mu_2 = 2$, вне проводника вакуум $\mu_1 = 1$.

Решение

Из соображений симметрии очевидно, что в данном случае силовые линии магнитного поля имеют вид концентрических окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндрического проводника, с центрами на этой оси. Поэтому для расчета магнитного поля удобно воспользоваться законом полного тока (3.5), выбирая в качестве контура Γ любую окружность, совпадающую с силовой линией, тогда

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = \oint_{\Gamma} H dl = H \oint_{\Gamma} dl = 2\pi r H ,$$

так как на силовой линии векторы $\boldsymbol{H}$ и $d\boldsymbol{l}$ параллельны, кроме того на всей окружности величина $H = |\mathbf{H}|$ имеет одинаковые значения и может быть вынесена за знак криволинейного интеграла, при этом интеграл $\oint_{\Gamma} dl = 2\pi r$ - длине окружности произвольного радиуса r. Это справедливо для всех силовых линий как вне, так и внутри цилиндрического проводника с током. Таким образом (3.5) свелось к уравнению

$$2\pi r H(r) = I(r)$$

где $H(r)$ - модуль напряженности магнитного поля на силовой линии радиуса r, а $I(r)$ - полный ток, охватываемый этой линией. Отсюда следует, что на расстоянии r от оси бесконечно длинного цилиндрического проводника с током $I(r)$ модуль напряженности магнитного поля равен

$$H(r) = \frac{I(r)}{2\pi r}.$$

Зависимость $I(r)$ различна внутри и вне проводника:

1. Вне проводника при $r > R$ любая силовая линия охватывает полный ток, текущий по проводу, т.е. $I(r) = I$ не зависит от r. Напряженность магнитного поля равна

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \; r > R$$

а индукция магнитного поля равна

$$B(r) = \frac{\mu_1 \mu_0 I}{2\pi r}, \; r > R.$$

2. Внутри проводника при $r < R$ любая силовая линия охватывает полный ток, равный $I(r) = jS(r)$, где $j = I / \pi R^2$ - плотность тока, $S(r) = \pi r^2$ - площадь, охватываемая силовой линией внутри проводника, т.е. $I(r) = jS(r) = I r^2 / R^2$ и напряженность магнитного поля равна

$$H(r) = \frac{I r}{2\pi R^2}, \; r < R$$

а индукция магнитного поля равна

$$B(r) = \frac{\mu_2 \mu_0 I\, r}{2\pi R^2},\ r < R.$$

Видно, что на поверхности проводника при $r = R$ напряженность магнитного поля $H(r)$ непрерывна, а индукция магнитного поля $B(r)$ испытывает разрыв, определяемый различием магнитных проницаемостей μ_1 и μ_2.

Подставляя числовые значения параметров, получим

$B_1 = 2\times10^{-4}$ Тл и $B_2 = 16\times10^{-4}$ Тл.

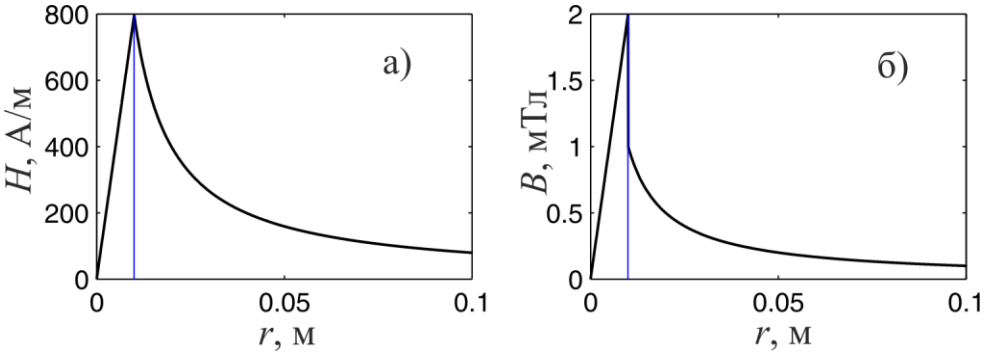


Рис.3.4. К примеру 3.4.

Ответ: 1. $B_1 = 2\times10^{-4}$ Тл, 2. $B_2 = 16\times10^{-4}$ Тл.

Пример 3.5. На тонкий тороид из диэлектрического материала намотана катушка из $N = 1000$ равномерно распределенных витков. Найти отношение индукции магнитного поля на оси тонкой катушки к индукции магнитного поля в центре тороида, если по катушке пропускается ток $I = 10$ А, радиус катушки $R_1 = 0.005$ м, а радиус тороида $R_2 = 0.25$ м.

Решение

Тонким тороидом можно назвать тороид, у которого которого $R_2 >> R_1$. Это означает, что индукцию магнитного поля в центре тороида можно найти как индукцию магнитного поля в центре кругового витка $B_2 \approx \mu_0 \mu_2 I / 2R_2$, где μ_2 - магнитная проницаемость вещества в центре тороида. Индукцию магнитного поля на оси тонкой тороидальной катушки B_1 найдем из закона полного тока, принимая, что вдоль оси катушки проходит силовая линия магнитного поля в виде окружности радиуса R_2, которую выберем в качестве контура Г в левой части (3.5). Тогда левая часть (3.5) равна $H_1 2\pi R_2$, а правая часть - равна NI (контур Г охватывает N витков с током I), откуда $H_1 = NI / 2\pi R_2$ и $B_1 = \mu_0 \mu_1 NI / 2\pi R_2$, где μ_1 - магнитная проницаемость вещества на оси тороидальной катушки. Таким образом, искомое отношение $B_1 / B_2 = \mu_1 N / \mu_2 \pi$. Подставляя численные значения исходных величин и считая $\mu_1 = \mu_2 = 1$, получаем $B_1 / B_2 = 318$.

Ответ: $B_1 / B_2 = 318$.

Пример 3.6. Плоская квадратная рамка со стороной $a = 20$ см лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 100$ А (рис.3.5). Рамка расположена так, что ближайшая сторона параллельна

проводу и находится на расстоянии $b = 10$ см от него. Определить магнитный поток Φ, пронизывающий рамку.

Решение

На расстоянии r от прямого провода, создаваемая им индукция магнитного поля перпендикулярна плоскости рамки и дается формулой (1.5)

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}.$$

В соответствии с определением (3.6), магнитный поток этого поля через рамку равен

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = \int_S B dS$$

так как в данном случае $\boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}\mathbf{n} dS = B dS$, где $\mathbf{n}$ - единичный вектор нормали к элементу площади dS охватываемой рамкой поверхности S. Интегрировать по поверхности проще всего выбирая в качестве дифференциального элемента площадь $dS = a dr$ бесконечно тонкой полоски, параллельной прямому проводу и расположенной на расстоянии r от него.

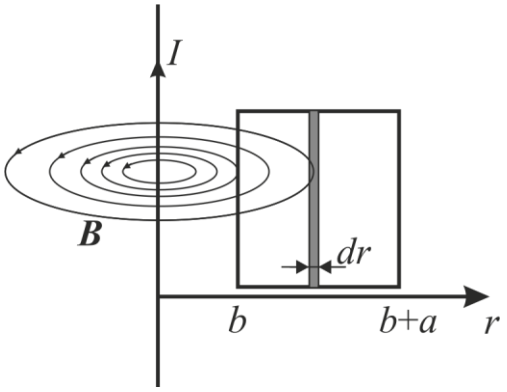


Рис.3.5. К примеру 3.6.

Тогда

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = \int_b^{b+a} B a dr = \frac{\mu_0 \mu a I}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu a I}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \approx 4.4 \times 10^{-6} \text{Вб}$$

Ответ: $\Phi = 4.4 \times 10^{-6}$ Вб

Задачи для аудиторной работы

А3.1. Прямой провод, по которому течет ток 1000 А, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно к линиям индукции. С какой силой действует поле на отрезок провода длиной один метр, если магнитная индукция равна 1 Тл?

А3.2. Двухпроводная линия состоит из длинных параллельных прямых проводов, находящихся на расстоянии 4 мм друг от друга. По проводам текут одинаковые токи в 50 А. Определить силу взаимодействия токов, приходящуюся на единицу длины.

А3.3. Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи $I_1 = 1$А, $I_2 = 1.5$А, текущие в одном направлении, и ток $I_3 = 2$ А, текущий в противоположном направлении.

А3.4. Вдоль тонкой трубы радиусом $R = 5.0$ см течет ток $I = 100$А. Найти магнитную индукцию поля внутри и вне трубы на расстоянии $R = 5.0$ см от ее поверхности.

А3.5. Плоский контур, охватывающий площадь $S = 25$ см^2, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0.04$ Тл. Определить магнитный поток, пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол 30 градусов с линиями индукции.

А3.6. Найти плотность тока как функцию расстояния r от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока электронов зависит от r как $B = \beta r^{\alpha}$, где α, β - положительные постоянные. Для расчета принять значения постоянных $\alpha = 2$, $\beta = 0.01$ Тл/м^2, а $r = 2$ мм.

Задания на дом

В3.1. Прямой провод длиной 10 см, по которому течет ток $I = 20$ А, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0.01 Тл. Найти угол α между направлениями вектора индукции и тока, если на провод действует сила 10 мН.

В3.2. По двум параллельным проводам длиной 1 м каждый текут одинаковые токи. Расстояние между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой 1мН. Найти силу тока в проводах.

В3.3. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии 10 см друг от друга, текут одинаковые токи 100 А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу, действующую на отрезок длины 1 м каждого провода в случаях: а) все токи параллельны, б) ток в третьем проводе течет в направлении противоположном первым двум токам.

В3.4. По круглому прямому проводу радиуса $R = 1$ мм течет ток равномерно распределенный по всему сечению с плотностью тока $j = 50$ А/м^2. Найти выражение для индукции магнитного поля в точке, положение которой относительно оси провода определяется перпендикулярным к этой оси радиус-вектором $\boldsymbol{r}$. Рассмотреть случаи, когда точка лежит внутри ($r_1 = 0.5$мм) и вне ($r_2 = 1.5$ мм) провода.

В3.5. Квадратная рамка со стороной длиной 20 см расположена в одной плоскости с бесконечно длинным проводом, по которому течет ток. Расстояние от провода до середины рамки равно 1 м. Вычислить относительную погрешность, которая будет допущена при расчете магнитного потока, пронизывающего рамку, если магнитное поле в пределах рамки считать однородным, а магнитную индукцию – равной значению ее в центре рамки.

Практикум 4. Магнитный момент. Магнитный момент в магнитном поле. Намагниченность. Магнитное поле в веществе

Магнитный момент плоского контура с током I

$$\boldsymbol{p}_m = IS\boldsymbol{n} \qquad (4.1)$$

где S - площадь контура с током, направление $\boldsymbol{p}_m$ определяется направлением единичного вектора $\boldsymbol{n}$ и связано с направлением обхода контура правилом буравчика.

Магнитный момент точечной частицы, обладающей зарядом q, *движущейся со скоростью* $\boldsymbol{\upsilon}$ *в точке* $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{p}_m = \frac{1}{2} q\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\upsilon} \qquad (4.2)$$

Момент импульса *точечной частицы, обладающей массой* m, *движущейся со скоростью* $\boldsymbol{\upsilon}$ *в точке* $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\upsilon}, \qquad (4.3)$$

Магнитомеханическое отношение

$$g = \frac{p_m}{L} = -\frac{q}{2m} \qquad (4.4)$$

Момент сил, действующий на магнитный момент в магнитном поле

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{B} \qquad (4.5)$$

Потенциальная энергия магнитного момента в магнитном поле

$$U_m = -\boldsymbol{p}_m \boldsymbol{B} \qquad (4.6)$$

Магнитное поле точечного магнитного момента

$$\boldsymbol{B} = \tilde{k}\left(\frac{3\boldsymbol{p}_m \boldsymbol{r}}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}_m}{r^3} \right). \qquad (4.7)$$

Магнитный момент системы зарядов

$$\boldsymbol{p}_m = \sum_i \boldsymbol{p}_{mi}. \qquad (4.8)$$

где $\boldsymbol{p}_{mi}$ - магнитные моменты частиц,

Вектор намагниченности вещества

$$\boldsymbol{J} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \boldsymbol{p}_{mi}, \qquad (4.9)$$

Напряженность магнитного поля в любой среде

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{J} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J} \right) \qquad (4.10)$$

В однородных изотропных магнитонеупорядоченных средах

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{J} = \kappa \boldsymbol{H} \qquad (4.11)$$

где μ - магнитная проницаемость вещества, κ - магнитная восприимчивость вещества.

Связь между магнитной проницаемостью μ *и магнитной восприимчивостью* κ *в однородных изотропных средах*

$$\mu = 1 + \kappa . \qquad (4.12)$$

Магнитонеупорядоченные среды: парамагнетики имеют $\kappa > 0$, во внешнем магнитном поле намагничиваются вдоль поля, *диамагнетики* имеют $\kappa < 0$, во внешнем магнитном поле намагничиваются против поля.

Магнитоупорядоченные среды – ферромагнетики, антиферромагнетики, ферримагнетики и проч.

Граница раздела двух магнетиков

$B_{2n} - B_{1n} = 0$, то есть $\mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0$ (4.13)

$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_\tau$, то есть $B_{2\tau} / \mu_2 - B_{1\tau} / \mu_1 = \mu_0 i_\tau$ (4.14)

где i_τ - перпендикулярная к выбранной касательной компонента плотности поверхностного тока.

Работа по перемещению части проводящего контура с током I в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение $\Delta\Phi$ магнитного потока, проходящего через поверхность, ограниченной контуром

$$A = I\int_1^2 \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi , \qquad (4.15)$$

Пример 4.1. Напряженность магнитного поля в центре кругового витка равна $H = 200$ А/м, магнитный момент витка $p_m = 1$ А/м^2. Вычислить силу тока в витке I и радиус витка R.

Решение

Индукция магнитного поля $B = \mu_0 \mu H$ в центре витка (1.6), $B = \mu_0 \mu I / 2R$, т.е. напряженность в центре витка $H = I/2R$. Магнитный момент витка $p_m = I\,S = \pi R^2 I$, так как площадь витка $S = \pi R^2$. Из системы уравнений $H = I/2R$ и $p_m = \pi R^2 I$ выражаем $I = \sqrt[3]{4 p_m H^2 / \pi}$ и $R = \sqrt[3]{p_m / 2\pi H}$. Подставляя численные значения параметров, получаем: $I = 37.1$А, $R = 0.0927$ м.

Ответ: $I = 37.1$А, $R = 0.0927$ м

Пример 4.2. По тонкому стержню длиной $l = 0.2$ м равномерно распределен заряд $q = 240$ нКл. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину (рис.4.1). Определить: 1) магнитный момент, обусловленный вращением заряженного стержня; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса, если стержень имеет массу 12 г.

Решение

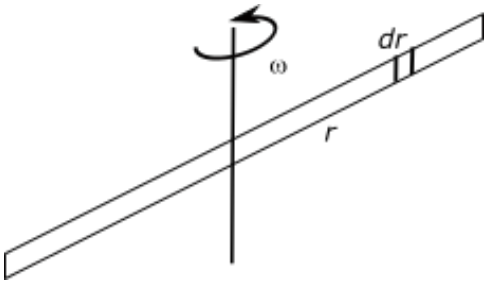


Рис.4.1.

Пусть dr - элемент длины стержня, расположенный на расстоянии r от оси вращения. Заряд этого элемента $dq = \lambda dr$, где $\lambda = q/l$ - линейная плотность равномерно распределенного заряда. Элемент длины dr и его заряд $dq = qdr/l$ совершают вращательное движение с линейной скоростью $\mathrm{v} = \omega r$, создавая в соответствии с (4.2) магнитный момент $dp_m = \frac{1}{2} r\mathrm{v}dq = \frac{1}{2}\omega r^2 dq = \frac{q}{2l}\omega r^2 dr$. Полный магнитный момент стержня равен интегралу

$$p_m = 2\int_0^{l/2} dp_m = 2\int_0^{l/2} \frac{q}{2l}\omega r^2 dr = \frac{q}{l}\omega \int_0^{l/2} r^2 dr = \frac{1}{24} q\omega l^2 .$$

Момент импульса стержня равен $L = J\omega$, где $J = ml^2/12$ - момент инерции стержня. Тогда отношение $g = \frac{p_m}{L} = \frac{q}{2m}$. Подставляя числовые данные, получаем $p_m = 4\times10^{-9}$ А·м^2, $L = 4\times10^{-4}$ кг·м^2, $p_m / L = 10^{-5}$ А/кг.

Ответ: $p_m = 4\times10^{-9}$ А·м^2, $p_m / L = 10^{-5}$ А/кг.

Пример 4.3. Рамка гальванометра длиной $a = 4$ см и шириной $b = 1.5$ см, содержащая $N = 200$ витков тонкой проволоки, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0.1$ Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Найти: 1) механический момент сил M, действующий на рамку, когда по виткам течет ток $I = 1$ мА; 2) магнитный момент p_m рамки при таком токе; 3) работу, которую требуется совершить, чтобы повернуть эту рамку с током в магнитном поле на угол $\pi/2$.

Решение

Магнитный момент рамки гальванометра равен сумме магнитных моментов его витков, т.е. согласно (4.1) $p_m = NIS = NIab$, так как $S = ab$. В магнитном поле на рамку действует момент сил (4.3): $M = p_m B\sin\alpha$, где $\alpha = \pi/2$ - угол между вектором индукции магнитного поля, лежащим в плоскости рамки, и вектором магнитного момента, который перпендикулярен к плоскости рамки. При вычислении работы учтем, что в начальном положении рамки гальванометра магнитный поток Φ_1 через рамку равен нулю, в конечном положении рамки магнитный поток Φ_2 равен BS. Работа по повороту рамки на угол $\pi/2$, согласно (4.15), равна $A_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = ISB$.

Подставляя численные значения заданных величин, получаем: $p_m = 1.2\times10^{-4}$ А·м^2, $M = 1.2\times10^{-5}$ Н·м, $A_{12} = 60$ мкДж.

Ответ: $p_m = 1.2\times10^{-4}$ А·м^2, $M = 1.2\times10^{-5}$ Н·м, $A_{12} = 60$ мкДж.

Пример 4.4. Проволочный виток радиусом $R = 0.1$ м расположен в плоскости магнитного меридиана на широте, где горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $B_0 = 2\times10^{-5}$ Тл. В центре витка установ-

лен компас. Какой ток I течет по витку, если магнитная стрелка компаса отклонена на угол $\alpha = 30^{o}$ от плоскости магнитного меридиана, как показано на рис. 4.2.

Решение

Магнитная стрелка компаса установится вдоль вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$, который равен сумме вектора индукции магнитного поля Земли $\mathbf{B}_0$ (лежит в плоскости магнитного меридиана) и вектора индукции $\mathbf{B}_1$, создаваемого витком с током и который перпендикулярен плоскости витка и меридиана (рис 4.2).

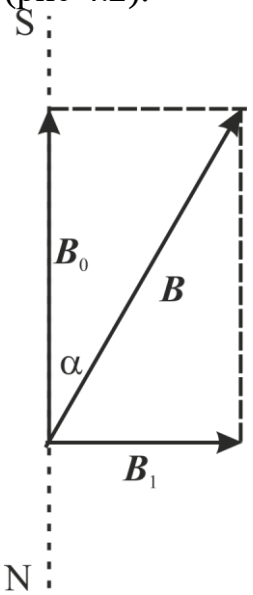


Рис.4.2. к примеру 4.4

Индукция магнитного поля в центре кругового витка равна, согласно (1.6) $B_1 = \mu_0 \mu I / 2R$. Стрелка компаса отклонилась на угол α, то есть $B_1 = B_0 \tan\alpha$, поэтому сила тока витка равна $I = 2B_0 R \tan\alpha / \mu_0 \mu$. Считая $\mu = 1$ и подставляя численные значения параметров, получаем: $I \approx 1.8$ А.

Ответ: $I \approx 1.8$ А.

Пример 4.5. Тороидальный соленоид со стальным сердечником имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. По соленоиду течет ток $I = 2$ А. Вычислить магнитный поток Φ в сердечнике, если его сечение $S = 4$ см^2.

Решение

Магнитное поле в тороидальном соленоиде с густой намоткой можно считать однородным, поэтому магнитный поток через поперечное сечение приближенно равен

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = BS .$$

где S - индукция поля внутри соленоида, S - площадь поперечного сечения соленоида. Напряженность магнитного поля внутри тороида равна $H = nI = 2000$ А/м. Индукция магнитного поля в ферромагнитной среде (сталь) нелинейно зависит от напряженности H магнитного поля, она определяется

опытным путем и табулируется. Поэтому значение индукции B внутри стального сердечника при заданном H найдем из таблицы 1, что дает $B = 1.300$ Тл. Следовательно, магнитный поток внутри сердечника равен $\Phi = 5.2 \times 10^{-4}$ Вб.

Ответ: $\Phi = 5.2 \times 10^{-4}$ Вб.

Пример 4.6. У железного сердечника в тороидальном соленоиде длины $l_1 = 1$ м имеется короткий воздушный зазор длины $l_2 = 0.01$м. Число витков в обмотке тороидального соленоида $N = 1000$. При токе соленоида $I = 20$ А индукция магнитного поля в воздушном зазоре равна $B = 1.6$ Тл. Оценить магнитную проницаемость железного сердечника при этих условиях.

Решение

Под действием магнитного поля тока катушки соленоида сердечник намагничивается вдоль этого поля, представляя собой постоянный магнит. Напряженность магнитного поля равна сумме напряженностей поля тока катушки и поля такого постоянного магнита, поэтому напряженность магнитного поля в зазоре H_2 отличается от напряженности поля внутри сердечника H_1. Зазор тонкий $l_2 << l_1$ и можно считать, что силовые линии перпендикулярны поверхностям зазора и на этих поверхностях выполняются граничные условия (4.13). Отсюда следует, что внутри сердечника и внутри зазора величины индукции магнитного поля одинаковы $B_2 = B_1$, а величины напряженностей связаны соотношением $\mu_2 H_2 = \mu_1 H_1$, поскольку $B_{1,2} = \mu_{1,2}\mu_0 H$.

Для последующих оценок воспользуемся законом полного тока (3.5) $\oint_\Gamma \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = I$. В качестве контура Γ возьмем силовую линию вектора напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$, имеющую вид окружности, проходящей внутри кольца тороида. Интеграл в левой части (3.5) приближенно равен $H_1 l_1 + H_2 l_2$, а правая часть равна IN, то есть

$$IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 = B_1 l_1 / \mu\mu_0 + B_2 l_2 / \mu_0,$$

принимая $\mu_1 = \mu$ и $\mu_2 = 1$. Откуда

$$\mu = l_1 / (\mu_0 IN / B_1 - l_2)$$

Подставляя численные значения заданных параметров, получаем: $\mu = 438$.

Ответ: $\mu = 438$

Задачи для аудиторной работы

А4.1. По кольцу радиусом R течет ток. На оси кольца на расстоянии $z = 1$ м от его плоскости магнитная индукция $B = 10$ нТл. Определить магнитный момент p_m кольца с током. Считать R много меньше z.

А4.2. Тонкое кольцо радиусом 10 см несет заряд 10 нКл. Кольцо равномерно вращается с частотой 10 с$^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определить: а) магнитный момент круго-

вого тока, обусловленный вращением заряженного кольца; б) отношение магнитного момента к моменту импульса, если кольцо имеет массу 10 г.

А4.3. Проволочный виток радиусом $R = 5$ см находится в однородном магнитном поле напряженностью $H = 2$ кА/м. Плоскость витка образует угол 60 градусов с направлением магнитного поля. Найти механический момент сил, действующий на виток, если сила тока в витке равна 4 А. Какую работу надо совершить, чтобы медленно повернуть виток с током вокруг оси, проходящей через диаметр витка, так, чтобы магнитный момент витка был сонаправлен с линиями поля?

А4.4. Длинный прямой соленоид, содержащий 5 витков на каждый сантиметр длины, расположен перпендикулярно плоскости магнитного меридиана Земли с горизонтальной составляющей индукции земного магнетизма 20 мкТл. Внутри соленоида, в его средней части находится магнитная стрелка, установившаяся в магнитном поле Земли. Когда по соленоиду пустили ток, стрелка отклонилась на 60 градусов. Найти силу тока.

А4.5. На железное кольцо намотано в один слой 500 витков провода. Средний диаметр кольца 25 см. Определить магнитную индукцию в железе и магнитную проницаемость железа, если сила тока в обмотке равна 2.5 А.

А4.6. Стальной сердечник тороида, длина которого по средней линии равна 1 м, имеет вакуумный зазор длиной 4 мм. Обмотка содержит 8 витков на 1 см. При какой силе тока индукция в зазоре будет равна 1 Тл? (Указание: воспользуйтесь таблицей 4.1 приложения)

Задание на дом

В4.1. Напряженность магнитного поля в центре кругового витка равна 200 А/м. Магнитный момент витка равен 1 нА·м^2. Вычислить силу тока в витке и радиус витка.

В4.2. Диск радиусом 10 см несет равномерно распределенный по поверхности заряд 0.2 мкКл. Диск равномерно вращается с угловой частотой 20 с$^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить: а) магнитный момент кругового тока, создаваемого диском; б) отношение магнитного момента к моменту импульса, если масса диска 0.1 кг.

В4.3. Короткая катушка площадью поперечного сечения, равной 150 см^2, содержит 200 витков провода, по которому течет ток 4 А. Катушка помещена в однородное магнитное поле напряженностью 8кА/м. Определить магнитный момент катушки, а также вращающий момент сил, действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол 60° с линиями магнитной индукции.

В4.4. Короткий прямой магнит расположен перпендикулярно плоскости магнитного меридиана. На оси магнита на расстоянии 50 см от его середины (которое много больше длины магнита) находится магнитная стрелка. Вычислить магнитный момент магнита, если стрелка отклонена на угол 6 градусов от

плоскости магнитного меридиана (горизонтальную составляющую магнитной индукции поля Земли принять равной 20 мкТл).

В4.5. Железный сердечник находится в однородном магнитном поле напряженностью 1.65 кА/м. Определить индукцию магнитного поля в сердечнике и магнитную проницаемость железа.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица 4.1: $B = B(H)$(сталь):

H,А/м	500	1000	1500	1800	2000	2200
B,Тл	0.875	1.12	1.225	1.255	1.300	1.325

Таблицы 4.2: $B = B(H)$(железо):

H,А/м	1500	1600	1700
B,Тл	1.355	1.375	1.400

Практикум 5. Явление электромагнитной индукции. Индуктивность. Самоиндукция. Энергия магнитного поля и энергия тока.

Закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (5.1)$$

ЭДС электромагнитной индукции ε в замкнутом контуре равна взятой со знаком минус скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур. *Правило Ленца*: индукционный ток в контуре имеет такое направление, что его магнитное поле препятствует изменению магнитного потока (знак минус в формуле (5.1)).

Электрический ток I, текущий вдоль замкнутого контура, создает в этом контуре магнитный поток Ф, который пропорционален этой силе тока I, коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью контура* :

$$\Phi = LI. \qquad (5.2)$$

Для полной ЭДС электромагнитной индукции, создаваемой соленоидом (катушкой индуктивности), содержащей n витков на единицу длины можно также использовать формулы (5.1) и (5.2), считая, что Φ - суммарный магнитный поток через сечение соленоида (потокосцепление), при этом L называется *индуктивностью соленоида*

$$L = n^2 \mu\mu_0 V, \qquad (5.3)$$

здесь $V = Sl$ - объем соленоида, S - площадь поперечного сечения катушки, l - ее длина, μ - магнитная проницаемость сердечника.

ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (5.4)$$

Если имеется N замкнутых контуров с токами I_l ($l = 1, 2, ..., N$), то магнитный поток через k-й контур равен сумме

$$\Phi_k = \sum_{l=1}^{N} L_{lk} I_k, \qquad (5.5)$$

коэффициенты $L_{lk} = L_{kl}$ (при $l \neq k$) называются *коэффициентами взаимной индукции* между l-м и k-м контурами, коэффициент L_{kk} называют *коэффициентом самоиндукции* (*индуктивности*) k-го контура.

ЭДС электромагнитной индукции ε_k в k-м замкнутом контуре

$$\varepsilon_k = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -\sum_{l=1}^{N} L_{lk}\frac{dI_k}{dt}. \qquad (5.6)$$

Энергия магнитного поля системы контуров с линейными токами

$$U_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Phi_k I_k = \sum_{k=1}^{N}\frac{L_{kk}I_k^2}{2} + \sum_{k,l=1(k>l)}^{N} L_{lk} I_l I_k. \qquad (5.7)$$

Энергия магнитного поля уединенного контура с током (*энергия тока*)

$$U_m = \frac{LI^2}{2}. \qquad (5.8)$$

Энергия магнитного поля в объеме V

$$U_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{\mathbf{HB}}{2} dV. \qquad (5.9)$$

Плотность энергии магнитного поля

$$w_m = \frac{\mathbf{HB}}{2}. \qquad (5.10)$$

Вычисляя по (5.9) энергию магнитного поля в объеме V, занимаемом магнитным полем любого отрезка цепи с током (проводника с током) и представляя результат в виде (5.8) можно определить *индуктивность* этого *отрезка цепи* (*проводника*).

Пример 5.1. Тонкий металлический стержень длины $l = 1.2$ м вращается с частотой $\nu = 2$ об/с в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к стержню и отстоящей от одного из концов на расстояние $l_1 = 0.25$ м (рис.5.1). Вектор магнитной индукции параллелен оси вращения и по модулю равен $B = 1$ мТл. Найти разность потенциалов, возникающую между концами стержня.

Решение

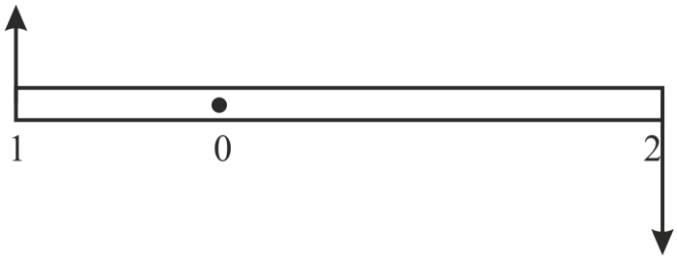


Рис.5.1. К примеру 5.1.

При вращении стержня в магнитном поле на каждый электрон с зарядом, находящийся внутри стержня на расстоянии r от оси действует магнитная сила Лоренца, направленная вдоль стержня и равная по модулю

$$F_B = e\nu B = e\omega r B = 2\pi\nu e B r,$$

так как линейная скорость вращательного движения электрона $\mathrm{v} = \omega r = 2\pi\nu r$, а угловая скорость вращения $\omega = 2\pi\nu$. Эта сила смещает электроны к одному из концов стержня до тех пор пока на противоположных концах стержня накопятся такие заряды противоположного знака (создающие между концами стержня разность потенциалов $\Delta\varphi$ и напряженность $E = E(r)$), что сила электрического поля $F_E = eE$ уравновешивает магнитную силу Лоренца $F_E = F_B$, откуда получаем зависимость напряженности электрического поля от расстояния до оси

$$E = 2\pi\nu B r$$

Разность потенциалов между концами стержня равна интегралу

$$\Delta\varphi = -\int_{l_1}^{l_2} E dr = -2\pi\nu B \int_{l_1}^{l_2} r dr = -2\pi\nu B \left.\frac{r^2}{2}\right|_{l_1}^{l_2} = \pi\nu B(l_1^2 - l_2^2) = 5.278\times10^{-3} \text{ В}$$

где $l_2 = l - l_0$ - расстояние от оси до второго конца стержня.
Другой способ решения может быть основан на законе электромагнитной индукции (5.1), если рассмотреть два круговых проводящих контура радиусов l_1 и l_2, по которым скользят концы стержня. Разность потенциалов между концами стержня равна разности ЭДС индукции в этих контурах $\Delta\varphi = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. ЭДС индукции в первом контуре равна $\varepsilon_1 = -d\Phi_1 / dt$, где $d\Phi_1 = BdS_1$ магнитный поток через площадь сектора $dS_1 = l_1^2 d(\omega t)/2 = l_1^2 \omega dt / 2$, отметаемого радиусом l_1 за время dt, тогда $\varepsilon_1 = -Bl_1^2\omega / 2$. Аналогично для второй части стержня: $\varepsilon_2 = -Bl_2^2\omega / 2$. В итоге $\Delta\varphi = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \pi\nu B(l_1^2 - l_2^2) = 5.278\times10^{-3}$ В.

Ответ: $\Delta\varphi \approx 5.3\times10^{-3}$ В

Пример 5.2. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0.35$ Тл равномерно с частотой $\nu = 8$ об/с вращается рамка, содержащая $N = 500$ витков площадью $S = 50$ см^2. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции ε_m, возникающую в рамке.

Решение

ЭДС индукции в рамке находится по (5.1), где суммарный магнитный поток через все витки рамки равен, тогда $\Phi = NBS\cos\alpha$, где $\alpha = \omega t$ - угол между вектором магнитной индукции и нормалью к плоскости рамки ($\omega = 2\pi\nu$), а ЭДС индукции рамки $\varepsilon = -d\Phi / dt = \omega NBS\sin\omega t$. Максимальная ЭДС индукция равна амплитуде $\varepsilon_m = \omega NBS$. Подставляя численные значения заданных величин, получаем: $\varepsilon_m = 43.98 \approx 44$ В.

Ответ: $\varepsilon_m \approx 44$ В.

Пример 5.3. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. По цепи протекло количество электричества $Q = 10$ мкКл. Определить магнитный поток Φ, пересеченный кольцом, если сопротивление R цепи гальванометра равно 30 Ом.

Решение

Пренебрегаем сопротивлением витка, тогда полное сопротивление цепи определяется сопротивлением гальванометра. ЭДС индукции в цепа дается законом (5.1), тогда изменение потока за время dt равно $d\Phi = -\varepsilon dt$. Но по закону Ома $\varepsilon = IR$, где сила тока $I = dQ / dt$, а dQ - заряд, протекший по цепи за время dt. Таким образом, $d\Phi = -RIdt = -RdQ$, откуда интегрируя получаем

$$\Phi = RQ = 3\times10^{-4} \text{ Вб.}$$

Ответ: $\Phi = 3\times10^{-4}$ Вб.

Пример 5.4. Индуктивность L катушки равна 2 мГн. Ток частотой $\nu = 50$ Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определить среднюю ЭДС самоиндукции за интервал времени, в течение кото-

рого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения. Амплитудное значение силы тока $I_m = 10$ А.

Решение

Среднее значение ЭДС определяется выражением

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon dt,$$

Мгновенная ЭДС ε в соответствии с (5.7) равна $\varepsilon = -LdI / dt$, сила тока изменяется по закону $I = I_m \sin \omega t$, тогда $\varepsilon = -\omega L I_m \cos \omega t$ и а $t_1 = 0$, $t_2 = T / 4$, причем $\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T$ и T - период изменения тока. В итоге имеем

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} (-\omega L I_m \cos \omega t) dt = -\frac{4}{T} L I_m \int_0^{\pi/2} \cos u du = -\frac{4}{T} L I_m = -4\nu L I_m = 4 \text{В}.$$

Ответ: $\langle \varepsilon \rangle = 4$ В.

Пример 5.5. На цилиндрический каркас диаметра $d = 120$ мм намотано в один слой $N = 100$ витков проволоки. Вся намотка разместилась на длине $l = 60$ мм. Оценить индуктивность L такой катушки. Магнитную проницаемость сердечника катушки принять равной единице. Указание. Индуктивность однослойных катушек можно вычислять по формуле $L = \alpha L_\infty$, где L_∞ - индуктивность идеальной бесконечно длинной катушки (5.3), а поправочный коэффициент $\alpha = (1 + 0.45d / l)^{-1}$.

Решение

При выводе приближенной формулы (5.3) считается, что внутри катушки магнитное поле однородное, как в бесконечно длинном соленоиде, учет конечности длины требует введения поправочных коэффициентов $L = \alpha L_\infty$, то есть $L_\infty = \mu_0 \mu n^2 V$, $V = \pi d^2 l / 4$ - объем внутри соленоида, $\alpha = (1 + 0.45d / l)^{-1}$. Подставляя численные значения, получаем $L_\infty = 2.369 \times 10^{-3}$ Гн и коэффициент $a = 0.526$, окончательно $L = 1.247 \times 10^{-3}$ Гн.

Ответ: $L \approx 1.3 \times 10^{-3}$ Гн.

Задачи для аудиторной работы

А5.1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0.4$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, вращается стержень длиной 10 см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов на концах стержня при частоте вращения 16 об/с.

А5.2. Рамка площадью 100 см^2 содержит 1000 витков провода сопротивлением 12 Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление 20 Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0.1$ Тл с частотой вращения 8 об/с. Определить максимальную мощность тока в цепи.

А5.3. Проволочный виток радиусом $R = 4$ см находится в однородном магнитном поле индукции $B = 0.04$ Тл. Плоскость витка образует угол 30 градусов

с направлением магнитного поля. Какое количество заряда протечет по витку, при выключении магнитного поля? Сопротивление витка равно 0.01 Ом.

А5.4. С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока в катушке на 0.1 А за 1 с. Индуктивность катушки равна 0.01 Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции.

А5.5. Катушка, плотно намотанная в один слой на немагнитный цилиндрический каркас, имеет 750 витков и индуктивность 25 мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до 36 мГн, обмотку с катушки сняли и заменили плотной обмоткой в один слой из более тонкой проволоки, длина катушки осталась прежней. Определить число витков катушки после перемотки.

А5.6. Две катушки расположены на небольшом расстоянии одна от другой. Когда сила тока в первой катушке изменяется с быстротой 5 А/с, во второй катушке возникает ЭДС индукции 0.1 В. Определить коэффициент взаимной индукции.

Задание на дом

В5.1. Рамка площадью 200 см^2 равномерно вращается с частотой 10 об/с относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного тока. Каково среднее значение ЭДС индукции за время в течении которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от минимального значения до максимального значения? Принять $B = 0.2$ Тл.

В5.2. Короткая катушка, содержащая 1000 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией 0.04 Тл с угловой скоростью 5 рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям индукции поля. Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол 60 градусов с линиями индукции поля. Площадь катушки равна 100 см^2.

В5.3. Проволочное кольцо радиусом 10 см лежит на столе. Какое количество электричества протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца равно 1 Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

В5.4. По катушке индуктивностью 0.03 мГн течет ток 0.6 А. При размыкании цепи сила тока изменяется практически до нуля за 120 мкс. Определить среднюю ЭДС самоиндукции, возникающей в контуре.

В5.5. Сколько витков проволоки диаметром 0.4 мм с изоляцией ничтожной толщины нужно намотать на картонный цилиндр диаметром 2 см, чтобы получить однослойную катушку индуктивностью 1 мГн? Витки вплотную прилегают друг к другу.

B5.6. Длинный прямой соленоид, намотанный на немагнитный каркас, имеет 1000 витков и индуктивность 3 мГн. Какой магнитный поток и какое потокосцепление создает соленоид при силе тока в 1 А?

B5.7. Обмотка соленоида со стальным сердечником содержит 500 витков. Длина соленоида равна 50 см. Как и во сколько раз изменится индуктивность соленоида, если сила тока, текущего по обмотке, возрастает от 0.1 до 1 А.

Связь $B(H)$ для стали (марка 1572 [12], С. 639):

H,А/м	10	50	100	500	1000
B,Тл	0.045	0.57	0.87	1.25	1.30

Практикум 6. Квазистационарные переходные процессы при замыкании и размыкании контуров, содержащих *R, C* и *L*

Квазистационарными называются *переменные электромагнитные поля и токи*, которые изменяются со временем достаточно *медленно*. Этот случай важен, прежде всего, потому, что он позволяет хорошо описывать явления, происходящие в цепях переменного тока низкой частоты и вблизи таких цепей там, где *можно пренебречь электромагнитным излучением*. То есть в квазистационарном приближении можно пренебречь явлениями, определяемыми *током смещения* $\mathbf{j}' = \partial \mathbf{D}/\partial t = \varepsilon\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$.

Квазистационарным можно считать *ток* I *в проводнике с характерной длиной* l *много меньше расстояния* $c\Delta t$, на которое электромагнитное поле распространяется со скоростью света c за характерное *время* Δt *изменения тока*, т.е. $c\Delta t \gg l$ (для периодически изменяющегося тока и поля $\Delta t = T$ - есть период колебаний тока и поля, а $c\Delta t = \lambda$ - характерная длина электромагнитной волны, т.е. $cT = \lambda \gg l$). Кроме того, внутри проводника мгновенная плотность тока $j = I / S$ (S - характерная площадь сечения проводника) должна быть достаточно велика, а скорость изменения электрического поля напряженности E достаточно мала, так что $j \gg \varepsilon_0 \partial E/\partial t \approx \varepsilon_0 E/\Delta t$.

Мгновенное значение квазистационарного тока одинаково во всей цепи, при этом применимы правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа

$$\sum_i I_i = 0, \qquad (6.1)$$

сумма токов в любом узле цепи равна нулю.

Второе правило Кирхгофа для любого замкнутого контура с квазистационарным током дает уравнения

$$\sum_k \sum_l L_{lk} \frac{dI_k}{dt} + \sum_i R_i I_i + \sum_s \frac{1}{C_s} \int_0^t I_s dt = \sum_j \varepsilon_j(t), \qquad (6.2)$$

здесь индексы k, i, s, j обозначают суммирования по соответствующим элементам выбранного замкнутого контура, а индекс l подразумевает суммирование по индуктивным элементам всех контуров рассматриваемой цепи. В уравнении (6.2) соответствующие слагаемые называют:

$$U_{R_i} = R_i I_i, \qquad (6.3)$$

напряжением на активном сопротивлении R_i,

$$U_{C_s} = \frac{Q_s}{C_s} = \frac{1}{C_s} \int_0^t I_{C_s} dt, \qquad (6.4)$$

напряжением на конденсаторе емкости C_s, при этом $Q_s = \int_0^t I_s dt$ - заряд на одной из обкладок этого конденсатора в момент времени t при условии, что этот заряд был равен нулю в момент $t = 0$, а $I_{C_s} = dQ_s / dt = C_s dU_{C_s} / dt$ - ток через конденсатор в момент t,

$$\varepsilon_{i\,k} = -\sum_l L_{lk} \frac{dI_l}{dt}, \qquad (6.5)$$

ЭДС электромагнитной индукции в *k*-м индуктивном элементе контура, создаваемой током I_l, текущим в l-м элементе любого контура цепи (включая самоиндукцию L_{kk} и взаимную индукцию L_{lk} l-го и *k*-го элементов),

$$U_{L_k} = L_k \frac{dI_k}{dt}, \qquad (6.6)$$

напряжением на индуктивности $L_k \equiv L_{kk}$*, связанным с самоиндукцией,* $\varepsilon_j(t)$ *- ЭДС* j*-го источника сторонних сил (источника тока) , из действующих в контуре.*

Уравнения (6.2) эквивалентны *дифференциальным уравнениям второго порядка*

$$\sum_k \sum_l L_{lk} \frac{d^2 Q_k}{dt^2} + \sum_i R_i \frac{dQ_i}{dt} + \sum_s \frac{Q_s}{C_s} = \sum_j \varepsilon_j(t) \qquad (6.7)$$

для зарядов, протекающих по соответствующим ветвям контура, поскольку $I_i = dQ_i / dt$. Уравнения (6.7) математически эквивалентны ньютоновским уравнениям механики, описывающим систему связанных гармонических осцилляторов с трением, способных совершать вынужденные колебания. Они позволяют получить временные зависимости зарядов, токов и напряжений не только в режимах установившихся колебаний, но и в различных *переходных процессах*.

Переходным процессом в электрических цепях называется процесс перехода цепи из одного установившегося режима в другое. При *установившихся* (*стационарных*), режимах в цепях постоянного тока напряжения и токи неизменны во времени, а в цепях переменного тока они являются периодическими функциями времени. Переходные процессы возникают при любых изменениях режима электрической цепи, которые можно представить в виде различных *переключений*, называемых *коммутацией* (подключение, отключение и переключение элементов цепи, изменение нагрузки, источников и т.п.)

Если имеется всего один контур, в который последовательно включены сопротивление R, индуктивность L, емкость C и источник тока с ЭДС $\varepsilon(t)$, то достаточно решить дифференциальное уравнение

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=\varepsilon(t), \qquad I=\frac{dQ}{dt}, \qquad (6.8)$$

с соответствующими начальными (при $t=0$) или асимптотическими (например, при $t\to\infty$) условиями, где Q - заряд на одной из обкладок конденсатора. Это уравнение может описывать установившиеся свободные или вынужденные колебания заряда и тока, а также переходные процессы с затуханием или нарастанием. Например, при а) размыкании или б) замыкании цепи контура с большой индуктивностью L (катушка соленоида) и сопротивлением R, в пренебрежении емкостью C, ток экспоненциально а) затухает $I=I_0e^{-t/\tau_L}$ или б) или нарастает $I=I_0(1-e^{-t/\tau_L})$ за характерное время $\tau_L=L/R$, здесь $I_0=\varepsilon/R$ - сила постоянного тока, возбуждаемая ЭДС ε. Аналогично при а) разряде конденсатора через сопротивление или б) зарядке конденсатора от источника тока через сопротивление в цепи контура с большой емкостью C (конденсатор) и сопротивлением R, в пренебрежении индуктивностью L, заряд конденсатора экспоненциально а) затухает $Q=Q_0e^{-t/\tau_C}$ (ток в цепи тоже затухает $I=-I_0e^{-t/\tau_C}$) или б) нарастает $Q=Q_0(1-e^{-t/\tau_C})$ (ток в цепи тоже затухает $I=I_0e^{-t/\tau_C}$) за характерное время $\tau_C=RC$, здесь $Q_0=\varepsilon C$. Величины τ_L и τ_C иногда называют *временами релаксации*.

Пример 6.1. Конденсатор емкостью $C=0.47$ мкФ включен последовательно в цепь с источником постоянной ЭДС $\varepsilon=12$ В и сопротивлением $R=1.0$ Ом, как показано на рис.6.1. Определить U_C и I в моменты времени $t_1=1$ мкс, $I_2=2$ мкс после замыкания ключа.

Решение

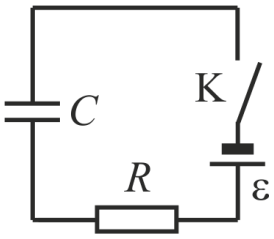


Рис.6.1. К примеру 6.1.

После замыкания ключа (6.8) с $L=0$ имеет вид дифференциального уравнения первого порядка

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=\varepsilon,$$

где Q - заряд на обкладках конденсатора. Разделяем переменные

$$-\frac{dt}{RC}=\frac{dQ}{Q-\varepsilon C}$$

и интегрируем с начальным условием $Q=0$ при $t=0$, получим

$$Q=Q_0(1-e^{-t/\tau_C}),$$

где $\tau_C=RC$, $Q_0=\varepsilon C$ - заряд на конденсаторе при $t\to\infty$. Сила тока в цепи

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{Q_0}{\tau_C}e^{-t/\tau_C}=I_0e^{-t/\tau_C},$$

где $I_0=Q_0/\tau_C=\varepsilon/R$. Напряжение на конденсаторе

$$U_C=\frac{Q}{C}=\varepsilon(1-e^{-t/\tau_C}).$$

Подставляя численные значения параметров, получаем $U_{C1}=10.57$ В, $I_1=1.43$, при $t_1=1$ мкс и $U_{C2}=11.8$ В и $I_2=0.17$ А при $t_2=1$ мкс.

Ответ: $U_{C1}=10.57$ В, $I_1=1.43$, $U_{C2}=11.8$ В и $I_2=0.17$ А.

Пример 6.2. Определить временную зависимость заряда Q на обкладках конденсатора емкости C в схеме, приведенной на рис.6.2 после замыкания ключа К. Найти заряд Q и напряжение U_C в момент времени $t_1=1.0$ мкс. Принять, что $R_1=R_2=1.0$ Ом, $C=0.47$ мкФ, $\varepsilon=1.5$ В.

Решение

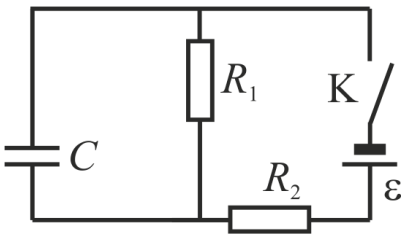


Рис.6.2.

После замыкания ключа цепь образует два замкнутых контура, для которых согласно правилам Кирхгофа, составим систему уравнений

$$\begin{cases} I_2=I_1+I, \\ I_1R_1+I_2R_2=\varepsilon, \\ U_C-I_1R_1=0, \end{cases}$$

где I_1 - сила тока через резистор R_1, I_2 - сила тока через резистор R_2, $I=dQ/dt=CdU_C/dt$ - сила тока через конденсатор C, $U_C=Q/C$ - напряжение на конденсаторе, Q - заряд на обкладке конденсатора. Из последнего уравнения системы выражаем $I_1=U_C/R_1$, тогда из первого уравнения системы $I_2=I_1+I=U_C/R_1+CdU_C/dt$. Подставляя эти выражения во второе уравнение системы, получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $U_C(t)$

$$R_2C\frac{dU_C}{dt}+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)U_C=\varepsilon\,.$$

Разделяя переменные имеем

$$-\left(\frac{1}{R_1C}+\frac{1}{R_2C}\right)dt=\frac{dU_C}{U_C-\varepsilon R_1\left(R_1+R_2\right)^{-1}}\,.$$

Интегрируя с начальным условием $U_C=0$ при $t=0$, получим

$$U_C=\frac{\varepsilon R_1}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\alpha t}\right)=\frac{\varepsilon R_1}{R_1+R_2}\left(1-e^{-t/\tau}\right),$$

где $\alpha=\frac{1}{R_1C}+\frac{1}{R_2C}\equiv\frac{1}{\tau}$, тогда заряд на обкладках конденсатора равен

$$q=CU_C=\frac{\varepsilon R_1C}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\alpha t}\right).$$

См. (рис.6.3)

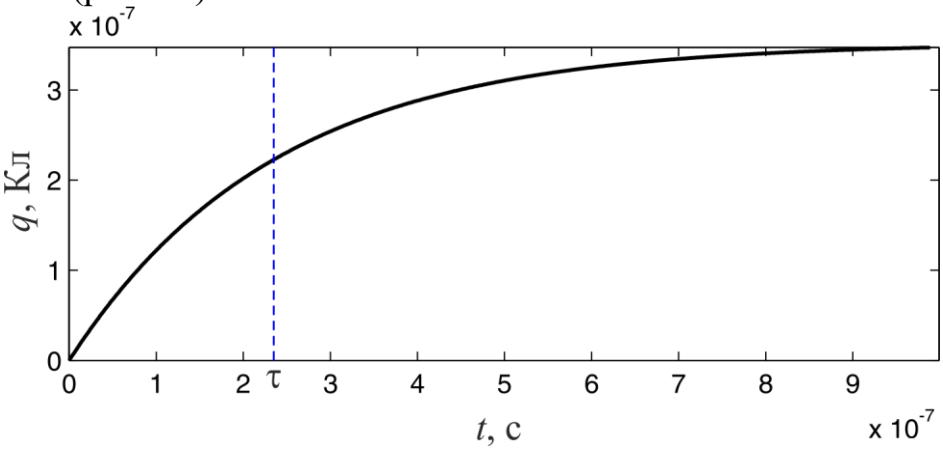


Рис.6.3. К примеру 6.2.

Подставляя численные значения, получаем для $t_1=1$мкс: $U_C(t_1)=0.74$В, $q(t_1)=0.35$ мкКл.

Ответ: $U_C(t_1)=0.74$В, $q(t_1)=0.35$ мкКл.

Пример 6.3. Сопротивление $R=1.0$ Ом, катушка индуктивности $L=0.25$ мГн и источник ЭДС $\varepsilon=12$В соединены последовательно (рис.6.4). Определить напряжение на сопротивлении в момент $t_1=1.0$ мкс после замыкания ключа.

Решение

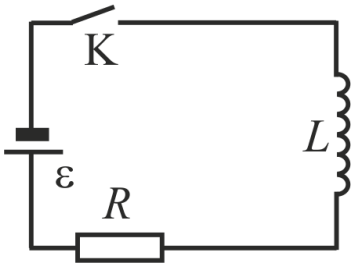


Рис.6.4.

После замыкания ключа (6.8) без слагаемого с емкостью имеет вид дифференциального уравнения первого порядка

$$L\frac{dI}{dt}+RI=\varepsilon,$$

где I - ток в контуре. Разделяем переменные

$$-\frac{R}{L}dt=\frac{dI}{I-\varepsilon/R}$$

и интегрируем с начальным условием $I=0$ при $t=0$, получим

$$I=I_0(1-e^{-t/\tau_L}),$$

где $\tau_L=L/R$, здесь $I_0=\varepsilon/R$ - сила постоянного тока, возбуждаемая ЭДС ε при $t\to\infty$.

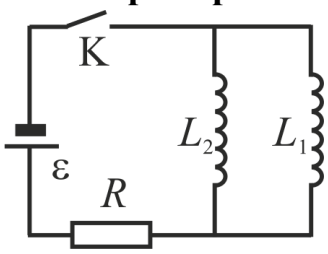
Напряжение на сопротивлении

$$U_R=RI=RI_0(1-e^{-t/\tau_L})=\varepsilon(1-e^{-t/\tau_C}).$$

Подставляя численные значения параметров, получаем для $t_1=1$мкс: $U(t_1)=0.048$ В.

Ответ: $U(t_1)=0.048$ В.

Пример 6.4. В схеме 6.5 известны ЭДС источника постоянного тока $\varepsilon=1.5$ В, сопротивление резистора $R=1.0$ Ом и индуктивности катушек $L_1=0.25$ мГн и $L_2=0.50$ мГн. Внутреннее сопротивление источника и сопротивление катушек пренебрежимо малы. Найти установившиеся токи в катушках после замыкания ключа К.



Решение

Рис.6.5.

Согласно правилам Кирхгофа, составим систему уравнений

$$\begin{cases} I=I_1+I_2, \\ L_2\dfrac{dI_2}{dt}+IR=\varepsilon, \\ 0=L_1\dfrac{dI_1}{dt}-L_2\dfrac{dI_2}{dt}, \end{cases} \qquad (6.13)$$

где I - сила тока в резисторе R, I_1 - сила тока в катушке индуктивности L_1, I_2 - сила тока в катушке индуктивности L_2.

Интегрируя последнее уравнение системы с начальными условиями $I_1=0, I_2=0$ при $t=0$, получаем взаимную связь токов в катушках $I_1=L_2I_2/L_1$, тогда из первого уравнения $I=I_1+I_2=I_2+L_2I_2/L_1=(1+L_2/L_1)I_2$, откуда

$$I_1=I\frac{L_2}{L_1+L_2}, \qquad I_2=I\frac{L_1}{L_1+L_2} \qquad (6.14)$$

Подставляя I_2 во второе уравнение, имеем

$$\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon .$$

Разделим переменные в этом дифференциальном уравнении

$$-\left(\frac{R}{L_1} + \frac{R}{L_2}\right)dt = \frac{dI}{I - \varepsilon/R} .$$

Интегрируя с начальным условием $I = 0$ при $t = 0$, получим

$$I = I_0(1 - e^{-t/\tau_L}),$$

где $\tau_L = \frac{R}{L_1} + \frac{R}{L_2}$, здесь $I_0 = \varepsilon / R$ - сила постоянного тока в резисторе R, возбуждаемая ЭДС ε при $t \to \infty$. Подставляя в (6.14), имеем

$$I_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} I_0 (1 - e^{-t/\tau_L}), \qquad I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I_0 (1 - e^{-t/\tau_L})$$

Установившиеся токи найдем в пределе $t \to \infty$:

$$I_1(t = \infty) = \frac{\varepsilon L_2}{R(L_1 + L_2)}, \qquad I_2(t = \infty) = \frac{\varepsilon L_1}{R(L_1 + L_2)}$$

Подставляя численные значения параметров, получаем $I_{1\infty} = 1.0\,\text{А}$, $I_{2\infty} = 0.5\,\text{А}$.

Ответ: $I_1(t = \infty) = 1.0\,\text{А}$, $I_2(t = \infty) = 0.5\,\text{А}$.

Пример 6.5. Конденсатор емкости $C = 0.47$ мкФ заряжается от источника постоянной ЭДС $\varepsilon = 12$ В через последовательно соединенные с ним индуктивность $L = 0.25\,\text{мкГн}$ и сопротивление R, причем $R^2 = 4L / C$. Определить, как изменяется со временем напряжение на конденсаторе U_C и сила тока I. Вычислить U_C и I в момент времени $t = 1.0\,\text{мкс}$.

Решение

Согласно (6.8) и $Q = CU_C$ имеем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC}\left(U_C - \varepsilon\right) = 0,$$

которое следует решить с начальными условиями $U_C = 0$ (т.к. $Q = 0$) и $dU_C / dt = 0$ (т.к. $I = dQ/dt = 0$) при $t = 0$. Ведем параметры $\beta = R / 2L$ и $\omega_0^2 = 1 / LC$, а также новую переменную $u = U_C - \varepsilon$, удовлетворяющую начальным условиям $u = -\varepsilon$ и $du / dt = 0$ при $t = 0$ и перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\beta\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

Не колебательный режим реализуется при

1) $\beta = \omega_0$: $u = (A + Bt)e^{-\beta t}$
2) $\beta > \omega_0$: $u = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}$, $\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

В условиях задачи имеет место первый случай т.к. $R^2 = 4L/C$. Постоянные интегрирования A и B находятся из начальных условий при $t = 0$, которые дают систему линейных уравнений $-\varepsilon = A$ и $-\beta A + B = 0$, откуда $A = -\varepsilon, \quad B = -\beta\varepsilon$.
В итоге, рассматриваемое решение имеет вид

$U_C = \varepsilon(1-(1+\beta t)e^{-\beta t})$,

$I = CdU_C / dt = \varepsilon\beta^2 te^{-\beta t}$.

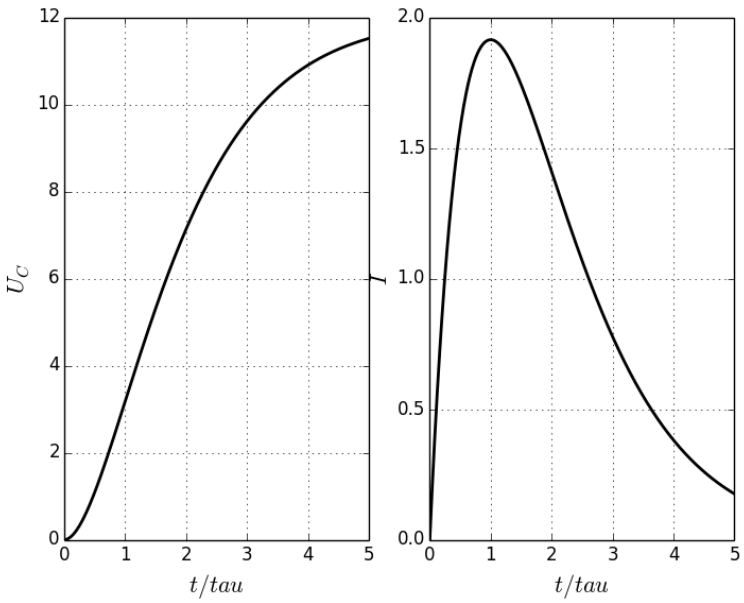


Рис.6.6. К примеру 6.5.

Подставляя численные значения, получаем $R = \sqrt{4L/C} = 4.613$ Ом и для $t_1 = 1$ мкс находим: $U_C = 2.83$ В, $I = 1.91$ А.

Примечание. На рис. 6.6 изображены найденные функциональные зависимости. Ток (правая панель) достигает максимального значения в момент времени $t_m = \tau = 1/\beta$. В этом легко убедиться, приравнивая нулю производную тока по времени $dI/dt = 0$, что дает $\varepsilon\beta^2 e^{-\beta t} - \varepsilon\beta^3 te^{-\beta t} = \varepsilon\beta^2(1-\beta t)e^{-\beta t} = 0$, откуда $1 - \beta t_m = 0$ и $t_m = 1/\beta$.

Ответ: $U_C = 2.83$ В, $I = 1.91$ А.

Задачи для аудиторной работы

А6.1. Заряженный до напряжения $U_C = 12$ В конденсатор емкостью $C = 0.47$ мкФ соединен последовательно с сопротивлением $R = 2.0$ Ом, как показано на рис.6.7.

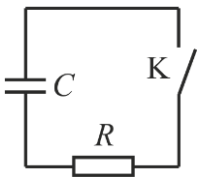


Рис.6.7. К задаче А6.1

Определить U_C и I в моменты времени $t_1 = 1$ мкс, $t_2 = 2$ мкс после замыкания ключа К.

А6.2. Найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе после замыкания ключа К (рис.6.8). Сопротивления $R_1 = R_2 = 1.0$ Ом, емкость конденсатора $C = 0.47$ мкФ, ЭДС источника напряжения $\varepsilon = 1.5$ В. Найти силу тока, протекающего через сопротивление R_2, в моменты времени $t_1 = 1.0$ мкс, $t_2 = 2.0$ мкс.

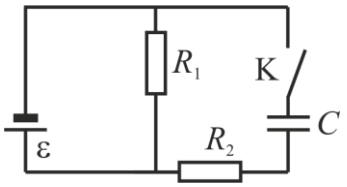


Рис.6.8. К задаче А6.2

А6.3. Катушка с индуктивностью $L = 250$ мГн и сопротивлением $R = 0.3$ Ом подключается к источнику постоянного напряжения. Через какой промежуток времени сила тока в катушке достигнет а) 50%, б) 75 % установившегося значения? Сопоставьте оба значения промежутка времени.

А6.4. Электрическая лампочка, сопротивление которой в горячем состоянии $R = 10$ Ом, подключается через дроссель к 12-вольтовому аккумулятору. Индуктивность дросселя $L = 2.0$ Гн, а сопротивление $r = 1.0$ Ом. Через какое время t после включения лампочка загорится, если она начинает заметно светиться при напряжении на ней $U = 6$ В.

А6.5. Найти закон изменения во времени тока, текущего через индуктивность после замыкания ключа К. Принять, что $R_1 = 1.0$ Ом, $R_2 = 2.0$ Ом, $L = 0.25$ мГн, $\varepsilon = 12$ В (рис.6.9). Найти силу тока в моменты времени $t_1 = 1.0$ мкс, $t_2 = 2.0$ мкс.

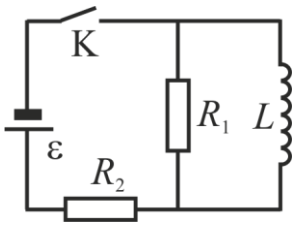


Рис.6.9. К задаче А6.5

Задание на дом

В6.1. В цепи (рис.6.9) ключ К замкнули и через достаточно продолжительный промежуток времени разомкнули. Найти силу тока I_L, протекающего через катушку индуктивности, в моменты времени $t_1 = 1.0$ мс и $t_2 = 2.0$ мс. Принять, что $R_1 = 1.0$ Ом, $R_2 = 2.0$ Ом, $L = 0.5$ мГн, $\varepsilon = 12$ В.

В6.2. Источник тока замкнули на катушку индуктивностью 1 Гн и сопротивлением 10 Ом. Через сколько времени сила тока замыкания достигнет 0.9 предельного значения?

В6.3. Цепь состоит из сопротивления 10 Ом и катушки индуктивностью 1 Гн. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Через сколько времени сила тока уменьшится до 0.001 начального значения?

В6.4. К источнику тока с внутренним сопротивлением 1 Ом подключают катушку индуктивностью 0.5 Гн и сопротивлением 8 Ом. Через сколько времени сила тока в катушке индуктивности достигнет значения, отличающегося на 1% от максимального значения?

В6.5. В цепи (рис.6.9) $R_1 = 95$ Ом, $R_2 = 0.001$ Ом, катушка индуктивности $L = 0.5$ Гн и сопротивлением 5 Ом, $\varepsilon = 12$ В. Определить силу тока, протекающего через резистор R_1 в следующих случаях: 1) до размыкания цепи ключом К, 2) через 0.05 с после размыкания.

Практикум 7. Колебательный контур. Характеристики электромагнитных колебаний

Гармонические электрические колебания в *идеальном колебательном* LC-*контуре* – колебания заряда на конденсаторе, тока и напряжения, при которых эти величины изменяются со временем по гармоническому закону

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (7.1)$$

$$I \equiv dQ/dt \equiv \dot{Q} = -I_m \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad I_m = \omega_0 Q_m, \qquad (7.2)$$

$$U_C = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad U_m = Q_m / C. \qquad (7.3)$$

Частота колебаний

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \nu_0 = \frac{1}{T_0}, \qquad (7.4)$$

где L - индуктивность катушки, C - электроемкость конденсатора.

Формула Томсона

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (7.5)$$

Энергия электрического поля в конденсаторе

$$W_Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \alpha), \qquad (7.6)$$

Энергия магнитного поля в катушке

$$W_I = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha), \qquad (7.7)$$

причем

$$\frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} \qquad (7.8)$$

Колебательный контур с сопротивлением R описывается дифференциальным уравнением

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0. \qquad (7.9)$$

Вводя параметры $\beta = R/2L$ и $\omega_0^2 = 1/LC$, записываем (7.9) в виде

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0. \qquad (7.10)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

1) при $\omega_0 > \beta$ (т.е. при $R^2 < 4L/C$) *в колебательном режиме с экспоненциальным затуханием амплитуды*

$$Q = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha), \qquad (7.11)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \ \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \qquad (7.12)$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = U_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha) \qquad (7.13)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = Ae^{-\beta t}\omega_0\left(\frac{-\beta}{\omega_0}\cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega t + \alpha)\right) \qquad (7.14)$$

2) при $\beta > \omega_0$ (т.е. при $R^2 > 4L/C$), *в не колебательном экспоненциальном режиме затухания*

$$Q = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \qquad (7.15)$$

3) при $\beta = \omega_0$ (т.е. при $R^2 = 4L/C$) *в особом промежуточном не колебательном режиме затухания*

$$Q = (A + Bt)e^{-\beta t}, \qquad (7.16)$$

где A и B - постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями.

Логарифмический декремент затухания колебательного контура

$$\tilde{\lambda} = \beta T = \frac{R\pi}{L\omega}. \qquad (7.17)$$

Добротность системы характеризует темп релаксации (затухания) в колебательном контуре и определяется как произведение 2π на отношение энергии, запасенной системой в момент времени t к убыли этой энергии за период колебания,

$$\Theta = 2\pi\frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}, \qquad (7.18)$$

При слабом затухании $\beta \ll \omega_0$

$$\Theta = \frac{\pi}{\tilde{\lambda}} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{L\omega_0}{R}. \qquad (7.19)$$

Пример 7.1. Конденсатор электроемкостью $C = 500$ пФ соединен параллельно с катушкой длиной $l = 0.4$ м и площадью сечения $S = 5\,\text{см}^2$. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Сердечник катушки немагнитный. Определить период колебаний.

Решение

Период колебаний заряда (тока) в LC-контуре определяется формулой Томсона $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, индуктивность катушки равна $L = \mu_0 N^2 S / l = 1.57 \times 10^{-3}$

Гн (см.(5.3)). Подставим численные значения величин в формулу Томсона, получим $T_0 = 5.568 \times 10^{-6} \approx 5.6 \times 10^{-6}$ с.

Ответ: $T_0 \approx 5.6$ мкс.

Пример 7.2. Ток в колебательном контуре зависит от времени по закону $I = I_m \sin \omega_0 t$, где $I_m = 9.0$ мА, $\omega_0 = 4.5 \times 10^4$ с$^{-1}$. Электроемкость конденсатора равна $C = 0.47$ мкФ. Найти индуктивность контура и напряжение на конденсаторе в момент времени $t = 0$.

Решение

Из формулы Томсона $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ следует $L = 1/C\omega_0^2$, а из второго правила Кирхгофа для LC-контура $U_C = LdI/dt$, таким образом $U_C = L\omega_0 I_m \cos \omega_0 t$. Подставляя численные значения параметров, получаем $L = 1.05 \times 10^{-3}$ Гн и $U_C = L\omega_0 I_m = 0.42$ В при $t = 0$.

Ответ: $L = 1.05 \times 10^{-3}$ Гн, $U_C(t = 0) = 0.42$ В.

Пример 7.3. В контуре (рис.7.1) левый конденсатор был заряжен до напряжения $U_0 = 9$ В, правый конденсатор не заряжен. В момент $t = 0$ замкнули ключ. Выписать формулы, выражающие зависимость напряжения на конденсаторах от времени. Электроемкости конденсаторов равны $C_1 = C_2 = 0.047$ мкФ, индуктивность катушки $L = 1$ мГн.

Решение

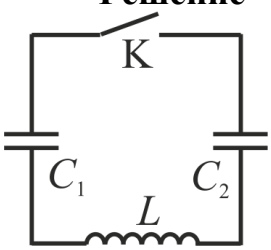


Рис.7.1. К примеру 7.3.

В начальный момент времени левый конденсатор заряжен до напряжения U_0, тогда электрический заряд на его обкладке равен $Q_0 = CU_0$. При замыкании ключа заряд начнет перетекать из левого конденсатора в правый, заряды на соединенных обкладках имеют одинаковый знак, т.е. напряжения на емкостях имеют противоположный знак, процесс описывается уравнением Кирхгофа, $U_{C1} + U_L - U_{C2} = 0$, где $U_{C1} = Q_1 / C$, $U_{C2} = Q_2 / C$ и $U_L = LdI/dt$, знак «-» учитывает, что направление обхода контура противоположно направлению электрического поля в правом конденсаторе. Учитывая, что $Q_1 + Q_2 = Q_0$ и обозначая $Q_1 = Q$, $Q_2 = Q_0 - Q$ так что $I = dQ/dt$, придаем уравнению Кирхгофа вид

$$\frac{2Q - Q_0}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2\tilde{Q}}{dt^2} + \tilde{\omega}_0^2 \tilde{Q} = 0,$$

где $\tilde{Q} = Q - Q_0/2$ и $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{2/LC}$. Решением этого уравнения является гармоническая функция $\tilde{Q} = A\cos(\tilde{\omega}_0 t + \alpha)$. Амплитуду A и начальную фазу α опреде-

лим из начальных условий при $t=0$: $\tilde{Q}(t=0)=Q_0-Q_0/2=A\cos\alpha$ и $I(t=0)=-\omega_0 A\sin\alpha=0$. Из последнего выражения следует, что $\alpha=0$, тогда $A=Q_0/2$. Окончательно получаем, что заряд и напряжение на левом конденсаторе изменяется со временем, как $Q_1=\frac{Q_0}{2}\left(1+\cos\tilde{\omega}_0 t\right)$ и $U_1=\frac{U_0}{2}\left(1+\cos\tilde{\omega}_0 t\right)$. Аналогично, заряд и напряжение на правом конденсаторе изменяется как $q_2=\frac{q_0}{2}\left(1-\cos\tilde{\omega}_0 t\right)$ и $U_2=\frac{U_0}{2}\left(1-\cos\tilde{\omega}_0 t\right)$. Подставляя значения заданных параметров, найдем $\tilde{\omega}_0=6.5\times10^4$ с$^{-1}$; 2) $U_{1,2}=\frac{U_0}{2}\left(1\pm\cos\omega_0 t\right)$.

Примечание. Эти результаты соответствуют тому, что два последовательно соединенных одинаковых конденсатора образуют конденсатор с емкостью $C_{eff}=C/2$.

Ответ: 1) $\tilde{\omega}_0=6.5\times10^4$ с$^{-1}$; 2) $U_{1,2}=\frac{U_0}{2}\left(1\pm\cos\tilde{\omega}_0 t\right)$.

Пример 7.4. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L=20$ мкГн и конденсатора с электроемкостью $\bar{C}=80$ нФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на 2%. Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны, на которой резонирует контур.

Решение

Длина резонансно поглощаемой или излучаемой электромагнитной волны связана с частотой колебаний колебательного контура выражением:

$$\lambda=cT=2\pi c/\omega_0 \qquad (7.15)$$

где $c=3\cdot10^8$ м/с – скорость света.

Циклическая частота колебательного LC контура равна $\omega_0=1/\sqrt{LC}$. Величина емкости конденсатора известна с относительной погрешностью $\delta C=\Delta C/\bar{C}=0.02\ll1$, и с абсолютной погрешностью $\Delta C=\bar{C}\delta C$, т.е. $C=\bar{C}\pm\Delta C$. Таким образом, длина волны $\lambda=2\pi c\sqrt{L(\bar{C}\pm\Delta C)}=2\pi c\sqrt{L\bar{C}}\sqrt{1\pm\Delta C/\bar{C}}\approx2\pi c\sqrt{L\bar{C}}\left(1\pm\Delta C/2\bar{C}\right)$ лежит в диапазоне от $\bar{\lambda}-\Delta\lambda$ до $\bar{\lambda}+\Delta\lambda$, где $\bar{\lambda}=2\pi c\sqrt{L\bar{C}}=2384$ м, а $\Delta\lambda=\pi c\sqrt{L\bar{C}}\Delta C/\bar{C}=23.84$ м.

Ответ: $\bar{\lambda}=2384$ м и $\Delta\lambda=23.84$ м

Пример 7.5. Ток в идеальном колебательном контуре зависит от времени как $I=-I_m\sin\omega_0 t$, где $I_m=20.0$ мА, $\omega_0=400\pi$ с$^{-1}$. Индуктивность контура равна $L=1.00$ Гн. Найти период колебаний, электроемкость конденсатора и максимальные энергии магнитного и электрического поля.

Решение

Из формулы Томсона $T_0=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{LC}$ следует $C=1/L\omega_0^2$, а из (7.6)-(7.8) - что

$$W_{Q\max} = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = W_{I\max}$$

Подставляем численные значения величин, получаем $T_0 = 5$ мс, $C = 6.33$ мкФ, $W_{Q\max} = W_{I\max} = 0.2$ мДж.

Ответ: $T_0 = 5$ мс, $C = 6.33$ мкФ, $W_{Q\max} = W_{I\max} = 0.2$ мДж.

Пример 7.6. Колебательный контур содержит конденсатор емкости $C = 2.22$ нФ и катушку длиной $l = 0.2$ м из медной проволоки диаметром $d = 0.5$ мм. Найти логарифмический декремент затухания.

Решение

Пусть намотка катушки произведена плотно виток к витку в один слой. Считая, что затухание слабое, т.е. $\beta \ll \omega_0$ и $\omega \approx \omega_0$ расчет логарифмического декремента затухания выполним по (7.17):

$$\tilde{\lambda} = \pi R / L\omega_0 = \pi R\sqrt{C / L}, \qquad (7.20)$$

где $R = \rho l_1 / S_1$ - омическое сопротивление катушки, $l_1 = N\pi D$ - длина провода, D - диаметр поперечного сечения катушки, $N = l / d$ - число витков плотной намотки, $S_1 = \pi d^2 / 4$ - площадь поперечного сечения медного провода, $\rho = 0.017$ мкОм·м – удельное сопротивление меди, тогда $R = 4\rho lD / d^3$.

Индуктивность катушки равна $L = \mu_0 n^2 Sl$, где $n = N / l = 1 / d$, $S = \pi D^2 / 4$ - площадь сечения катушки, т.е. $L = \mu_0 \pi D^2 l / 4d^2$. Подставляя в формулу (7.20), выразим логарифмический декремент затухания через данные задачи $\tilde{\lambda} = \pi R\sqrt{C / L} = 8\pi\rho\sqrt{C / \mu_0 \pi l} / d^2 \approx 0.018$.

Ответ: $\lambda \approx 0.018$.

Задачи для аудиторной работы

А7.1. Катушка индуктивностью $L = 1.0$ мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром $D = 20$ см каждая, соединены параллельно. Расстояние между пластинами равно $d = 1.0$ см. Определить период колебаний заряда и тока в контуре.

А7.2. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0.5$ мГн и конденсатора электроемкостью $C = 8$ пФ. Каково максимальное напряжение на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока $I_m = 40$ мА?

А7.3. В колебательном контуре (Рис.7.2) индуктивность катушки равна 2.5 мГн, а электроемкости конденсаторов $C_1 = 2.0$ и $C_2 = 3.0$ мкФ (рис.7.2).

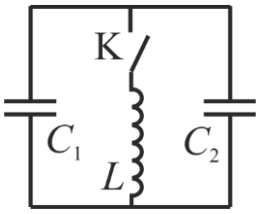


Рис.7.2.

Конденсаторы зарядили до напряжения 180 В и замкнули ключ К. Определить: 1) частоту собственных колебаний; 2) амплитудное значение тока через катушку.

А7.4. На какую длину волны будет резонировать контур, состоящий из катушки индуктивностью $L = 4$ мкГн и конденсатора электроемкостью $C = 1.11$ нФ ?

А7.5. В LC-контуре $Q = Q_m$ и $I = 0$ при $t = 0$. Через какую долю периода, считая от начального момента $t = 0$, энергия впервые распределится поровну между катушкой и конденсатором? Каким в этот момент будет заряд конденсатора?

А7.6. Катушка индуктивностью $L = 5.07$ мГн и воздушный конденсатор электроемкостью $C = 0.2$ мкФ, соединены параллельно. При каком логарифмическом декременте затухания разность потенциалов на обкладках конденсатора уменьшится в три раза за 1 миллисекунду?

Задание на дом

В7.1. Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора электроемкостью 1 мкФ и катушки индуктивности 1 мГн. Сопротивление контура ничтожно мало. Найти частоту колебаний.

В7.2. Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора электроемкостью 0.04 мкФ и катушки индуктивности 1.6 мГн. Сопротивление контура ничтожно мало. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора равно 200 В. Определить максимальную силу тока в контуре.

В7.3. Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора электроемкостью и катушки индуктивности 0.5 мГн. Сопротивление контура ничтожно мало. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны $\lambda = 300$ м?

В7.4. Колебательный контур состоит из конденсатора, электроемкостью $C = 0.47$ мкФ, катушки индуктивности $L = 1$мГн с пренебрежимо малым сопротивлением и ключа. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения $U_m = 10$ В и затем в момент времени $t = 0$ замкнули ключ. Найти: 1) ток в контуре как функцию времени; 2) ЭДС самоиндукции в катушке в моменты, когда электрическая энергия конденсатора равна энергии тока в катушке.

В7.5. Найти отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $T / 6$.

В7.6. Колебательный контур состоит из конденсатора, электроемкостью $C = 1.1$ нФ, катушки индуктивности $L = 5.0$ мГн. Логарифмический декремент

затухания равен $\lambda = 0.005$. За какое время вследствие затухания потеряется 99% энергии?

В7.7. Определить активное сопротивление колебательного контура, индуктивность которого $L = 1.0$ Гн, если через $t = 0.1$с амплитудное значение разности потенциалов на обкладках конденсатора уменьшилось в $n = 4$ раза.

Практикум 8. Гармонический переменный ток. Вынужденные электрические колебания. Резонанс токов, резонанс напряжений

Если в цепи действует ЭДС*, которая изменяется со временем по гармоническому закону с частотой* ω, то такая ЭДС, в соответствии с аналогией уравнений (6.2), (6.7) или (6.8) соответствующим уравнениям механики, играет роль гармонической внешней вынуждающей силы для токов, текущих в ветвях контуров цепи. По аналогии с результатом решения механической задачи о вынужденных колебаниях гармонических осцилляторов, можно утверждать, что при этом *токи, заряды и напряжения* на элементах цепи *тоже изменяются по гармоническому закону с той же частотой* ω . Это справедливо для моментов времени $t \gg \tau$ после включения ЭДС, где τ - максимальное из времен релаксации в цепи, когда переходные процессы в цепи закончились и релаксационные токи затухли, а остались только установившиеся стационарные гармонические колебания тока - *гармонические переменные токи*.

Временная зависимость (зарядов Q_n, токов I_n и напряжений U_n на элементах цепи) описывается гармоническими функциями

$$X_n = A_n(\omega)\cos(\omega t + \alpha_n(\omega)), \qquad (8.1)$$

где $X_n = Q_n, I_n, U_n, \ldots$. При этом *амплитуды* $A_n(\omega)$ и *начальные фазы* $\alpha_n(\omega)$ зависят от частоты. Чтобы рассчитать эти зависимости удобно использовать *метод комплексных амплитуд*, основанный на формуле Эйлера (Приложение, (А8.1)), когда (8.1) находят из

$$X_n = \mathrm{Re}\{\tilde{X}_n\}, \qquad (8.2)$$

а комплексные величины $\tilde{X}_n = \tilde{A}_n e^{i\omega t}$, где $\tilde{A}_n = A_n(\omega)e^{i\alpha_n(\omega)}$ - комплексные амплитуды рассчитывают по *методу векторных диаграмм*. Амплитуды $A_n(\omega)$ пропорциональны амплитуде внешней гармонической ЭДС.

Закон Ома для комплексных элементов цепи

$$\tilde{U} = Z\tilde{I}, \qquad (8.3)$$

где $\tilde{U}, \tilde{I}, Z$ - комплексные напряжение, ток, сопротивление на участке цепи, соответственно.

Активное сопротивление резистора

$$Z = R, \qquad (8.4)$$

$$\tilde{U}_R = R\tilde{I}, \qquad (8.5)$$

напряжение на сопротивлении R синфазно с током.

Реактивное емкостное сопротивление

$$Z = X_C = 1/i\omega C = -iR_C, \qquad R_C = 1/\omega C \qquad (8.6)$$

$$\tilde{U}_C = (1/i\omega C)\tilde{I} = R_C e^{-i\pi/2}\tilde{I}, \qquad (8.7)$$

напряжение на конденсаторе С отстает по фазе на $\pi/2$ от тока.

Реактивное индуктивное сопротивление

$$Z = X_L = i\omega L = iR_L, \qquad R_L = \omega L \qquad (8.8)$$

$$\tilde{U}_L = (i\omega L)\tilde{I} = (\omega L)e^{i\pi/2}\tilde{I}, \qquad (8.9)$$

напряжение на индуктивности L опережает по фазе на $\pi/2$ ток.
Мощность P на участке электрической цепи переменного тока

$$P = UI = \mathrm{Re}(\tilde{U}\tilde{I}^*)/2 = \mathrm{Re}(\tilde{U}^*\tilde{I})/2. \qquad (8.10)$$

Средняя по периоду мощность на участке цепи переменного тока

$$\langle P \rangle \equiv P_e = \langle UI \rangle = U_e I_e \cos\varphi, \qquad (8.11)$$

где $U_e = U_m/\sqrt{2}$ - *действующее* (*эффективное*) *значение напряжения*, $I_e = I_m/\sqrt{2}$ - *действующее* (*эффективное*) *значение тока* на элементе цепи, U_m, I_m - *амплитуды напряжения и тока*, соответственно, φ - *разность фаз* между колебаниями напряжения $\tilde{U}$ и тока $\tilde{I}$.

Для электрической цепи с одним источником гармонической ЭДС, характеризуемой *комплексной* ЭДС $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_m e^{i\omega t}, \tilde{\varepsilon}_m = \varepsilon_m e^{i\alpha_\varepsilon}$, $\varepsilon_m = |\tilde{\varepsilon}|$ (ЭДС внешнего источника переменного тока) можно использовать *аналог закона Ома* для замкнутой цепи в виде

$$\tilde{\varepsilon} = Z\tilde{I}, \qquad (8.12)$$

где $Z = X + iY$ - *полное комплексное сопротивление* (*импеданс*) *цепи*, $X = \mathrm{Re}Z$ - активное сопротивление, $Y = \mathrm{Im}Z$ - реактивное сопротивление цепи.
Разность фаз φ между колебаниями ЭДС $\tilde{\varepsilon}$ и тока $\tilde{I}$

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{Im}Z/\mathrm{Re}Z = Y/X. \qquad (8.13)$$

Если в цепи переменного тока действуют несколько гармонических источников ЭДС (источников переменного тока) одной частоты, то для одного из них начальная фаза α_ε обычно принимается равной нулю.

Если имеется всего *один контур, в который последовательно включены сопротивление* R, *индуктивность* L, *емкость* C *и источник тока с ЭДС* $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos\omega t$, то дифференциальное уравнение (6.8) принимает вид

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_m \cos\omega t, \qquad I = \frac{dQ}{dt}, \qquad (8.14)$$

или

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{\varepsilon_m}{L}\cos\omega t, \qquad (8.15)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - *частота собственных колебаний* в идеальном колебательном контуре, а $\beta = R/2L$ - *коэффициент затухания свободных колебаний*. Последние уравнения эквивалентны (8.12), в котором $\tilde{Z} = R + i(R_L - R_C)$. Отсюда следует, что вынужденные колебания тока происходят по закону

$$I = I_m(\omega)\cos(\omega t - \varphi). \qquad (8.16)$$

Амплитуда вынужденных колебаний тока $I_m(\omega) = \varepsilon_m/|Z|$,

$$|Z| = \frac{L}{\omega}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2},$$

$$I_m(\omega)=\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2+(R_L-R_C)^2}}=\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/(\omega C))^2}}. \qquad (8.17)$$

Разность фаз между током и напряжением

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\beta\omega}=\frac{R_L-R_C}{R}=\frac{\omega L-1/(\omega C)}{R} \qquad (8.18)$$

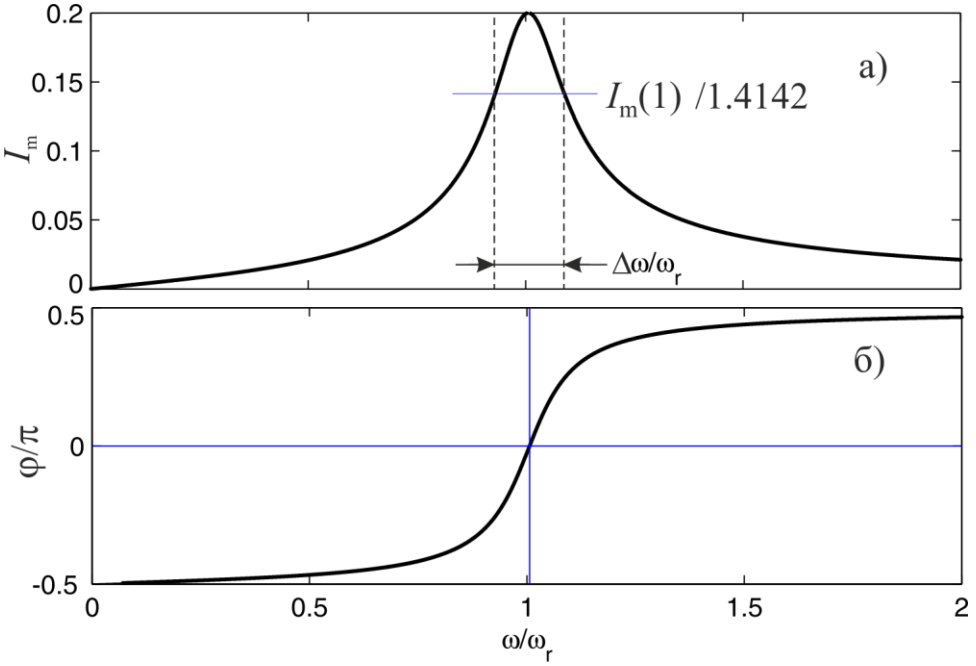


Рис.8.1. а) амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) амплитуды тока, ширину резонанса $\Delta\omega$ принято определять на уровне амплитуды тока $I_m(\omega)=I_m(\omega_r)/\sqrt{2}=I_m(\omega_r)/1.4142$ и при малом затухании $\beta\ll\omega_r$ она равна $\Delta\omega=2\beta$; б) фазово-частотная характеристика (ФЧХ) амплитуды тока.

Резонансная частота вынужденных колебаний

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}==\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}} \qquad (8.19)$$

Резонансная амплитуда вынужденных колебаний тока

$$I_m(\omega_r)=\frac{\omega\varepsilon_m}{2\beta L\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\approx\frac{\varepsilon_m}{2\beta L}=\frac{\varepsilon_m}{R} \qquad (8.20)$$

Пример 8.1. К сети с действующим напряжением $U_e=100$ В подключили катушку, индуктивное сопротивление которой $R_L=30$ Ом и модуль импеданса $|Z|=50$ Ом. Найти разность фаз φ между током и напряжением (рис.8.2), а также мощность, выделяемую в катушке.

Решение

Разность фаз между током I_e и напряжением U_e (внешнее ЭДС) найдем из (8.13) или (8.18), учитывая, что $|Z|=\sqrt{R^2+R_L^2}=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$

$\mathrm{tg}\varphi=R_L/R=\omega L/R$,

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(R_L / \sqrt{|Z|^2 - R_L^2} \right) = \mathrm{arctg}(30/40) = 36.9^{\circ} \approx 37^{\circ}.$$

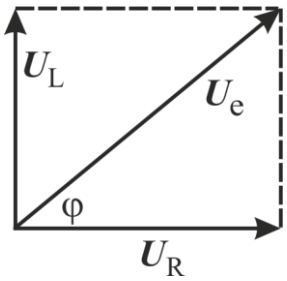


Рис.8.2. К примеру 8.1.

Мощность тока, согласно (8.13), равна

$$P_e = U_e I_e \cos\varphi = \frac{U_e^2}{|Z|}\cos\varphi = \frac{U_e^2}{|Z|^2} R = 160\,\text{Вт}.$$

На Рис.8.2. изображена векторная диаграмма системы. Ток I и напряжение U_R на активном сопротивлении синфазны и соответствующие векторы направлены вдоль оси абсцисс, напряжение на катушке индуктивности опережает ток на 90°, следовательно, вектор $\boldsymbol{U}_L$ направлен вверх по оси ординат. Угол между током и напряжением φ определяется через тангенс $\mathrm{tg}\varphi = U_L / U_R = X_L / R$.

Ответ: $\varphi \approx 37^{\circ}$, $P_e = 160\,\text{Вт}$.

Пример 8.2. Конденсатор емкостью $C = 1.0\,\text{мкФ}$ и резистор с сопротивлением $R = 3.0\,\text{кОм}$ соединены параллельно и подключены к сети переменного тока частотой 50 Гц. Найти полное сопротивление $|Z|$ цепи и разность фаз φ между током и напряжением на входе.

Решение

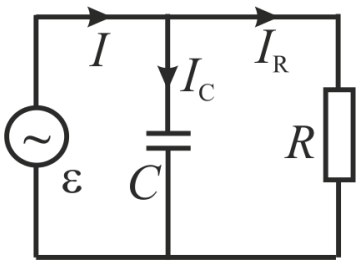


Рис.8.3. К примеру 8.2

Напряжение в сети $\tilde{U} = \tilde{U}_m e^{i\omega t}, \tilde{U}_m = U_0 e^{i\alpha_\varepsilon}$ удобно характеризовать нулевой начальной фазой $\alpha_\varepsilon = 0$. Согласно первому правилу Кирхгофа для параллельно соединенных конденсатора и резистора $\tilde{I} = \tilde{I}_R + \tilde{I}_C$, где $\tilde{I}$ - ток на входе схемы, $\tilde{I}_R = \varepsilon_0 / R$, $\tilde{I}_C = \varepsilon_0 / X_C = -i\omega C\varepsilon_0 = \omega C\varepsilon_0 e^{-i\pi/2}$. По определению (8.3) $\tilde{U} = Z\tilde{I}$, то есть $1/Z = 1/R + 1/X_C = 1/R - i\omega C$ и $Z = (1/R - i\omega C)^{-1}$. Тогда сдвиг фаз между напряжением и током на входе, согласно (8.18) определяется

$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{Im}Z / \mathrm{Re}Z = -1/\omega CR$, откуда $\varphi = -\mathrm{arctg}(1/\omega CR) = -0.756\,\text{рад} = -43.3^\circ$, а $|Z| = 1\Big/\sqrt{R^{-2} + (\omega C)^2} = 2.138$ кОм.

Ответ: $\varphi = -0.756\,\text{рад} = -43.3^\circ$; $|Z| = 2.18\,\text{кОм}$.

Пример 8.3. В цепь переменного тока с действующим напряжением $U_e = 220\,\text{В}$ и частотой $\nu = 50\,\text{Гц}$ включены последовательно емкость $C = 35.4$ мкФ, сопротивление $R = 100$ Ом и индуктивность $L = 0.7\,\text{Гн}$. Найти действующее значение тока I_e в цепи и действующие значения напряжений U_C, U_R и U_L на емкости, сопротивлении и индуктивности.

Решение

Согласно (8.3) действующие значения тока и напряжения на входе цепи связаны соотношениям $U_e = |Z| I_e$, где $|Z| = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$, $R_L = \omega L$, $R_C = 1/\omega C$. Откуда $I_e = U_e / |Z| = 220 / \sqrt{100^2 + (220 - 90)^2} \approx 1.34$ А. Действующие значения напряжений $U_\text{R} = I_e R = 134$ В, $U_C = I_e R_C = 121\,\text{В}$, $U_L = I_e R_L = 295$ В.

Ответ: $I_e = 1.34\,\text{А}$, $U_\text{R} = 134$ В, $U_C = 121\,\text{В}$, $U_L = 295$ В.

Пример 8.4. Найти добротность колебательного контура с емкостью $C = 2$ мкФ и индуктивностью $L = 5.0\,\text{мГн}$, если на поддержание в нем незатухающих колебаний с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_{Cm} = 10\,\text{В}$ необходимо подводить среднюю мощность $\langle P \rangle$ мВт. Затухание колебаний в контуре достаточно мало.

Решение

Добротность колебательного контура при малом затухании можно вычислить по (7.19):

$$\Theta = \frac{L\omega_0}{R}.$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а сопротивление контура R найдем из условия, что вся подводимая извне в единицу времени энергия компенсирует ее тепловые потери на этом активном сопротивлении, т.е. $\langle P \rangle = \langle I^2 R \rangle$. По определению среднего значения $\langle P \rangle = \langle I^2 R \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I^2 R dt$, где $I = I_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$, или $\langle P \rangle = R I_m^2 \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \alpha) dt = \frac{1}{2} R I_m^2$. Сила тока $I = dQ/dt = C dU_C/dt$, где Q - заряд на конденсаторе, а U_C - напряжение на конденсаторе $U_C = \frac{1}{C}\int I dt = -U_{Cm}\cos(\omega_0 t + \alpha)$, то есть $I_m = \omega_0 C U_{Cm} = U_{Cm}\sqrt{C/L}$. Таким обра-

зом, $\langle P\rangle = \frac{1}{2}RI_m^2 = \frac{1}{2}U_{Cm}^2 RC/L$, откуда $R = 2\langle P\rangle L / CU_{Cm}^2$ и добротность контура есть $\Theta = \frac{\omega_0 L}{R} = \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{U_{Cm}^2}{2\langle P\rangle} = 2\times 10^4$

Ответ: $\Theta \approx 2\times 10^4$.

Пример 8.5. В резонансном контуре во входной цепи телевизионного приемника, показанном ниже на рис.8.4, емкость $C = 0.567$ пФ, индуктивность $L = 1.26$ мкГн и активное сопротивление $R = 20$ Ом. Амплитуда входного сигнала с антенны равна $\varepsilon_{\text{in}} = 100$ мкВ. Выходной сигнал образуется напряжением и током на конденсаторе. Найти амплитуды выходных напряжений $\varepsilon_{\text{m,out}} = U_{\text{Cm}}$ девятого и десятого каналов при частотах $\nu_9 = 188$ МГц и $\nu_{10} = 194$ МГц. Показать, что резонансный контур настроен на частоту 9-го канала. Определить добротность контура.

Решение

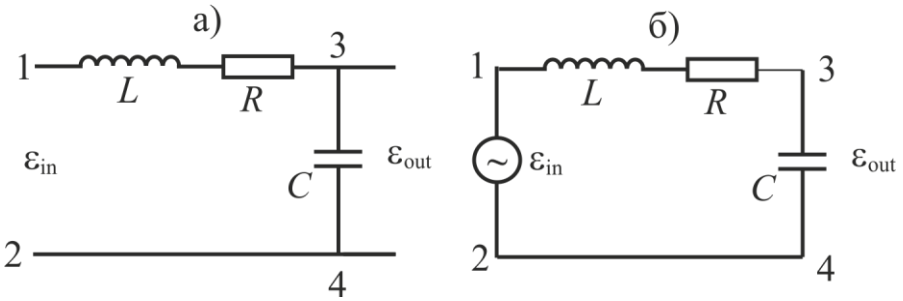


Рис.8.4. а) Входной контур приемника телевизионного сигнала; б) то же что и а)

С помощью формулы (8.17)

$$I_m(\omega) = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}$$

построим график амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) колебаний тока во входном колебательном контуре (Рис.8.5,а), а с помощью (8.7) $U_{Cm} = (1/\omega C)I_m(\omega)$ - график АЧХ колебаний напряжения на конденсаторе (Рис.8.5,б). Резонансная частота входного контура, согласно (8.19), равна

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = 1.18\cdot 10^9 \text{ с}^{-1},$$

где $\omega = 2\pi\nu$, т.е. $\nu = \omega / 2\pi = 188$ МГц $= \nu_9$. Из этой оценки и графиков Рис.8.5 видно, что входная цепь телевизионного приемника настроена на 9-й канал.

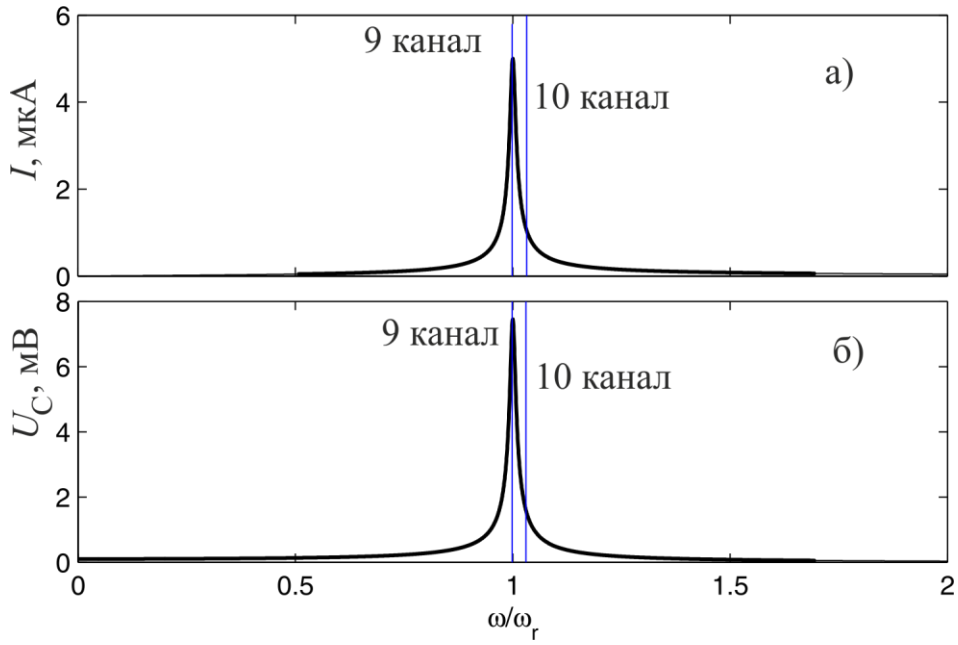


Рис.8.5. Амплитудно-частотная характеристика входного тракта телевизионного приемника: а) АЧХ тока, б) АЧХ выходного напряжения.

Добротность контура найдем из (7.19): $Q \approx \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \approx 74.6$. Для пикового значения тока (8.20) имеем $I_m(\omega_r) \approx \varepsilon_m / R = 5$ мкА, а амплитудное значение выходного напряжения на конденсаторе $U_{Cm,9} = I_m(\omega_r) / \omega_9 C = 7.46$ мВ.

Таким образом, при данных параметрах элементов C, L и R входного колебательного контура резонанс внешнего телевизионного сигнала с входным контуром выделяет частоту девятого канала, а амплитудные значения сигналов на частотах других каналов значительно меньше (рис.8.5).

Ответ: $U_{Cm,9} = 7.46$ мВ, $Q = 74.6$.

Задачи для аудиторной работы

А8.1. Катушка с индуктивностью $L = 0.318$ Гн и активным сопротивлением $R = 100$ Ом подключена к источнику синусоидального напряжения частотой 50 Гц, действующее значение которого $U_e = 120$ В. Определить мощность, выделяемую в катушке.

А8.2. Конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и резистор, сопротивление которого $R = 150$ Ом, включены последовательно в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Какую часть напряжения, приложенного к этой цепи, составляют падения напряжения на конденсаторе и на резисторе?

А8.3. В цепь переменного тока с действующим напряжением $U_e = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно емкость, сопротивление и индуктивность. Найти падение напряжения на сопротивлении, если известно, что

падение напряжения на конденсаторе $U_C = U_R$, а падение напряжения на индуктивности $U_L = 3U_R$.

А8.4. В колебательный контур последовательно включен генератор переменного напряжения с амплитудой $\varepsilon_m = 1.5$В. Амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе равна $U_{Cm} = 30$В. Определить добротность Q контура.

А8.5. Какую среднюю мощность должен потреблять колебательный контур с активным сопротивлением $R = 0.45$ Ом, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой тока 30 мА?

Задание на дом

В8.1. Чему равно эффективное значение силы тока в последовательной RL цепочке ($R = 65$Ом, $L = 50$мГн), включенной в сеть 220 В, 50 Гц? Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? Какая мощность рассеивается в цепочке?

В8.2. Конденсатор емкостью $C = 1$мкФ и резистор с сопротивлением $R = 3$ кОм включены в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Найти полное сопротивление цепи, если конденсатор и резистор включены последовательно.

В8.3. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением $R = 800$ Ом, индуктивностью $L = 1.27$ Гн и емкостью $C = 1.59$ мкФ. На зажимы цепи подано действующее напряжение $U = 127$В частоты 50 Гц. Найти: 1) действующее значение силы тока I в цепи; 2) сдвиг по фазе между током и напряжением; 3) мощность, выделяющуюся в цепи.

В8.4. Последовательный контур ($R = 100$Ом, $L = 1.0$Гн, $C = 1.0$мкФ) подключен к генератору переменного напряжения (частота 50 Гц). Найти сдвиг фаз между током и напряжением на концах всей цепи (на клеммах генератора).

В8.5. Цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления $R = 160$Ом и катушки с активным сопротивлением r подключили к сети переменного тока частотой 50 Гц с действующим напряжением $U = 220$В. Найти тепловую мощность, выделяемую на катушке, если действующие напряжения на сопротивлении R и катушке равны соответственно $U_R = 80$ и $U_L = 180$В.

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Формула Эйлера

$$\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad (A8.1)$$

где $i^2 = -1$.