5. Переменное электромагнитное поле

5.1. Уравнения Максвелла для переменного электромагнитного поля

Перейдем к обсуждению ***уравнений Максвелла*** классической электродинамики для общего случая ***быстропеременных во времени*** электромагнитного поля, токов и зарядов. Приоритет в создании классической электродинамики как стройной физической теории полностью принадлежит Дж. К. Максвеллу. Ряд положений его теории по своему характеру является подлинно революционными научными открытиями, хотя сам Максвелл скромно высказывался, что видит свою основную заслугу лишь в математическом оформлении идей М. Фарадея об электромагнитном поле [1]. Последнее утверждение в некоторой степени можно отнести к дифференциальным и интегральным уравнениям Максвелла электростатики и магнитостатики (4.0.1), (4.0.2) которые мы обсуждали в предшествующих главах, – эти уравнения представляют собой основанную на принципе близкодействия реализованную Максвеллом форму записи экспериментально открытых ранее классических законов электромагнетизма, уже известных Максвеллу и его современникам. Но при обобщении уравнений на случай переменных полей Максвелл проявил гениальную прозорливость и физическую интуицию, получив *систему дифференциальных уравнений Максвелла*, которую теперь чаще всего записывают в виде (8)

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\\
&(\mathrm{II}) \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\
&(\mathrm{III}) \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\\
&(\mathrm{IV}) \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho.
\end{aligned}
\tag{5.1.1}
$$

Самым главным результатом Максвелла здесь, несомненно, является дополнительное слагаемое в уравнении (I) по сравнению с магнитостатическим уравнением (3.4.10), это слагаемое называется *плотностью тока смещения* $\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial\mathbf{D}/\partial t$. Отсюда сразу следует возможность явления *магнитоэлектрической индукции*, т. е. возбуждения вихревого магнитного поля переменным электрическим полем. Такое явление аналогично и взаимно обратно описываемому уравнением (II) явлению *электромагнитной индукции*, когда вихревое электрическое поле возбуждается переменным магнитным полем (рис. 5.1).

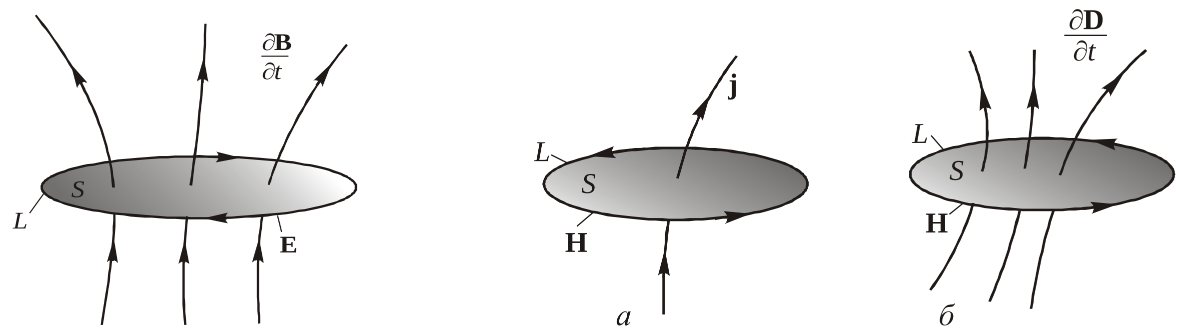


Рис. 5.1

Подчеркнем, что именно Максвелл придал закону электромагнитной индукции указанный фундаментальный физический смысл, сделав не обязательной формулировку, включающую описание взаимно движущихся магнитов, катушек или контуров с током и ЭДС индукции в них.

Не тривиально и то, что уравнение (IV) для *переменных* электрического поля и плотности зарядов имеет такой же вид, что и электростатическое уравнение (1.4.15), которое выражает закон Кулона, установленный для покоящихся зарядов. Для переменных, т. е. движущихся зарядов, силовое взаимодействие является не кулоновским, а частично магнитным, но *теорема Гаусса в дифференциальной форме* (IV) остается справедливой для *любого момента времени*.

Вычисляя сначала циркуляцию векторов **H** и **E** по *произвольным* контурам L и применяя формулу Стокса, а затем – поток векторов **B** и **D** через *произвольные замкнутые* поверхности S и применяя формулу Гаусса–Остроградского, можно записать *систему уравнений Максвелла в интегральной форме*:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}a) && \oint\limits_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int\limits_{S(L)} \mathbf{j}d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int\limits_{S(L)} \mathbf{D}d\mathbf{S},\\
&(\mathrm{II}a) && \oint\limits_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_{S(L)} \mathbf{B}d\mathbf{S},\\
&(\mathrm{III}a) && \oint\limits_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0,\\
&(\mathrm{IV}a) && \oint\limits_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \int\limits_{V(S)} \rho(\mathbf{r})dV,
\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

где $S(L)$ – *произвольные* поверхности, опирающиеся на контуры L, причем нормали к $S(L)$ связаны с направлением обхода контуров правилом правого винта; $V(S)$ – объемы внутри *замкнутых* поверхностей S, нормали к которым направлены наружу. Уравнения (5.1.2) иногда записывают в виде

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}b) && \oint\limits_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = I + \frac{d\Phi_D}{dt},\\
&(\mathrm{II}b) && \oint\limits_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},\\
&(\mathrm{III}b) && \Phi_{B0} = 0,\\
&(\mathrm{IV}b) && \Phi_{D0} = Q,
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

где $\Phi_B = \int\limits_{S(L)} \mathbf{B}d\mathbf{S}$ и $\Phi_D = \int\limits_{S(L)} \mathbf{D}d\mathbf{S}$ – потоки магнитного и электрического поля через поверхности $S(L)$; $\Phi_{B0} = \oint\limits_S \mathbf{B}d\mathbf{S}$ и $\Phi_{D0} = \oint\limits_S \mathbf{D}d\mathbf{S}$ – аналогичные потоки через *замкнутые* поверхности S; $I = \int\limits_{S(L)} \mathbf{j}d\mathbf{S}$ – электрический ток через поверхность $S(L)$ и $Q = \int\limits_{V(S)} \rho(\mathbf{r})dV$ – заряд в объеме $V(S)$.

Уравнения Максвелла в интегральной форме непосредственно выражают *законы электродинамики*, проявляющиеся в макроскопическом эксперименте. Так, уравнение (Ib) представляет собой обобщение закона Био и Савара, оно показывает, что вихревое магнитное поле создается не только электрическим током переноса зарядов (рис. 5.1, *а*), но и током смещения (рис. 5.1, *б*), т. е. переменным электрическим полем (магнитоэлектрическая индукция). Уравнение (IIb) выражает закон электромагнитной индукции – вихревое электрическое поле создается переменным магнитным полем (см. рис. 4.1). Магнитоэлектрическая и электромагнитная индукции, происходящие совместно, являются причиной существования электромагнитных волн. Уравнение (IIIb) отражает факт отсутствия магнитных монополей (скалярных магнитных зарядов, подобных электрическим зарядам) и связанную с этим соленоидальность магнитного поля – силовые линии вектора магнитной индукции всегда замкнуты. Уравнение (IVb) обобщает следующую из закона Кулона теорему Гаусса на случай переменных электрических полей и зарядов: силовые линии вектора электрической индукции могут начинаться и заканчиваться только в точках расположения зарядов (источников электрического поля). Такой же физический смысл имеют и соответствующие уравнения Максвелла в дифференциальной форме (I) – (IV).

Уравнения Максвелла автоматически удовлетворяют *закону сохранения заряда*, т. е. из них следует *уравнение непрерывности* (65)

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (5.1.4)$$

В этом легко убедиться, если подействовать на уравнение (I) оператором дивергенции div, а на уравнение (IV) оператором дифференцирования по времени $\partial/\partial t$ и учесть, что $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$. Таким образом, источники поля ρ и $\mathbf{j}$ связаны соотношением (5.1.4) и не могут быть по отдельности заданы произвольно.

Система уравнений Максвелла в разных средах должна быть дополнена *материальными соотношениями* (*уравнениями*), связывающими между собой *переменные* векторы поля, токи и заряды. Материальные соотношения делают систему уравнений Максвелла *замкнутой*, обеспечивая имеющееся количество неизвестных компонент поля необходимым для их нахождения количеством уравнений.

Примерами простейших и наиболее часто применяемых материальных соотношений являются соотношения вида (3): $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$, а в проводящих средах – закон Ома (5) или (2.3.1), т. е. $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ или $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}})$. Материальные соотношения в анизотропных средах имеют *тензорный вид* (6), а при наличии временно́й или пространственной дисперсии приобретают характер *интегральных уравнений* (см. главу 8). В достаточно сильном поле они становятся *нелинейными*.

На резких поверхностях раздела сред *граничные условия* для переменных полей сохраняют в точности такой же вид, как в электростатике (1.8.3), (1.8.9) и в магнитостатике (3.8.1), (3.8.5). Действительно, к уравнениям Максвелла для переменного поля (5.1.2) в любой фиксированный момент времени можно применить построения и рассуждения, проведенные в подразделах 1.8.1, 1.8.2 и 3.8.1, 3.8.2. В силу ограниченности значений производных по времени $\partial\mathbf{D}/\partial t$ и $\partial\mathbf{B}/\partial t$ в роторных уравнениях (I) и (II) их вклад в предельные соотношения для тангенциальных компонент стремится к нулю при сжатии вспомогательного контура. Уравнения же с дивергенциями (III) и (IV) вообще имеют такой же мгновенный вид, как и в статике. Это значит, что на поверхности раздела двух сред вытекающие из уравнений (I) – (IV) *граничные условия для переменных полей* (предел уравнений (I) – (IV) в точках на поверхности раздела) в любой момент времени можно записать так же, как (1.8.3), (1.8.9) и (3.8.1), (3.8.5):

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}c) && \mathbf{H}_{2\tau} - \mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{i}_{\tau},\\
&(\mathrm{II}c) && \mathbf{E}_{2\tau} - \mathbf{E}_{1\tau} = 0,\\
&(\mathrm{III}c) && B_{2n} - B_{1n} = 0,\\
&(\mathrm{IV}c) && D_{2n} - D_{1n} = \rho_S
\end{aligned} \qquad (5.1.5)$$

или в эквивалентной векторной форме

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}c') && \left[\mathbf{n}\times\left(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\right)\right] = \mathbf{i}_S,\\
&(\mathrm{II}c') && \left[\mathbf{n}\times\left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right)\right] = 0,\\
&(\mathrm{III}c') && \mathbf{n}\left(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1\right) = 0,\\
&(\mathrm{IV}c') && \mathbf{n}\left(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1\right) = \rho_S,
\end{aligned} \qquad (5.1.6)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный во вторую среду; $\mathbf{i}_S$ – поверхностная плотность тока; ρ_S – поверхностная плотность заряда. Аналогично тому, как из (IV) следует (IV*c*), из уравнения непрерывности (5.1.4) следует *граничное условие для тока*

$$\mathbf{n}(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t}\,. \tag{5.1.7}$$

Иногда задаются *краевые условия* на границах поля, например специальные условия на поверхности идеальных проводников или условия достаточно быстрого убывания статического либо излучаемого поля на бесконечности от системы зарядов и токов.

О токе смещения.

1. Прежде всего более подробно обсудим вопрос *о максвелловском токе смещения* $\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial\mathbf{D}/\partial t$. Существуют специальные научно-исторические исследования, посвященные изучению обстоятельств создания максвелловской электродинамики, в которых разбираются различные фактические или предполагаемые варианты хода мыслей Максвелла. Электродинамику Максвелл строил по методике, основанной на аналогии с *динамикой сплошной среды*. Так, уравнение непрерывности для переменных зарядов и токов (5.1.4) по своему виду и содержанию подобно соответствующему гидродинамическому уравнению непрерывности. Очевидно, что в рассуждениях Максвелла не последнюю роль играли не только аналогии с гидродинамикой, но и некоторые модельные механистические представления о строении мирового эфира как некой упругой субстанции, заполняющей даже вакуумное пространство. По аналогии с важными понятиями теории упругости («тензор напряжения», «вектор упругого смещения») в максвелловской теории тоже появляются «тензор напряжения», а также «вектор смещения» $\mathbf{D}$ (теперь называемый «вектором электрической индукции») и «ток смещения» как характеристики происходящих под действием поля смещений и тока неких взаимно нейтрализованных зарядов, непрерывно распределенных в пространстве, заполненном веществом и эфиром. В связи с этим следует заметить, что по современным представлениям классического эфира не существует – физический вакуум заполнен квантованными полями, а в веществе имеют место равенства $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ и $\mathbf{j}_{\text{см}} = \mathbf{j}_{\text{см}\,E} + \mathbf{j}_{\text{пол}}$ так, что часть тока смещения $\mathbf{j}_{\text{пол}} = \partial\mathbf{P}/\partial t$ буквально соответствует току поляризации связанных зарядов (3.11.12), однако другая часть тока смещения $\mathbf{j}_{\text{см}\,E} = \varepsilon_0\,\partial\mathbf{E}/\partial t$ описывает способность переменного электрического поля возбуждать вихревое магнитное поле даже в вакууме, т. е. характеризует одно из фундаментальных свойств электромагнитного поля как материальной субстанции.

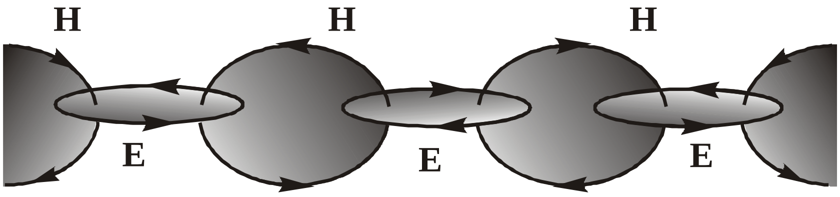
Введение тока смещения в уравнения электродинамики часто называют *гипотезой Максвелла*. Прямым экспериментальным доказательством справедливости этой гипотезы впоследствии явилось изучение предсказанных на ее основе свойств электромагнитных волн. Полезно рассуждение о физических процессах, происходящих в поле между обкладками плоского конденсатора, включенного в цепь переменного тока, эти процессы можно интерпретировать так, что между обкладками возникает вихревое магнитное поле, поскольку векторные линии тока смещения замыкают там линии тока проводимости, которые на обкладках разорваны.

Без тока смещения уравнения Максвелла не согласуются с уравнением непрерывности (5.1.4) для токов. Напротив, из уравнения непрерывности (5.1.4) и уравнений квазистационарного поля не следует однозначно вид тока смещения. Действительно, если записать уравнение (I) из (5.1.1) в виде $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}$, подействовать на него оператором дивергенции div, учесть уравнение непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$ и то, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$, а затем подставить выражение $\partial\rho/\partial t = \operatorname{div}\partial\mathbf{D}/\partial t$, которое получается дифференцированием по времени уравнения (IV) из (5.1.1), то придем к уравнению $\operatorname{div}(\mathbf{j}_{\text{см}} - \partial\mathbf{D}/\partial t) = 0$. Отсюда следует лишь, что $\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial\mathbf{D}/\partial t + f(\mathbf{r}, t)$, где $f(\mathbf{r}, t)$ – произвольная функция координат и времени, удовлетворяющая уравнению $\operatorname{div} f(\mathbf{r}, t) = 0$. За счет выбора функции $f(\mathbf{r}, t)$ можно было бы, например, «изменить» уравнение непрерывности (5.1.4) или уравнения (I) и (IV). Следовательно, с математической точки зрения, гипотеза Максвелла сводится к утверждению, что $f(\mathbf{r}, t) \equiv 0$.

Еще одним аргументом в пользу максвелловского выбора явились соображения о *симметрии* вида полученной системы уравнений, особенно при $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$ – в отсутствие свободных зарядов и токов:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}d) && \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\\
&(\mathrm{II}d) && \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\
&(\mathrm{III}d) && \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\\
&(\mathrm{IV}d) && \operatorname{div}\mathbf{D} = 0.
\end{aligned} \qquad (5.2.1)
$$

Эти уравнения дают решения в виде *электромагнитных волн*.



5.5. Теорема Пойнтинга

5.5.1. Энергия электромагнитного поля

Теорема Пойнтинга выражает *закон изменения энергии электромагнитного поля в вакууме и в неподвижных линейных средах без временной дисперсии* диэлектрической и магнитной проницаемостей, когда диссипация может происходить только через джоулевское тепловыделение в проводниках, помещенных внутрь таких сред. Теорема Пойнтинга является следствием закона сохранения энергии в замкнутых системах.

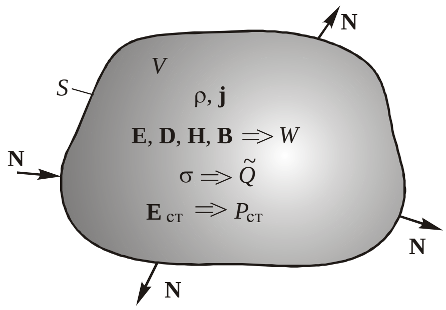


Рис. 5.2

Рассмотрим некоторый объем V, ограниченный поверхностью S (рис. 5.2). В этом объеме имеется электромагнитное поле, а кроме того, могут находиться движущиеся заряды, источники тока и проводники, по которым текут электрические токи. В проводниках выделяется джоулево тепло. Будем считать, что через поверхность S ток не течет. Для всей системы должен выполняться закон сохранения энергии, выражающее его математическое соотношение следует из уравнений Максвелла (5.1.1). Чтобы получить это соотношение, умножим скалярно обе части уравнения (I) на вектор $\mathbf{E}$, а обе части уравнения (II) – на вектор $\mathbf{H}$. Образуем разность левых и правых частей полученных выражений:

$$\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{jE} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (5.5.1)$$

Слева воспользуемся тождеством (4.4.3)

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] = \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}, \qquad (5.5.2)$$

а справа применим равенства

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{ED}}{2}\right), \qquad \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{BH}}{2}\right), \qquad (5.5.3)$$

справедливые в среде без дисперсии (диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят от времени), в которой выполняются линейные материальные соотношения вида

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_0 \sum_{j=1}^{3} \mu_{ij} H_j, \tag{5.5.4}$$

в изотропной среде $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$, в вакууме $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$.

В итоге (5.5.1) дает *дифференциальное* (*локальное) уравнение*, выражающее *теорему Пойнтинга*:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{jE} - \operatorname{div}\mathbf{N}, \tag{5.5.5}$$

где **N** – *вектор Пойнтинга*, определяемый векторным произведением **E** и **H**,

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right], \tag{5.5.6}$$

с которым мы уже встречались в случае квазистационарного поля (см. (4.4.6)), а величина w интерпретируется как *плотность энергии электромагнитного поля*, для рассматриваемых сред (и в вакууме) она дается выражением

$$w = \frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{HB}}{2}, \tag{5.5.7}$$

которое имеет вид суммы выражений (1.26.7) для энергии электростатического поля и (4.4.12) для энергии магнитостатического поля.

Более существенным основанием для такой интерпретации является соответствующая интегральная формула, которая получается при почленном интегрировании (5.5.5) по объему V, ограниченному поверхностью S, причем интеграл от дивергенции по формуле Гаусса–Остроградского (см. (П30) в прил. 1) равен потоку вектора **N** через поверхность S (см. (4.4.5)), в итоге мы получаем *интегральную форму теоремы Пойнтинга*

$$\frac{dW}{dt} = -\int_V \mathbf{jE}\,dV - \oint_S \mathbf{N}\,d\mathbf{S}. \tag{5.5.8}$$

Левая часть равна скорости изменения *полной энергии электромагнитного поля в* объеме V

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \left(\frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{HB}}{2}\right) dV, \tag{5.5.9}$$

а первое слагаемое в правой части выражает скорость изменения кинетической энергии зарядов, приобретаемой ими в электромагнитном поле. Действительно, с микроскопической точки зрения, например, для модели точечных зарядов (см. (54)) плотность тока равна

$$\mathbf{j} = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{v}_i(t). \tag{5.5.10}$$

Будем считать, что скорость заряженных частиц мала по сравнению со скоростью света $|\mathbf{v}_i| \ll c$ и при своем движении они подчиняются законам классической (*нерелятивистской*) механики, пусть m_i – массы частиц с зарядами e_i, тогда

$$\int_V \mathbf{jE}\,dV = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{v}_i \mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2}\right), \tag{5.5.11}$$

где объемный интеграл взят с помощью δ-функции (см. (55)), а далее использован второй закон Ньютона $m_i\, d\mathbf{v}_i / dt = e_i \mathbf{E} + e_i [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}]$ и тот факт, что магнитное поле работу не совершает, так как $\mathbf{v}_i [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}] = 0$. В итоге закон сохранения (изменения) энергии (5.5.8) для системы частиц и поля можно записать как

$$\frac{dW_{\text{полн}}}{dt} = -\oint_S \mathbf{N}d\mathbf{S}\,, \tag{5.5.12}$$

где – суммарная энергия частиц и поля в рассматриваемом объеме:

$$W_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} + W\,. \tag{5.5.13}$$

Отметим, что энергия W включает в себя энергию всего электромагнитного поля в объеме V, т. е. энергию поля внешних источников и энергию поля самих заряженных частиц, которая представляет собой энергию электромагнитного взаимодействия (и самодействия) этих частиц. Если поток энергии через границу S равен нулю, то полная энергия $W_{\text{полн}}$ частиц и поля в объеме V сохраняется.

Когда на частицы действуют еще и потенциальные силы неэлектромагнитной природы, определяемые потенциальной энергией $U_i(\mathbf{r})$, например гравитационные, то следует в правую часть (5.5.12) добавить суммарную мощность таких сил:

$$\frac{dW_{\text{полн}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i - \oint_S \mathbf{N}d\mathbf{S}\,. \tag{5.5.14}$$

Но поскольку для потенциальных сил имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i = -\sum_{i=1}^{N} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \operatorname{grad} U_i(\mathbf{r}) = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{r})\,; \tag{5.5.15}$$

то это эквивалентно тому, чтобы в левой части (5.5.12) под знаком производной по времени к энергии $W_{\text{полн}}$ прибавить сумму потенциальных энергий $U_i(\mathbf{r})$:

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{полн}}}{dt} = -\oint_S \mathbf{N}d\mathbf{S}\,, \tag{5.5.16}$$

где

$$\mathscr{E}_{\text{полн}} = W_{\text{полн}} + \sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} + U_i(\mathbf{r}) \right) + W \tag{5.5.17}$$

есть полная энергия частиц (включая их потенциальную энергию во внешнем поле) и поля в объеме V.

При наличии в объеме V омических проводников и источников тока можно также считать, что первое слагаемое в правой части (5.5.8) описывает энергетический баланс между работой сторонних ЭДС над токами проводимости и джоулевыми потерями. Действительно, из закона Ома $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}})$ следует что

$$\mathbf{jE} = \frac{j^2}{\sigma} - \mathbf{jE}_{\text{ст}}\,, \tag{5.5.18}$$

(ср. с (4.4.1)), тогда *интегральная форма теоремы Пойнтинга* (5.5.8) приобретает вид

$$P_{\text{ст}} = Q + \frac{dW}{dt} + \oint_S \mathbf{N}d\mathbf{S}\,, \tag{5.5.19}$$

обобщающий (2.4.5) и (4.4.7), где по определениям (2.4.6)

$$P_{\text{ст}} = \int\limits_V \mathbf{j}\mathbf{E}_{\text{ст}} dV\,, \quad Q = \int\limits_V \frac{j^2}{\sigma} dV\,. \qquad (5.5.20)$$

Формула (5.5.19) позволяет сказать, что в соответствии с законом сохранения энергии мощность $P_{\text{ст}}$ источников тока в объеме V равна сумме трех слагаемых: мощности Q джоулевых потерь, связанных с протеканием тока в проводниках, скорости изменения энергии электромагнитного поля dW/dt в этом объеме, а также полного потока энергии, переносимой электромагнитным полем через поверхность S, ограничивающую объем V (рис. 5.2).

Таким образом, электромагнитное поле, как всякий материальный объект, является носителем энергии, которая распределена в пространстве так, что в единице всякого занимаемого полем малого объема в соответствии с (5.5.9) содержится энергия, равная *плотности энергии электромагнитного поля* w. *Вектор Пойнтинга* $\mathbf{N}$, определенный формулой (5.5.5), имеет смысл *плотности потока энергии*, переносимой электромагнитным полем через малый элемент поверхности, помещенный в данную точку поля.

4.3. Критерии квазистационарности полей и токов

Условия применимости квазистационарного приближения для описания электродинамических процессов в проводящих системах включают ряд неравенств, обеспечивающих указанные упрощения вида уравнений Максвелла и накладывающих ограничения на частоты изменения поля и токов, на размеры систем и характеристики вещества. При выводе этих условий переменное по времени t электромагнитное поле достаточно характеризовать его главными монохроматическими фурье-гармониками $\mathbf{E}$ » $\mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$ и $\mathbf{H}$ » $\mathbf{H}_0 \exp(i\omega t)$ с частотой $\omega = 2\pi/T$ и периодом T, приближенно равным характерному времени изменения поля. Поле изменяется медленно, поэтому в рассматриваемом низкочастотном случае проводимость σ и проницаемости ε, μ можно считать постоянными и равными их статическим значениям.

Главной характерной особенностью квазистационарного приближения является возможность *пренебречь током смещения* $\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial\mathbf{D}/\partial t = \varepsilon\varepsilon_0\, \partial\mathbf{E}/\partial t$ в уравнении Максвелла (см. (8))

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,. \qquad (4.3.1)$$

Это значит:

а) что *внутри проводников* ток смещения должен быть пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости $j = \sigma E \gg j_{\text{см}} = \varepsilon\varepsilon_0\, \partial E/\partial t \approx \varepsilon\varepsilon_0 \omega E$, откуда, сокращая E, имеем неравенство

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{\tau_{\text{M}}} \equiv \omega_{\text{M}}\,; \qquad (4.3.2)$$

здесь в правой части стоит характерная частота ω_{M}, равная обратному *максвел-ловскому времени релаксации* τ_{M} (см. ниже формулу (4.6.9) в примеч. 4.6.1);

б) что *вне проводников* тока нет $(\mathbf{j} = 0)$, поэтому для справедливости (4.2.4) ток смещения должен быть пренебрежимо мал по сравнению со стоящей в левой части (4.3.1) величиной $|\operatorname{rot}\mathbf{H}| \approx H/l \gg j_{\text{см}} = \varepsilon\varepsilon_0\, \partial E/\partial t \approx \varepsilon\varepsilon_0 \omega E$, где l – характерная длина изменения электромагнитного поля в пространстве (величиной H/l мы оцениваем значения производных от $\mathbf{H}$ по координатам в $\operatorname{rot}\mathbf{H}$). Аналогичным образом уравнение (4.2.1) дает оценку $|\operatorname{rot}\mathbf{E}| \approx E/l \sim |\partial B/\partial t| \approx \mu\mu_0 \omega H$; выражая отсюда величину E и подставляя ее в предыдущее неравенство, приходим к условию

$$\omega \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{c}{l} = \frac{\tilde{c}}{l}, \qquad (4.3.3)$$

где $c = 1\big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – скорость света в вакууме, а $\tilde{c} = c\big/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость света в окружающей проводник диэлектрической среде. Вблизи проводника параметр l порядка геометрического размера этого проводника $L \sim l$, а на достаточном удалении от проводника роль длины l играет расстояние от проводника $r \sim l$. Условие (4.3.3) означает, что размер проводника L и расстояние до точки наблюдения поля r малы по сравнению с характерной длиной волны электромагнитного поля $\lambda_0 = 2\pi\tilde{c}/\omega$, т. е. $L \ll \lambda_0$ и $r \ll \lambda_0$ (это определяет *зону квазистационарности поля*). Еще одна эквивалентная форма последних неравенств, выражающая медленность изменения поля, имеет вид

$$T \gg \tau_l \equiv \frac{l}{\tilde{c}}, \qquad (4.3.4)$$

т. е. характерное время (период) изменения поля T должно быть велико по сравнению со временем τ_l распространения волновых возмущений (поля) через рассматриваемую зону квазистационарности. Таким образом, в зоне квазистационарности мы пренебрегаем эффектом запаздывания, связанным с конечностью скорости распространения поля $\tilde{c}$. Отметим также, что квазистационарное поле могут создать только заряды, движущиеся с нерелятивистскими скоростями $v \ll l/T \ll \tilde{c} < c$.

Для переменных токов промышленной частоты $\nu = \omega/2\pi = 50$ Гц при $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ имеем $\lambda_0 \approx 6000$ км, что обеспечивает достаточность квазистационарного приближения в электротехнике. Условие (4.3.2) дает завышенную оценку для квазистационарных частот (для металлов подстановка $\sigma \sim 10^6$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$, $\varepsilon \sim \mu \sim 1$ дает $\omega_M \sim \tau_M^{-1} \sim 10^{17}$ Гц (см. примеч. 4.6.1)). В реальных хороших металлах квазистационарное приближение надежно описывает процессы только до частот СВЧ-диапазона $\nu \sim 10^{10}$ Гц ($\lambda_0 \sim 1$ см) из-за необходимости учета частотной зависимости проводимости, длины свободного пробега электронов и глубины проникновения поля в проводник.