№ 4240

53
М 55

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Методические указания

НОВОСИБИРСК
2012

Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

53
М 55

№ 4240

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Методические указания
к вводному занятию и к лабораторным работам № 0–6
по физике для студентов I курса всех факультетов

НОВОСИБИРСК
2012

УДК 531+536] (076.5)
М 55

Составители:

А.В. Баранов (введение, лаб. работа № 0)
А.М. Погорельский, В.В. Христофоров (лаб. работа № 1)
Б.Л. Паклин (лаб. работа № 3)
А.М. Погорельский, В.В. Христофоров (лаб. работа № 4)
В.В. Христофоров (лаб. работа № 5, новая редакция)
Д.Д. Березиков (лаб. работа № 6)

Разработка и изготовление лабораторных установок:
А.М. Погорельский, *А.В. Морозов*, *А.А. Шевченко*, *П.А. Крапивко*

Подготовка к изданию *В.В. Христофоров*

Рецензент *Б.Б. Горлов*

Работа подготовлена на кафедре общей физики

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В лабораторном практикуме вы постоянно будете иметь дело с измерениями физических величин. Необходимо уметь правильно обрабатывать и представлять результаты этих измерений. Цель данного раздела – сообщить основные сведения, касающиеся особенностей физических измерений, обработки и представления результатов. Для более полной и детальной информации следует обращаться к специальной литературе, например [1–5].

В1. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Под измерением понимается операция, в результате которой определяется, во сколько раз интересующая нас величина больше или меньше величины той же природы, принятой за единицу. Таким образом, измерение является актом сравнения: расстояние сравнивается с единицей расстояния, время – с единицей времени, ток – с единицей тока и т. д. Единицы измерения при этом должны быть предварительно определены. В лабораторном практикуме необходимо придерживаться международной системы единиц СИ.

Часто **одну и ту же величину можно измерить разными способами**. Например, высоту здания можно измерить с помощью:

1) рулетки;

2) секундомера, определив время свободного падения небольшого по размерам металлического шарика;

3) рулетки, угломера и лазера, определив расстояние от здания до лазера и угол, под которым лазерный луч направлен на вершину здания;

4) и т. д.

Анализируя подобные ситуации, можно прийти к следующему выводу: **измерения бывают прямыми и косвенными**. В случае **прямого измерения** значение искомой величины непосредственно определяется с помощью прибора, шкала которого проградуирована в единицах измерения этой величины. В случае **косвенного измерения** значение величины вычисляется по формуле, которая связывает искомую величину с другими, измеренными прямо или косвенно.

Очевидно, в нашем примере первое измерение высоты будет прямым, а второе и третье – косвенными.

Измерение можно проводить как **однократно**, так и **многократно**, пытаясь воспроизвести одни и те же условия.

Если мы произведем многократные измерения высоты здания последовательно каждым из трех способов, то сравнение результатов измерений между собой приведет нас к очень интересным и важным выводам.

1. Результаты измерений первым способом могут отличаться от результатов измерений вторым способом, а последние, в свою очередь, от результатов измерений третьим способом и т. п.

Разные способы измерения одной и той же величины могут давать разные ее значения.

2. Результаты многократных измерений с помощью одного и того же способа тоже могут отличаться друг от друга. **Многократные измерения одной и той же величины одним и тем же способом могут дать разные ее значения.**

Проанализируем сложившуюся ситуацию.

Сначала выясним, почему разные способы измерения одной и той же высоты привели к разным результатам.

На первый взгляд, первый способ – самый надежный. Мы прикладываем ленту рулетки к поверхности здания и определяем искомую высоту. Более внимательный анализ показывает, что это не совсем так. Оказывается, здание построено с небольшим наклоном, а стена в том месте, где производятся замеры, имеет определенную кривизну – она выпуклая, причем в сторону улицы. Это означает, что мы измеряли не высоту здания, а длину стены, связанную с высотой.

Второй способ представляет собой косвенное измерение. Измерив время падения шарика, мы рассчитываем высоту по известной формуле для свободного падения $h = gt^2/2$. На этот раз измерение действительно касается высоты. Но мы забыли о том, что шарик движется в воздухе и, следовательно, испытывает сопротивление среды. Поэтому рассчитанная по формуле величина также не будет истинным значением высоты здания.

Третье измерение, как и второе, – косвенное. Высота определяется из геометрических соображений: в прямоугольном треугольнике длина противолежащего катета равна произведению длины прилежащего катета на тангенс угла. В нашем случае высота играет роль одного катета, а расстояние от лазера до здания – роль другого. На этот раз нас подвело предположение об идеально горизонтальной поверхности, на которой стоит здание. Результат – опять измерена величина, не являющаяся высотой, но теперь по другой причине.

Итак, в каждом способе измерения присутствуют какие-то **постоянные факторы** (в каждом случае свои, причем их может быть несколько), которые приводят к появлению **систематической погрешности** измерения данным способом. Каждый раз при измерении значения одной и той же величины в одних и тех же условиях систематическая погрешность имеет одно и то же значение. Если эти факторы учесть, введя соответствующие поправки, то можно приблизиться к реальному значению измеряемой величины, и тогда результаты измерений разными способами (с учетом поправок на систематическую погрешность) могут оказаться довольно близкими. Таким образом, **в принципе, систематические погрешности могут быть учтены и даже исключены**, хотя осуществление этого на практике может оказаться довольно непростой задачей.

Теперь попытаемся выяснить, почему многократные измерения одной и той же высоты одним и тем же способом (включая один и тот же комплект приборов) могут приводить к отличающимся друг от друга значениям. Это связано с целым рядом **факторов, действующих случайным образом**. В рассмотренном примере могут быть небольшие механические колебания почвы, здания и приборов, тепловые воздействия, связанные с изменением линейных размеров стены и используемых приборов, и т. п. Наконец, есть еще человеческий фактор, связанный с восприятием происходящих процессов и реакцией на это восприятие. В результате при повторных измерениях одной и той же величины могут получаться различные ее значения, связанные со **случайными погрешностями**. От измерения к измерению случайная погрешность может изменять как свой знак, так и свою величину. В силу случайного характера воздействий **заранее предсказать величину такой погрешности невозможно**.

Наш анализ вызывает закономерные вопросы.

1. Что такое «истинное» значение измеряемой величины?

2. Как представлять результаты измерений с учетом погрешностей?

Поскольку эти вопросы касаются не только рассмотренного примера, но и любых других измерений, мы перейдем к обобщениям и выработке общих рекомендаций.

Приведенный конкретный пример продемонстрировал общее свойство, характерное для любых измерений: **любое измерение сопровождается погрешностями**.

Это свойство в конечном счете обусловлено тем, что всякое измерение предполагает определенную взаимосвязанную цепочку участников процедуры измерения: наблюдатель – измерительный прибор – анализируемый объект – «внешняя среда».

Элементы этой цепочки связаны огромным количеством взаимодействий и движений. В процессе измерения анализируемый объект, измерительный прибор и наблюдатель могут быть подвержены различным влияниям (в том числе и взаимным), что и сказывается на результате измерений.

Безусловно, если уменьшать влияния, не имеющие непосредственного отношения к процедуре измерения, и стараться учитывать неустранимые влияния, то точность наших измерений будет возрастать. Но абсолютно точное измерение невозможно принципиально. И это во многом связано с природой самих измеряемых величин.

Если мы, например, захотим абсолютно точно измерить длину металлического стержня, то обнаружим наличие принципиально неустранимых (хотя и очень малых) колебаний кристаллической решетки. Никакой абсолютно точной «истинной» длины у стержня нет. Она постоянно случайным образом изменяется, отклоняясь в ту или иную сторону от некоторого наиболее часто встречающегося значения. Вот это значение мы можем принять за «истинное» значение длины и в дальнейшем оперировать именно им, говоря о длине стержня или используя эту величину для каких-либо расчетов, например для определения объема стержня.

Такого рода ситуация обнаруживается во множестве других измерений. Сами измеряемые величины случайным образом могут изменяться, что обусловлено, как уже сказано выше, их физической природой. Таким образом, мы сталкиваемся с **принципиальной неустранимостью случайных факторов**. Их можно свести к минимуму, но окончательно избавиться от них нельзя. Следовательно, **представляя результаты измерений, мы должны давать информацию, касающуюся нашей оценки «истинного» значения величины с учетом случайных погрешностей измерения** (при условии, что систематическая погрешность исключена или учтена в виде соответствующей поправки). Понятно, что наиболее полно такая информация может быть представлена по результатам многократных измерений.

В2. ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Допустим, что мы n раз измерили значение некоторой величины x. Вследствие случайных факторов получается совокупность n различных значений одной и той же величины x. Эта совокупность значений получила название конечной выборки. Пусть максимальное измеренное значение равно $x_{\max}$, минимальное – $x_{\min}$. Представим результаты измерений в графической форме. Для этого предварительно проведем некоторую их обработку. Разобьем полный интервал изменения величины x на m более мелких интервалов и введем величину интервала $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/m$. Для каждого такого интервала определим количество измерений Δn, для которых значение величины x попадает в рассматриваемый интервал. Определим величину $y = (\Delta n/n)/\Delta x$ и построим график зависимости $y(x)$. Величина $\boldsymbol{\Delta n/n}$ в этом отношении определяет **долю от общего числа измерений**, **приходящуюся на выбранный интервал**. Пример возможного такого графика приведен на рис. В1.

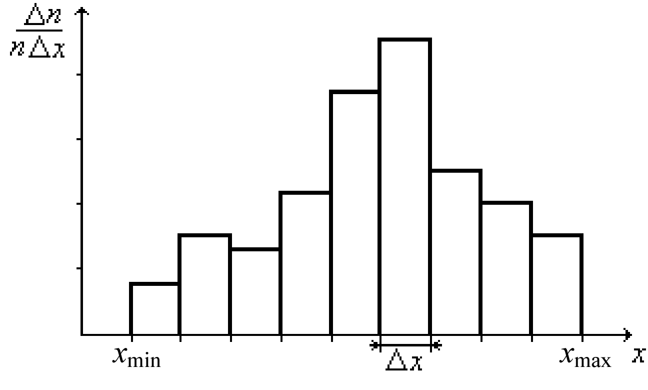

Рис. В1. Гистограмма результатов измерений величины x

График представляет собой столбчатую диаграмму, которая называется **гистограммой**. Гистограмма достаточно наглядно демонстрирует, **как распределены значения результатов измерений**: одни значения величины x в процессе измерений получались довольно редко, другие – более часто, а какие-то – очень часто. На некоторый интервал Δx приходится максимальное значение величины y.

Из опыта следует, что при увеличении числа измерений гистограмма будет принимать простую и вполне определенную форму, которая для множества различных экспериментов оказывается универсальной. Если совершить **предельный переход:** $\boldsymbol{n \to \infty}$, $\boldsymbol{\Delta x \to 0}$, то гистограмма превратится в непрерывную кривую, которую описывает функция следующего вида:

$$f(x) = A \exp\left\{-(x - x_0)^2 \big/ 2\sigma^2\right\}. \tag{B1}$$

Эта зависимость получила название **функции распределения Гаусса,** или **закона нормального распределения Гаусса**. Ее график изображен на рис. В2. Эта непрерывная кривая является, таким образом, **предельным,** или, как его еще называют, **генеральным распределением**.

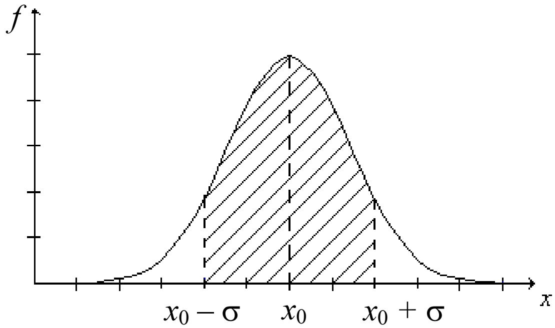

Рис. В2. Функция распределения Гаусса

Предельное распределение – это **теоретическая идеализация**, к которой никогда нельзя абсолютно точно приблизиться в эксперименте. Чем больше количество измерений, тем ближе гистограмма к предельному распределению. Теоретическая идеализация, хотя и недостижима, очень важна: она **демонстрирует предельные возможности распределения результатов в данном эксперименте**. Если бы мы могли получить в эксперименте предельное распределение, то информация, содержащаяся в нем, была бы максимально возможной и полной.

Следует подчеркнуть, что не все предельные распределения имеют вид нормального распределения Гаусса. Но такое распределение чаще всего будет соответствовать вашим экспериментальным данным. По этой причине мы рассматриваем именно это распределение. Возможно, в дальнейшем вы познакомитесь и с другими распределениями.

Нормальное (генеральное) распределение характеризуется двумя параметрами:

1) **генеральным средним** значением x_0;

2) **генеральным отклонением** σ.

Генеральное среднее представляет собой то значение x, на которое приходится **максимум функции распределения Гаусса**. Значения случайной величины x распределены относительно x_0 симметрично (кривая нормального распределения имеет ось симметрии, проходящую через координату x_0).

Генеральное отклонение представляет собой **меру ширины кривой нормального распределения**. Чем меньше значение σ, тем быстрее уменьшается значение функции Гаусса по мере удаления значения x от величины генерального среднего, тем ýже кривая нормального распределения, меньше разброс значений измеряемой величины и, следовательно, точнее измерение.

Функция распределения Гаусса позволяет рассчитать долю измерений, приходящуюся на интересующий интервал значений величины x:

$$\Delta n / n = \int_{x_1}^{x_2} f dx, \tag{B2}$$

где x_1 – нижняя граница выбранного интервала значений величины x; x_2 – верхняя граница выбранного интервала значений величины x.

Функция распределения Гаусса (B1) удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dx = 1.$$

Поэтому (B2) можно интерпретировать как вероятность P того, что «истинное» значение измеряемой величины окажется в интересующем нас интервале. Из геометрического смысла интеграла следует, что площадь под кривой нормального распределения в пределах выбранного интервала (см. рис. B2), отнесенная к полной площади под всей кривой, должна давать величину этой вероятности и соответственно значение $\Delta n/n$.

Используя вероятностный смысл функции Гаусса, можно показать, что среднее значение измеряемой величины, определяемое как

$$\bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xfdx = 1,$$

в случае нормального распределения совпадает с x_0, т. е. $\bar{x} = x_0$. Поэтому величина x_0 и получила название **среднего значения генерального (нормального) распределения,** или **генерального среднего.**

Аналогично можно показать, что значение σ совпадает с величиной **стандартного,** или **среднеквадратичного, отклонения**, квадрат которого для нормального распределения определяется выражением $(x-\bar{x})^2 f\,dx$. Поэтому σ называется **среднеквадратичным (стандартным) отклонением генерального (нормального) распределения,** или **генеральным отклонением**. Среднеквадратичное отклонение характеризует среднюю меру разброса (отклонения) случайной величины x от среднего значения $\bar{x}$. Обратите внимание: сначала суммируются (интегрируются) значения величины $(x - \bar{x})^2$ – квадраты всех отклонений от среднего. Квадратный корень из этой суммы и дает величину среднеквадратичного отклонения (с определением связано название величины). Если бы суммировались сами отклонения, т. е. величины $(x - \bar{x})$, то в силу симметрии нормального распределения Гаусса результат был бы равен нулю. Это обусловлено тем, что отрицательные и положительные по знаку отклонения равновероятны. По этой причине **в качестве средней меры отклонения случайной величины от среднего используется именно среднеквадратичное отклонение**.

Возьмем интервал $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$, границы которого симметричны по отношению к генеральному среднему. Пользуясь (В2), для нормального распределения можно определить вероятность P попадания «истинного» значения измеряемой величины в этот интервал. Если вероятность определена, то интервал называется **доверительным интервалом измерения**, а вероятность – **доверительной вероятностью,** или **надежностью измерения**. Надежность измерения выражается или в долях единицы, или в процентах и зависит от величины выбранного интервала.

Если задан доверительный интервал с указанием величины надежности (вероятности P), то информация о результатах измерения считается представленной с учетом случайных погрешностей измерения. Величина Δx, характеризующая ширину доверительного интервала, называется **доверительной погрешностью.**

В качестве доверительного интервала для нормального распределения чаще всего используется интервал $(x_0 - \sigma,\ x_0 + \sigma)$, связанный со стандартным отклонением. Величина доверительной вероятности для такого интервала составляет приблизительно 68,3 %.

Если взять $\Delta x = 2\sigma$, то $P = 95{,}5$ %. При $\Delta x = 3\sigma$ величина $P = 99{,}7$ %. Последнее, например, означает, что вероятность обнаружить результат измерения величины x за пределами интервала $(x_0 - 3\sigma,\ x_0 + 3\sigma)$ составляет всего 0,3 %. Можно считать, что «истинное» значение измеряемой величины практически находится в этом интервале.

От функции распределения Гаусса, которая является теоретической предельной идеализацией, вернемся теперь к нашему реальному распределению (см. рис. В1), в котором количество измерений n представляет собой конечную величину. Как в этом случае определяется доверительный интервал и представляются результаты измерений?

Аналогом величины x_0 выступает величина **выборочного среднего значения** (среднеарифметического для конечной выборки)

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n. \tag{В3}$$

Аналогом величины σ является величина **выборочного среднеквадратичного отклонения**

$$S_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\bar{x} - x_i\right)^2 / (n-1)}. \tag{В4}$$

Чтобы получить оценку доверительного интервала для конечного числа измерений, приходится вводить величину t_{St} – **коэффициент Стьюдента** (псевдоним английского математика В.С. Госсета). Только введение этого коэффициента позволяет найти доверительную вероятность для заданного интервала значений или определить интервал для заданной величины вероятности. Последняя из этих двух операций более простая, поэтому мы будем поступать именно так. Значения коэффициента Стьюдента для различных значений n и P даны в табл. В1.

Таблица В1

Значения коэффициента Стьюдента

P, %	n							
	2	3	4	5	6	10	20	40
70	2.0	1.4	1.3	1.2	1.2	1.1	1.1	1.1
80	3.1	1.9	1.7	1.5	1.5	1.4	1.3	1.3
90	6.3	2.9	2.4	2.1	2.0	1.8	1.7	1.7
95	13.0	4.3	3.2	2.8	2.6	2.3	2.1	2.0
99	64.0	9.9	5.8	4.6	4.0	3.3	2.9	2.7

Задав необходимое значение надежности измерения (вероятности P), находим по таблице величину t_{St}, соответствующую проведенному количеству измерений n. Например, для P = 80 % при n = 5 значение t_{St} = 1.5.

Величину ***доверительной погрешности*** измерения находим по формуле

$$\Delta x = t_{St} S_x / \sqrt{n}\ . \tag{B5}$$

Чем большее значение надежности измерения выбирается, тем больше значение коэффициента Стьюдента и тем больше ширина доверительного интервала (больше величина доверительной погрешности). С ростом числа измерений величина t_{St} уменьшается.

Результат многократного измерения представляется в следующей форме:

$$\overline{x} \pm \Delta x \ (n = \dots ,\ P = \dots).$$

В скобках **указываются количество измерений и значение доверительной вероятности, соответствующее доверительной погрешности**.

Такая форма записи наиболее информативна, так как она содержит данные не только о среднем значении измеренной величины и погрешности измерения, но и оценку надежности результата.

В3. ПРИБОРНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

В настоящее время существует огромное количество разнообразных измерительных приборов, отличающихся конструкцией, принципом работы и точностью. Точность прибора либо задается классом точности, либо указывается в паспорте, прилагаемом к прибору.

Измерительные приборы вносят свой вклад в погрешность измерения, зависящий от точности прибора. Соответствующую величину принято называть **приборной погрешностью**. В общем случае она может иметь **две составляющие – систематическую и случайную**. У правильно настроенного и поверенного измерительного прибора систематическая погрешность либо отсутствует, либо просто учитывается.

Для определения приборной погрешности, связанной со случайными факторами, мы будем пользоваться следующими правилами.

1. Если **прибор имеет класс точности** (его величина указывается в паспорте и (или) на шкале прибора), то **приборная погрешность определяется формулой**

$$\delta = k\Pi/100, \tag{B6}$$

где k – величина класса точности прибора; П – предел измерения прибора.

2. Если **прибор не имеет класса точности**, то **приборная погрешность определяется половиной цены деления шкалы прибора.**

Так определяемая приборная погрешность показывает максимально возможное отклонение показаний прибора от «истинного» значения измеряемой величины, обусловленное случайными факторами, связанными с процедурой измерения с помощью данного прибора. Ей соответствует значение доверительной вероятности P =100 %.

Если в процессе многократных измерений выясняется, что основной вклад в случайную погрешность вносит приборная погрешность, то в данном эксперименте можно ограничиться однократными измерениями. На практике мы чаще всего имеем дело именно с ними. В этом случае **оценка «истинного» значения измеряемой величины** будет определяться **однократным показанием прибора**, а **оценка погрешности измерения – приборной погрешностью**. Если же основной вклад вносится не приборной погрешностью, то принципиальным становится именно проведение многократных измерений. В таком случае необходимо проводить статистическую обработку результатов многократных измерений (см. п. В2). **Оценкой «истинного» значения** при этом будет **величина среднего значения**, а **оценкой погрешности – доверительная погрешность**.

В4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОДНОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Часто для практических целей достаточно произвести однократное измерение интересующей нас величины. В этом случае невозможно оценить погрешность, связанную со всеми случайными факторами «внешней среды», но мы должны быть уверены, что она достаточно мала. Чтобы убедиться в этом, необходимо хотя бы раз произвести многократное измерение величины и определить случайную погрешность. Но в любом случае остаются погрешности, связанные с использованием для измерения конкретных приборов.

Поэтому **результат однократного измерения представляется в виде**

$$x \pm \delta x,$$

где x – значение величины, полученное в процессе однократного прямого или косвенного измерения; δx – погрешность однократного измерения.

Количество измерений (одно) и доверительная вероятность *P* (100 %) в этом случае не указываются в отличие от результата многократного измерения.

Величина **δx в случае прямого однократного измерения представляет собой приборную погрешность** (см. п. В3).

Возникает закономерный **вопрос об определении погрешности косвенного измерения** в этой ситуации. Перед тем как дать общий рецепт, рассмотрим достаточно простой **частный случай** такого определения.

Пусть стоит задача измерить объем куба. Самый простой способ решения задачи связан с измерением L – длины ребра куба. После определения длины ребра объем куба рассчитывается по формуле

$$V = L^3.$$

Если измерение L производилось однократно с помощью линейки, то **результат** такого **прямого измерения** представляется как

$$L \pm \delta L,$$

где L – значение длины ребра, полученное в процессе однократного измерения; δL – погрешность прямого измерения, равная погрешности линейки.

Логично потребовать, чтобы **результат косвенного измерения** объема имел вид

$$V \pm \delta V.$$

Значение объема V рассчитывается по формуле, связывающей его со значением длины ребра L. Остается определить величину δV – погрешность для косвенного измерения объема. Очевидно, эта величина каким-то образом должна быть связана с величиной δL. Чтобы обнаружить эту связь, нам придется снова обратиться к процедуре многократного измерения, но результат, который мы при этом получим, будет справедлив и для однократных измерений.

Пусть в процессе многократных измерений мы получили для одного и того же куба множество значений величины L, измеренной прямым способом, и соответствующее множество величины V, рассчитанной по формуле. Каждому значению L_i первого множества соответствует вполне определенное значение V_i второго множества. На рис. В3 показан график зависимости $V = L^3$, на котором изображены точки, соответствующие результатам многократных измерений, выполненных для одного и того же куба (разброс значений очень сильно преувеличен). На оси L выделен интервал ΔL, характеризующий разброс значений длины ребра, полученный в процессе многократных прямых измерений. На оси V выделен соответствующий интервал ΔV, характеризующий разброс значений объема, полученный в процессе вычислений. Эти интервалы определяют погрешности измерений величин L и V. Будем считать, что ΔL и ΔV – достаточно малые величины по сравнению со значениями L и V. Тогда их очень просто можно связать между собой. Из треугольника (рис. В3) следует

$$\Delta V = \mathrm{tg}(\alpha)\,\Delta L = \frac{\partial V}{\partial L}\,\Delta L.$$

Очевидно, для однократного измерения роль ΔL играет погрешность линейки δL, а роль ΔV – интересующая нас величина δV. Поэтому в случае однократного измерения получаем

$$\delta V = \mathrm{tg}(\alpha)\,\delta L = \frac{\partial V}{\partial L}\,\delta L\ ,$$

где значение производной $\dfrac{\partial V}{\partial L} = 3L^2$ определяется при значении L, полученном в результате однократного прямого измерения.

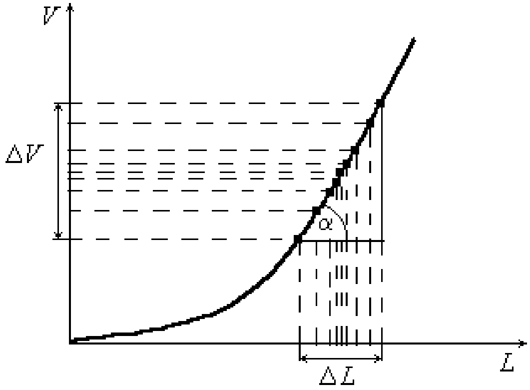

Рис. В3. Экспериментальные точки на графике зависимости объема куба от длины его ребра (разброс значений сильно преувеличен)

Мы получили связь погрешностей прямого и косвенного измерений для частного случая. **Обобщим результат на произвольную ситуацию**. Пусть величина y определяется из косвенных измерений (см. п. В1) и является функцией нескольких независимых величин (независимых переменных), которые в свою очередь измерены либо прямо, либо косвенно. Такими «переменными» могут быть, в частности, и константы, значения которых рассчитываются и используются при вычислениях с определенной точностью, следовательно, сами константы так же, как и другие величины, характеризуются погрешностью.

Независимые величины обозначим $x_1, ..., x_n$, а соответствующие им погрешности – $\delta x_1, ..., \delta x_n$. Явный вид функции $y = f(x_1, ..., x_n)$ должен быть известен. Будем считать, что каждая величина x_i вносит свой независимый вклад в погрешность величины y. В таком случае погрешность δy вычисляется следующим образом:

$$\delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \right)^2} . \qquad (B.7)$$

В качестве примера рассмотрим определение погрешности для косвенного измерения скорости. Пусть с помощью рулетки мы произвели однократное измерение пройденного телом расстояния x в метрах, а с помощью секундомера – затраченное на это время t в секундах.

Погрешность δx в этом случае представляет собой приборную погрешность линейки и является известной величиной. Погрешность δt – приборная погрешность секундомера. Значение скорости рассчитывается по формуле $v = x/t$, поэтому скорость будет функцией двух величин. В соответствии с общей формулой (В7) рассчитываем погрешность скорости

$$\delta v = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{t}\right)^2 + \left(\frac{x\,\delta t}{t^2}\right)^2}\,. \qquad \text{(В8)}$$

Результаты однократных измерений всех трех величин теперь могут быть представлены в стандартной форме (без указания количества измерений и величины доверительной вероятности):

• прямые измерения

$$(x \pm \delta x)\ \text{м},$$

$$(t \pm \delta t)\ \text{с};$$

• косвенное измерение

$$(v \pm \delta v)\ (\text{м/с}).$$

Величины δx и δv представляют собой приборные погрешности линейки и секундомера, а величина δv оказывается связанной с ними определенным соотношением (В8).

Формулу (В7) можно использовать для оценки косвенного измерения и в том случае, если проводились не однократные, а многократные измерения независимых величин $x_1, \ldots, x_n$ с определением их доверительных погрешностей согласно п. В2 [см. формулу (В5)]. При этом в формулу (В7) подставляются рассчитанные значения доверительных погрешностей. Однако величина полученной погрешности косвенного измерения в этом случае может и не совпадать с ее доверительной погрешностью, рассчитанной в соответствии с п. В2.

В5. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШОСТЬ

Величина доверительной погрешности сама по себе не дает информации о точности измерения, если ее не сравнивать с измеренным значением физической величины. По этой причине наряду с доверительной погрешностью часто используют относительную погрешность, определяемую как отношение доверительной погрешности к среднему значению измеряемой величины (или к однократно измеренному значению). Относительную погрешность выражают в долях единицы или в процентах. Значение величины относительной погрешности позволяет оценить точность измерений и сравнить точность измерений различными методами.

Кроме того, при косвенных измерениях математическое выражение для расчета относительной погрешности во многих случаях оказывается проще, чем для абсолютной погрешности.

Пусть величина $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ определяется из косвенных измерений и имеет вид

$$y = A \cdot x_1^a \cdot x_2^b \cdots x_n^z,$$

где $A = \text{const}$, а погрешности δx_1, ..., δx_n заранее найдены.

Легко показать, что для такого вида функции относительная погрешность вычисляется по формуле

$$\frac{\delta y}{y} = \sqrt{\left(a\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(b\frac{\delta x_2}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(z\frac{\delta x_n}{x_n}\right)^2}. \tag{B9}$$

Рекомендуется для уменьшения объема вычислений вначале найти по этой формуле относительную погрешность, а затем, умножив ее на значение величины y, получить абсолютную погрешность.

В6. ОФОРМЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При оформлении результатов измерений необходимо придерживаться нескольких простых общепринятых правил. Это сделает ваши записи наглядными и понятными.

1. Запись результата измерения какой-либо величины требует предварительного округления значений самой величины и ее погрешности. Сначала **округляется погрешность до первой значащей цифры** (расчет погрешности должен быть произведен с точностью до двух значащих цифр). При этом окажется, что первая значащая цифра будет соответствовать определенному порядку или разряду (например, десяткам, единицам, десятым долям и т. п.). После этого **округляются значения измеренной величины до того же самого порядка (разряда)**. Например, если погрешность составляет единицы, то значение измеренной величины округляется до единиц.

Примеры правильных записей результатов:

$$L = (125 \pm 3)\text{ м};$$

$$t = (0{,}067 \pm 0{,}002)\ \text{с};$$

$$g = (9{,}83 \pm 0{,}01)\ \text{м/с}^2 (n = 10,\ P = 90\ \%).$$

2. Если значения измеренной величины и ее погрешности очень малы или велики, то используется показательная форма записи, в которой за скобки выносится общий десятичный множитель, например:

$$e = (1{,}6 \pm 0{,}5)\ 10^{-19}\ \text{Кл},$$

$$m = (9 \pm 1)\ 10^{-31}\ \text{кг}.$$

3. Результаты большого количества измерений принято заносить в таблицы. В этом случае информация представляется наглядно и компактно. Предварительно **необходимо продумать структуру таблицы и последовательность расположения информации в ней**.

Таблицы могут быть горизонтального или вертикального исполнения. В первом случае значения одной и той же величины располагаются в строке, во втором – в столбце. При большом количестве измерений чаще используется второй вариант. В начале каждой строки (столбца) пишется название или символ (обозначение) соответствующей величины и указывается единица измерения. Если измеряемые величины очень малы или велики, то используется показательная форма записи чисел. В этом случае десятичный множитель не ставится у каждого значения величины, а выносится в начало строки или столбца и записывается перед единицей измерения (табл. В2).

Таблица В2

Пример представления результатов обработки многократного измерения величины *x*

i	x_i, 10^{-3} м	$(x_i - \overline{x})$, 10^{-3} м	$(x_i - \overline{x})^2$, 10^{-6} м^2
1	2,1	0,16	0,0256
2	2,2	0,26	0,0676
3	1,8	–0,14	0,0196
4	1,7	–0,24	0,0578
5	1,9	–0,04	0,0016
$x = (1{,}9 \pm 0{,}2)10^{-3}$ м ($n = 5$, $P = 90$ %)			

Результаты измерений необходимо сразу заносить в заранее подготовленную таблицу.

4. Функциональная зависимость одной величины от другой должна быть изображена в виде графика. График – самый наглядный способ представления информации в этом случае. Для более надежного построения графиков следует пользоваться миллиметровой бумагой. По горизонтальной оси графика принято откладывать значения независимой переменной. По вертикальной – значения функции этой переменной. Прежде чем строить график, определите, что́ в анализируемой ситуации является причиной (ей соответствуют значения независимой переменной), а что – следствием (ей соответствуют значения функции).

В качестве примера на рис. В4 показана зависимость силы тока проводящего элемента от приложенного к нему напряжения. **На каждую ось графика через равные интервалы наносятся масштабные метки.** Масштаб для каждой оси выбирается индивидуально. Сначала необходимо определить диапазон изменения значений представляемых величин. Масштаб выбирается так, чтобы экспериментальные точки максимально распределились вдоль каждой из осей. При этом, в частности, необходимо решить, важны ли для представления результатов нулевые значения аргумента и функции. Последнее определит значения масштабных меток начала координат (если нули важны, то это будут нулевые метки, если нет – то они не обязательны).

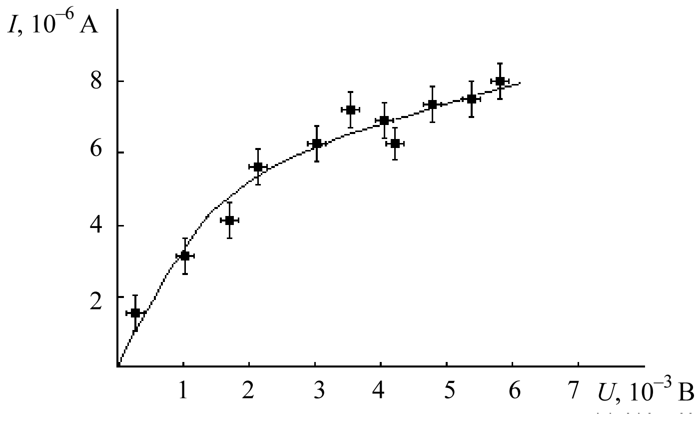

Рис. В4. Зависимость силы тока проводящего элемента от напряжения

Около координатных осей указывают символы (обозначения) величин и единицы их измерений. При необходимости применения показательной формы записи у единиц измерений ставятся десятичные множители.

Экспериментальные точки наносятся только после того, как поставлены масштабные метки и указаны обозначения осей с единицами измерений. **Численные значения величин, соответствующие экспериментальным точкам, на осях не указывают**. Сами точки должны быть достаточно выделяющимися.

Если на одних и тех же осях представлено несколько экспериментальных графиков, то для обозначения разных наборов точек рационально использовать разные символьные изображения, например: ●, ○, ■, □, ▲, Δ. **При необходимости кроме самих значений величин на графиках указывают соответствующие им погрешности**. Это делается с помощью горизонтальных и вертикальных черточек, пересекающих экспериментальные точки (см. рис. В4). Длина каждой черточки определяется погрешностью измерения соответствующей величины.

По массиву экспериментальных точек проводят «наилучшую» плавную кривую. Не должно быть простого соединения точек ломаной линией. Эти изломы, как правило, не соответствуют действительности.

Существуют специальные математические методы определения «наилучшей» кривой. Вам придется это делать «на глазок», используя три простых принципа:

1) ожидаемая зависимость в лабораторном практикуме чаще всего известна, следовательно, понятно, кривую какого вида надо проводить;

2) кривая должна быть плавной, без изломов (если это не какой-либо специальный случай);

3) кривая должна проходить по массиву экспериментальных точек так, чтобы отклонения разных точек от кривой наилучшим образом компенсировали друг друга (например, точкам, лежащим выше кривой, должны соответствовать точки, лежащие ниже).

Если предварительно рассчитана теоретическая зависимость, то график этой зависимости имеет смысл представить в тех же осях, что и график экспериментальной. Это позволит провести сравнительный анализ ожидаемых и полученных результатов.

В7. ПРОТОКОЛ

Для оформления результатов лабораторных измерений разработана **единая универсальная форма – протокол**. Он позволяет представить результаты максимально компактно и информативно. Последовательность пунктов протокола отражает ход действий экспериментатора начиная с постановки задачи: формулировка цели конкретной работы, анализ полученных результатов и выводы, вытекающие из этого анализа. **Каждый пункт протокола одинаково важен**.

Протокол выполняется на одной стороне листа форматом А4. Таблицы, рисунки и графики выполняются карандашом, записи – авторучкой. Оформление титульного листа протокола приведено на рис. В5).

Ниже приведены основные сведения, касающиеся пунктов протокола.

1. Цель работы

В пункте формулируется цель конкретной лабораторной работы.

2. Таблица измерительных приборов

В таблице приводятся основные сведения об **используемых измерительных приборах.**

Название	Фабричный номер	Система	Класс точности	Предел измерений	Цена деления	Доверительная погрешность

Примечание: если фабричный номер на приборе не указан, то указывается номер лабораторного стола, за которым выполняется работа; «система» и «класс точности» указываются только для электроизмерительных приборов.

3. Исходные данные и рабочие формулы

В пункте приводятся данные из паспорта экспериментальной установки, константы, необходимые для вычислений, и **формулы, по которым будут вычисляться величины и их погрешности в данной лабораторной работе**.

4. Электрическая схема установки

Этот пункт приводится только в том случае, если измерения связаны с электрической схемой.

Министерство образования и науки Российской Федерации

Новосибирский государственный технический
университет

Лабораторная работа №

Название лабораторной работы

Факультет: Преподаватель:

Группа:

Студенты:

Новосибирск
2013

Рис. В5. Титульный лист протокола

5. Таблица измерений

В пункте приводится таблица, в которую заносятся результаты прямых и косвенных измерений.

6. Расчет

В пункте приводится **по одному примеру расчета каждой величины и ее погрешности**. Для этого **показывается подстановка конкретных значений в рабочую формулу и записывается полученный при этом результат вычислений с указанием единиц измерения.**

7. Результаты

Приводятся окончательные результаты измерений: полученное среднее значение с найденной погрешностью, таблица результатов или график.

8. Вывод

В пункте приводится вывод, полученный в процессе анализа результатов эксперимента. Вывод должен касаться **обнаруженных в процессе опыта явлений и закономерностей**, сравнения теоретических предсказаний с экспериментальными данными, характерных значений полученных величин и их погрешностей, возможных факторов, определяющих систематические погрешности измерений.

Вот некоторые примеры выводов, сделанных по результатам опытов:

«*В среде, полностью лишенной всякого сопротивления, все тела падали бы с одинаковой скоростью*». Г. Галилей

«*Если поток вектора индукции, пронизывающий замкнутый контур, меняется, то в контуре возникает электрический ток*». М. Фарадей

«*Вечная загадка мира – это его познаваемость.... Сам факт этой познаваемости представляется чудом*». А. Эйнштейн

«*Мы, не веря словам, проверили!*
И пусть загордится нация!
Да! Существует явление
Под гордым названьем «дифракция»».

Студенты НГТУ

9. Литература

Приводится список литературы, использованной в процессе подготовки и при выполнении лабораторной работы.

В8. ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРОТОКОЛУ

Как было сказано выше, протокол является формой представления результатов лабораторных измерений с их последующей математической обработкой.

Для ряда лабораторных работ требуется **до выполнения измерений** получить ожидаемые теоретические результаты. Это позволяет студентам, во-первых, лучше разобраться с тем кругом физических понятий и законов, которые будут изучаться в лабораторной работе, и, следовательно, осознанно проводить опыты; и, во-вторых, сравнив ожидаемые теоретические результаты с результатами, полученными в ходе эксперимента, сделать обоснованное заключение о применимости использованной теории.

Задание по теоретическому расчету студенты выполняют в процессе подготовки к лабораторной работе. Придя на занятие, студент обязан показать преподавателю полученные теоретические результаты вместе с заготовкой протокола. Это – необходимое условие допуска к выполнению экспериментов.

Одновременно с протоколом, содержащим результаты опытов, студент сдает теоретические результаты, оформленные как **приложение к протоколу.**

Обычно студенческая бригада, выполняющая лабораторную работу на одной установке, состоит из двух-трех человек. Рекомендуется каждому члену бригады присвоить один из номеров 1, 2, 3, распределив фамилии студентов по алфавиту. Каждый член бригады получает индивидуальное теоретическое задание в соответствии со своим номером, содержание которого приведено в описании лабораторной работы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 0

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Цель работы: на достаточно простом примере научиться проводить измерения физической величины, обрабатывать и представлять результаты прямых и косвенных измерений.

Объем цилиндра рассчитывается по формуле

$$V = \pi\, d^2\, h/4, \tag{0.1}$$

где d – диаметр основания и h – высота цилиндра.

Следовательно, объем тела цилиндрической формы можно определить из косвенного измерения, произведя прямые измерения диаметра и высоты.

ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Так как у реального цилиндрического тела значения d и h, измеренные в разных местах и направлениях, могут оказаться разными, то **необходимо выполнить многократные измерения диаметра и высоты для нескольких сечений цилиндра**. Если результаты многократных измерений получатся разными, то следует произвести их статистическую обработку в соответствии с п. В2. Предстоит определить средние значения d и h, среднеквадратичные отклонения S_d и S_h, доверительные погрешности Δ_d и Δ_h (доверительную вероятность надо выбирать близкую к 100 %).

В качестве измерительного прибора в данной работе вы будете использовать линейку или штангенциркуль. Прибор позволит вам измерить диаметр и высоту цилиндра. Приборная погрешность δ линейки и штангенциркуля определяется ценой деления. Приступая к измерениям, вам необходимо найти цену деления измерительного прибора.

Доверительные погрешности Δ_d и Δ_h, полученные в результате статистической обработки, следует сравнить с приборной погрешностью δ. Если, например, большим оказывается значение Δ_d, то результат многократных прямых измерений диаметра представляется в виде

$$d \pm \Delta_d \,(\; n = \ldots, P = \ldots). \qquad (0.2)$$

Если выполняется условие $\delta > \Delta_d$, то результат представляется в виде

$$d \pm \delta.$$

В последнем случае считается, что все имеющиеся случайные погрешности перекрываются погрешностью прибора. Именно в такой ситуации можно ограничиваться однократным измерением.

ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Возможны два варианта обработки и представления результатов косвенного измерения объема.

1. По результатам многократных измерений d и h проводятся многократные вычисления значений объема V. После этого производятся статистическая обработка и представление результатов в соответствии с п. В2 в форме

$$V \pm \Delta_V \;(n = \ldots, P = \ldots).$$

2. Оценивается среднее значение V путем подстановки средних значений d и h в формулу для вычисления объема. Оценка погрешности Δ_V производится в соответствии с формулами (В7) или (В9), учитывающими связь погрешностей прямых и косвенных измерений. Результат представляется в форме

$$V \pm \Delta_V\,.$$

Строго говоря, варианты в общем случае дают разные результаты как для средних значений, так и для погрешностей величин, определяемых с помощью косвенных измерений. Но если погрешности существенно меньше самих величин, то результаты оказываются достаточно близкими.

На практике чаще используется второй вариант, позволяющий сэкономить время на многократных вычислениях, а в том случае, когда прямые измерения являются однократными, это единственно возможный подход. Именно **второй вариант представления результатов косвенных измерений вам предстоит использовать в этой и в последующих лабораторных работах**.

ЗАДАНИЕ К РАБОТЕ

1. Используя формулы (В7) или (В9) и (0.1), получите формулу для определения погрешности Δ_V. Учтите, что при вычислении объема по формуле (0.1) число π округляется и, следовательно, характеризуется некоторой погрешностью округления.

2. Определите цену деления и приборную погрешность измерительного прибора.

3. Подготовьте протокол:

- оформите титульный лист;
- укажите цель работы в п. 1 протокола;
- начертите и заполните таблицу измерительных приборов в п. 2;
- запишите рабочие формулы в п. 3 (формула для определения средних значений величин, формула для определения среднеквадратичного отклонения, формула для определения доверительной погрешности, формула для определения объема, выведенная вами формула для определения Δ_V – погрешности косвенного измерения объема);
- п. 4 отсутствует;
- в п. 5 начертите две таблицы (см. табл. В2) для обработки результатов многократных ($n = 5$) измерений диаметра и высоты цилиндра.

4. Пятикратно измерьте диаметр и высоту цилиндра в разных сечениях тела. Результаты измерений занесите в таблицы.

5. Произведите статистическую обработку результатов измерений. Определите средние значения диаметра и высоты, а также соответствующие им доверительные погрешности. Сравните доверительные погрешности с приборной погрешностью измерительного прибора.

6. Приведите оценку среднего значения объема цилиндра и соответствующей ему погрешности.

7. В п. 6 протокола продемонстрируйте, как проводились расчеты средних величин и их погрешностей.

8. В п. 7 протокола приведите окончательные результаты прямых и косвенных измерений в стандартной форме.

9. Проанализируйте полученные результаты, сделайте вывод и запишите его в п. 8 протокола.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агекян Т.А.* Основы теории ошибок для астрономов и физиков. – М: Наука, 1972.
2. *Кассандрова О.Н., Лебедев В.В.* Обработка результатов измерений. – М: Наука, 1970.
3. *Сквайрс Дж*. Практическая физика / пер. с англ. – М.: Мир, 1971.
4. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок / пер. с англ. – М.: Мир, 1985.
5. *Худсон Д.* Статистика для физиков / пер. с англ. – М.: Мир, 1967.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: с помощью баллистического маятника найти скорость пуль с различными массами. Рабочую формулу для экспериментального определения скорости пули и теоретическую зависимость скорости пули от ее массы получить исходя из законов сохранения импульса и энергии.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Баллистический маятник представляет собой массивный цилиндр M, заполненный пластилином. В цилиндр в горизонтальном направлении производят выстрел пулей массой m из пружинного пистолета P, неподвижно закрепленного вблизи маятника (рис. 1.1). Пуля проникает в пластилин, застревает в нем и дальше продолжает двигаться вместе с маятником (абсолютно неупругий удар). Маятник закреплен так, чтобы в процессе отклонения он совершал поступательное движение. Максимальное отклонение маятника от его положения равновесия фиксируется механизмом N.

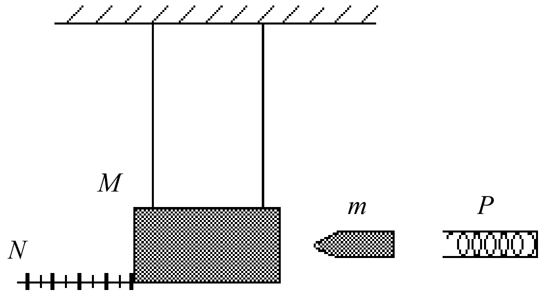

Рис. 1.1

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА, ВЫВОД ФОРМУЛ

1. *Вывод формулы зависимости скорости пули от ее массы*

Выбрав пулю массой m_1, зарядим пистолет, сжав его пружину. При этом в пружине будет запасена потенциальная энергия

$$E_{\text{пруж}} = \frac{kb^2}{2}, \qquad (1.1)$$

где k – коэффициент упругости пружины; b – деформация пружины.

Предположим, что вся энергия сжатой пружины при выстреле полностью превращается в кинетическую энергию пули. Это означает, что мы пренебрегаем потерями энергии на преодоление трения между пулей и стволом пистолета и на сообщение кинетической энергии самой пружине. Учтем, кроме того, что геометрические размеры всех пуль одинаковы, а значит, одинакова деформация пружины для любой пули и одинакова запасаемая пружиной потенциальная энергия. Тогда из закона сохранения механической энергии следует, что пули с различными массами m_i, вылетая из пружинного пистолета, должны иметь одинаковые кинетические энергии:

$$\frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{kb^2}{2}, \qquad (1.2)$$

где v_i – скорость i-й пули после выстрела.

Из (1.2) получаем зависимость скорости пули после выстрела от ее массы:

$$v_i = b\sqrt{\frac{k}{m_i}}\,. \tag{1.3}$$

Поскольку величины b и k для всех пуль одинаковы, график ожидаемой зависимости скорости пули v от $\sqrt{\frac{1}{m}}$ должен согласно формуле (1.3) представлять собой прямую линию, проходящую через начало координат.

2. *Вывод рабочей формулы*

Пролетев небольшое расстояние между пистолетом и маятником, пуля входит в пластилин, заполняющий цилиндр, и за счет вязкого трения быстро теряет скорость. При этом часть механической энергии пули расходуется на неупругую деформацию и превращается во внутреннюю энергию пластилина и пули, т. е. пластилин и пуля нагреваются. Такой удар пули и маятника, в результате которого они начинают двигаться как единое целое, называется абсолютно неупругим. Механическая энергия в процессе такого удара не сохраняется (убывает).

Процесс удара – кратковременный. Если масса маятника достаточно велика по сравнению с массой пули ($M >> m$), то за время удара он в силу своей инерционности не успевает выйти из положения равновесия. Это позволяет считать систему маятник–пуля в момент удара замкнутой в горизонтальном направлении, так как сила тяжести и сила натяжения подвеса направлены вертикально при вертикальном положении маятника. Для замкнутой системы можно применить закон сохранения импульса

$$mv = (M + m)u\,, \tag{1.4}$$

где v – скорость пули до удара (при этом скорость маятника равна нулю); u – скорость, приобретенная системой маятник–пуля сразу после удара.

Маятник вместе с пулей, получив за счет неупругого удара импульс, отклоняется от положения равновесия на угол α. В процессе отклонения на маятник действуют сила тяжести (вниз) и сила упругости подвеса (перпендикулярно направлению мгновенной скорости маятника). Если пренебречь потерями энергии на трение в подвесе и на сопротивление воздуха, то работу при отклонении маятника совершает только гравитационная сила. Это позволяет воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = (M+m)gh\,, \tag{1.5}$$

где h – наибольшая высота, на которую поднимается маятник (рис. 1.2). Слева в формуле (1.5) стоит кинетическая энергия при поступательном движении маятника сразу после удара (в этой точке потенциальную энергию принимаем равной нулю), а справа – потенциальная энергия системы в момент ее остановки на высоте h.

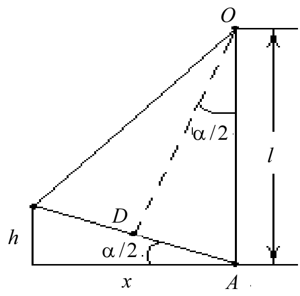

Рис. 1.2

Выразим высоту h через соответствующее горизонтальное смещение маятника x, которое удобнее измерять. Предположим, что угол отклонения маятника от положения равновесия α мал. Из рис. 1.2 видно, что

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{x} = \frac{AD}{DO} \approx \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AD}{AO} \approx \frac{x/2}{l} = \frac{x}{2l}\,, \tag{1.6}$$

где l – длина нити подвеса.

Из (1.6) получаем

$$h = \frac{x^2}{2l}\,. \tag{1.7}$$

Уравнения (1.4), (1.5) и (1.7) образуют систему, решая которую, получим скорость пули v перед ударом:

$$v = \frac{(M+m)}{m}x\sqrt{\frac{g}{l}}\,. \tag{1.8}$$

По выражению (1.8), выполнив прямые измерения смещения маятника x и зная значения остальных величин, входящих в эту рабочую формулу, определим скорость пули v путем косвенных измерений. Измерив скорости v_i для пуль с разными массами m_i, можно, следовательно, убедиться в справедливости теоретической зависимости (1.3).

3. *Вывод формулы для определения погрешности косвенных измерений скорости* v

В данной работе приведен пример получения формул для оценки истинного значения скорости полета пули и погрешности этой оценки. Студентам, выполняющим эту лабораторную работу, рекомендуется получить формулы самостоятельно, а затем сравнить их с формулами, приведенными ниже.

Методика оценки истинных значений и погрешности при прямых и косвенных измерениях изложена во введении.

Проведя прямые многократные измерения смещения маятника x для одной и той же пули (см. задание к работе), можно (см. введение) оценить истинное значение $\bar{x}$ и доверительную погрешность Δx этой величины, записав результат в виде $(\bar{x} \pm \Delta x)$. Истинные значения остальных аргументов рабочей формулы (1.8) и их доверительные погрешности определены заранее и указаны в таблице исходных данных, помещенной около лабораторной установки. Подставляя истинные значения аргументов в рабочую формулу (1.8), получаем оценку истинного значения скорости пули:

$$\bar{v} = \frac{(\bar{M} + \bar{m})}{\bar{m}} \bar{x} \sqrt{\frac{\bar{g}}{\bar{l}}}, \tag{1.9}$$

где черта означает «оценка истинного значения».

Теперь (см. введение) можно оценить доверительную абсолютную погрешность этой величины. В формуле (1.8) пять величин: M, m, x, g, l, каждая из которых определена с некоторой погрешностью. Следовательно, формула для получения абсолютной погрешности скорости пули имеет вид

$$\Delta v = \left\{ \begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial v}{\partial M}\right)\Delta M\right]^2 + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial m}\right)\Delta m\right]^2 + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x\right]^2 + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial v}{\partial g}\right)\Delta g\right]^2 + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial l}\right)\Delta l\right]^2 \end{aligned} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

Пользуясь формулой (1.8), вычислим частные производные от скорости по каждому из аргументов. В результате получим следующее выражение для определения абсолютной погрешности скорости:

$$\Delta v = \left\{ \begin{gathered} \left[\left(\frac{1}{\bar{m}}\bar{x}\sqrt{\frac{\bar{g}}{\bar{l}}}\right)\Delta M\right]^2 + \left[\left(-\frac{\bar{M}}{\bar{m}^2}\bar{x}\sqrt{\frac{\bar{g}}{\bar{l}}}\right)\Delta m\right]^2 + \\ + \left[\left(\frac{\bar{m}+\bar{M}}{\bar{m}}\sqrt{\frac{\bar{g}}{\bar{l}}}\right)\Delta x\right]^2 + \left[\left(\frac{\bar{m}+\bar{M}}{\bar{m}}\bar{x}\frac{1}{2\sqrt{\bar{g}\bar{l}}}\right)\Delta g\right]^2 + \\ + \left[\left(-\frac{\bar{m}+\bar{M}}{\bar{m}}\bar{x}\frac{\sqrt{\bar{g}}}{2(\bar{l})^{3/2}}\right)\Delta l\right]^2 \end{gathered} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

Формула для вычисления относительной погрешности скорости пули имеет более простой вид:

$$\frac{\Delta_v}{v} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta l}{l}\right)^2}, \quad (1.12)$$

при этом предполагается, что $M + m \approx M$.

В формулы (1.11) и (1.12) входит пять квадратичных членов, каждый из которых определяет вклад погрешности одного из пяти аргументов формулы (1.8) в погрешность величины $\bar{v}$. Прежде чем применять эти формулы, следует отдельно вычислить (приближенно) каждый из пяти квадратичных членов, чтобы сравнить их друг с другом. Сравнение покажет, точность определения каких аргументов мало влияет на погрешность скорости. Эти члены из формул (1.11) или (1.12) надо исключить и только после этого, применив (1.11) или (1.12), получить оценку абсолютной или относительной погрешности скорости. Если применяется формула (1.12), то затем рассчитывается абсолютная погрешность (см. введение (В.9)). Численные результаты, полученные с помощью формул (1.9), (1.11) или (1.12), записываются в виде (м/с)

$$(\bar{v} \pm \Delta v)\,. \quad (1.13)$$

Укажите рядом с этим результатом величину относительной погрешности, число прямых измерений, при которых получен этот результат, а также значение выбранной доверительной вероятности.

ЗАДАНИЕ К РАБОТЕ

1. Сделайте заготовку протокола к лабораторной работе.

2. Получите допуск к выполнению лабораторной работы у преподавателя.

3. Соблюдая правила техники безопасности, зарядите пружинный пистолет пулей с наибольшей массой.

4. Подготовьте устройство N к измерению горизонтального смещения маятника. Запишите численное значение начальной координаты $x_{\text{нач}}$ маятника по линейке отсчетного устройства N.

5. Произведите первый выстрел пулей с наибольшей массой, нажав спусковую кнопку пистолета. Запишите численное значение конечной координаты $x_{\text{кон}}$, определив его по линейке отсчетного устройства N. Вычислите смещение маятника при первом опыте:

$$x = \left| x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} \right|.$$

Запишите величину x в таблицу измерений.

6. Повторите опыт с этой же пулей пять раз, чтобы в дальнейшем провести статистическую обработку многократных прямых измерений смещения механической системы маятник–пуля.

7. Однократно измерьте смещение системы маятник–пуля для пуль с другой массой (пп. 3–5).

8. Проведите статистическую обработку прямых многократных измерений смещения системы маятник–пуля для пули с наибольшей массой согласно методике, описанной выше (см. введение). Результаты внесите в таблицу измерений.

9. По формуле (1.9) получите оценку истинного значения скорости пули $\overline{v}$, для которой были выполнены многократные измерения. Результат внесите в таблицу измерений. (Рекомендуется для получения скорости пули использовать результаты индивидуального задания для членов бригады, выполняющих лабораторную работу на одной установке.)

10. Получите оценку абсолютной погрешности косвенных измерений скорости этой пули [формула (1.11) или (1.12)]. Прежде чем при-

менять формулы, следует отдельно вычислить (приближенно) каждый из пяти входящих в них квадратичных членов, чтобы сравнить друг с другом. Сравнение покажет, от каких аргументов больше всего зависит величина погрешности Δv, а какие члены формул (1.11) или (1.12) можно не учитывать. Результат внесите в таблицу измерений.

11. Вычислите скорости пуль с другой массой [формула (1.9)]. Погрешность для этих однократно проведенных опытов оценивать не надо. (При этом также рекомендуется использовать результаты индивидуального задания.)

12. Учитывая, что для проведенных опытов должна выполняться зависимость (1.3), постройте оси графика этой зависимости в координатах v, $\sqrt{\frac{1}{m}}$ для диапазона численных значений, соответствующего используемым в опытах массам пуль и полученным для них скоростям.

13. Нанесите на этот график точки, соответствующие полученным в опытах значениям скорости для каждой пули. Обратите внимание, лежат ли экспериментальные точки на одной прямой.

14. Укажите на этом графике для каждой экспериментальной точки диапазон, внутри которого лежит истинное значение скорости, т. е. графически укажите найденную абсолютную погрешность. При этом считайте, что погрешность, найденная для скорости только одной пули, такая же для скоростей остальных пуль.

15. Сделайте выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте цель данной лабораторной работы.
2. Какой закон сохранения позволяет получить зависимость скорости пули, выпущенной из пружинного пистолета, от ее массы? Какие предположения при этом делаются?
3. Выполняется ли закон сохранения механической энергии системы маятник–пуля при ударе?
4. В какой момент опыта выполняется закон сохранения импульса для системы маятник–пуля?
5. В какие периоды опыта можно использовать закон сохранения механической энергии для системы маятник–пуля?
6. Как рассчитать долю кинетической энергии пули, которая расходуется на неупругую деформацию при ударе?

7. Запишите систему уравнений для получения скорости пули через горизонтальное смещение маятника после удара. Решив систему, получите рабочую формулу.

8. Где при выводе рабочей формулы используется тот факт, что маятник движется поступательно?

9. Как изменится смещение маятника, если изменить его массу?

10. Как изменится смещение маятника, если изменить длину подвеса?

11. Какие величины в опыте определяются путем прямых, а какие – путем косвенных измерений?

12. Как оценить истинные значения при прямых и как – при косвенных измерениях?

13. Как оценить доверительную погрешность при прямых и как – при косвенных измерениях? Какой смысл этой погрешности, почему результат измерений записывают в виде $(\overline{v} \pm \Delta v)$?

14. Какой смысл строить график зависимости скорости пули от ее массы в координатах v, $\sqrt{\dfrac{1}{m}}$?

Индивидуальные задания для членов бригады, выполняющих лабораторную работу на одной установке

Номер члена бригады	Индивидуальное задание
1	Постройте график зависимости скорости пули v перед ударом от горизонтального смещения маятника x для пули массой m_1 [формула (1.8)]. Рекомендуемый диапазон изменения величины x от 0 до 10 см. Численные значения массы маятника M, массы пули m_1, длины подвеса l возьмите в таблице исходных данных, помещенной около лабораторной установки, на которой вам предстоит выполнять опыты
2	Выполните задание, аналогичное заданию для первого номера, но для пули массой m_2
3	Выполните задание, аналогичное заданию для первого номера, но для пули массой m_3

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Цели работы: 1) определить экспериментальным путем момент инерции маятника с учетом действия тормозящего момента сил сопротивления; 2) исследовать экспериментальную зависимость момента инерции маятника от расстояния грузов, закрепленных на стержнях маятника, до оси вращения и сравнить с теоретической зависимостью; 3) рассчитать момент инерции маятника Обербека на основе уравнения динамики поступательного движения груза, прикрепленного к нити, наматываемой на шкив маятника, и уравнения вращательного движения маятника.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Маятник Обербека представляет собой крестовину, состоящую из четырех стержней с нанесенными на них делениями, прикрепленных к барабану с осью (рис. 3.1). На стержни надеваются одинаковые грузы массой m_1, которые могут быть закреплены на расстоянии r от оси вращения. На барабане имеется два шкива с различными диаметрами D_1 и D_2. На шкив наматывается нить, к свободному концу которой прикрепляется груз массой m. Под действием груза нить разматывается и приводит маятник во вращательное движение, которое предполагается равноускоренным. Время движения груза t измеряется электронным секундомером, включение которого производится кнопкой «Пуск», а остановка происходит по сигналу фотодатчика. Груз опускается на расстояние x, измеряемое вертикально закрепленной линейкой. Установка имеет электромеханическое тормозное устройство, управление которым осуществляется по сигналу фотодатчика.

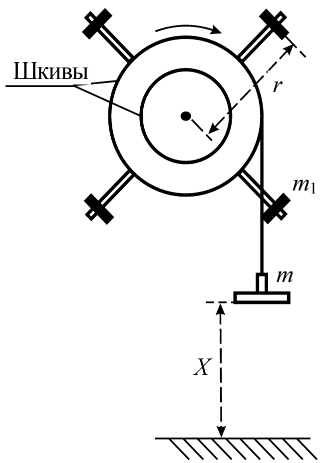

Рис. 3.1

РАСЧЕТ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА И МОМЕНТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Для расчета движения механической системы маятник–груз применим уравнение динамики поступательного движения для груза, закрепленного на нити, и уравнение динамики вращательного движения для маятника.

Груз массой m движется с ускорением $\vec{a}$ под действием результирующей сил тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{F}_{1н}$ (рис. 3.2). Запишем для груза второй закон Ньютона в проекции на направление движения:

$$ma = mg - F_{1н} . \qquad (3.1)$$

Сила натяжения передается нитью от груза к шкиву вращающегося маятника. Если предположить, что нить невесомая, то на шкив маятника действует сила $\vec{F}_{2н}$, равная по величине $\vec{F}_{1н}$ и противоположная ей по направлению $\left(\text{следствие третьего закона Ньютона: } \left|\bar{F}_{1н}\right| = \left|\bar{F}_{2н}\right|\right)$. Сила натяжения создает вращательный момент $\vec{M}_0$ относительно горизонтальной оси O, направленный вдоль этой оси «от нас» и приводящий в движение маятник Обербека. Величина этого момента равна $M_0 = F_{2н}R = F_{1н}R$, где R – радиус шкива, на который намотана нить; $R = \dfrac{D}{2}$, где D – диаметр шкива.

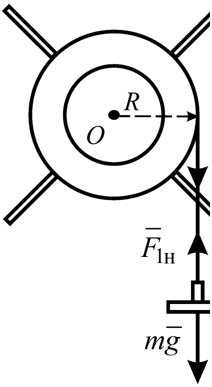

Рис. 3.2

Момент силы сопротивления относительно оси вращения $\vec{M}_{сопр}$ направлен «к нам», т. е. в противоположную по отношению к вращательному моменту сторону.

Запишем для маятника основной закон динамики вращательного движения

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon} ,$$

где $\vec{M}$ – результирующий момент сил; J – момент инерции маятника; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение.

В скалярной форме это уравнение имеет вид (записаны проекции векторов моментов сил и углового ускорения на ось вращения *O*, направление которой выбрано «от нас»)

$$F_{1н}R - M_{сопр} = J\varepsilon\,. \tag{3.2}$$

Используя кинематическую связь линейного и углового ускорения $a = \varepsilon R$, а также уравнение движения груза при нулевой начальной скорости $x = \dfrac{at^2}{2}$, выразим ε через измеряемые величины x и t:

$$\varepsilon = \frac{2x}{Rt^2}\,. \tag{3.3}$$

Решим систему уравнений (3.1) и (3.2), для чего умножим (3.1) на R и прибавим к (3.2):

$$mgR - M_{сопр} = m\varepsilon R^2 + J\varepsilon\,.$$

Выражаем момент инерции маятника Обербека:

$$J = \frac{mgR - M_{сопр}}{\varepsilon} - mR^2\,. \tag{3.4}$$

Все величины, кроме $M_{сопр}$, входящие в это уравнение, известны. Поставим задачу экспериментального определения $M_{сопр}$.

Пусть J – момент инерции маятника Обербека без грузов. Из (3.4) следует, что

$$\varepsilon = \frac{mgR - M_{сопр}}{J + mR^2}\,. \tag{3.5}$$

В условиях эксперимента $mR^2 << J$, что позволяет считать зависимость $\varepsilon(m)$ линейной.

Эту зависимость можно использовать для экспериментальной оценки величины $M_{сопр}$. Действительно, если полученную экспериментально зависимость $\varepsilon(m)$ экстраполировать до пересечения с осью абсцисс, т. е. до точки m_0 на этой оси, для которой выполняется [см. (3.5)] равенство $m_0 gR - M_{\text{сопр}} = 0$, то это позволит найти $M_{\text{сопр}}$ как

$$M_{\text{сопр}} = m_0 gR \, . \tag{3.6}$$

Для определения момента инерции маятника J воспользуемся (3.4), где величина $M_{\text{сопр}}$ предварительно получена из измерений ε(m) и формулы (3.6). Подставив выражение ε из (3.3) и $M_{\text{сопр}}$ из (3.6) в (3.4), получим рабочую формулу для определения момента инерции маятника:

$$J = \frac{\left(m - m_0\right) gR^2 t^2}{2x} - mR^2 \, .$$

Для используемого в работе маятника Обербека справедливо неравенство $\dfrac{gt^2}{2x} >> \dfrac{m}{m - m_0}$. Учитывая это, получаем

$$J = \frac{\left(m - m_0\right) gR^2 t^2}{2x} \, .$$

Для расчетов удобно представить момент инерции в виде

$$J = k\left(m - m_0\right) t^2 \, , \tag{3.7}$$

где $k = \dfrac{gD^2}{8x}$.

Величины коэффициентов k: k_1 и k_2 для соответствующих диаметров шкивов D_1 и D_2 можно заранее рассчитать с помощью таблицы исходных данных, помещенной около каждой лабораторной установки. После этого для определения момента инерции маятника необходимо измерить время t опускания груза массой m на расстояние x (3.7).

ЗАВИСИМОСТЬ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОТ РАССТОЯНИЯ ГРУЗОВ ДО ОСИ ВРАЩЕНИЯ

Момент инерции маятника Обербека может быть представлен как сумма моментов инерции барабана со стержнями (J_1) и моментов инерции четырех грузов массой m_1, закрепленных на расстояниях r от оси вращения ($4J_2$). Если размеры этих грузов малы по сравнению с r , то их можно считать материальными точками. Для материальной точки момент инерции равен $J_2 = m_1 r^2$. Тогда момент инерции маятника

$$J = J_1 + 4m_1 r^2 . \tag{3.8}$$

Эту зависимость момента инерции от расстояния грузов до оси вращения предполагается проверить, используя результаты опытов, полученные по формуле (3.7).

Значение m_0 можно взять из данных эксперимента для определения момента инерции маятника Обербека без грузов, считая, что момент сил сопротивления остается постоянным.

ЗАДАНИЕ К РАБОТЕ

1. Приступив к работе, снимите грузы m_1 со стержней, если они там находятся.
2. Заранее выберите отметку (например, от 30 до 50 см), от которой начнется движение груза m .
3. Вращая маятник рукой, намотайте нить на шкив большего диаметра. Следите, чтобы груз m достиг выбранного положения на высоте x (рис. 3.1).
4. Включите электронный секундомер.
5. Проведите первый опыт, используя в качестве груза, тянущего нить, только одну подставку массой $m_{под}$ без подгрузков. Предварительно нажатием кнопки «Режим» установите режим № 1 (светится индикатор «Реж. 1»). Затем нажмите кнопку «Пуск». При этом отключится тормозное устройство, удерживающее маятник, и одновременно

включится секундомер. При включенном режиме № 1 секундомер в момент прохождения грузом нижней точки автоматически остановит отчет времени, причем одновременно сработает тормозное устройство. Внесите результаты первого опыта в таблицу измерений.

6. Проведите по одному опыту, поместив на подставку сначала один, а затем сразу два подгрузка. Результаты внесите в таблицу измерений. По формуле (3.3) рассчитайте величину углового ускорения ε для соответствующих значений m.

7. Постройте зависимость $\varepsilon(m)$. Определите из графика по точке его пересечения с осью абсцисс значение m_0, при котором $\varepsilon = 0$. Рассчитайте по формуле (3.6) величину момента сил сопротивления $M_{\text{сопр}}$.

8. Проведите прямые пятикратные измерения времени опускания груза для заданного расстояния x.

9. Рассчитайте среднее время t и определите доверительную погрешность измерения Δ_t при доверительной вероятности $P = 90\,\%$, $n = 5$ (см. введение).

10. Вычислите по формуле (3.7) среднее значение момента инерции барабана со стержнями $\bar{J}_1$.

11. Выведите формулу для определения погрешности косвенных измерений момента инерции барабана со стержнями. Пользуясь полученной формулой, вычислите Δ_{J_1} (см. введение) и запишите результат в виде $J_1 = \bar{J}_1 \pm \Delta_{J_1}$.

12. Закрепив грузы m_1 на стержнях маятника на равном расстоянии r от оси вращения, определите это расстояние, используя деления, нанесенные на стержни, и указанные около установки исходные данные.

13. Проведите однократные измерения времени t опускания массы m при трех различных расстояниях r от оси вращения до закрепленных на стержнях грузов m_1. При выборе расстояний r следует учесть, что это расстояние должно подчиняться неравенству $r \gg d_{\text{гр}}$, чтобы груз можно было считать материальной точкой.

14. Вычислите моменты инерции маятника с грузами на стержнях по формуле (3.7) при различных расстояниях r. При этом, как показали предварительные опыты, можно с допустимой точностью использовать

в качестве величины m_0 ее значение, найденное ранее для крестовины без грузов на спицах. Сравните полученные данные с теоретически ожидаемыми значениями момента инерции, вычисленными по формуле (3.8) для соответствующих значений r. Результаты вычислений занесите в таблицу измерений.

15. Постройте на одном рисунке графики экспериментально полученной и теоретически ожидаемой зависимости момента инерции маятника от r^2. Нанесите на график точки, соответствующие результатам, полученным при выполнении индивидуальных заданий. Проанализируйте возможные причины их несовпадения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова цель данной работы?
2. Что такое момент инерции? Каков его физический смысл?
3. Как можно изменить момент инерции маятника Обербека?
4. Как из уравнений динамики поступательного и вращательного движения вывести рабочую формулу (3.7)?
5. В каком случае движение маятника будет равноускоренным?
6. Как измерить расстояние от оси вращения до центров грузов, закрепленных на стержнях?
7. Каким образом в данной работе подтверждается линейная зависимость момента инерции от квадрата расстояния грузов, закрепленных на стержнях, до оси вращения?

Индивидуальные задания для членов бригады, выполняющих лабораторную работу на одной установке

Номер члена бригады	Индивидуальное задание
1	Рассчитайте момент инерции маятника Обербека, состоящего из барабана и четырех спиц (без грузов, закрепленных на спицах). Численные значения масс и размеры барабана и спиц возьмите в таблице исходных данных, помещенной около лабораторной установки, на которой вам предстоит выполнять опыты

2	Рассчитайте момент инерции маятника Обербека с грузами, закрепленными на одинаковых расстояниях на всех четырех спицах. Расстояние от поверхности барабана до грузов, закрепленных на спицах, возьмите максимально возможным (грузы – на самом конце спиц). Численные значения масс и размеров барабана, спиц и грузов возьмите в таблице исходных данных, помещенной около лабораторной установки, на которой вам предстоит выполнять опыты
3	Выполните задание, аналогичное заданию для второго номера, но расстояние от поверхности барабана до грузов, закрепленных на спицах, возьмите равным половине длины спицы (грузы – на середине спиц)

ЛИТЕРАТУРА

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1982. – Т. 1 (и последующие издания этого курса).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Цели работы: 1) оценить момент тормозящей силы, действующий на тело в процессе вращения; 2) определить момент инерции тела с учетом момента тормозящей силы; 3) произвести расчет моментов, пользуясь энергетическими соотношениями.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Установка представляет собой тело со шкивом радиусом r, которое вращается в шарикоподшипниках. На шкив намотана нить, один конец которой прикреплен к шкиву, а другой – к подставке массой $m_{\text{под}}$. На подставку могут помещаться подгрузки массой $m_{\text{п}}$. Груз под действием силы тяжести может опускаться, приводя во вращение тело. После того как груз от отметки h_0 опустится на полную длину нити до отметки h_1 (рис. 4.1), тело, вращаясь по инерции, поднимет груз снова на некоторую высоту до отметки h_2.

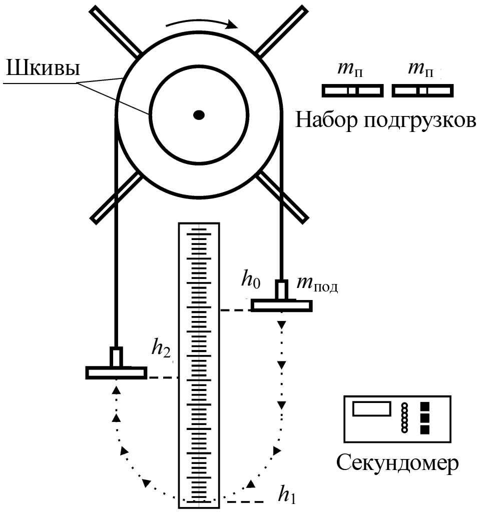

Рис. 4.1

В процессе движения часть механической энергии системы тело–груз расходуется на работу против тормозящей силы и, следовательно, превращается во внутреннюю энергию системы и окружающего воздуха, которые нагреваются. Из этого следует, что тело поднимет груз на высоту, меньшую начальной, т. е. отметка h_2 всегда будет расположена ниже отметки h_0. Тормозящая сила складывается из силы трения в подшипниках и из силы трения о воздух при движении тела и груза.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ МОМЕНТА ТОРМОЗЯЩЕЙ СИЛЫ

Для оценки момента тормозящей силы воспользуемся энергетическими соотношениями. Поскольку силы трения являются диссипативными, работа тормозящей силы $A_т$ при переходе системы тело–груз из начального состояния в конечное будет

$$A_т = E_{кон} - E_{нач}, \tag{4.1}$$

где $E_{нач}$ – механическая энергия системы тело–груз в начальном состоянии; $E_{кон}$ – механическая энергия системы тело–груз в конечном состоянии.

Механическая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергий. В те моменты времени, когда система покоится, кинетическая энергия равна нулю и, следовательно, механическая энергия становится равной только потенциальной энергии системы. Такие состояния системы возникают в начальный момент времени, когда груз находится на отметке h_0, и в тот момент, когда, опустившись вниз, груз за счет вращения тела поднимается до отметки h_2 (рис. 4.1). Если принять, что на высоте h_1 потенциальная энергия груза равна нулю, то приращение механической энергии для выбранных начального и конечного состояний системы равно

$$E_2 - E_0 = mg\left|h_2 - h_1\right| - mg\left|h_0 - h_1\right| = mg(h_{21} - h_{01})\,, \qquad (4.2)$$

где h_{01} – расстояние между отметками h_0 и h_1; h_{21} – расстояние между отметками h_2 и h_1.

Будем считать, что момент тормозящей силы в основном связан с вращательным движением тела, т. е. тормозящей силой, действующей на груз, пренебрежем. Тогда элементарная работа момента тормозящей силы равна скалярному произведению

$$\delta A_{\text{т}} = \overrightarrow{M_{\text{т}}}\,\overrightarrow{d\varphi}\,,$$

где $\overrightarrow{M_{\text{т}}}$ – вектор момента тормозящей силы; $\overrightarrow{d\varphi}$ – вектор бесконечно малого углового перемещения тела.

Оба вектора $\overrightarrow{M_{\text{т}}}$ и $\overrightarrow{d\varphi}$ направлены вдоль оси вращения, но в противоположные стороны. Следовательно,

$$\delta A_{\text{т}} = \left|\overrightarrow{M_{\text{т}}}\right|\left|\overrightarrow{d\varphi}\right|\cos 180^\circ = -\left|\overrightarrow{M_{\text{т}}}\right|\left|\overrightarrow{d\varphi}\right| = -M_{\text{т}}d\varphi\,.$$

Тогда полная работа момента тормозящей силы, если предположить, что он постоянен, равна

$$A_{\text{т}} = -\int_0^2 M_{\text{т}}d\varphi = -M_{\text{т}}\varphi_{02}\,, \qquad (4.3)$$

где φ_{02} – угол поворота тела вокруг оси при переходе системы из начального состояния в конечное (груз при этом перемещается от отметки h_0 до отметки h_2).

При движении груза вниз от отметки h_0 до отметки h_1 со шкива сматывается нить длиной $|h_0 - h_1|$. Учитывая, что длина окружности шкива равна $2\pi r$ и каждый оборот шкива соответствует углу 2π радиан, найдем угол поворота шкива при движении груза вниз:

$$\varphi_{01} = \frac{|h_0 - h_1|}{2\pi r} 2\pi = \frac{|h_0 - h_1|}{r} \text{ [рад].} \tag{4.4}$$

Очевидно, что при дальнейшем вращении тела до момента, когда груз остановится на отметке h_2, оно повернется на угол

$$\varphi_{12} = \frac{|h_2 - h_1|}{r} \text{ [рад].}$$

Тогда общий угол поворота тела, соответствующий переходу груза от отметки h_0 до отметки h_2, равен

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_{12} = \frac{|h_0 - h_1| + |h_2 - h_1|}{r} \text{ [рад].} \tag{4.5}$$

Подставляя (4.2) и (4.3) в (4.1), получаем

$$-M_\text{т}\varphi_{02} = mg|h_2 - h_1| - mg|h_0 - h_1| = mg(h_{21} - h_{01}) .$$

Отсюда, используя (4.5), находим формулу для оценки модуля вектора момента тормозящей силы:

$$M_\text{т} = mgr\frac{|h_0 - h_1| - |h_2 - h_1|}{|h_0 - h_1| + |h_2 - h_1|} = mgr\frac{h_{01} - h_{21}}{h_{01} + h_{21}} . \tag{4.6}$$

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА С УЧЕТОМ МОМЕНТА ТОРМОЗЯЩЕЙ СИЛЫ

Рассмотрим систему тело–груз в начальный момент времени, когда груз находится на отметке h_0, а в качестве конечного выберем тот момент времени, когда груз опустился до нижней отметки h_1, соответствующей полной длине нити. Опять будем исходить из энергетического соотношения (4.1).

Для выбранных начального и конечного состояний получим

$$A_{\text{т}} = -M_{\text{т}}\varphi_{01}, \tag{4.7}$$

где $M_{\text{т}}$ – момент тормозящей силы (4.6); φ_{01} – угол поворота тела, соответствующий перемещению груза от отметки h_0 до h_1 (4.4).

Начальная механическая энергия системы тело–груз

$$E_0 = mg\left|h_0 - h_1\right| = mgh_{01}. \tag{4.8}$$

Конечная механическая энергия системы складывается из кинетической энергии вращательного движения тела и кинетической энергии поступательного движения груза в момент прохождения им отметки h_1:

$$E_1 = E_{\text{вращ}} + E_{\text{пост}} = \frac{J\omega_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2},$$

где J – момент инерции тела; ω_1 – угловая скорость вращения тела в момент t_1 (см. рис. 4.1); v_1 – скорость поступательного движения груза в момент t_1.

Строго говоря, в процессе движения груз за счет упругого растяжения нити опускается чуть ниже отметки h_1, тормозится нитью, а затем за счет упругого сжатия нити возвращается на эту отметку.

Предполагая, что движение системы является равноускоренным, для скорости груза на отметке h_1 получаем

$$v_1 = \frac{2|h_0 - h_1|}{t_1} = \frac{2h_{01}}{t_1}, \tag{4.10}$$

где t_1 – время, за которое груз опустится от отметки h_0 до h_1.

Угловая скорость вращения тела в тот же момент времени будет

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r}, \tag{4.11}$$

где r – радиус шкива, на который намотана нить.

Подставляя (4.7) – (4.9) в (4.1), получаем

$$-M_{\text{т}}\varphi_{01} = \frac{J\omega_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} - mg|h_0 - h_1|.$$

Из этой формулы, учитывая (4.4), (4.10) и (4.11), выражаем момент инерции J:

$$J = \frac{(mgr - M_{\text{т}})rt_1^2}{2|h_0 - h_1|} - mr^2 = \frac{(mgr - M_{\text{т}})rt_1^2}{2h_{01}} - mr^2, \tag{4.12}$$

где $M_{\text{т}}$ – момент тормозящей силы, который вычисляется по формуле (4.6).

ЗАДАНИЕ К РАБОТЕ

1. Заготовьте таблицу для прямых пятикратных измерений длины $|h_2 - h_1| = h_{21}$ и времени t_1 с последующей статистической обработкой полученных результатов.

2. Заранее выберите отметку h_0, от которой начнется движение груза m (рекомендуемое значение 50 см).

3. Вращая тело рукой, размотайте нить на полную длину и заранее определите численное значение отметки h_1. Обычно можно считать $h_1 = 0$. Внесите длину $|h_0 - h_1| = h_{01}$ в таблицу. Оцените погрешность измерения этой длины как приборную погрешность измерительной линейки.

4. Включите электронный секундомер.

5. Вращая тело рукой, намотайте нить на шкив так, чтобы груз занял положение, соответствующее выбранной вами начальной отметке h_0.

6. Проведите первый опыт, используя в качестве груза, тянущего нить, только одну подставку массой $m_{\text{под}}$ без подгрузков. Предварительно нажатием кнопки «Режим» установите режим № 2 (светится индикатор «Реж. 2»). Затем нажмите кнопку «Пуск». При этом отключится тормозное устройство, удерживающее тело, и одновременно включится секундомер. При включенном режиме № 2 секундомер в момент прохождения грузом отметки h_1 автоматически остановится, но тормозная система при этом не остановит движения, позволив грузу подняться до отметки h_2. Дождитесь момента, когда груз поднимется до отметки h_2, и зафиксируйте ее численное значение. Внесите результаты первого опыта в таблицу измерений (ими будут $|h_2 - h_1| = h_{21}$ и t_1).

7. Пятикратно повторите этот опыт, не меняя массу груза, что необходимо для определения случайной погрешности прямых измерений.

8. Проведите по одному опыту, поместив на подставку сначала один, а затем сразу два подгрузка. Результаты внесите в таблицу измерений.

9. Проведите статистическую обработку пятикратно проведенных прямых измерений величин $|h_2 - h_1| = h_{21}$ и t_1 (п. 6 и 7), пользуясь методикой, изложенной во введении. Получите оценку истинных значений и доверительных погрешностей для этих величин. Результаты вычислений внесите в таблицу.

10. Оцените истинное значение момента тормозящей силы $\overline{M}_{\text{т}}$ (см. введение).

11. Выведите формулу для определения погрешности косвенных измерений момента тормозящей силы. Проведите численную оценку квадратичных членов, входящих в полученную формулу, и, отбросив малые, оцените погрешность косвенных измерений момента тормозящей силы $\Delta M_{\text{т}}$.

12. Оцените истинное значение момента инерции тела $\overline{J}$.

13. Выведите формулу для определения погрешности косвенных измерений момента инерции тела. Проведите численную оценку квад-

ратичных членов полученной формулы и, отбросив малые, оцените погрешность косвенных измерений момента инерции тела ΔJ .

14. С помощью формулы (4.6) проведите расчет моментов тормозящей силы для однократных опытов с другими грузами (см. п. 8). Погрешности измерений для этих опытов вычислять не надо. Обратите внимание на закономерное изменение момента тормозящей силы с ростом массы груза.

15. С помощью формулы (4.12) рассчитайте момент инерции тела для однократных опытов с другими грузами (см. п. 8). Погрешности измерений для этих опытов вычислять не надо. Наблюдается ли закономерное изменение момента инерции с ростом массы груза?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая часть механической системы совершает в процессе опыта поступательное, а какая – вращательное движение?
2. Почему для описания вращательного движения удобней пользоваться угловыми кинематическими характеристиками, а для поступательного – линейными?
3. Что такое момент силы? Какие силы и моменты сил действуют на тело во время его движения?
4. Какие силы создают момент тормозящей силы? Можно ли указать точку приложения этих сил?
5. Как определить работу момента силы?
6. Сохраняется ли механическая энергия системы тело–груз в процессе опыта?
7. Как можно оценить момент тормозящей силы, пользуясь энергетическими соотношениями? Какие упрощающие предположения при этом делаются?
8. Изменяется ли момент тормозящей силы при увеличении массы груза, как и почему?
9. Что такое момент инерции тела, какое свойство тела он характеризует?
10. Как найти кинетическую энергию при поступательном и при вращательном движении?
11. Как можно определить момент инерции тела, пользуясь энергетическими соотношениями?

12. Зависит ли момент инерции тела от массы груза, закрепленного на конце нити?

13. Выведите формулу кинетической энергии тела, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси.

14. Выведите рабочую формулу для оценки момента тормозящей силы.

15. Выведите рабочую формулу для момента инерции тела с учетом и без учета момента тормозящей силы. Примените эти формулы, чтобы ответить на вопрос, имеет ли смысл учет момента тормозящей силы в проделанных опытах.

Индивидуальные задания для членов бригады, выполняющих лабораторную работу на одной установке

Номер члена бригады	Индивидуальное задание
1	Постройте, пользуясь формулой (4.6), график зависимости момента тормозящей силы $M_т$ от величины h_2. При расчете считайте величины h_0 и h_1, входящие в формулу, равными h_0 = 50 см, $h_1 = 0$ см. Численные значения радиуса шкива возьмите в таблице исходных данных, помещенной около лабораторной установки, на которой вам предстоит выполнять опыты. Массу m считайте равной массе подставки $m_{под}$ (без подгрузков)
2	Выполните задание, аналогичное заданию для первого номера, но для массы m, равной сумме масс подставки и одного подгрузка, $m = m_{под} + m_n$
3	Выполните задание, аналогичное заданию для первого номера, но для массы m, равной сумме масс подставки и двух подгрузков, $m = m_{под} + 2m_n$

ЛИТЕРАТУРА

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1982. – Т. 1 (и последующие издания этого курса).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА МЕТОДОМ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: определить момент инерции маятника с применением уравнения колебаний и исследовать зависимость момента инерции от расстояния до условно выбранной точки A.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Установка представляет собой физический маятник, т. е. твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс.

Физический маятник в данной работе состоит из барабана массой m_1 с осью вращения O, стержня массой m_2 и двух грузов с одинаковыми массами m_3, которые можно закрепить в нужном положении на стержне (рис. 5.1).

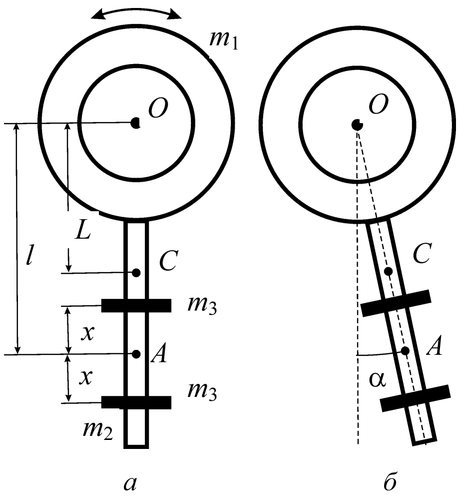

Рис. 5.1

РАСЧЕТ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА

Пока сила тяжести *P*, приложенная в центре масс *C*, направлена вдоль оси стержня (рис. 5.1, *а*), система находится в равновесии. Если отклонять стержень на некоторый малый угол α (рис. 5.1, *б*), то центр масс *C* поднимается на небольшую высоту и тело приобретает запас потенциальной энергии. На маятник относительно оси *O*, направление которой выбираем «к нам», будет при этом действовать момент силы тяжести, проекция которого на эту ось равна

$$M = -mgL\sin\alpha\,, \qquad (5.1)$$

где $m = m_1 + m_2 + 2m_3$; *L* – расстояние между осью вращения *O* и центром масс *C*.

Вращающий момент *M*, создаваемый силой *P*, при малых углах α будет

$$M = -mgL\alpha\,.$$

Он вызывает ускорение при вращательном движении маятника. Связь между этим ускорением и моментом сил дается основным уравнением динамики вращательного движения:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgL\alpha\,, \qquad (5.2)$$

где *J* – момент инерции маятника относительно оси *O*.

Обозначим

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{J}\,. \qquad (5.3)$$

Тогда из уравнения (5.2) получим

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega_0^2\alpha\,. \qquad (5.4)$$

Уравнение (5.4) описывает колебательный процесс с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgL}{J}}$.

Период колебаний, следовательно, равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}} . \tag{5.5}$$

Из формулы (5.5) выразим момент инерции

$$J = \frac{mgL}{4\pi^2}T^2 . \tag{5.6}$$

Если положение центра масс системы не изменяется, то величина L постоянна и в формулу (5.6) можно ввести постоянный коэффициент

$$K = \frac{mgL}{4\pi^2} = \text{const} . \tag{5.7}$$

Измеряя время t, в течение которого происходит n полных колебаний, найдем период $T = \dfrac{t}{n}$. Подставляя T и K в (5.6), получаем рабочую формулу

$$J = K\frac{t^2}{n^2} . \tag{5.8}$$

С помощью формулы (5.8) производятся косвенные измерения момента инерции физического маятника относительно оси O.

С другой стороны, момент инерции J зависит от положения грузов m_3 на стержне. Переместим грузы m_3 по стержню так, чтобы они располагались симметрично относительно некоторой точки A. Эта математическая точка выбрана произвольно вблизи середины стержня. Центр масс системы при этом сохраняет свое местоположение. Будем считать размеры грузов m_3 малыми по сравнению с l и x (см.

рис. 5.1). Тогда их можно рассматривать как материальные точки. В этом случае момент инерции системы определяется выражением

$$J = J' + m_3(l - x)^2 + m_3(l + x)^2\,, \tag{5.9}$$

где J' – момент инерции системы без грузов; x – расстояние груза m_3 до точки A; l – расстояние точки A до оси вращения маятника O.

Преобразуя формулу (5.9), получаем

$$J = J_A + 2m_3x^2\,, \tag{5.10}$$

где $J_A = J' + 2m_3l^2$ – момент инерции маятника при положении грузов m_3 в точке A.

Зависимость (5.10) будем проверять, получая величины J и J_A экспериментально с помощью формулы (5.8).

ЗАДАНИЕ К РАБОТЕ

1. При подготовке к лабораторной работе получите расчетную формулу для погрешности косвенных измерений Δ_J момента инерции (см. введение). Учтите, что момент инерции определяется с помощью рабочей формулы (5.8). Для упрощения вычислений можно считать, что коэффициент K в этой формуле измерен точно: $\Delta_K = 0$.

2. Подготовьте эскиз табл. 1 для статистической обработки прямых пятикратных измерений времени t (образец – см. введение, табл. В1).

3. Подготовьте эскиз табл. 2 для исследования зависимости J от x^2.

4. Включите электронный секундомер. Нажатием кнопки «Режим» установите режим № 3 (светится индикатор «Реж.3»), при этом отключится тормозное устройство, удерживающее тело.

5. Приступая к работе, поместите оба груза m_3 в точке A (ее положение указано в таблице исходных данных, помещенной около лабораторной установки, на которой вам предстоит работать).

6. Отклоните маятник рукой на небольшой угол α и в момент отпускания маятника включите секундомер нажатием кнопки «Пуск».

Отсчитав 10 полных колебаний маятника, остановите секундомер нажатием кнопки «Стоп». Запишите полученное время в таблицу измерений.

7. Проведите пятикратные измерения времени t десяти полных колебаний физического маятника, не меняя положение грузов.

8. Рассчитайте среднее время $\overline{t}$ и определите доверительную погрешность измерения Δ_t.

9. Используя рабочую формулу (5.8), определите значение момента инерции J_A, а по формуле, полученной в п. 1 этого задания, определите погрешность измерения этой величины Δ_J. Результат запишите в виде $J_A = \overline{J}_A \pm \Delta_{J_A}$ и занесите в табл. 2 для значения $x = 0$.

10. Раздвиньте грузы m_3 симметрично относительно точки A на расстояние x_1 (см. рис. 5.1). Рекомендуется расстояние x_1 взять равным тому значению, которое использовалось в индивидуальном задании. Проведите однократные измерения времени t десяти полных колебаний физического маятника.

11. Повторите опыт п. 7 при пяти различных расстояниях x.

12. Определите момент инерции маятника с помощью формулы (5.8) при различных расстояниях x. Результаты занесите в табл. 2.

13. Постройте график зависимости момента инерции маятника от x^2, пользуясь табл. 2. Нанесите на этот же график ожидаемую зависимость (5.10). Сравните и проанализируйте полученные результаты.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем состоит цель данной работы?

2. Что такое момент инерции тела? В чем его физический смысл?

3. Сформулируйте и примените к данной работе основной закон динамики вращательного движения.

4. Что такое центр масс системы?

5. Почему местоположение центра масс маятника не меняется при изменении положения грузов m_3 ?

6. Найдите момент инерции системы относительно центра масс, задав или измерив нужные для этого величины.

7. Сформулируйте закон сохранения энергии и запишите его применительно к физическому маятнику.

8. Как получить рабочую формулу (5.8) и зависимость (5.10)?

9. Как получить формулу для расчета погрешности косвенных измерений момента инерции?

10. Как формулируется теорема Штейнера? Как можно применить ее к исследуемой системе?

11. Почему предлагается построить график зависимости момента инерции от квадрата величины x?

12. Что такое момент силы $\vec{M}$, угловая скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$, угловое перемещение $d\vec{\alpha}$, как направлены эти векторы?

Индивидуальные задания для членов бригады, выполняющих лабораторную работу на одной установке

Номер члена бригады	Индивидуальное задание
1	Рассчитайте момент инерции маятника, состоящего из барабана и спицы с грузами, закрепленными на спице вплотную в точке A. Численные значения масс, размеров барабана и спицы возьмите в таблице исходных данных, помещенной около лабораторной установки, на которой вам предстоит выполнять опыты
2	Рассчитайте момент инерции маятника, состоящего из барабана и спицы с грузами, закрепленными на спице на расстоянии x_1 от точки A. Численные значения масс, размеров барабана и спицы возьмите в таблице исходных данных, помещенной около лабораторной установки, на которой вам предстоит выполнять опыты
3	Выполните задание, аналогичное заданию для второго номера, но с другим значением расстояния x_2 от точки A

ЛИТЕРАТУРА

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1982. – Т. 1 (и последующие издания этого курса).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ МЕТОДОМ КЛЕМАНА И ДЕЗОРМА

Цель работы: изучить равновесные термодинамические процессы и теплоемкость идеальных газов, измерить показатель адиабаты классическим методом Клемана и Дезорма.

РАВНОВЕСНЫЕ И КВАЗИРАВНОВЕСНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Система молекул с постоянным количеством вещества ν в объеме V находится в «состоянии теплового равновесия», если во всех микроскопически малых частях ее объема достаточно длительное время и давление P, и температура T одинаковы, т. е. являются параметрами состояния системы в целом. Состояние теплового равновесия может поддерживаться только в такой системе, через «границы» которой исключается перенос вещества и энергии. Такая система называется термодинамически изолированной [1].

В неизолированных системах тепловое равновесие отсутствует и наблюдается тот или иной тепловой процесс. Будучи изолированной, такая система за некоторое время спонтанно благодаря тепловому движению молекул придет в состояние равновесия [1]. Переход системы из неравновесного в равновесное состояние называют процессом релаксации и характеризуют временем релаксации. Так, неравномерность давления в изолированной системе на расстоянии 10 см исчезает весьма быстро – за $10^{-4}\ldots10^{-5}$ с, так как выравнивание давления происходит со скоростью звука (при 0 °С в воздухе скорость звука равна 330 м/с). Выравнивание температуры определяется теплопроводностью системы и протекает медленно. Время температурной релаксации идеальных газов имеет порядок $\tau = 10^{3}\ldots10^{4}$ с на участке 10 см.

Все тепловые процессы являются, строго говоря, непрерывной последовательностью неравновесных состояний системы. Но если они протекают медленно по отношению ко времени релаксации ($t \gg \tau$), то допустимо считать их непрерывной последовательностью равновесных состояний, так как, изменяясь постепенно, параметры состояния вследствие успевающей завершиться релаксации остаются практически одинаковыми во всех частях объема системы. Такие процессы называют равновесными. Они могут быть графически изображены на диаграмме состояний. Поскольку определяющим для системы будет время температурной релаксации, всякий равновесный процесс – принципиально очень медленный ($t \to \infty$). Таковы, например, протекающие в условиях изменения температуры изобарический (P = const) и изохорический (V = const) процессы, если они осуществляются как равновесные.

Изотермический процесс протекает при постоянной температуре системы и принципиально является равновесным. На первый взгляд, при таком процессе нет необходимости учитывать время температурной релаксации. Однако и этот процесс должен проводиться очень медленно, чтобы происходящий теплообмен системы с внешней средой не приводил к изменению ее температуры. Как угодно малое приращение внутренней энергии dU системы, возникающее за счет подведения малого количества теплоты $\delta Q \to dU$, с учетом времени температурной релаксации полностью должно успеть перейти в работу системы $dU \to \delta A$. Только в этом случае можно считать, что изотермический процесс выполняется: $\delta Q \to \delta A$, $dU \to 0$, $dT \to 0$ и T = const. Изотермический процесс – медленный принципиально. В идеале его определяют как бесконечно медленный. Реально тепловые процессы, включая изобарический и изохорический, проводят более или менее быстро, не обеспечивая полной температурной релаксации. В ряде случаев их можно рассматривать как равновесные только приближенно. Процессы, которые в определенных условиях с некоторым приближением можно рассматривать как равновесные, называют квазиравновесными. Такие процессы легче реализуются в системах с малым объемом, когда уменьшается время температурной релаксации, а также при сравнительно небольшом диапазоне изменения параметров состояния системы за время процесса.

КВАЗИРАВНОВЕСНЫЙ АДИАБАТНЫЙ ПРОЦЕСС

Адиабатный процесс проводится в системе с постоянным количеством вещества ν при отсутствии теплообмена с внешней средой ($\delta Q = 0$). Для этого система должна быть термодинамически изолирована. При адиабатном процессе температура системы изменяется. Поэтому равновесный адиабатный процесс должен протекать настолько медленно, чтобы его длительность была много больше времени температурной релаксации системы, т. е. $t \gg \tau$. Отсюда следует часто трудно выполнимое, жесткое требование к качеству тепловой изоляции системы.

Чтобы избежать этого затруднения, на практике адиабатный процесс проводят как квазиравновесный: объем системы изменяют настолько быстро, чтобы за время длительности процесса можно было пренебречь теплообменом системы с внешней средой, т. е. $\delta Q \to 0$. Ясно, что температурная релаксация системы за такой интервал времени не завершается и неравномерность температуры в разных частях объема не позволяет считать такой адиабатный процесс равновесным. Однако, выбирая объем системы достаточно малым и проводя процесс при незначительном изменении давления, объема и температуры системы, можно считать его квазиравновесным.

Адиабатный процесс в системе идеального газа с постоянным числом одинаковых молекул аналитически записывается либо уравнением

$$PV^{\gamma} = \text{const}\,, \tag{6.1}$$

либо уравнением

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}\,, \tag{6.2}$$

где показатель адиабаты γ определяется только «числом степеней свободы» i [1] молекулы газа и равен отношению теплоемкостей газа при постоянном давлении C_P (изобарический процесс) и при постоянном объеме C_V (изохорический процесс):

$$\gamma = \frac{i+2}{i}\,, \tag{6.3}$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}\,. \tag{6.4}$$

Рассмотрим относительное изменение параметров состояния системы, удовлетворяющее условию проведения квазиравновесного адиабатного процесса.

Задавшись приращениями ΔP, ΔV и ΔT давления, объема и температуры, из формул (6.1) и (6.2) получим соответственно уравнения

$$\gamma P \Delta V - V \Delta P = 0,$$

$$(\gamma - 1) T \Delta V - V \Delta T = 0,$$

из которых следует, что относительные изменения объема и температуры зависят от относительного изменения давления следующим образом:

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P},$$

$$\frac{\Delta T}{T}=(\gamma-1)\frac{\Delta V}{V}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P}.$$

Для одно-, двух- и трехатомных молекул число степеней свободы соответственно равно $i = 3$, $i = 5$, $i = 6$. Пусть $i = 5$ и $\gamma = 1{,}4$.

Условие квазиравновесия требует, чтобы приращения параметров состояния системы были малы. Особенно это относится к температуре. Пусть $\Delta P / P = 0{,}01$, тогда $\Delta V / V = 0{,}007$ и $\Delta T/T = 0{,}003$. Проведем количественную оценку приращения параметров.

За наименьшее давление в системе примем атмосферное давление $P = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Тогда приращение давления $\Delta P = 1{,}01 \cdot 10^3$ Па = = 103 мм вод. ст. Оно может быть измерено непосредственно U-образным жидкостным манометром, один вход которого соединен с системой, а второй, открытый, – непосредственно с внешней средой.

Если в исходном состоянии система имеет комнатную температуру, например $T = 300$ К, то по окончании адиабатного процесса расширения температура уменьшится на $\Delta T = 1$ К (или на 1 °С). Столь незначительное уменьшение температуры позволяет считать ее приблизительно постоянной. Следовательно, адиабатный быстропротекающий процесс в этих условиях вполне можно рассматривать как квазиравновесный.

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ

Технически более просто осуществляется адиабатный процесс расширения газа из равновесного состояния *1*, при котором температура системы T_1 равна температуре T_0 окружающей внешней среды, а давление $P_1 = P_0 + \Delta P_1$ превышает значение атмосферного давления P_0. По окончании адиабатного процесса в квазиравновесном состоянии *2* температура будет $T_2 = T_0 - \Delta T$, а давление в системе $P_2 = P_0$.

Для эксперимента необходима система, способная спонтанно увеличить свой объем при неизменном количестве вещества в нем. Такая система не может быть ограничена стенками какого-либо сосуда, имеющего постоянный объем. В то же время избыточное давление в системе можно обеспечить только тогда, когда она заключена в таком сосуде. Для устранения этого противоречия выберем систему молекул внутри сосуда, но занимающую при избыточном давлении P_1 только небольшую часть V_1 объема сосуда, как показано на рис. 6.1, где выделенная система условно ограничена круговой линией.

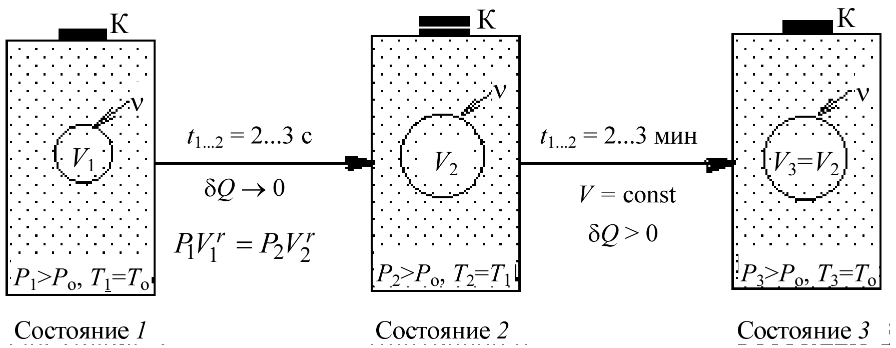

Рис. 6.1

В исходное равновесное состояние *1* система приходит после предварительного сжатия (подкачка газа может быть выполнена насосом) и последующей релаксации (в течение нескольких минут), когда в условиях теплового равновесия с внешней средой весь газ в сосуде будет иметь температуру $T_1 = T_0$ и установившееся давление P_1.

В процессе быстрого адиабатного расширения системы, производимого резким соединением через открывающийся клапан К полости сосуда с внешней средой, теплообменом газа в сосуде и, тем более, в выделенной системе, можно пренебречь ($\delta Q \to 0$). Внутренняя энергия системы уменьшается на величину $\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T$, расходуемую на работу A расширения системы: $\Delta U \to A$. На диаграмме (рис. 6.2) адиабатный процесс перехода из состояния *1* в состояние *2* показан графически.

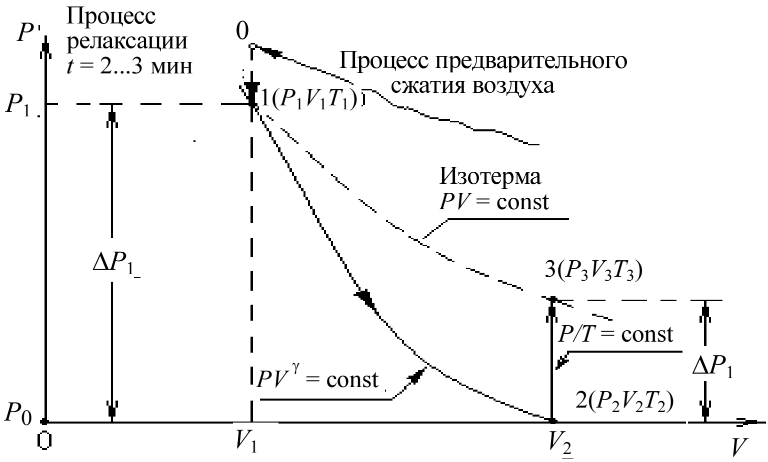

Рис. 6.2

Из уравнения (6.1) адиабатного процесса для состояний *1* и *2* следует равенство $R_1V_1^{\gamma} = R_2V_2^{\gamma}$, но так как $P_2 = P_0$, то можно записать, что $P_1V_1^{\gamma} = P_0V_2^{\gamma}$. Отсюда найдем, что показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{\ln \dfrac{P_0}{P_1}}{\ln \dfrac{V_1}{V_2}} = \frac{\ln \dfrac{P_1}{P_0}}{\ln \dfrac{V_2}{V_1}}. \tag{6.5}$$

В формуле (6.5)

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{P_0 + \Delta P_1}{P_0} = 1 + \frac{\Delta P_1}{P_0} \quad \text{и} \quad \ln \frac{P_1}{P_0} = \ln\left(1 + \frac{\Delta P_1}{P_0}\right) \approx \frac{\Delta P_1}{P_0},$$

так как

$$\frac{\Delta P_1}{P_0} << 1,$$

а отношение объемов V_2 / V_1 остается неизменным.

Особенность метода Клемана и Дезорма состоит в том, что после адиабатного процесса из состояния *2* система, сохраняя постоянный объем, изохорически в течение некоторого времени переходит в равновесное состояние *3* (см. рис. 6.1), при котором в условиях теплового равновесия с внешней средой она приобретает температуру T_0 этой среды: $V_3 = V_2$, $T_3 = T_0$ и $P_3 > P_0$. Таким образом, состояния *1* и *3* являются изотермическими ($T_1 = T_0$ и $T_3 = T_0$), т. е. принадлежат некоторой теоретической изотерме (на рис. 6.2 – пунктирная линия $PV = \text{const}$). Поэтому для таких состояний можно записать равенство $P_1V_1 = P_3V_3$, либо, учитывая, что $V_3 = V_2$, равенство $P_1V_1 = P_3V_2$. Отсюда следует, что в формуле (6.3) неизвестное отношение объемов можно заменить отношением давлений

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_3} = \frac{P_0 + \Delta P_1}{P_0 + \Delta P_2} = \frac{1 + \Delta P_1 / P_0}{1 + \Delta P_2 / P_0},$$

где ΔP_2 – приращение давления при изохорическом процессе. Учитывая, что $(\Delta P_1 / P_0) << 1$ и $(\Delta P_2 / P_0) << 1$, получаем

$$\ln\frac{V_2}{V_1} = \ln\left(1 + \frac{\Delta P_1}{P_0}\right) - \ln\left(1 + \frac{\Delta P_2}{P_0}\right) = \frac{\Delta P_1 - \Delta P_2}{P_0}.$$

Подставив найденные выражения для логарифмов в формулу (6.5), запишем в окончательном виде уравнение, позволяющее измерять показатель адиабаты по методу Клемана и Дезорма:

$$\gamma = \frac{\Delta P_1}{\Delta P_1 - \Delta P_2}.$$

Измерения с помощью формулы (6.6) – косвенные. Однако при обработке результатов измерений их следует рассматривать как прямые, в каждом эксперименте вычисляя значения γ_1, γ_2,…γ_i,…, γ_n, а затем, находя среднее значение $\bar{\gamma}$ и погрешность Δ_γ. Эта особенность объясняется невоспроизводимостью от опыта к опыту исходного состояния *1* (P_1, V_1, T_1) системы, которое образуется спонтанно из неравновесного состояния 0, в значительной мере зависящего от способа и режима нагнетания воздуха в сосуд.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Установка, показанная на рис. 6.3, содержит стеклянный сосуд *1* с пробкой *2*, в которой установлены подпружинный клапан *3*, а также соединительные трубки жидкостного U-образного манометра *4* и ручного насоса *5*, который сообщается с сосудом через вентиль *6*. Необходимо соблюдать следующий порядок работы:

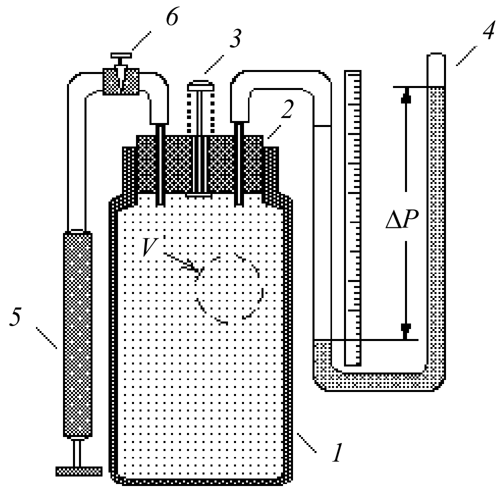

Рис. 6.3

1) открыть вентиль *6*;

2) насосом *5* малыми порциями накачать воздух в сосуд *1*, создав давление, при котором в открытом колене манометра *4* уровень жидкости устанавливается вблизи верхнего деления шкалы. **Следить, чтобы жидкость из трубки манометра не вылилась наружу**;

3) закрыть вентиль *6*;

4) в течение двух-трех имнут дать системе прийти в состояние равновесия (исходное состояние *1*) при температуре внешней среды; измерить приращение давления ΔP_1 по шкале манометра *4*;

5) резким нажатием клапана *3* осуществить быстрое адиабатное расширение системы; в момент выравнивания уровней жидкости в обоих коленах манометра клапан *3* отпустить;

6) в течение двух-трех минут осуществить изохорический процесс, по окончании которого система приходит в состояние *3* равновесия при температуре внешней среды, а давление P_3 стабилизируется. Измерить приращение давления ΔP_2 по шкале манометра *4*;

7) с помощью формулы (6.6) вычислить значение показателя адиабаты.

ЗАДАНИЕ К РАБОТЕ

1. Тщательно изучить равновесные и квазиравновесные тепловые процессы, включая адиабатный процесс, а также понятие о степенях свободы молекул, вопросы теплоемкости идеальных газов, первое начало термодинамики.
2. Изучить метод Клемана и Дезорма, применяемый для измерения показателя адиабаты.
3. Провести 10…15-кратное измерение показателя адиабаты с помощью формулы (6.6), определяя приращения давления ΔP_1 и ΔP_2 и вычисляя γ.
4. Вычислить среднее значение показателя адиабаты и при доверительной вероятности $P = 90\,\%$ случайную погрешность измерений, считая их прямыми (см. введение).
5. Найти теоретическое значение показателя адиабаты для двухатомного газа и сравнить его с экспериментально полученным значением.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение термодинамически изолированной системы.
2. Какие состояния системы называют равновесными?
3. Что такое процесс релаксации системы, время релаксации системы?
4. Какие процессы называют равновесными и квазиравновесными?
5. Дайте определение всех изопроцессов и адиабатного процесса, напишите уравнения этих процессов, приведите их графическое изображение на диаграмме состояний.
6. Охарактеризуйте изопроцессы и адиабатный процесс с точки зрения их равновесности.
7. Что называют степенями свободы молекул и чему равно их число для одно-, двух- и трехатомных молекул?

8. Дайте определение теплоемкости, удельной и молярной теплоемкостей системы. Чему равны молярные теплоемкости идеального газа при изобарическом и изохорическом процессах? Как эти теплоемкости связаны друг с другом?

9. Изложите сущность метода Клемана и Дезорма для измерения показателя адиабаты.

10. Что называется показателем адиабаты, чем он определяется и как связан с теплоемкостями идеального газа при изобарическом и изохорическом процессах?

ЛИТЕРАТУРА

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1982. – Т. 12 (и последующие издания этого курса).

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Методические указания

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Подписано в печать 20.12.2012. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 200 экз. Уч.-изд. л. 4,18. Печ. л. 4,5. Изд. № 266. Заказ №
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20