

Распределение Ферми-Дирака. Положение уровня Ферми.

Лекция 10.

Лектор Чернышев А.П.

2019

Микроскопические состояния

- Различные состояния, отвечающие одной и той же энергии, имеют различную вероятность. Разумеется, что изолированная система будет переходить из менее вероятного состояния в более вероятное. Более вероятное состояние реализуется большим количеством микросостояний.
- Классическое определение: микросостояние определено как позиции и импульсы (моменты движения) каждого составляющего систему атома.

μ – пространство

- Это пространство имеет шесть измерений: p_x, p_y, p_z, x, y, z .

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \approx h, \quad \Delta p_y \cdot \Delta y \approx h, \quad \Delta p_z \cdot \Delta z \approx h. \quad (1)$$

- Объем элементарной ячейки в этом пространстве получается путем перемножения уравнений (1):

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_\mu &= \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \\ &= \Delta V_p \cdot \Delta V = h^3 = (2\pi\hbar)^3 \end{aligned} \quad (2)$$

Невырожденные коллективы

- Предположим, что на N одинаковых частиц приходится G различных состояний, в которых может находиться отдельная микрочастица. Микрочастицы будут встречаться редко, если выполняется условие

$$\frac{N}{G} \ll 1$$

- Свойства коллектива как целого не будут зависеть от специфики микрочастиц. Такие коллективы называются *невырожденными*.

Вырожденные коллективы

- Если число состояний одного порядка с количеством микрочастиц, т.е.

$$\frac{N}{G} \approx 1$$

то вопрос о том, как заселять состояния становится актуальным. Такие коллективы называются *вырожденными*.

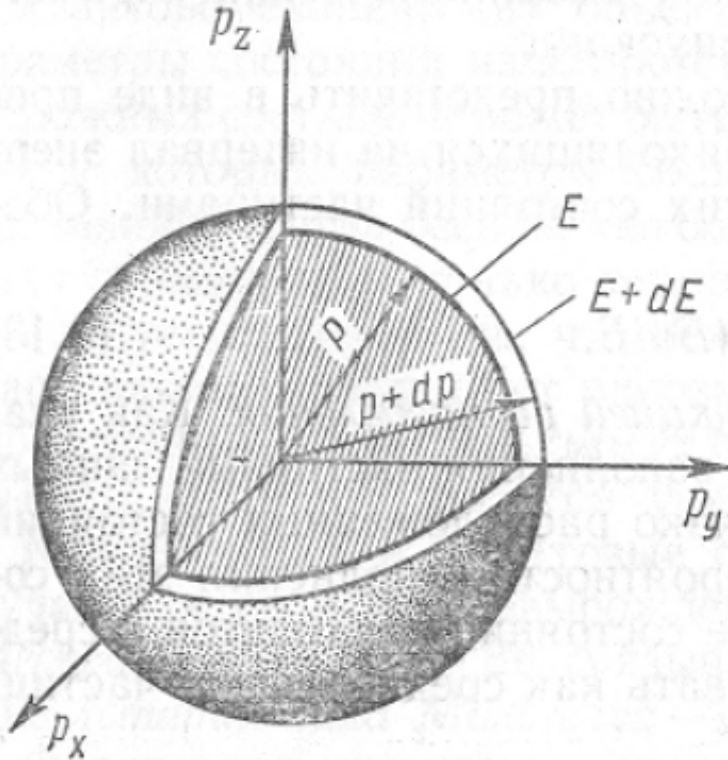
Объекты	Коллективы	
	вырожденные	невырожденные
Классические	Нет	Да
Квантовомеханические .	Да	»

Сравнение статистических распределений

Статистика Больцмана			Статистика Бозе-Эйнштейна			Статистика Ферми-Дирака									
<table><tr><td><i>a</i></td><td><i>b</i></td><td></td></tr></table>	<i>a</i>	<i>b</i>		<table><tr><td><i>b</i></td><td><i>a</i></td><td></td></tr></table>	<i>b</i>	<i>a</i>		<table><tr><td>•</td><td>•</td><td></td></tr></table>	•	•		<table><tr><td>•</td><td>•</td><td></td></tr></table>	•	•	
<i>a</i>	<i>b</i>														
<i>b</i>	<i>a</i>														
•	•														
•	•														
<table><tr><td></td><td><i>a</i></td><td><i>b</i></td></tr></table>		<i>a</i>	<i>b</i>	<table><tr><td></td><td><i>b</i></td><td><i>a</i></td></tr></table>		<i>b</i>	<i>a</i>	<table><tr><td></td><td>•</td><td>•</td></tr></table>		•	•	<table><tr><td></td><td>•</td><td>•</td></tr></table>		•	•
	<i>a</i>	<i>b</i>													
	<i>b</i>	<i>a</i>													
	•	•													
	•	•													
<table><tr><td><i>a</i></td><td></td><td><i>b</i></td></tr></table>	<i>a</i>		<i>b</i>	<table><tr><td><i>b</i></td><td></td><td><i>a</i></td></tr></table>	<i>b</i>		<i>a</i>	<table><tr><td>•</td><td></td><td>•</td></tr></table>	•		•	<table><tr><td>•</td><td></td><td>•</td></tr></table>	•		•
<i>a</i>		<i>b</i>													
<i>b</i>		<i>a</i>													
•		•													
•		•													
<table><tr><td><i>ab</i></td><td></td><td></td></tr></table>	<i>ab</i>			<table><tr><td>••</td><td></td><td></td></tr></table>	••										
<i>ab</i>															
••															
<table><tr><td></td><td><i>ab</i></td><td></td></tr></table>		<i>ab</i>		<table><tr><td></td><td>••</td><td></td></tr></table>		••									
	<i>ab</i>														
	••														
<table><tr><td></td><td></td><td><i>ab</i></td></tr></table>			<i>ab</i>	<table><tr><td></td><td></td><td>••</td></tr></table>			••								
		<i>ab</i>													
		••													

Видно, что в статистике Больцмана всех микросостояний девять и вероятность каждого из них равна $1/9$.

Пространство импульсов



Для свободных
частиц

$$\Gamma_{\mu} = \Gamma_p \Gamma_V = \Gamma_p V = h^3$$

$$\Gamma_p = \frac{h^3}{V}$$

Процесс деления фазового пространства на ячейки конечной величины h^3 или h^3/V называется **квантованием фазового пространства**.

Число состояний и плотность состояний

- Подсчитаем число состояний, которыми обладает микрочастица в интервале энергий от E до $E+dE$.
- Для этого в пространстве импульсов проведем две сферы радиусами p и $p+dp$. Объём получившегося шарового слоя равен $4\pi p^2 dp$. Число фазовых ячеек, заключённых в этом слое равно

$$\frac{4\pi p^2 dp}{\Delta\Gamma_D} = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp.$$

- Число состояний, приходящееся на интервал dp равно

$$g(p) dp = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp.$$

Число состояний микрочастицы

- Для свободных не взаимодействующих частиц

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad dE = \frac{p}{m} dp.$$

- Находя отсюда p и dp и подставляя в предыдущее уравнение, получаем

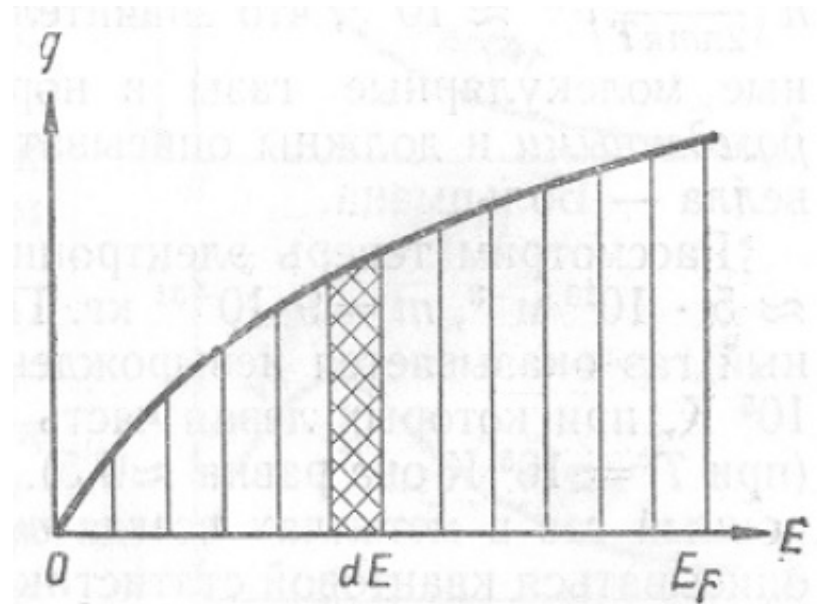
$$g(E) dE = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE.$$

Плотность состояний

- Поделив обе части соотношения на dE получим плотность состояний $g(E)$:

$$g(E) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}$$

- Плотность состояний
- увеличивается пропорционально $\sqrt{E}$.



Спиновые состояния

- В случае электронов каждой ячейке фазового пространства отвечают два состояния, отличающиеся друг от друга направлениями спинов. Поэтому для электронов число состояний и плотность состояний следует удвоить:

$$g(p) dp = \frac{8\pi V}{h^3} p^2 dp,$$

$$g(E) dE = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE,$$

$$g(E) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E}.$$

Функция распределения для невырожденного газа

$$f(E) = e^{\frac{\mu}{kT}} e^{-\frac{E}{kT}},$$

$$N(v) dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv,$$

$$N(p_x, p_y, p_z) dp_x dp_y dp_z = \frac{N}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z.$$

$$\begin{aligned} N(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &= \\ &= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z, \end{aligned}$$

$$N(v_x) dv_x = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x.$$

Функция распределения для вырожденного газа

μ – пространство

- Указание распределения частиц системы по ячейкам μ – пространства и есть задание его микросостояния. Это самое точное из возможных описаний термодинамической системы.

Макроскопические состояния. Статистический вес

- Макроскопическое состояние термодинамической системы определяется макроскопическими параметрами: давлением, температурой и т.п.
- Каждому макроскопическому состоянию соответствует множество микросостояний. Количество таких микросостояний Ω называется статистическим весом данного макросостояния.

Энтропия

- μ – пространство Величина, которая служит для характеристики вероятности макросостояний, называется энтропией. Эта величина является функцией состояния термодинамической системы. По определению

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (3)$$

- здесь k_B – постоянная Больцмана ($k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ Дж/К).

Энтропия – величина аддитивная

- Действительно, общий статвес двух подсистем равен

$$\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

- Поэтому энтропия такой системы имеет вид

$$\begin{aligned} S &= k \ln \Omega = k \ln(\Omega_1 \Omega_2) = \\ &= k \ln \Omega_1 + k \ln \Omega_2 = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

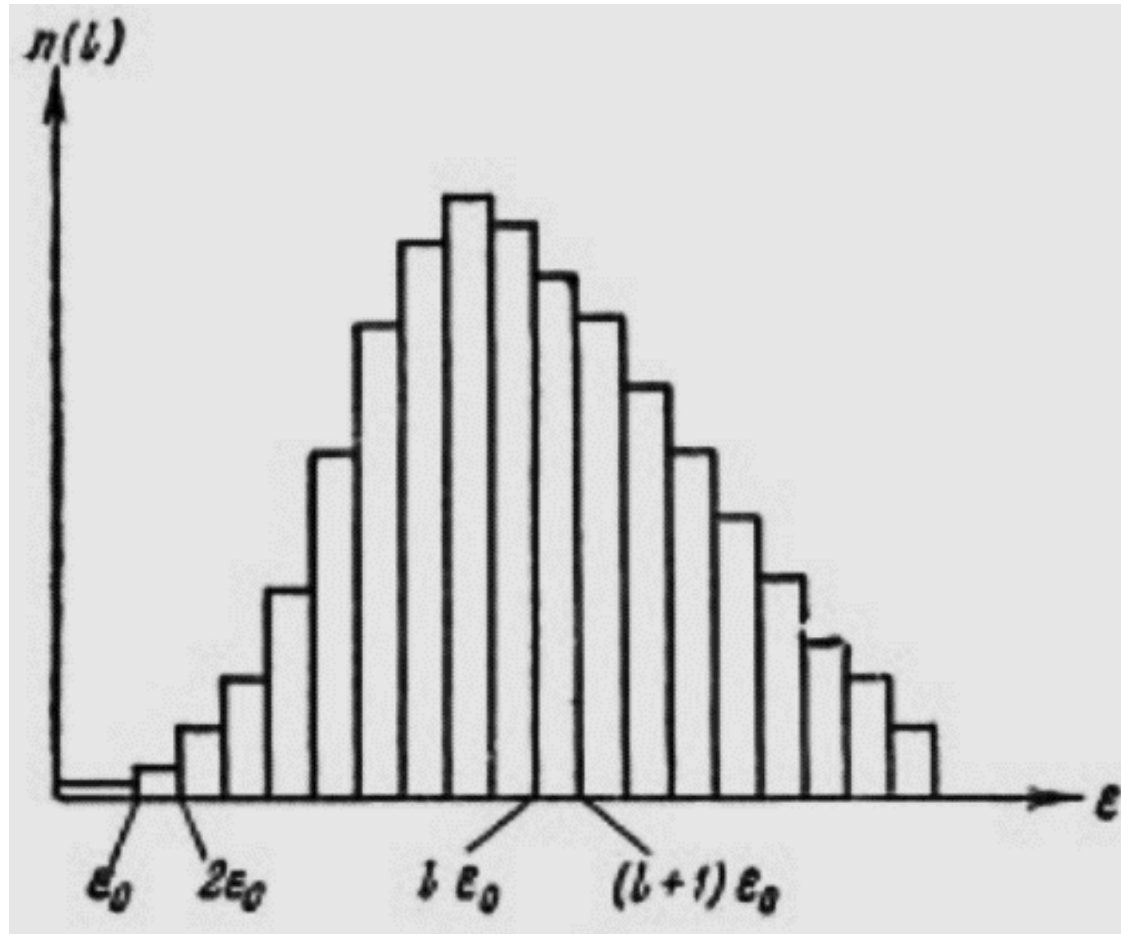
Распределение молекул по энергии

- При нормальных условиях в 1 м^3 газа $2.7 \cdot 10^{27}$ молекул.
- Разобьём ось абсцисс на равновеликие отрезки ε_0 – ячейки
- Относительное число молекул, имеющих энергию в интервале от $i \cdot \varepsilon_0$ до $(i+1) \cdot \varepsilon_0$ равно

$$n(l) = \frac{\Delta N(l, l+1)}{N}$$

- здесь $\Delta N(l, l+1)$ – количество молекул с энергиями в интересующем нас интервале, N – полное число молекул.

Гистограмма распределения молекул по энергии



Фермионы

- Количество частиц – N ; количество ячеек – Z . Пусть $Z > N$.
- Число перестановок ячеек – $Z!$ Из них не дают новых состояний перестановки пустых ячеек между собой – $(Z - N)!$ и перестановки частиц между собой – $N!$ Поэтому статистический вес равен

$$\Omega = \frac{Z!}{N!(Z - N)!}$$

Разбиение μ – пространства на области с одинаковой энергией E_i (подсистемы или ящики)

- Пусть в каждый ящик попадает Z_i ячеек и N_i частиц. Тогда

$$\Omega_i = \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}$$

Статвес системы равен произведению статвесов подсистем:

$$\Omega = \prod_i \Omega_i = \prod_i \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!} \quad (3)$$

Наиболее вероятное распределение частиц по ячейкам

- Чтобы найти такое распределение, нужно найти максимум выражения (6) при дополнительных условиях:
- $\sum N_i = N; \quad \sum \varepsilon_i \cdot N_i = E.$
- Вместо максимума статвеса Ω будем искать максимум энтропии S :

$$S = k_B \sum_i \left(\ln Z_i! - \ln N_i! - \ln (Z_i - N_i)! \right) \quad (4)$$

Воспользуемся формулой Стирлинга

$$\ln N! \approx M \ln N - N.$$

- Формула Стирлинга справедлива при $N \gg 1$. С помощью этой формулы для энтропии (4) получим выражение

$$\begin{aligned} S &= k_B \sum_i \{Z_i \ln Z_i - Z_i - N_i \ln N_i + N_i - \\ &\quad - (Z_i - N_i) \ln (Z_i - N_i) + (Z_i - N_i)\} = \quad (5) \\ &= -k_B \sum_i \left[N_i \ln N_i + (Z_i - N_i) \ln (Z_i - N_i) \right] + \text{const.} \end{aligned}$$

В соответствии с методом Лагранжа образуем функцию

$$\begin{aligned} L &= S + \alpha N - \beta E = \\ &= -k_{\text{B}} \sum_i \left[N_i \ln N_i + (Z_i - N_i) \ln (Z_i - N_i) \right] + \quad (6) \\ &+ \text{const} + \alpha \sum_i N_i - \beta \sum_i \varepsilon_i N_i, \end{aligned}$$

- α, β – множители Лагранжа.

Беря частные производные L по N_i , получим

$$\frac{\partial L}{\partial N_i} = k_{\text{Б}} \ln \frac{Z_i - N_i}{N_i} + \alpha - \beta \varepsilon_i = 0$$

Из этого уравнения следует, что

$$\frac{1 - N_i/Z_i}{N_i/Z_i} = \exp \frac{\beta \varepsilon_i - \alpha}{k_{\text{Б}}}, \quad (10)$$

Решим уравнение (10) относительно величины

$$n_i = N_i / Z_i$$

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left[(\beta \varepsilon_i - \alpha) / k_{\text{Б}}\right] + 1}, \quad (11)$$

Второе начало термодинамики

- Энтропия изолированной системы может только возрасть либо по достижении максимального значения оставаться постоянной (т.е. не убывать).

$$dS \geq 0. \quad (5)$$

Энтропия (продолжение)

- Энтропия для системы из n – подсистем:

$$S = k_{\text{Б}} \sum_{i=1}^n S_i. \quad (4)$$

Температура

- Пусть $dN_i = 0$. Тогда энергия подсистемы равна $E_i = N_i \times \varepsilon_i$.

$$L = S - \beta \sum_{i=1}^N E_i$$

- Условие максимальности энтропии можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial E_i} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial E_i} = \beta.$$

Температура (продолжение)

- Поскольку энтропия системы аддитивна, то

$$S = S_1(E_1) + S_2(E_2) + \dots + S_N(E_N),$$

- Энтропия каждой из подсистем зависит только от ее собственной энергии

$$\frac{\partial S}{\partial E_i} = \frac{dS_i}{dE_i} = \beta = \text{const}$$

Температура (определение)

- Абсолютная температура тела

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}.$$

Химический потенциал — μ

- Примем, что

$$\alpha = \frac{\mu}{T}$$

- Тогда

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left[(\varepsilon_i - \mu)/k_{\text{Б}}T\right] + 1}$$

- Это распределение Ферми — Дирака.

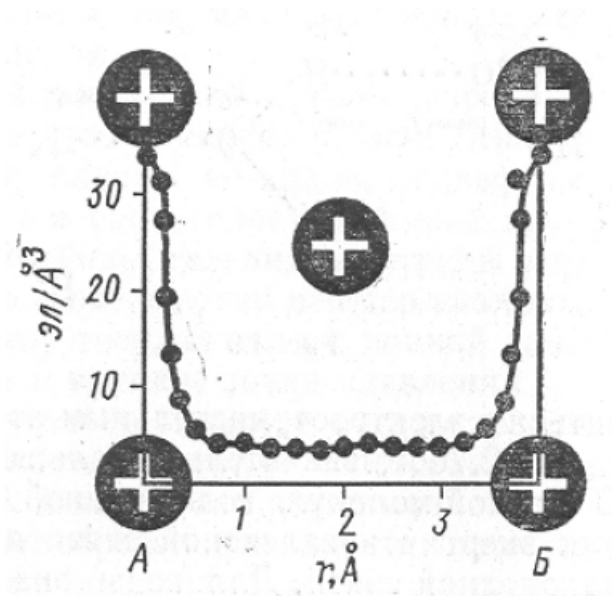
Для бозонов – распределение Бозе -
Эйнштейна

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left[(\varepsilon_i - \mu)/k_B T\right] - 1}$$



Проводники электрического тока.
Металлы

Металлическая связь



Связь в решётке металла возникает за счёт взаимодействия положительных ионов с электронным газом.

Сравнение ковалентной и металлической связей

Как видим, металлическая связь имеет сходство с валентной связью, так как в их основе лежит обобществление внешних валентных электронов. Однако в случае валентной связи в обобществлении электронов участвуют пары атомов, являющиеся ближайшими соседями, и обобществлению подвергаются только пары электронов; эти электроны все время находятся между атомами. В случае же металлической связи в обобществлении электронов участвуют все атомы кристалла и обобществленные электроны не локализуются уже у своих атомов, а свободно перемещаются внутри всей решетки.

Распределение электронов в металле при абсолютном нуле

- Металл является для электронов потенциальной ямой.



Из (3.34) видно, что при $E = \mu$ функция распределения $f_F(E) = 1/2$ при любой температуре $T \neq 0$. Поэтому со статистической точки зрения уровень Ферми представляет собой энергетический уровень, вероятность заполнения которого равна $1/2$.

Металл как потенциальная яма. Уровень Ферми

- Если электронный газ содержит N электронов, то последний занятый уровень $N/2$. Этот уровень называется **уровнем Ферми**. Он соответствует максимальной кинетической энергии E_F , которой может обладать электрон в металле при абсолютном нуле. Эта энергия называется **энергией Ферми**.

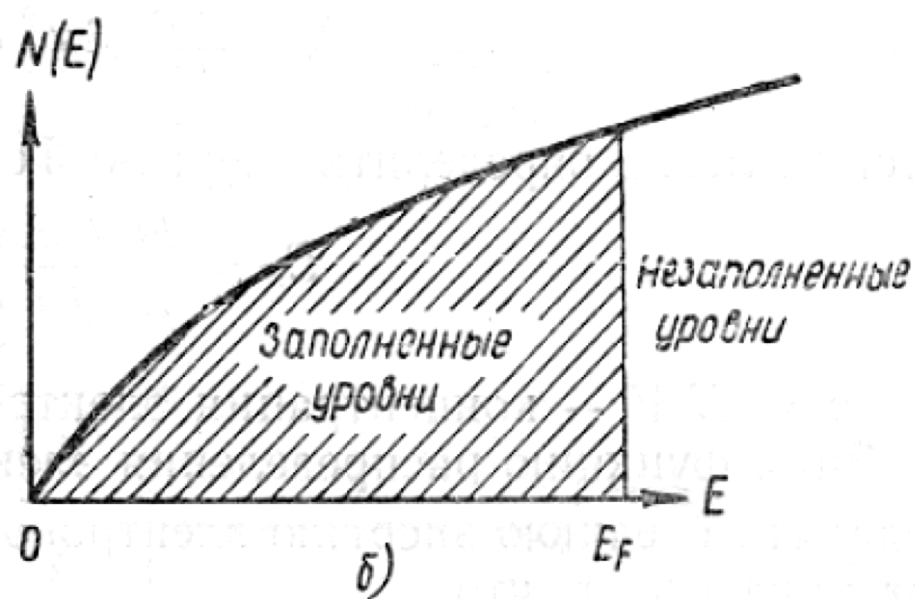
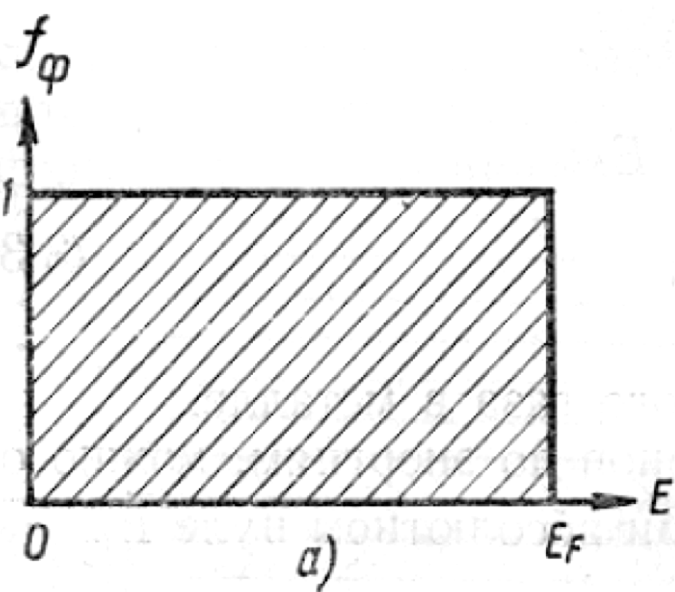
Распределение Ферми-Дирака для свободных электронов

$$\mu = \varepsilon_F; \quad \langle n \rangle = \frac{2}{\exp[(\varepsilon - \varepsilon_F)/(k_B T)] + 1};$$

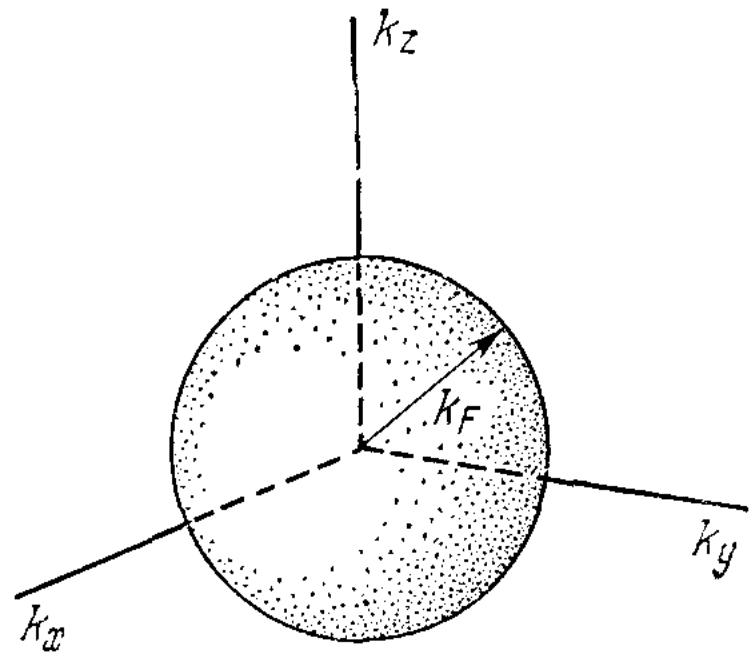
$$\langle n \rangle = 2, \quad \text{если} \quad T = 0, \quad \varepsilon < \varepsilon_F;$$

$$\langle n \rangle = 0, \quad \text{если} \quad T = 0, \quad \varepsilon > \varepsilon_F;$$

$$\langle n \rangle = 1, \quad \text{если} \quad T = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_F.$$



Сфера Ферми



Полная функция распределения Ферми-Дирака при абсолютном нуле

$$N(E)dE = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до E_F , получим

$$N = \frac{8\pi V}{3h^3} E_F^{3/2} (2m)^{3/2}.$$

Отсюда

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3},$$

Средняя энергия, максимальная скорость и средняя квадратичная скорость электронов

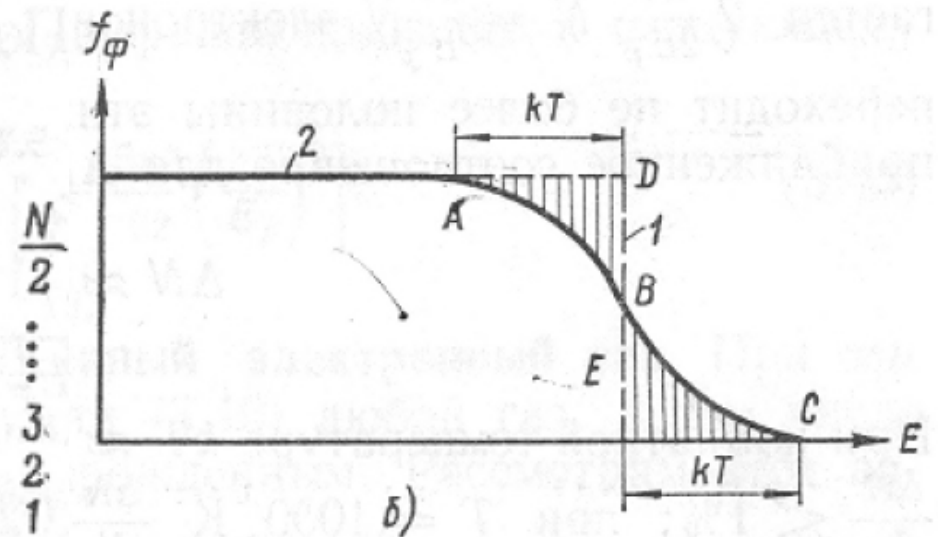
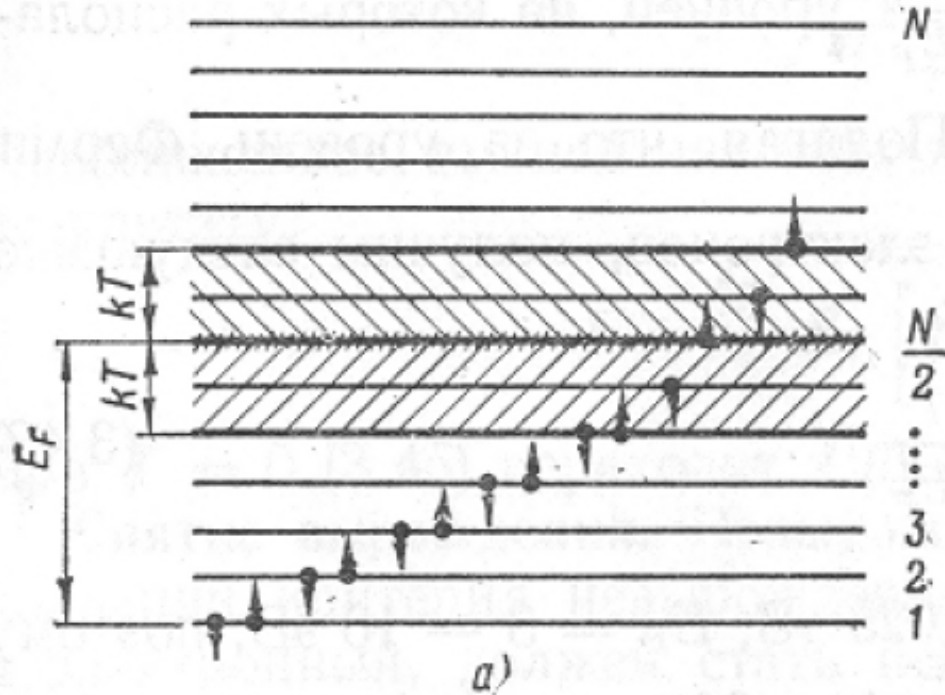
$$\bar{E}_0 = \frac{3}{5} E_F = \frac{3h^2}{10m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}.$$

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}, \quad v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{2\bar{E}_0}{m}}.$$

$$T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

Металл	E_F , эВ	E_0 , эВ	v_F , 10^6 м/с	v_{KB} , 10^6 м/с	T_F , 10^4 К
Литий	4.72	2.8	1.3	1	5.5
Натрий	3.12	1.9	1.1	0.85	3.7
Медь	7.1	4.3	1.6	1.25	8.2
Серебро	5.5	3.3	1.4	1.1	6.4

Влияние температуры на распределение Ферми-Дирака



- В интервале энергий от 0 до E_F находятся $N/2$ уровней энергии. Расстояние между уровнями оценим как

$$\Delta\varepsilon = \frac{E_F}{N/2} = \frac{2E_F}{N}$$

- Термическому возбуждению подвергаются электроны полосы $k_B T$. Количество уровней в этой полосе равно

$$\frac{k_B T}{\Delta\varepsilon} = \frac{k_B T N}{2E_F}$$

- Количество электронов на этих уровнях равно

$$2 \frac{k_B T N}{2E_F} = \frac{k_B T N}{E_F}$$

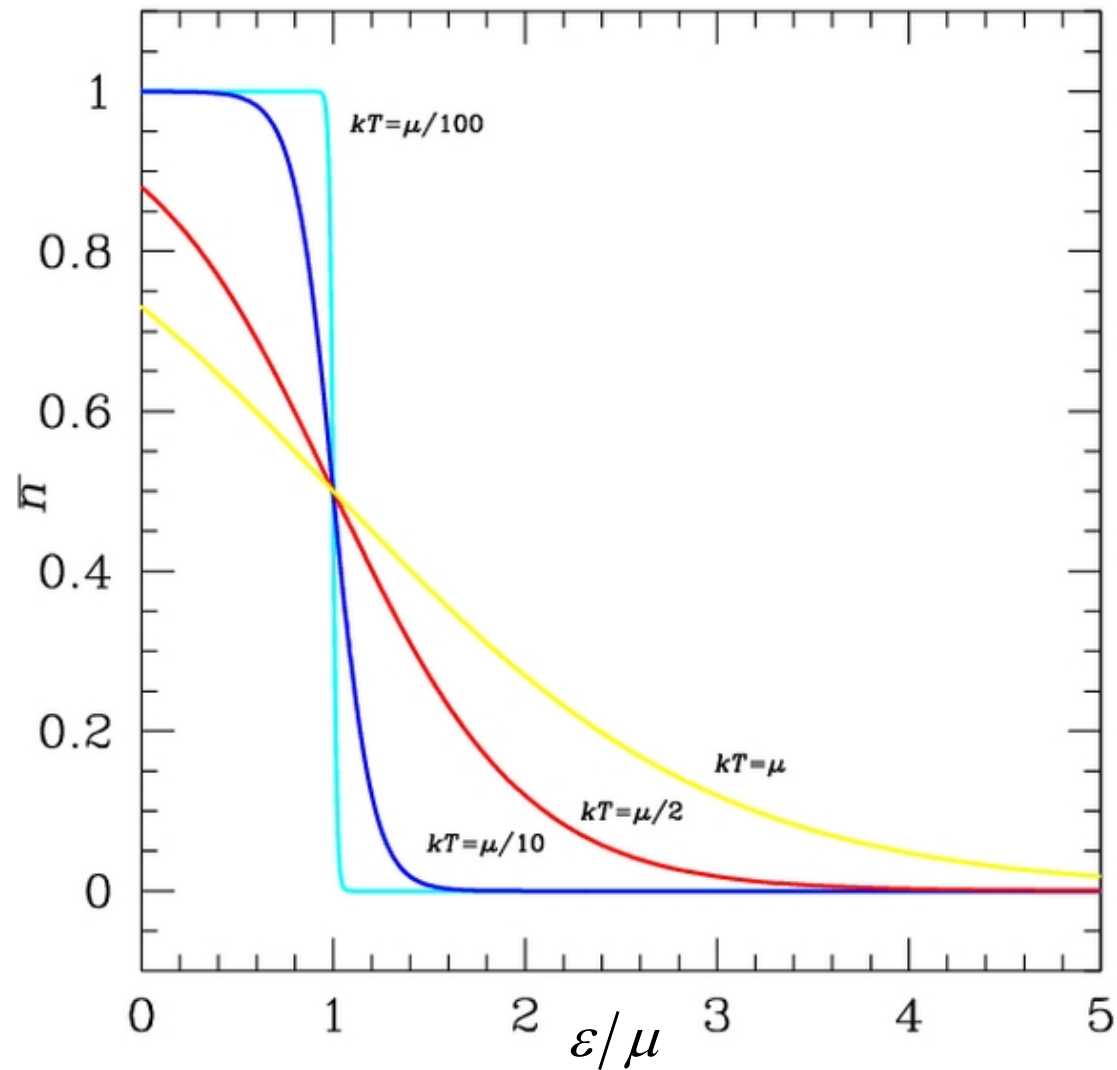
- Примем, что за уровень Ферми переходит половина этих электронов.

$$\Delta N \approx \frac{k_{\text{Б}} T}{2E_{\text{F}}} N \quad k_{\text{Б}} T \approx 0.025 \text{ эВ} \quad E_{\text{F}} = 3 \div 10 \text{ эВ}$$

- При комнатной температуре

$$\frac{\Delta N}{N} < 1\%$$

Зависимость распределения Ферми-Дирака от ε/μ



Зависимость химического потенциала от температуры

$$\begin{aligned}\mu &= E_F \sum_{n=0,1,2,\dots} \left[(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n+1)} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^{2n} \right] = \\ &= E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 + \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^4 + \dots \right].\end{aligned}$$

Кинетическое уравнение Больцмана

- Воспользуемся шестимерным μ -пространством. Только вместо импульса $\mathbf{p}$ возьмём скорость $\mathbf{v}$.
- Функция распределения определяется соотношением
$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \text{число частиц в объёме } d\mathbf{r} d\mathbf{v} \quad (1)$$
- Скорость изменения этой функции со временем df/dt определяется перемещением частиц и их столкновениями:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{перем}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} \quad (2)$$

Предположим, что число частиц сохраняется. Если это не так, то в правую часть (2) следует добавить члены, связанные с образованием и рекомбинацией частиц. Введение добавочных членов необходимо, например, в теории полупроводников и в теории ядерных реакторов.

Теорема Лиувилля

Теорема Лиувилля

- Пусть функция распределения зависит от времени. Если следовать в фазовом пространстве вдоль линии тока и не учитывать столкновения, то
- $f(t + dt, \vec{r} + d\vec{r}, \vec{v} + d\vec{v}) = f(t, \vec{r}, \vec{v}) \quad (3)$
- С учётом столкновений получаем

$$f(t + dt, \vec{r} + d\vec{r}, \vec{v} + d\vec{v}) - f(t, \vec{r}, \vec{v}) = dt \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столкн}}$$

- Здесь правая часть определяет влияние столкновений. Таким образом,

$$dt \frac{\partial f}{\partial t} + d\vec{r} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} f + d\vec{v} \cdot \text{grad}_{\vec{v}} f = dt \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столкн}}$$

Уравнение Больцмана в общем виде

Обозначая ускорение $d\mathbf{v}/dt$ через $\mathbf{a}$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} f + \vec{a} \cdot \text{grad}_{\vec{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} \quad (4)$$

Ускорение можно выразить через внешнюю силу, действующую на частицу.

где f_0 — функция распределения в тепловом равновесии.

Уравнение переноса Больцмана в приближении времени релаксации

- По определению $\partial f_0 / \partial t = 0$, поэтому
$$\frac{\partial(f - f_0)}{\partial t} = -\frac{f - f_0}{\tau}$$

- Решение этого уравнения имеет вид

$$(f - f_0)_t = (f - f_0)_{t=0} \exp(-t/\tau) \quad (5)$$

- Подставляя (5) в правую часть уравнения (4), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} f + \vec{\alpha} \cdot \text{grad}_{\vec{v}} f = -\frac{f - f_0}{\tau}$$

- В стационарном состоянии $\partial f / \partial t = 0$.

Столкновительный член

Таким образом, член, ответственный за столкновения в приближении времени релаксации имеет вид:

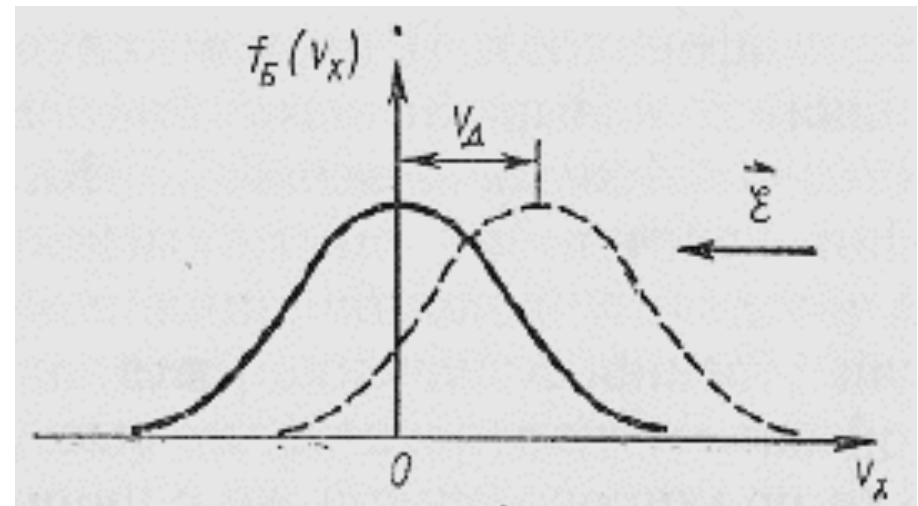
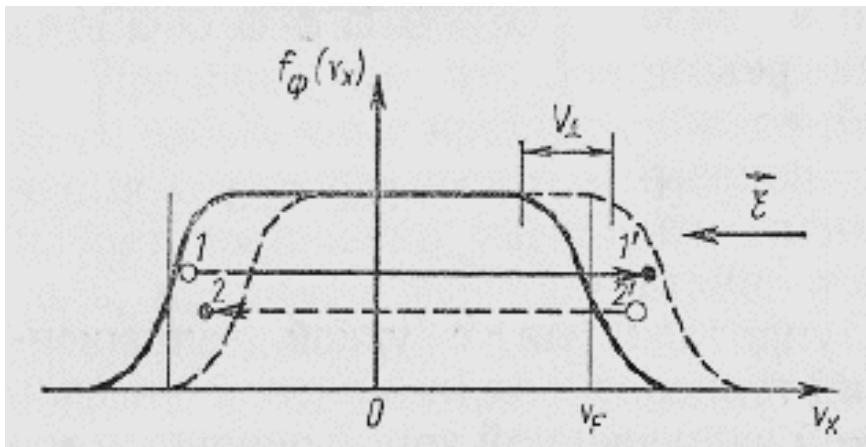
$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} = - \frac{f - f_0}{\tau},$$

где f_0 — функция распределения в тепловом равновесии, τ — время релаксации.

Для многих задач можно приближенно ввести время релаксации $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.

Равновесное состояние электронного газа в проводнике в отсутствие электрического поля

Описывается равновесными функциями распределения:
вырожденный – функцией распределения Ферми-Дирака



Невырожденный – функцией распределения Максвелла-Больцмана.

Электропроводность электронного газа

- Пусть в образце в направлении x приложено электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$ и имеется температурный градиент $d\theta/dx$. Здесь $\theta = k_B T$. Ограничимся стационарным случаем $\partial f / \partial t = 0$. Тогда для частицы с зарядом q и массой m имеем:

$$\frac{qE}{m} \frac{\partial f}{\partial u} + u \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{f - f_0}{\tau} \quad (6)$$

- Здесь ускорение равно $\alpha = \frac{qE}{m}$
- Уравнение (6) можно переписать в виде

$$f = f_0 - \tau \left(\frac{qE}{m} \frac{\partial f}{\partial u} + u \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (7)$$

Здесь $v_x = u$

В первом приближении в правой части выражения (7) f можно заменить на f_0 :

$$f = f_0 - \tau \left(\frac{qE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial u} + u \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) \quad (8)$$

Функция f_0 зависит от энергии частицы ε , химического потенциала μ и температуры θ . Энергия частицы зависит от её скорости u :

$$\varepsilon = \frac{mu^2}{2}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial u} = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} = mu \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$$

Электропроводность

Обычно электропроводность определяется при условиях

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad \text{Здесь } n \text{ — концентрация носителей заряда.}$$

Тогда $\partial f_0 / \partial x = 0$ и уравнение (8) сводится к соотношению

$$f = f_0 - \tau q E u \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$$

Плотность электрического тока

- Плотность электрического тока для частиц с зарядом q определяется соотношением

- $$j_q = \int q u f d v = -\tau q^2 E \int u^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) d v, \quad (9)$$

- поскольку $\int u f_0 d v = 0$.

- В случае распределения Максвелла

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m v^2}{2\theta} \right),$$

- и $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{\theta} f_0$ следовательно, согласно (9)

$$j_q = \frac{\tau q^2 E}{\theta} \int u^2 f_0 d v$$

Кинетическая энергия движения в x -направлении равна

$$\frac{1}{2} m \int u^2 f_0 dv = \frac{1}{2} n \theta,$$

Так что

$$j_q = \frac{nq^2\tau}{m} E. \quad (10)$$

Удельная электрическая проводимость равна $\sigma = j_q / E$

или

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}.$$

Дрейфовая скорость и подвижность

- С другой стороны, по определению

$$j_q = qn v_d \quad (11)$$

- Из формул (10) и (11) следует, что

$$v_d = \frac{q E \tau}{m}$$

- Отношение v_d к E называют подвижностью носителей:

$$b = \frac{v_d}{E} = \frac{q \tau}{m} \quad (12)$$

- Для электронов $b < 0$, для дырок $b > 0$. $[m^2/(c \cdot V)]$

Время релаксации

- Выключим электрическое поле. Исходя из уравнения (5а), получим уравнение перехода электронного газа в равновесное состояние – процесс его релаксации:

$$\frac{dv_d(t)}{dt} = -\frac{v_d(t)}{\tau}$$

- Интегрируя это уравнение, находим

$$v_d(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Из этого уравнения следует, что за время τ скорость уменьшается в $e \approx 2.7$ раза. Это время называется временем релаксации. Для чистых металлов $\tau \approx 10^{-14}$ с.

Длина свободного пробега

- Средний отрезок пути λ , который проходит электрон между двумя последовательными рассеяниями, называется *длиной свободного пробега*.
- За время релаксации электрон успевает претерпеть, в среднем, ν рассеяний, поэтому вводят *среднюю транспортную длину свободного пробега* L :

$$L = \lambda \nu = v \tau$$

- Отсюда следует, что

$$\tau = \frac{\lambda \nu}{v} \quad (13)$$

Удельная электропроводность проводника

Удельная электропроводность проводника — физическая величина, характеризующая способность проводника проводить электрический ток.

Обозначается буквой σ (сигма) и измеряется в См/м (сименс на метр).

Удельная электропроводность проводника обратно пропорциональна удельному электрическому сопротивлению ρ :

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

Удельная электропроводность проводника зависит от температуры, концентрации носителей заряда и других факторов.

Удельная электропроводность проводника является важной характеристикой для расчета электрических цепей и проектирования электронных устройств.

Удельная электропроводность проводника является одной из основных характеристик проводящих материалов.

Удельная электропроводность проводника является важной характеристикой для расчета электрических цепей и проектирования электронных устройств.

Постоянный электрический ток

- Если через некоторую воображаемую поверхность переносится суммарный заряд, отличный от нуля, говорят, что через эту поверхность течёт электрический ток.
- Заряженные частицы – носители тока.
- При включении поля на хаотическое движение носителей со скоростью $\vec{v}$ накладывается упорядоченное движение со скоростью $\vec{u}$.
- Скорость носителей:

$$\vec{v} + \vec{u}$$

Среднее значение скорости носителей тока

$$\langle \vec{v} + \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \rangle = \mathbf{v}_d$$

- Сила тока – равна величине заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Сила тока измеряется в амперах

Андре-Мари Ампер



$$1\text{A}=1\text{Кл}/1\text{с}$$

1775 - 1836

Направление тока

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{|dq^-|}{dt}$$

Плотность тока

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

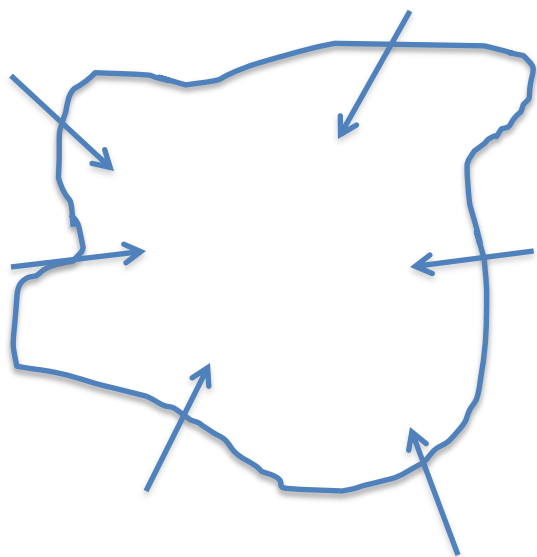
За направление вектора $\vec{j}$ принимается направление вектора скорости u^+ (или $-u^-$)

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

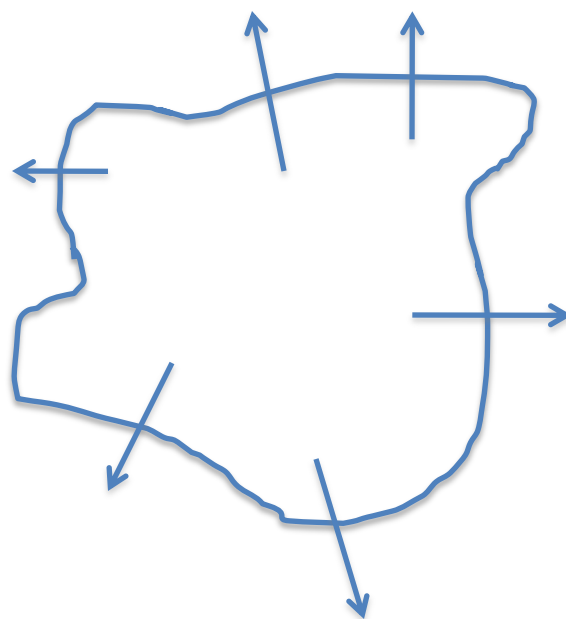
Постоянный ток

- Ток, не изменяющийся со временем, называется постоянным:

$$I = \frac{q}{t}$$



$$\frac{dq}{dt} > 0$$



$$\frac{dq}{dt} < 0$$

Уравнение непрерывности

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\int_V \nabla \vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Для постоянного тока $\nabla \vec{j} = 0$

Дивергенция плотности тока

- По определению

$$\nabla \vec{j} = \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

- Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Закон Ома



1787 – 1854

- 1827 г.

$$I = \frac{U}{R}$$

- R – сопротивление; $[R] = \text{вольт/ампер} = \text{ом}$
- $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/1 А}$

Закон Ома в дифференциальной форме:

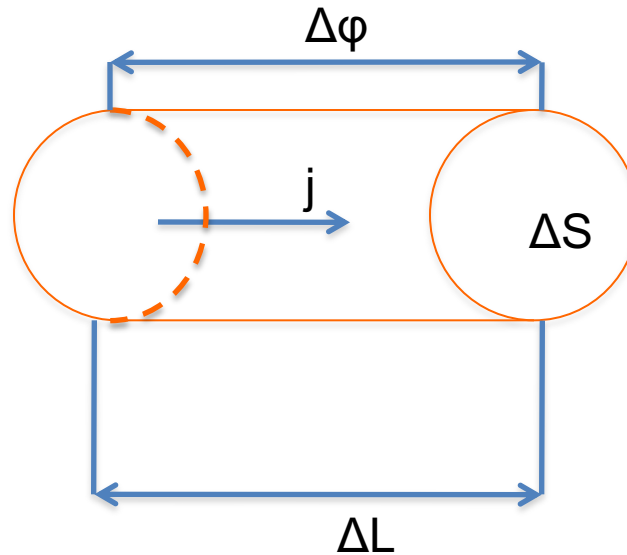
$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Электрическая проводимость

- σ – удельная электрическая проводимость
- $[\sigma] = 1/\text{Ом} \cdot \text{м} = \text{См/м}$
- См – сименс
- Электрическая проводимость:
- $Y = 1/R = 1/\text{Ом} = \text{См}$

Вывод закона Ома в дифференциальной форме

- Элемент проводника



Продолжение

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta L}{\Delta S} \quad I = j \Delta S \quad \Delta \varphi = j \Delta S \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta L}{\Delta S}$$

$$E = \frac{\Delta \varphi}{\Delta L} \quad \boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \quad (14)$$

Удельное электрическое сопротивление

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad [\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$$

Сопоставим формулу (14) с (11) и учтём (12). Получим

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}_d = qnb\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$$

Отсюда следует, что

$$\sigma = qnb \quad (15)$$

Подставляя сюда b из (12) и τ из (13), получим

$$\sigma = \frac{nq^2}{m} \tau = \frac{nq^2}{m} \frac{\lambda \nu}{\nu} \quad (16)$$

Электропроводность невырожденного газа

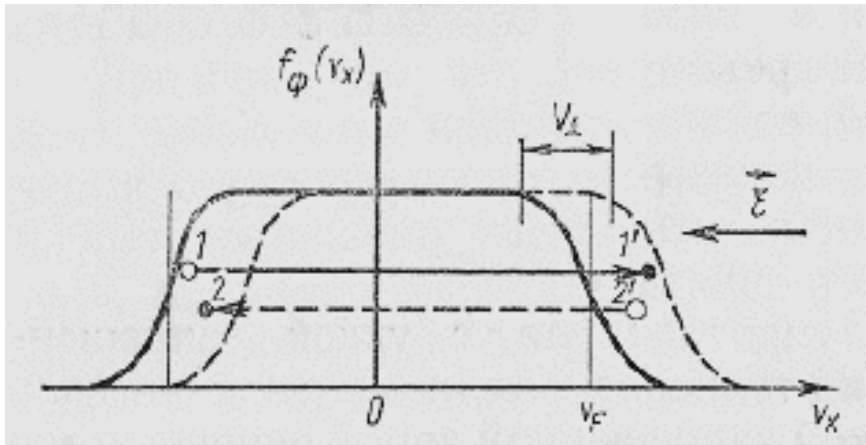
- В случае **невырожденного** газа электронов в зоне проводимости мало, поэтому встречаются друг с другом они редко и принцип Паули не играет существенной роли:

$$b = \frac{q \langle \tau \rangle}{m} = \frac{q}{m} \frac{\langle \lambda \rangle \langle \nu \rangle}{\langle \nu \rangle}$$

$$\sigma = \frac{nq^2}{m} \langle \tau \rangle = \frac{nq^2}{m} \frac{\langle \lambda \rangle \langle \nu \rangle}{\langle \nu \rangle}$$

Электропроводность вырожденного газа

- Для вырожденного газа все квантовые состояния, расположенные левее v_F заняты электронами.



$$b = \frac{q\tau_F}{m} = \frac{q\lambda_F v_F}{v_F}$$

$$\sigma = \frac{q^2 n}{m} \tau_F = \frac{q^2 n}{m} \frac{\lambda_F v_F}{v_F}$$

- Поэтому за время релаксации надо брать время релаксации электронов с энергией Ферми или рядом.

