

А.В. Баранов



НГТУ НЭТИ

# *Электромагнитные волны*

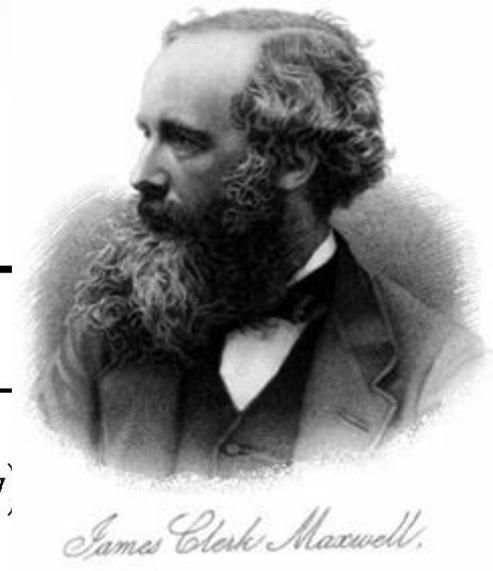


# Вопросы

1. Волновое уравнение.
2. Плоские гармонические ЭМ волны.
3. Вектор Пойнтинга.
4. Импеданс. ЭМ волны на границе раздела сред.
5. Стоячие ЭМ волны.

# 1. Волновое уравнение

## Уравнения Максвелла



Point Form	Integral Form
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$ (Ampère's law)
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$ (Faraday's law; $S$ fixed)
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dv$ (Gauss' law)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ (nonexistence of monopole)

# 1. Волновое уравнение

## Оператор Гамильтона или набла

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \nabla \vec{A} = i \frac{\partial A_x}{\partial x} + j \frac{\partial A_y}{\partial y} + k \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

# 1. Волновое уравнение

Анализируем ЭМ поле в непрерывной, однородной и изотропной среде при отсутствии свободных зарядов.

Два первых уравнения в дифф.форме:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{d\mathbf{H}}{dt}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt},$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\mu_0 \nabla \times \frac{d\mathbf{H}}{dt} = -\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2 \mathbf{E}}{dt^2}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Very useful rule  
Prove it!

- Using this rule,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

= 0

# 1. Волновое уравнение

Получаем **волновое уравнение** для электрической составляющей ЭМ поля  $E$ :

$$\nabla^2 E = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{d^2 E}{dt^2}$$

Аналогично получаем **волновое уравнение** для магнитной составляющей ЭМ поля  $H$ :

$$\nabla^2 H = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{d^2 H}{dt^2}$$

Фазовая и групповая скорости ЭМ волн **в среде без дисперсии**:

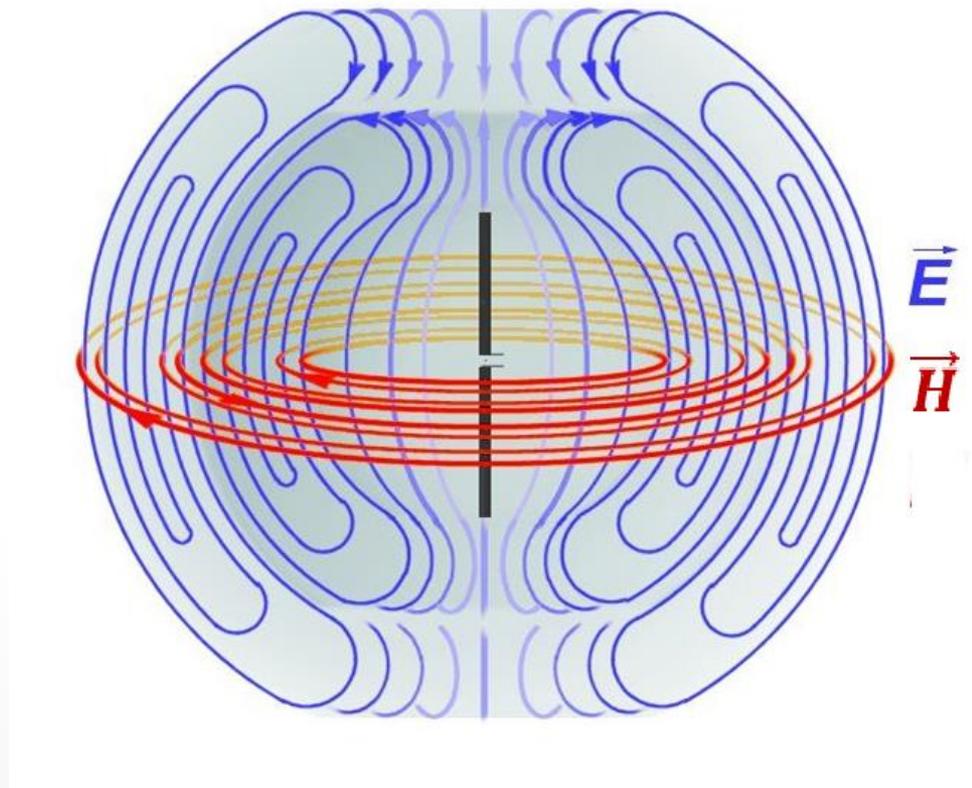
$$V_\phi = V_{\text{гр}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$  м/с - скорость ЭМ волн в вакууме.

$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$  - показатель преломления среды для ЭМ волн.

# 1. Волновое уравнение

## Источник и электромагнитная волна



## 2. Плоские гармонические ЭМ волны

Для плоских волн в направлении  $x$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dx^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{d^2 \mathbf{E}}{dt^2}, \quad \frac{d^2 \mathbf{H}}{dx^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{d^2 \mathbf{H}}{dt^2}.$$

Решения в форме плоских гармонических волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

Уравнения Максвелла приводят к результатам для ЭМ волн:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} \perp \mathbf{k},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \mu_0 \frac{d\mathbf{H}}{dt} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu \mu_0 \omega \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\varepsilon \varepsilon_0 \omega \mathbf{E}$$

$\mathbf{E}$  and  $\mathbf{H}$  are perpendicular to each other

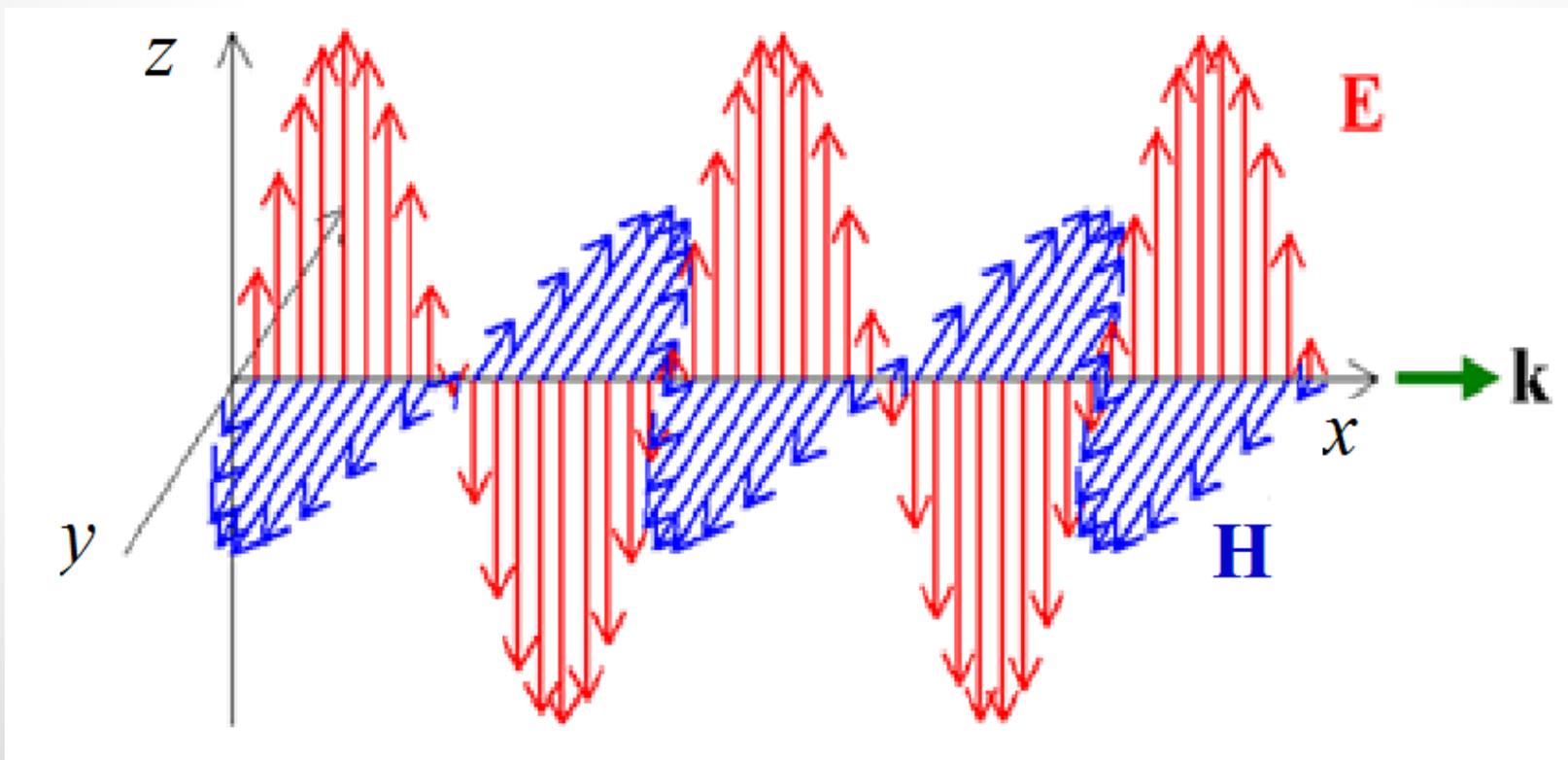
**Модули векторов связаны:**  $|\mathbf{E}| = \frac{\mu \mu_0 \omega}{k} |\mathbf{H}| = \mu \mu_0 V_\Phi |\mathbf{H}| = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} |\mathbf{H}|$

## 2. Плоские гармонические ЭМ волны

В проекциях на координатные оси:

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad H_y = H_0 \cos(\omega t - kx).$$

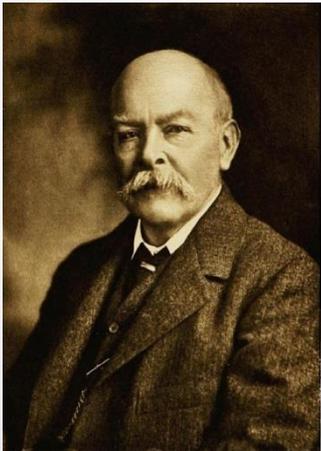
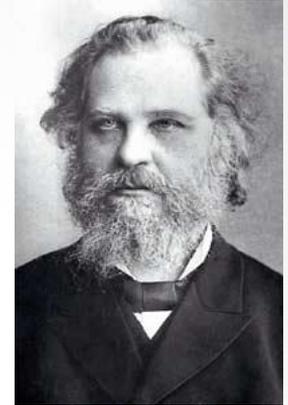
ЭМ волны поперечные !!!



# 3. Вектор Пойнтинга

Представление о потоке энергии в пространстве впервые было введено Н.А. Умовым в 1874 г.

Вектор плотности потока энергии *без конкретизации физической природы* называется вектором Умова.



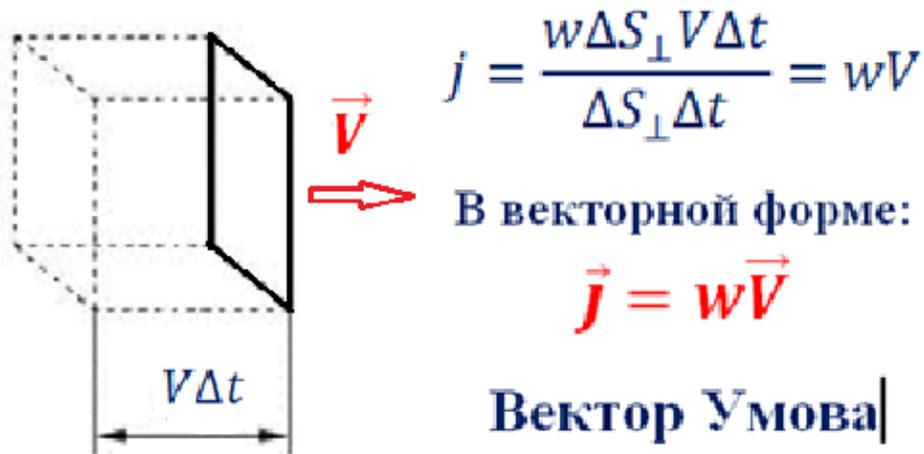
В 1884 году идеи Умова были разработаны Д.Г. Пойнтингом применительно к электромагнитной энергии.

Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется вектором Пойнтинга.

# 3. Вектор Пойнтинга

## Вектор Умова

Через площадь  $\Delta S_{\perp}$  время  $\Delta t$  переносится энергия, равная  $w\Delta S_{\perp}V\Delta t$ , где  $w$  – объемная плотность энергии. Определим значение энергии, *переносимой через единицу площади за единицу времени*:



Вектор определен Н.А.Умовым в 1874 году для упругих волн.

# 3. Вектор Пойнтинга

Объемная плотность энергии ЭМ волны определяется двумя составляющими – электрической и магнитной:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

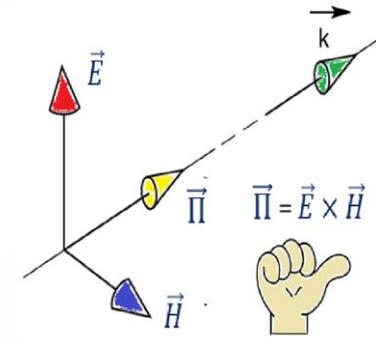
Из соотношения  $|E| = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} |H|$  получаем:  $\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$ .

**Тогда:**  $w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} E H$

Вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга):

$$\vec{\Pi} = w \cdot \vec{V}_{\text{гр}} = \vec{E} \times \vec{H}$$

*Правая тройка векторов!*



# 3. Вектор Пойнтинга

Направление вектора Пойнтинга определяет направление переноса энергии ЭМ волной.

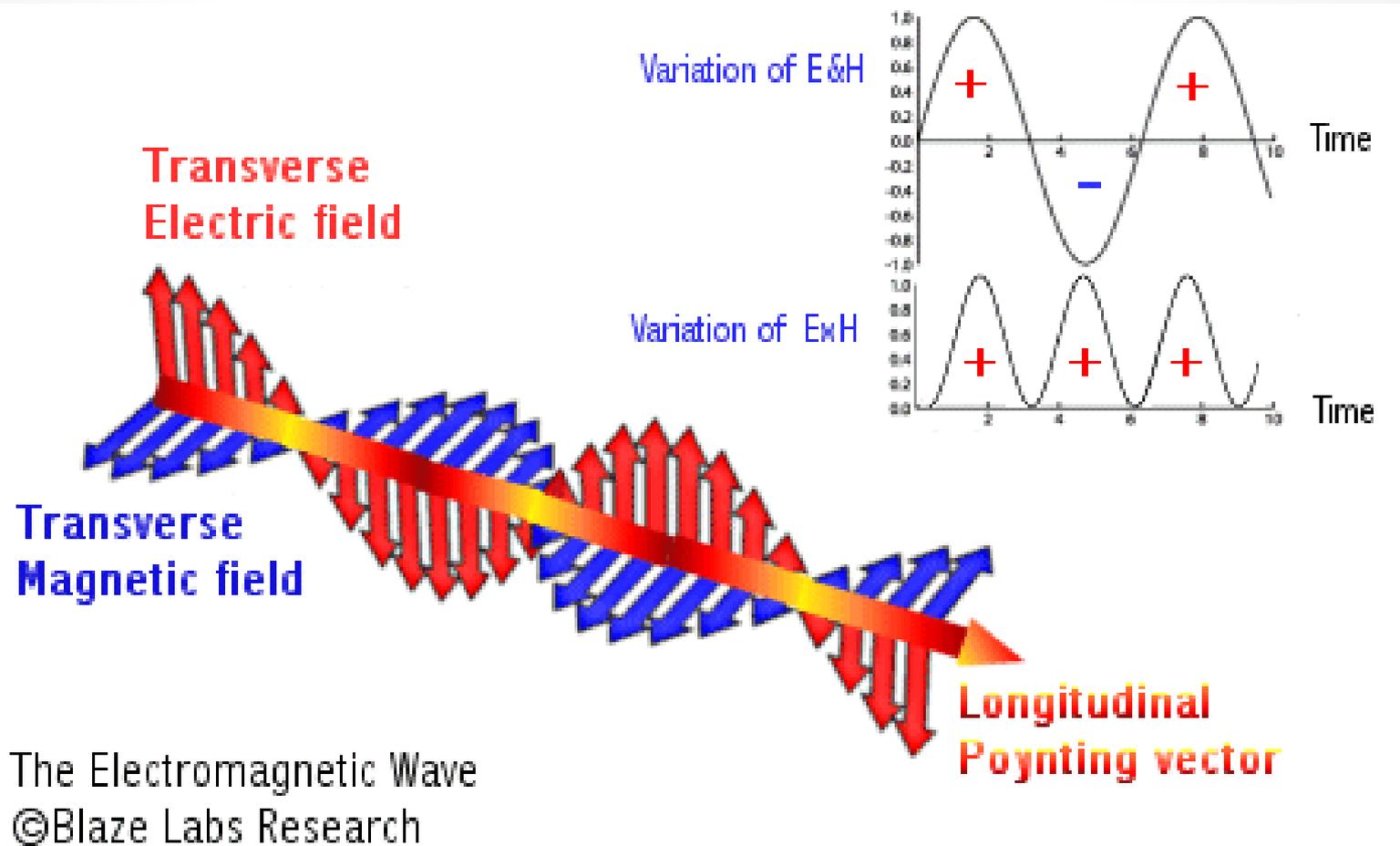
Модуль вектора Пойнтинга численно равен количеству энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадь, нормальную к  $\Pi$ .

$$\Pi = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kx) = E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \cos^2(\omega t - kx).$$

Среднее за период значение модуля вектора Пойнтинга называется интенсивностью электромагнитной волны:

$$I = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \quad \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$$

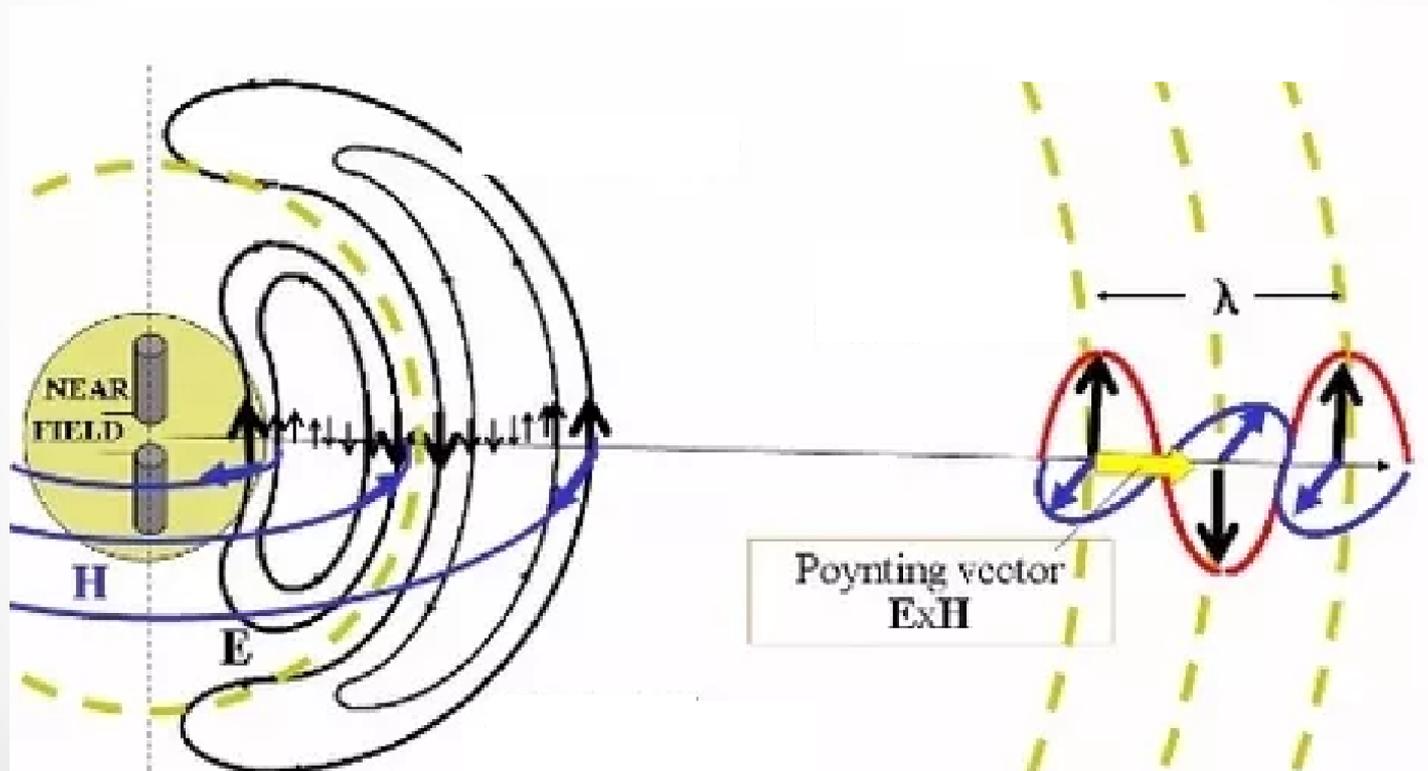
# 3. Вектор Пойнтинга



# 3. Вектор Пойнтинга

Поток энергии электромагнитной волны через произвольную поверхность можно рассчитать, если вектор Пойнтинга известен в каждой точке поверхности:

$$\Phi = \iint \vec{\Pi}(x, y, z) d\vec{S} .$$



# 4. Характеристический импеданс. ЭМ волны на границе раздела сред

**Характеристический импеданс определяли для струны:**

$$\hat{Z} = \frac{F_y}{V_y} \Rightarrow \frac{\text{Воздействие}}{\text{Отклик}} \Rightarrow \frac{\text{Потенциальная энергия}}{\text{Кинетическая энергия}}$$

**По аналогии для ЭМ волны:**

$$\hat{Z} = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \quad \left[ \frac{\text{В/м}}{\text{А/м}} \right] = [\text{Ом}]$$

**Использовали равенство:**

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$$

## 4. Характеристический импеданс. ЭМ волны на границе раздела сред

Характеристический импеданс вакуума для ЭМ волн:

$$Z_0 = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \text{ Ом}.$$

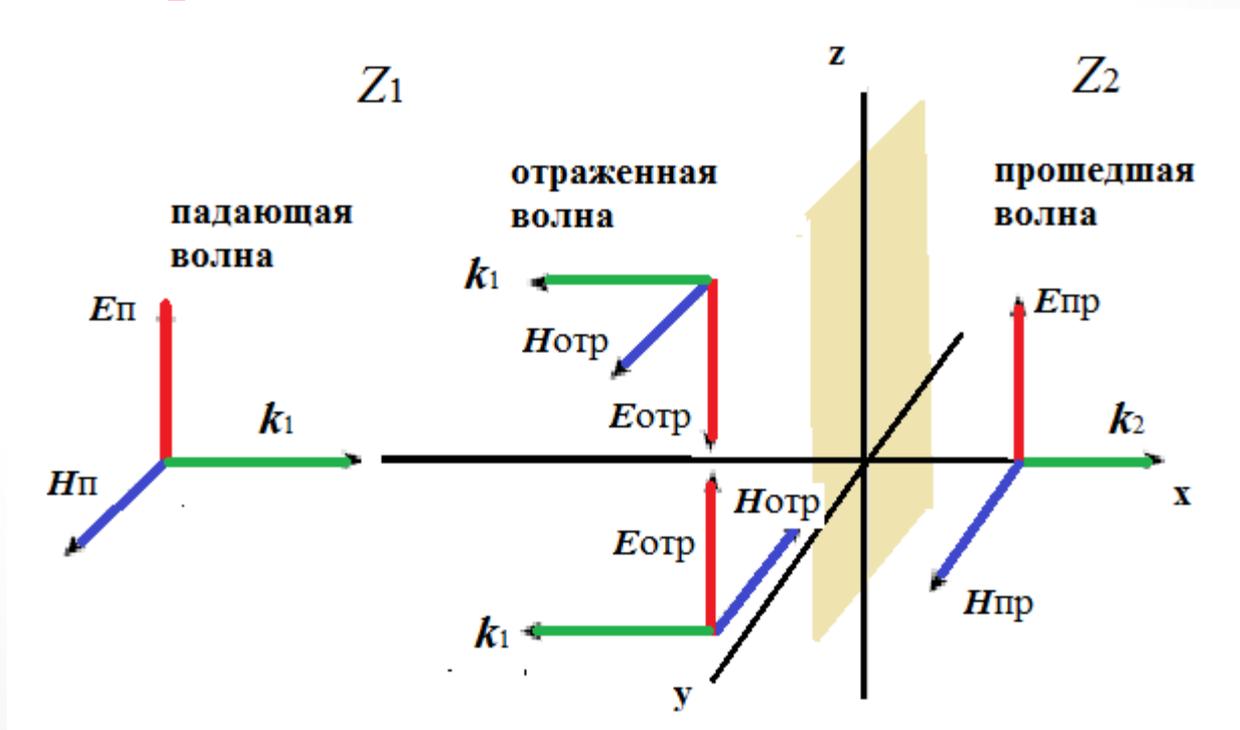
**Отношение импедансов:**

$$\frac{Z}{Z_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{n}.$$

# 4. Характеристический импеданс. ЭМ волны на границе раздела сред

Отражение плоской гармонической волны от границы раздела двух диэлектриков.

*Два варианта отражения!*



# 4. Характеристический импеданс. ЭМ волны на границе раздела сред

**Условия для полей на границе раздела:**

$$E_{\Pi} + E_{\text{отр}} = E_{\text{пр}}, H_{\Pi} + H_{\text{отр}} = H_{\text{пр}} .$$

**Воспользуемся определением импеданса:**

$$\frac{E_{\Pi}}{H_{\Pi}} = Z_1, \frac{E_{\text{отр}}}{H_{\text{отр}}} = -Z_1, \frac{E_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}} = Z_2 .$$

**Из этих соотношений получаем для электрической составляющей ЭМ волны:**

$$R_E = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\Pi}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{amplitude reflection coefficient}$$

$$T_E = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\Pi}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{amplitude transmission coefficient}$$

# 4. Характеристический импеданс. ЭМ волны на границе раздела сред

*Аналогично из этих же соотношений получаем для магнитной составляющей ЭМ волны:*

$$R_H = \frac{H_{\text{отгр}}}{H_{\text{п}}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{amplitude reflection coefficient}$$

$$T_H = \frac{H_{\text{пр}}}{H_{\text{п}}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{amplitude transmission coefficient}$$

***Варианты:***

- 1)  $Z_1 = Z_2$  - нет отражения.
- 2)  $Z_1 > Z_2$  - Е отражение в противофазе, Н в фазе.
- 3)  $Z_1 < Z_2$  - Е отражение в фазе, Н в противофазе.

# 4. Характеристический импеданс. ЭМ волны на границе раздела сред

**Коэффициенты можно выразить через показатели преломления сред:**

Например:

$$R_E = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{п}}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_2/Z_0 - Z_1/Z_0}{Z_1/Z_0 + Z_2/Z_0} =$$

$$\frac{1/n_2 - 1/n_1}{1/n_1 + 1/n_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

## 4. Характеристический импеданс. ЭМ волны на границе раздела сред

*В итоге получаем:*

$$R_E = \frac{E_{\text{отгр}}}{E_{\text{п}}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},$$

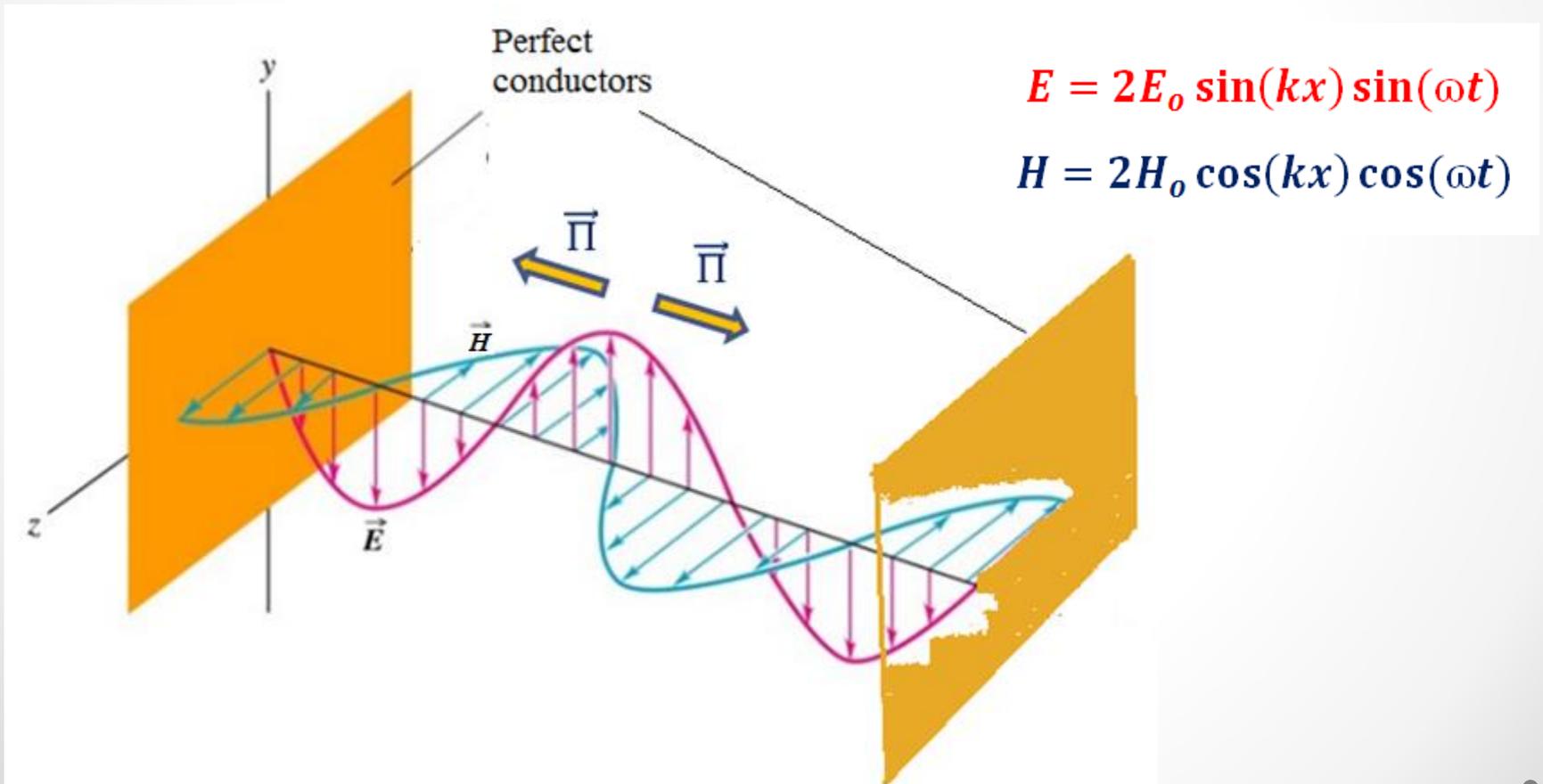
$$R_H = \frac{H_{\text{отгр}}}{H_{\text{п}}} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$$

$$T_E = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{п}}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2},$$

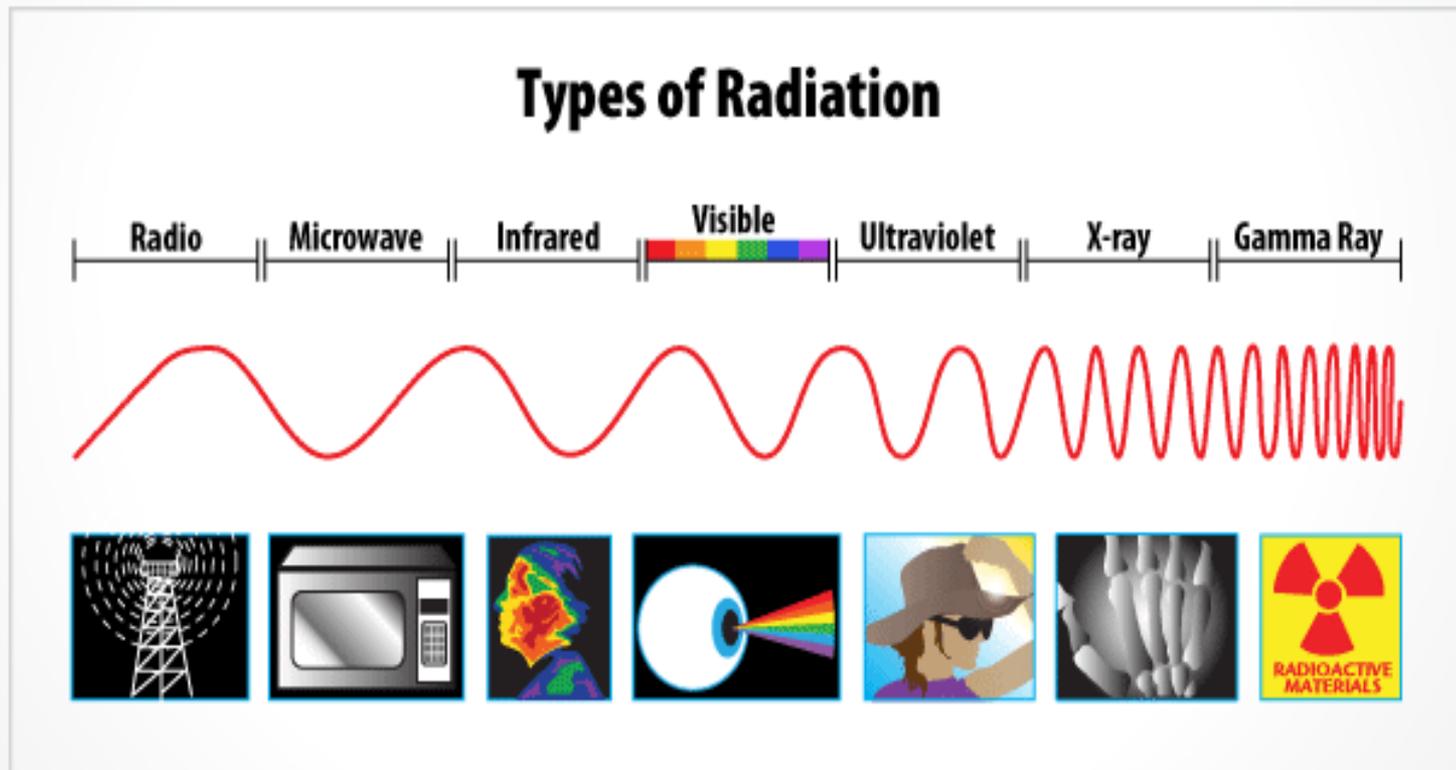
$$T_H = \frac{H_{\text{пр}}}{H_{\text{п}}} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$$

# 5. Стоячие ЭМ волны

Условие существования :  $L = n \frac{\lambda}{2}$ .



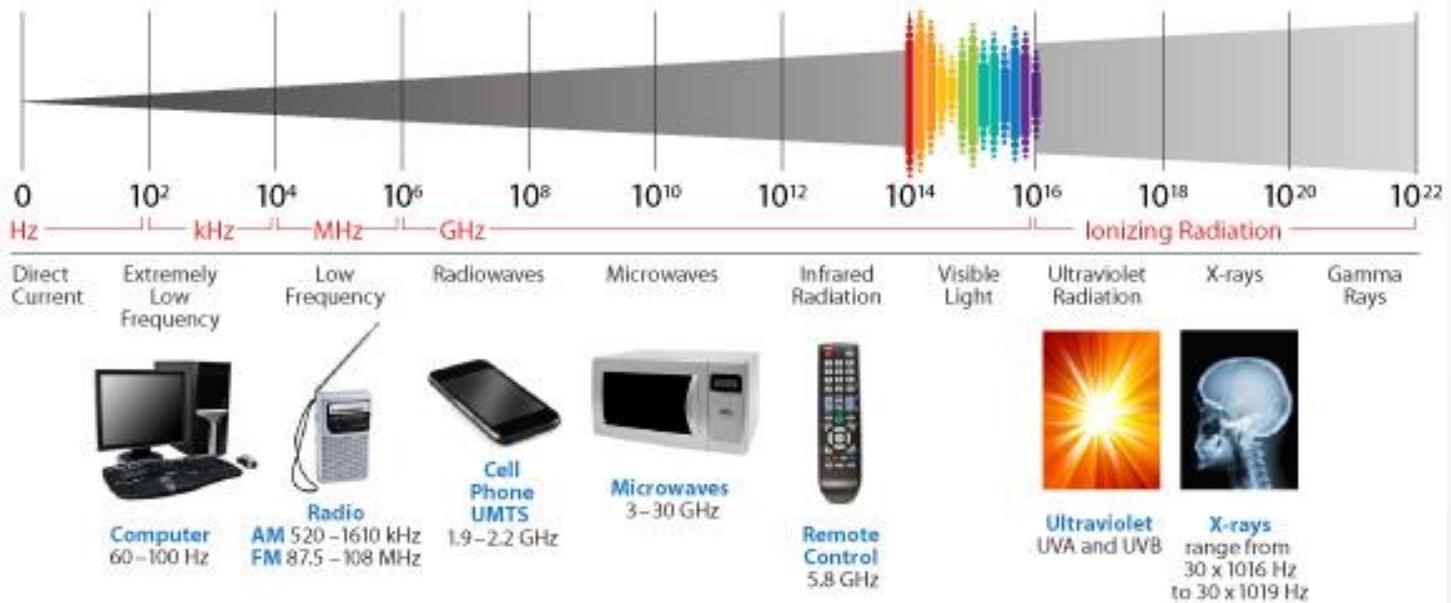
# 6. Диапазоны ЭМ излучения



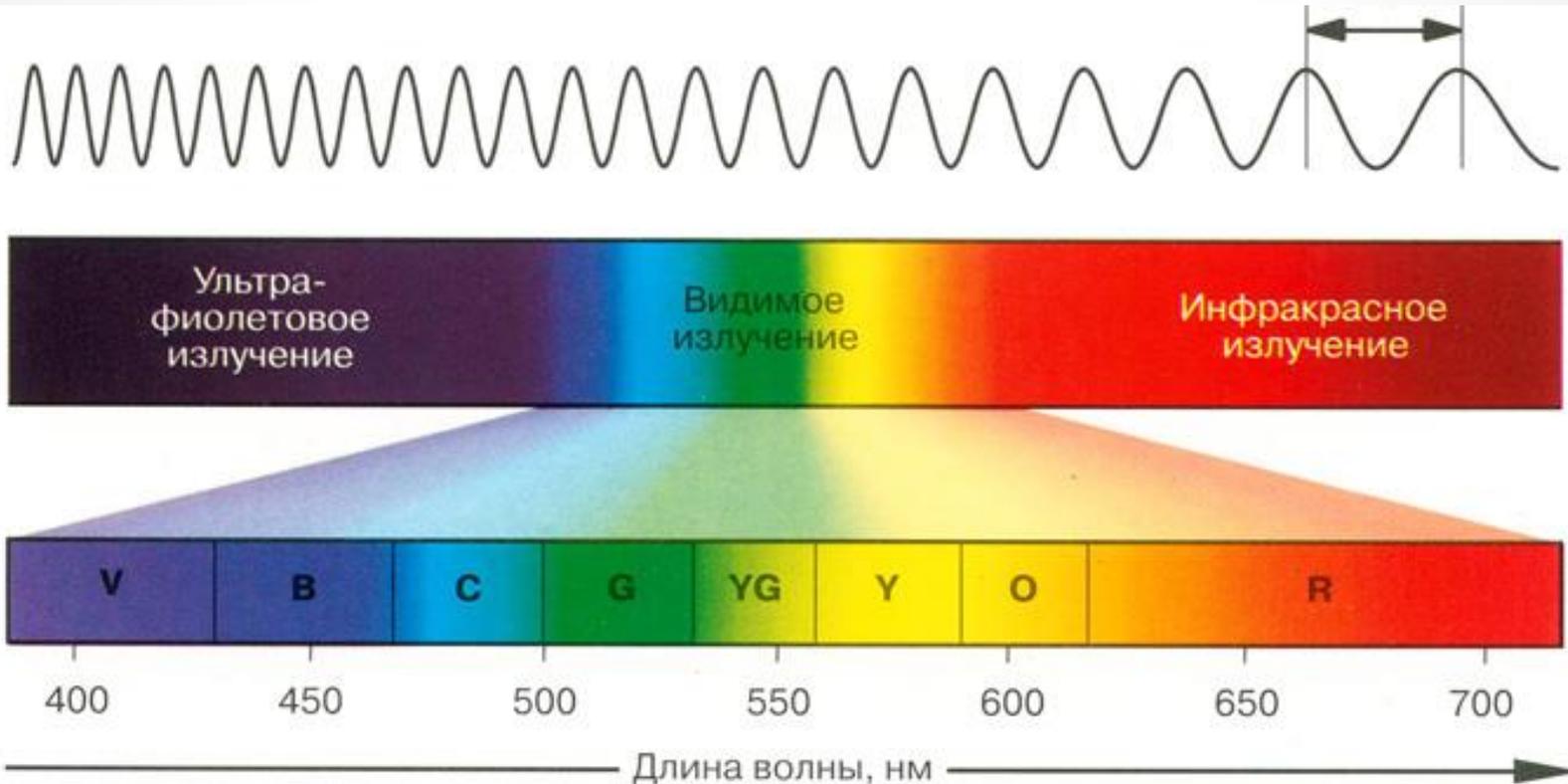
# 6. Диапазоны ЭМ излучения

## Electromagnetic Spectrum

Frequency (Hz)



# 6. Диапазоны ЭМ излучения



Оптический диапазон электромагнитных излучений и спектр видимого света

*Спасибо за внимание !*