



Волны

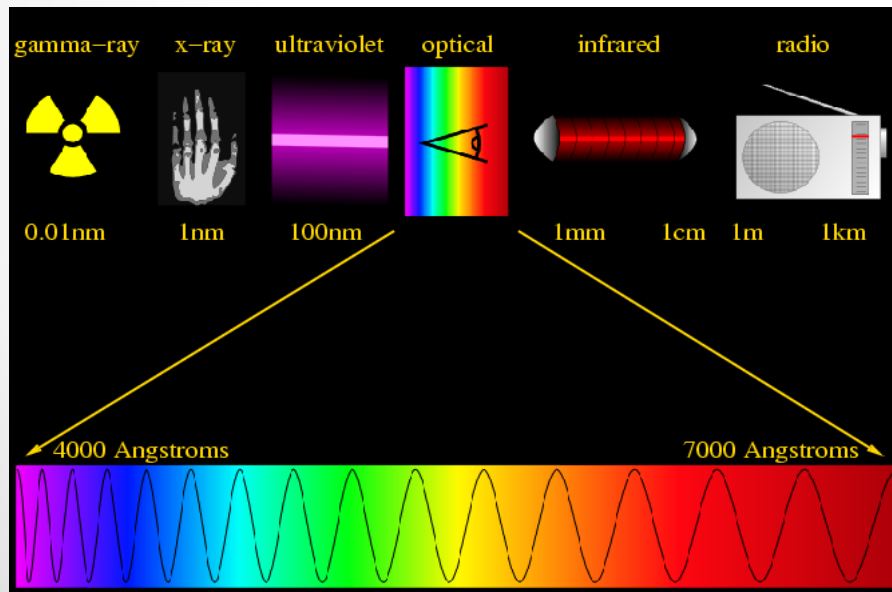
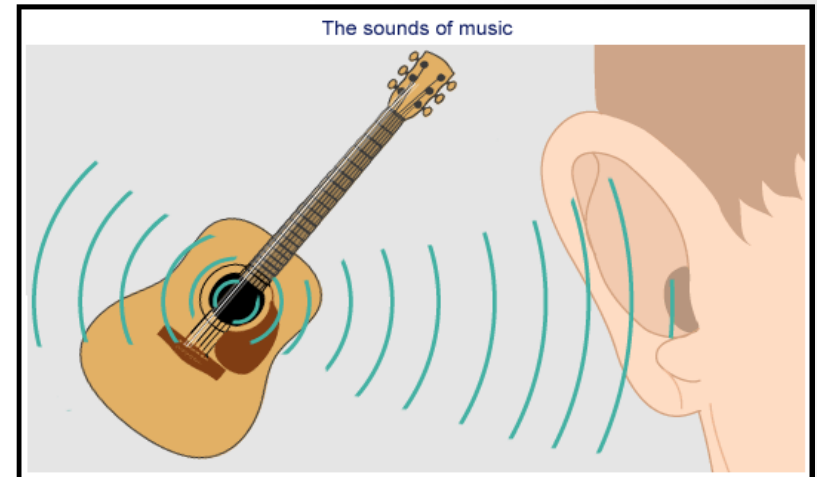


Вопросы

1. Волны и их разновидности.
2. Плоские гармонические волны.
3. Волновой пакет. Групповая скорость волн.
4. Стоячие волны.
5. Волновое уравнение.

1. Волны и их разновидности

Звуковые волны



Электромагнитные волны

1. Волны и их разновидности

Волны на воде



1. Волны и их разновидности

Волны на воде



1. Волны и их разновидности



1. Волны и их разновидности

Волны – процессы распространения в пространстве возмущения (изменения) состояния вещества или поля.

Сопровождаются переносом энергии и информации.

Волны – процессы распространения в пространстве колебаний состояния вещества или поля.

Т.к. любое возмущение (изменение) может быть представлено как сумма гармонических колебаний (теорема Фурье), то волновой процесс можно представить как суперпозицию распространяющихся в пространстве гармонических колебаний или гармонических (монохроматических) волн

1. Волны и их разновидности

Волны классифицируют:

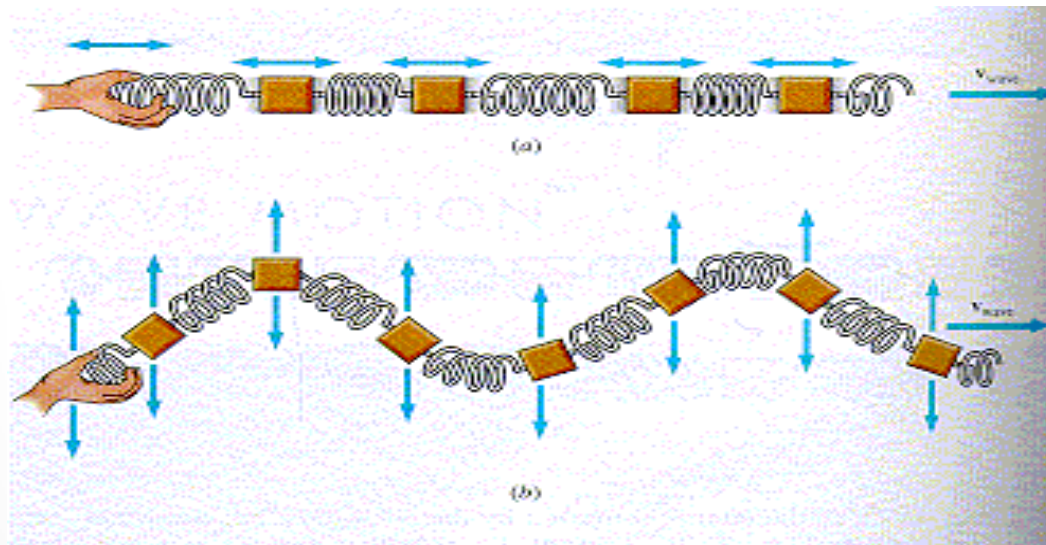
- по характеру происходящих процессов (упругие, электромагнитные, гравитационные),
- по характеру зависимости от времени (гармонические, стохастические),
- по признаку распространения в пространстве (**бегущие, стоячие**),
- по типу волн (поперечные, продольные, смешанного типа),
- по законам, описывающим волновой процесс (линейные, нелинейные),
- по геометрии **волнового фронта** (сферические, плоские).

Волновóй фронт — геометрическое место точек пространства, до которых дошел волновой процесс к данному моменту времени.

1. Волны и их разновидности

Условия существования волн:

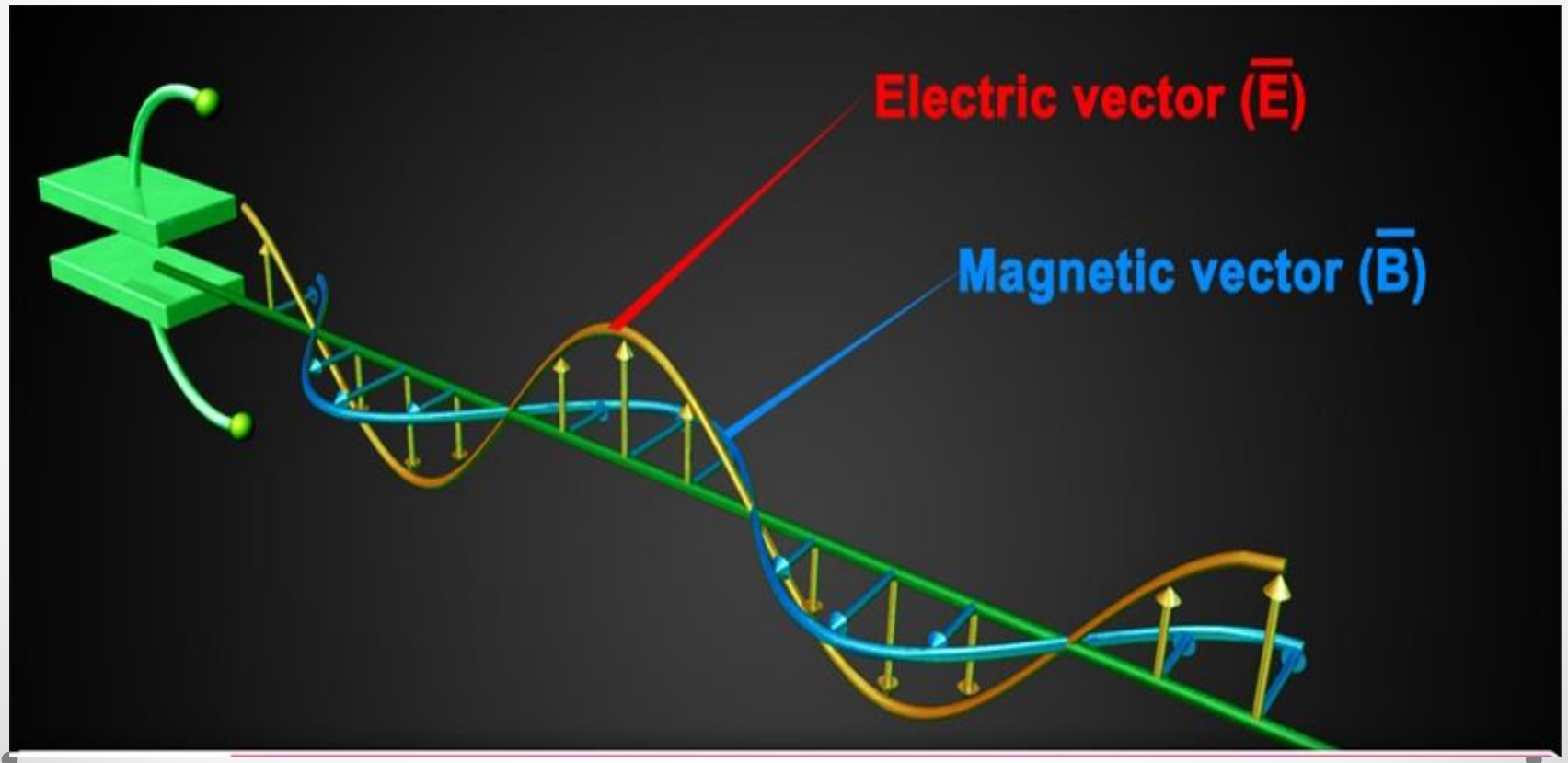
1. Наличие источника возмущения.
2. Наличие в пространстве среды, в которой могут распространяться волны данного типа.



Пример: упругие продольные и поперечные волны в цепочке связанных осцилляторов (пружинные маятники).

1. Волны и их разновидности

Пример: Электромагнитные волны в вакууме



2. Плоские гармонические волны

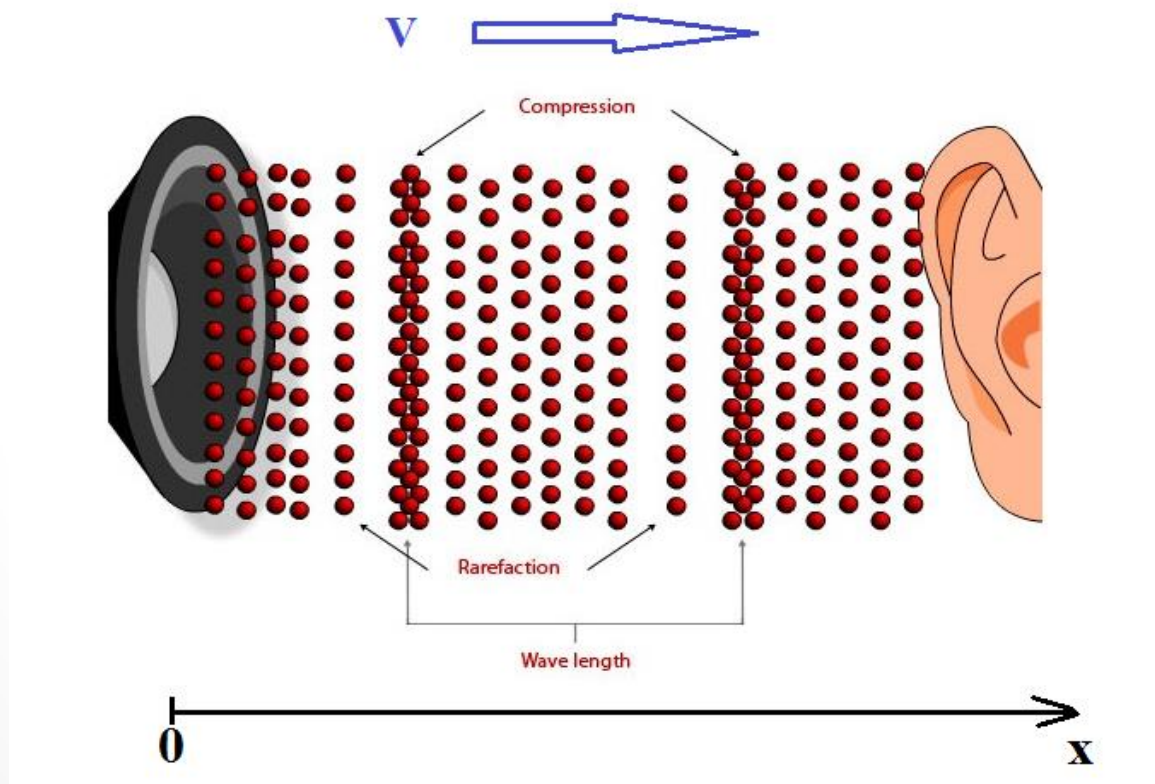
Признаки:

- Фронт волны – плоскость, перпендикулярная направлению распространения волны.
- Возмущение описывается как гармоническое колебание.
- Скорость распространения возмущения в пространстве величина постоянная для однородной и изотропной среды.
- Процесс описывается уравнением

$$\psi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

2. Плоские гармонические волны

Плоская продольная упругая гармоническая волна



2. Плоские гармонические волны

$\psi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ - уравнение колебаний частиц у источника ($x=0$).

Уравнение колебаний частиц на расстоянии x источника колебаний:

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega(t - \tau) + \varphi_0) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right).$$

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Получено уравнение плоской гармонической волны !!!

2. Плоские гармонические волны

Характеристики:

ψ – смещение,

A – амплитуда,

$\omega = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{x=const}$ – циклическая частота,

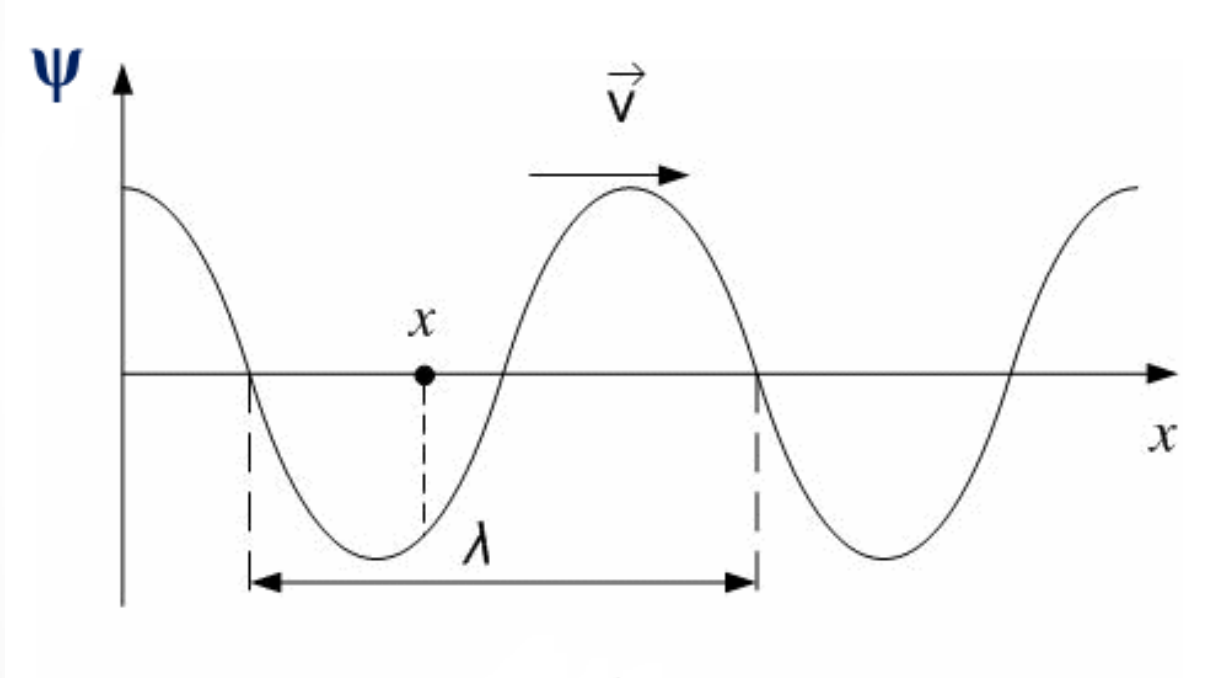
$\omega = \frac{2\pi}{T}$, T – период колебаний,

$k = - \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{t=const}$ – волновое число,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ – длина волны (**пространственный период !!!**)

2. Плоские гармонические волны

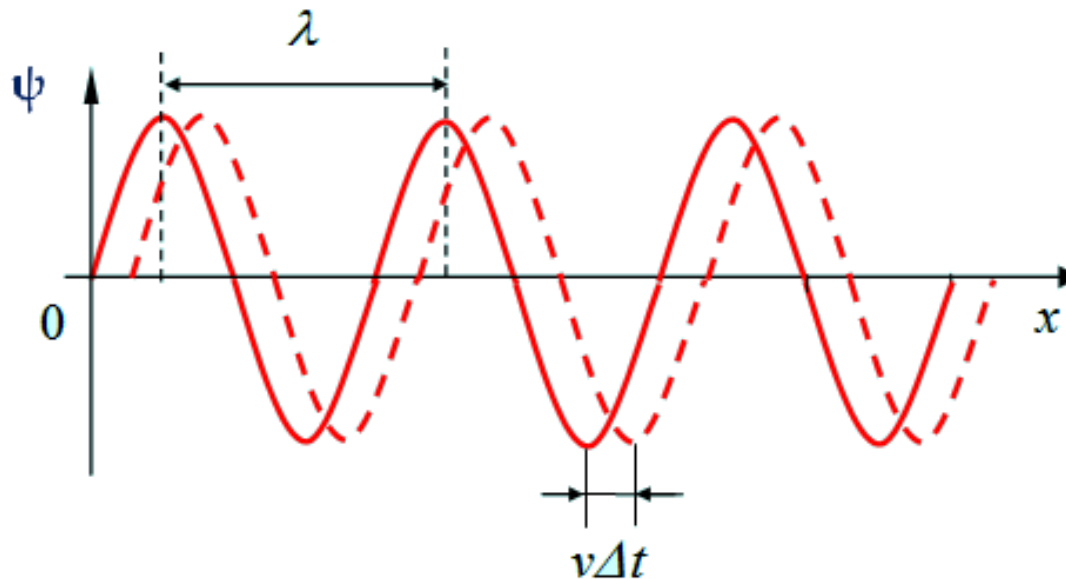
График гармонической волны в фиксированный момент времени



Длина волны λ – минимальное расстояние между точками пространства, колебания в которых происходят в одинаковой фазе (точнее, разность фаз колебаний равна 2π)

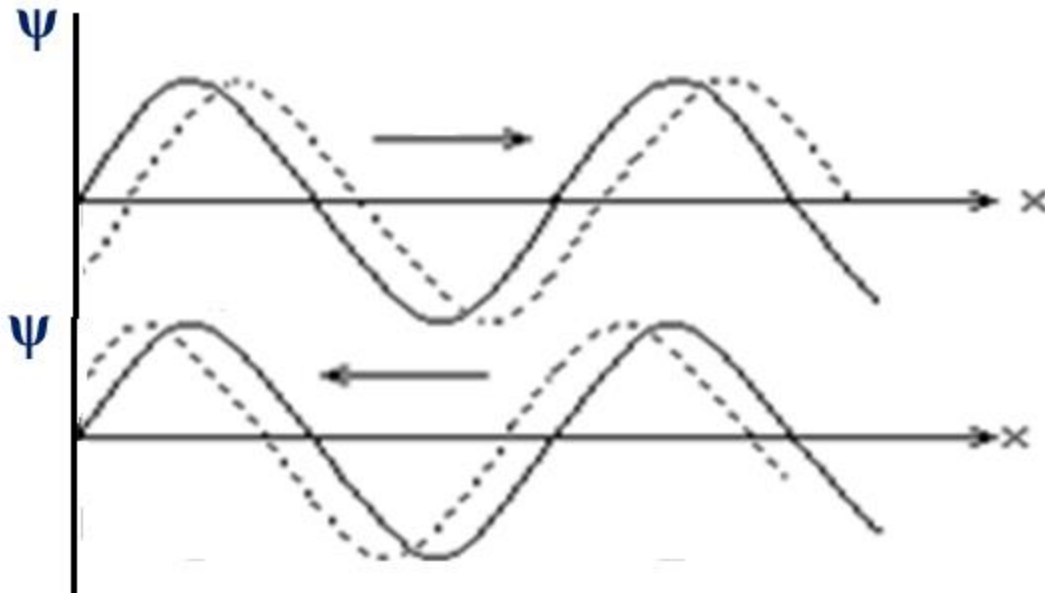
2. Плоские гармонические волны

График бегущей гармонической волны в разные моменты времени



2. Плоские гармонические волны

Прямая и обратная волны



Уравнение прямой волны: $\psi = A \cos(\omega t - kx)$

Уравнение обратной волны: $\psi = A \cos(\omega t + kx)$

2. Плоские гармонические волны

Фазовая скорость гармонической волны

$$\psi = A \cos(\omega t - kx)$$

Определим скорость перемещения возмущения (состояния) в пространстве для гармонической волны.

Условие: $\varphi = \omega t - kx = \text{const.}$

Тогда: $\omega \cdot dt - k \cdot dx = 0.$

Скорость перемещения постоянного значения фазы или фазовая скорость:

$$v_{\phi} = v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

2. Плоские гармонические волны

Волновые поверхности

Поверхности равной фазы- геометрическое место точек пространства, для которых выполняется условие

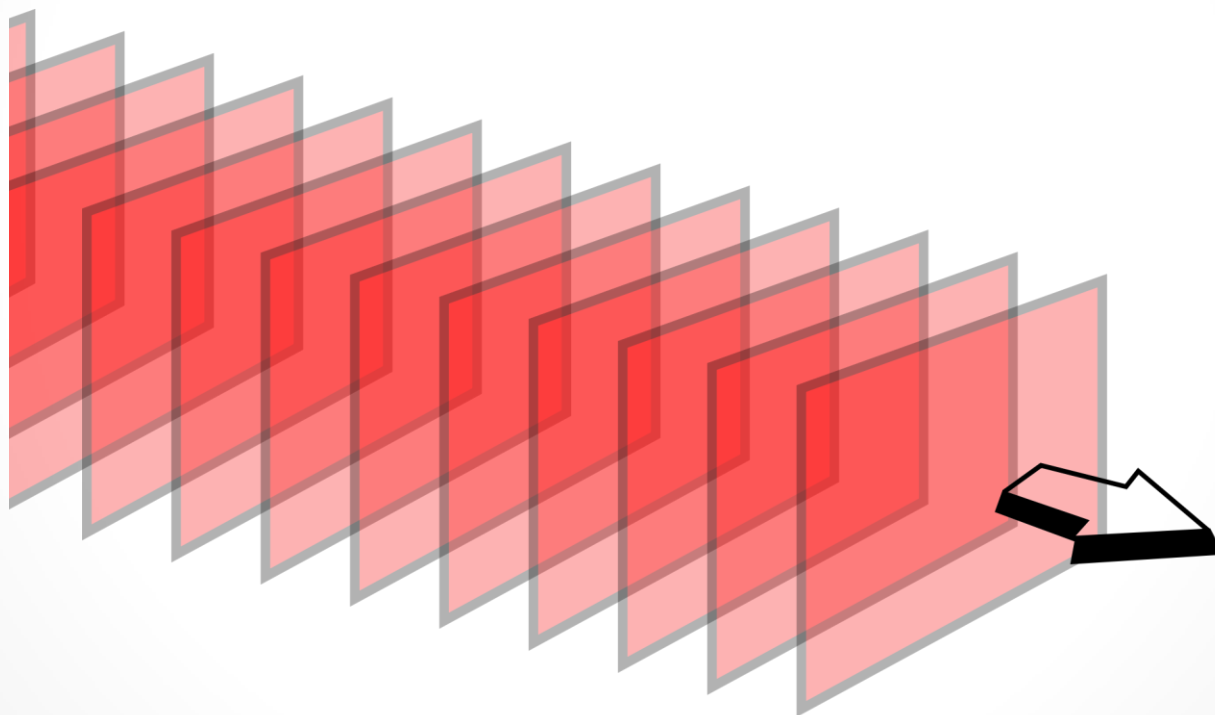
$$\varphi = \text{const}$$

Для любого момента времени: $\varphi = \omega t - kx = \text{const.}$

Уравнение поверхности $x = \text{const}$ - уравнение плоскости, перпендикулярной оси « x », параллельной направлению распространения волны.

2. Плоские гармонические волны

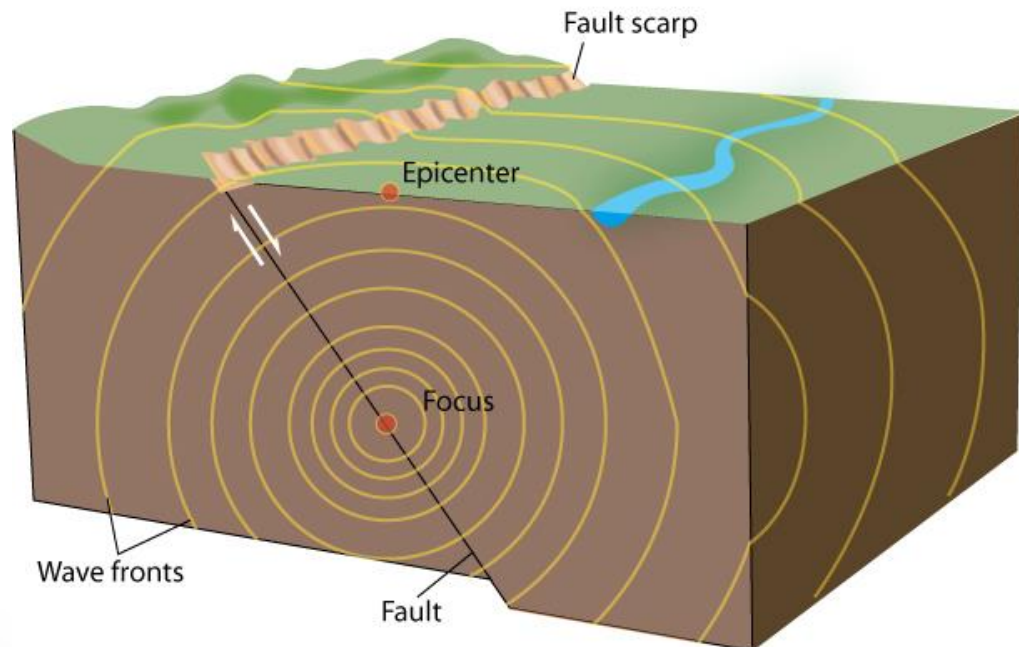
Волновые поверхности для плоской волны



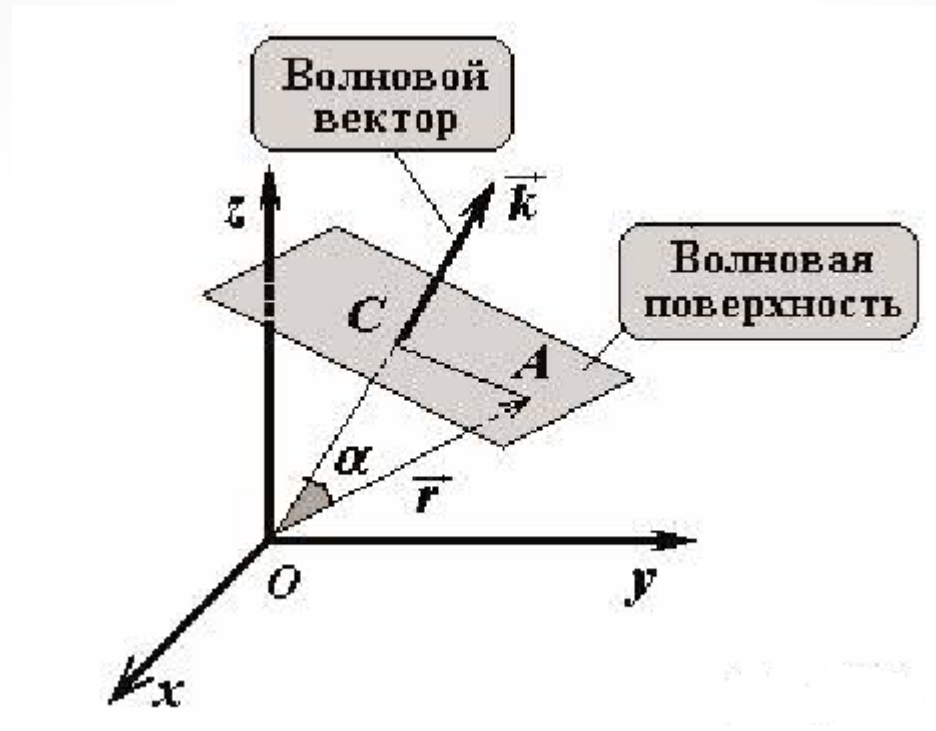
Сферические волны

$$\psi = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Seismic Waves Radiate from the Focus of an Earthquake



2. Плоские гармонические волны



$\psi = A \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$, уравнение плоской гармонической волны

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$, волновой вектор

2. Плоские гармонические волны

Комплексное представление гармонических волн:

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t \mp kx).$$

Можно представить:

$$\psi(x, t) = \operatorname{Re}(A e^{\pm i(\omega t \mp kx)}).$$

Комплексное представление:

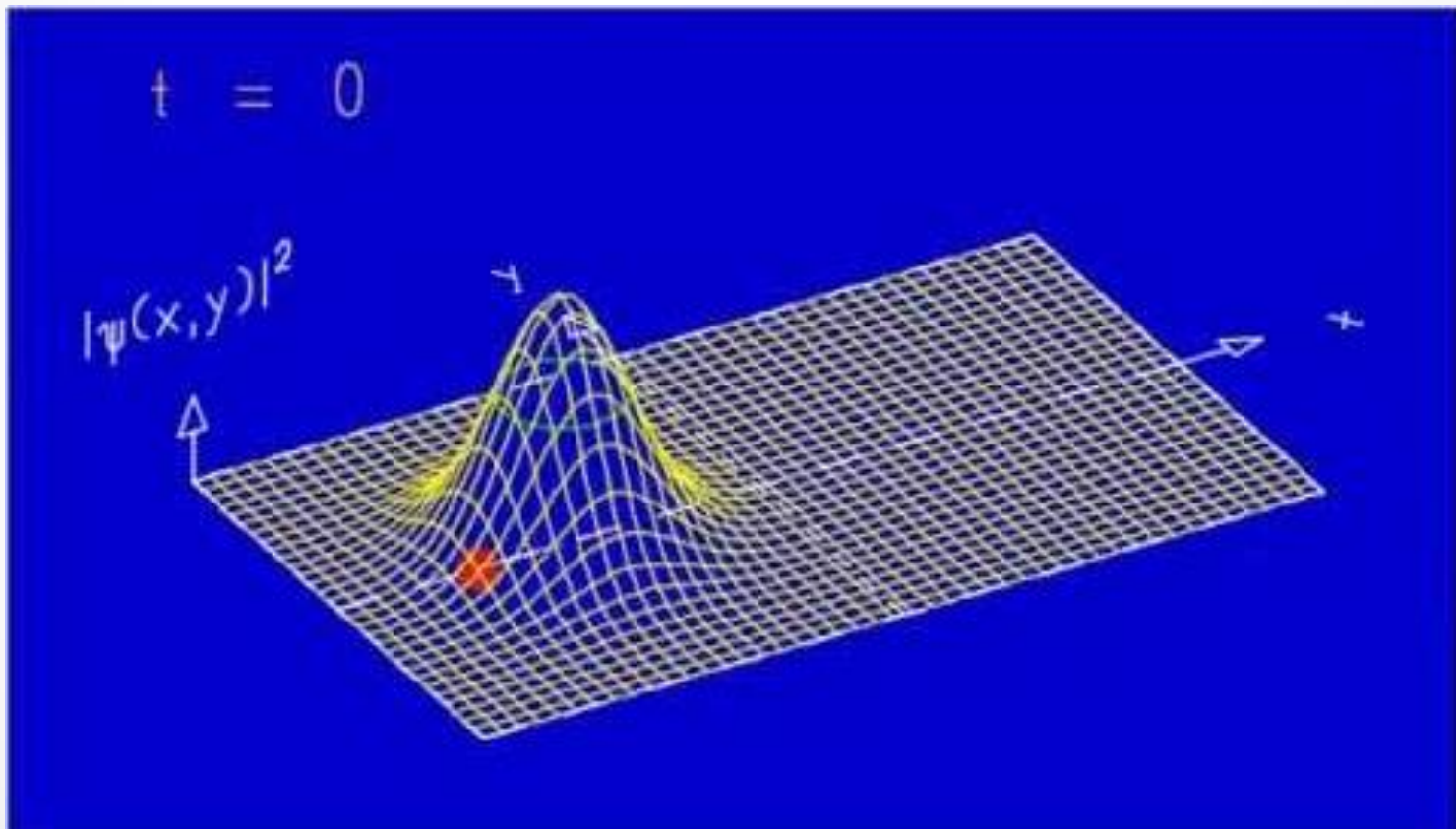
$$\hat{\psi}(x, t) = \hat{A} e^{\pm i(\omega t \mp kx)}$$

3. Волновой пакет. Групповая скорость волн

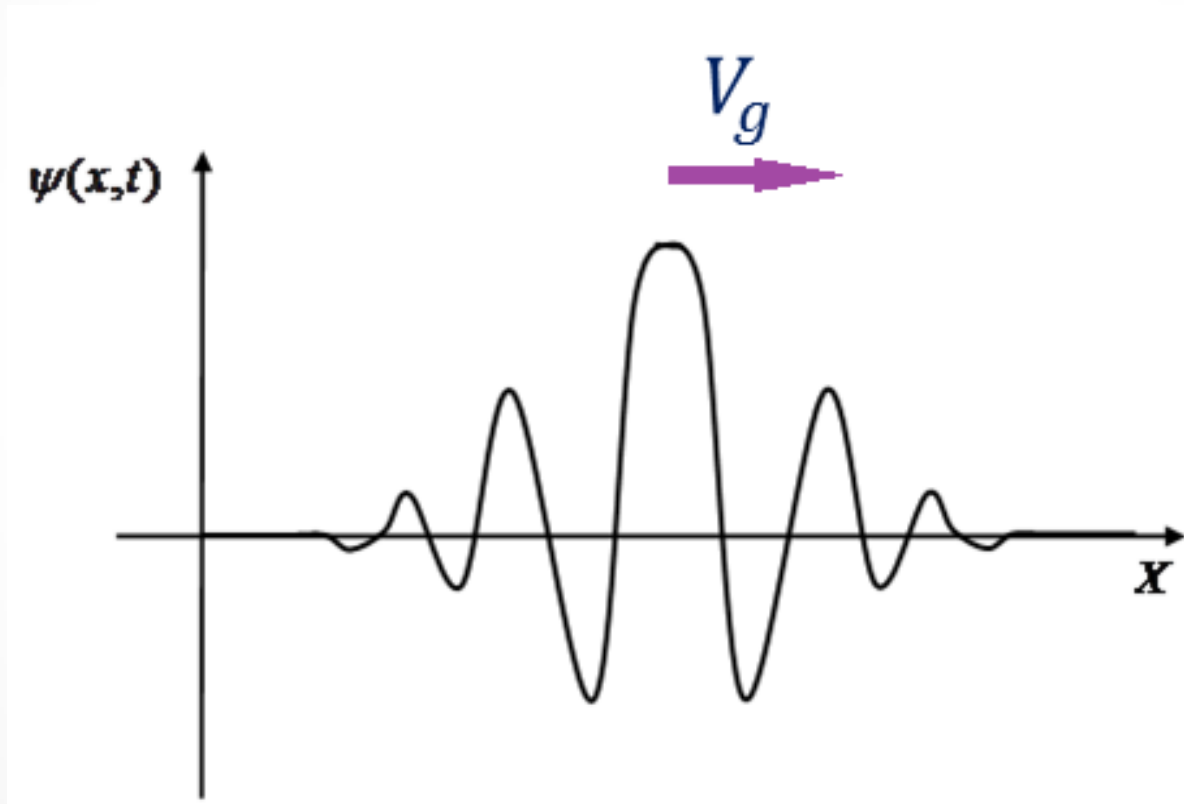


3. Волновой пакет. Групповая скорость волн

3D wave packet



3. Волновой пакет. Групповая скорость волн



3. Волновой пакет. Групповая скорость волн

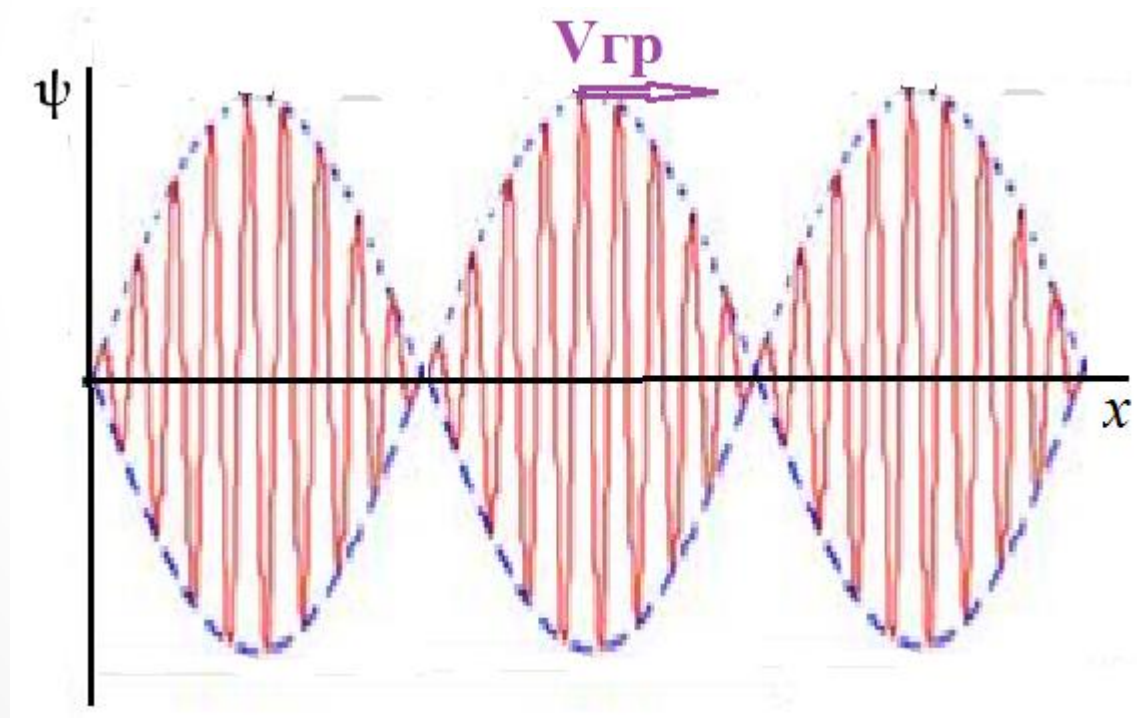
$$\psi(x, t) = \sum_i A_i \cos(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

Две волны с очень близкими частотами:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A \cos(\omega t - kx) + A \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x) \\ &= 2A \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right) \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

3. Волновой пакет. Групповая скорость волн

В результате суперпозиции двух волн получилась результирующая волна – волновой пакет:



3. Волновой пакет. Групповая скорость волн

$$\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x = \text{const}, \text{ тогда}$$

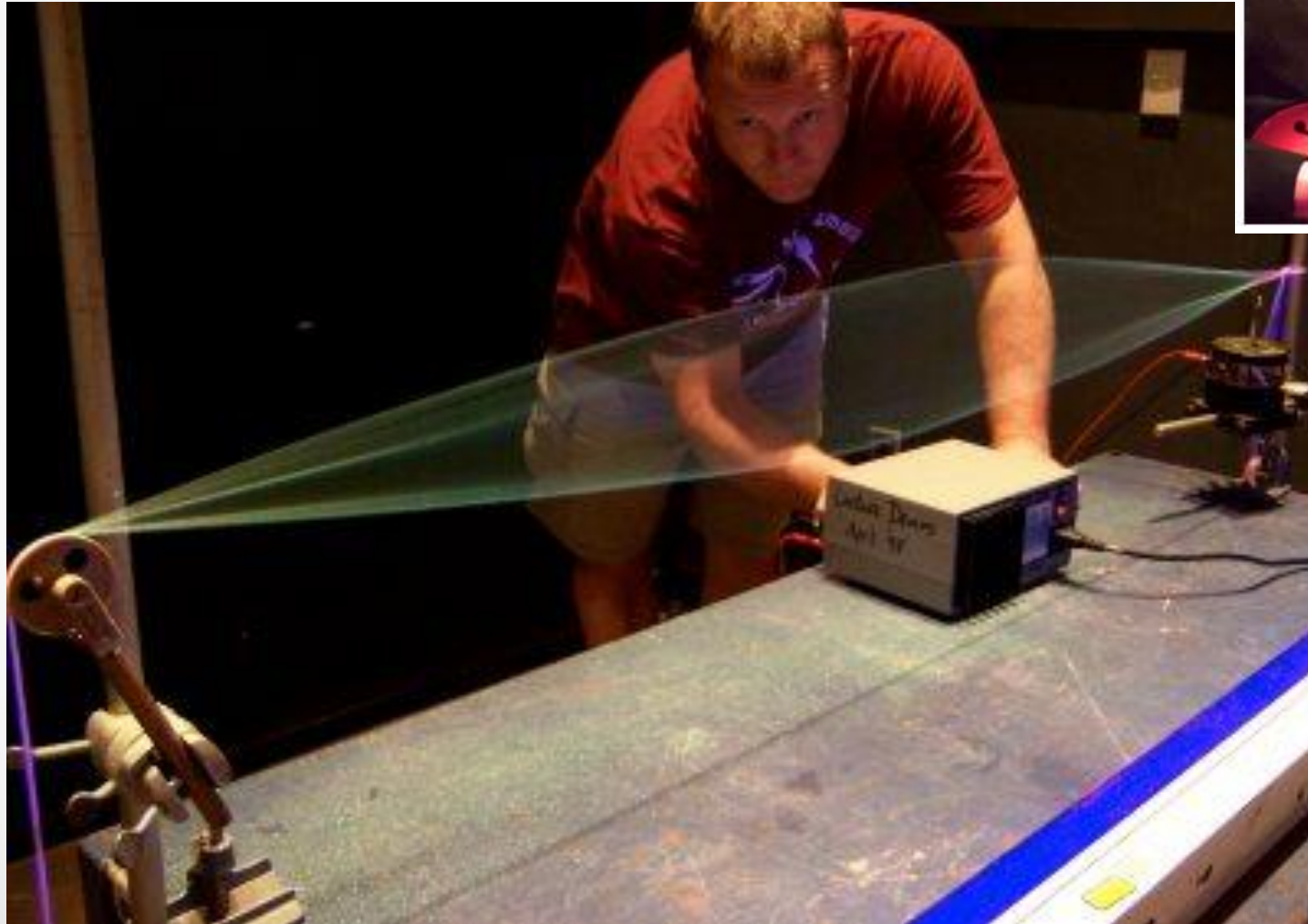
$$\frac{d\omega}{2}\delta t - \frac{dk}{2}\delta x = 0, \text{ отсюда}$$

$$V_{\text{гр}} = \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{d\omega}{dk}.$$

С такой скоростью перемещается волновой пакет!

4. Стоячие волны

Стоячие волны на струне



4. Стоячие волны

Стояние волны на струне



4. Стоячие волны

Стоячие волны. Уравнение стоячей волны

Суперпозиция прямой и обратной волн:

$$\psi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + A \cos(\omega t + kx)$$

$$\psi = 2A \cos\left(kx - \frac{\varphi_0}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_0}{2}\right).$$

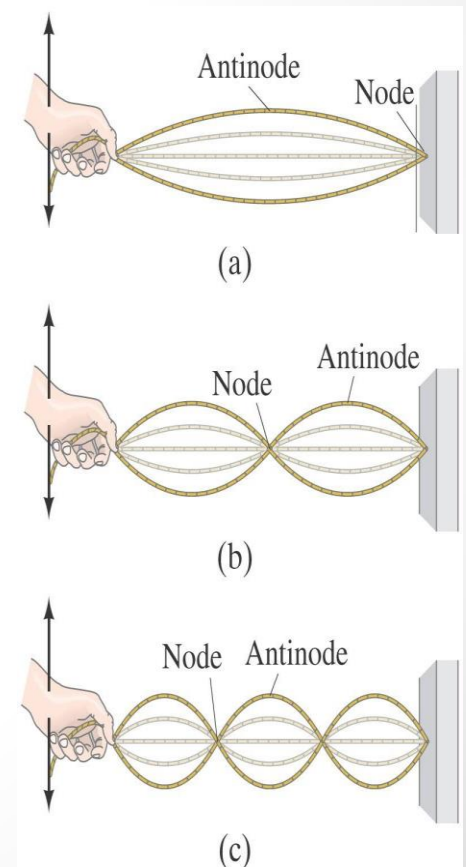
Для струны длиной L с закрепленными краями $\psi(0,t)=0, \psi(L,t)=0$:

$$\psi = 2A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

Из $\psi(L,t)=0$: $kL = n\pi, n = 1, 2, \dots$

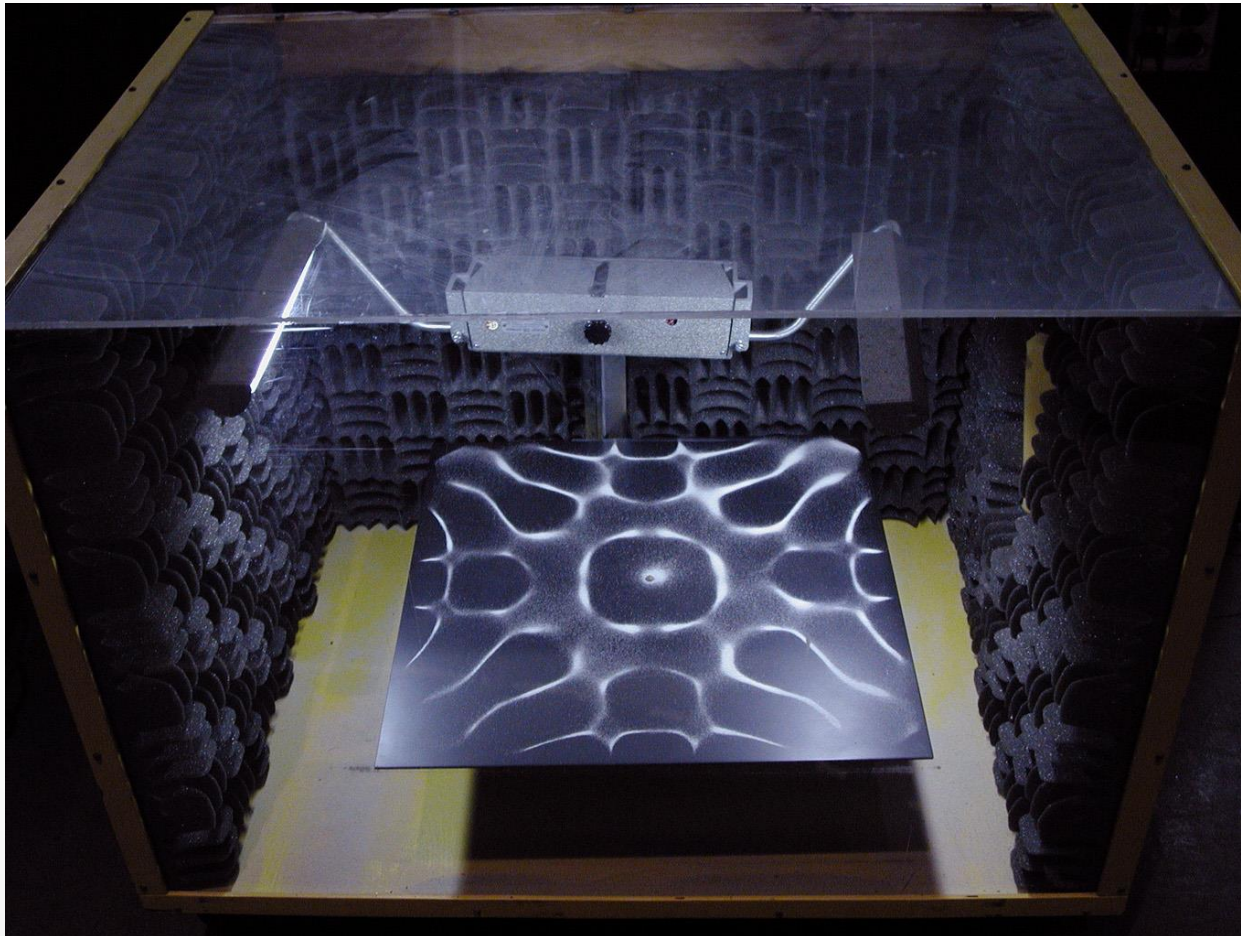
Условие существования СВ: $L = n \frac{\lambda}{2}.$

Собственные гармонические колебания или нормальные моды струны. Амплитуда зависит от x .



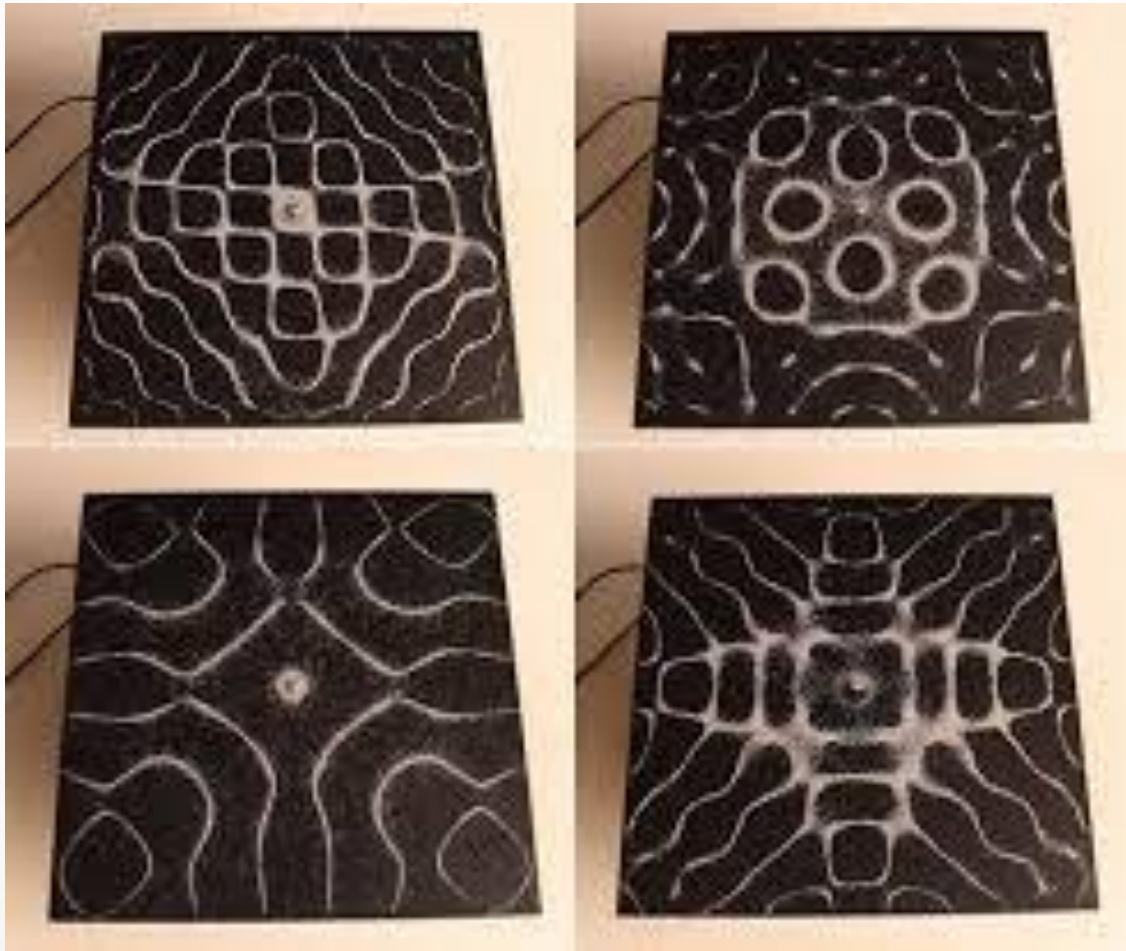
4. Стоячие волны

Фигуры Хладни



4. Стоячие волны

Фигуры Хладни



5. Волновое уравнение

$$\psi = A \cos(\omega t - kx),$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx),$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx),$$

Выражаем $A \cos(\omega t - kx)$ и подставляем:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2\psi}{dt^2}, \text{ т. о., одномерное волновое уравнение:}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2\psi}{dt^2},$$

v — фазовая скорость

5. Волновое уравнение

Для трех пространственных измерений:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Если собственная динамика системы описывается таким уравнением, то в системе могут распространяться волны без дисперсии.

Фазовая скорость гармонических волн в этом случае не зависит от частоты и определяется коэффициентом, стоящим в правой части уравнения.

Спасибо за внимание !