



Поперечные волны на струне



Вопросы

1. Волновое уравнение.
2. Характеристический импеданс (волновое сопротивление) струны.
3. Волны на границе раздела.
4. Стоячие волны на струне.

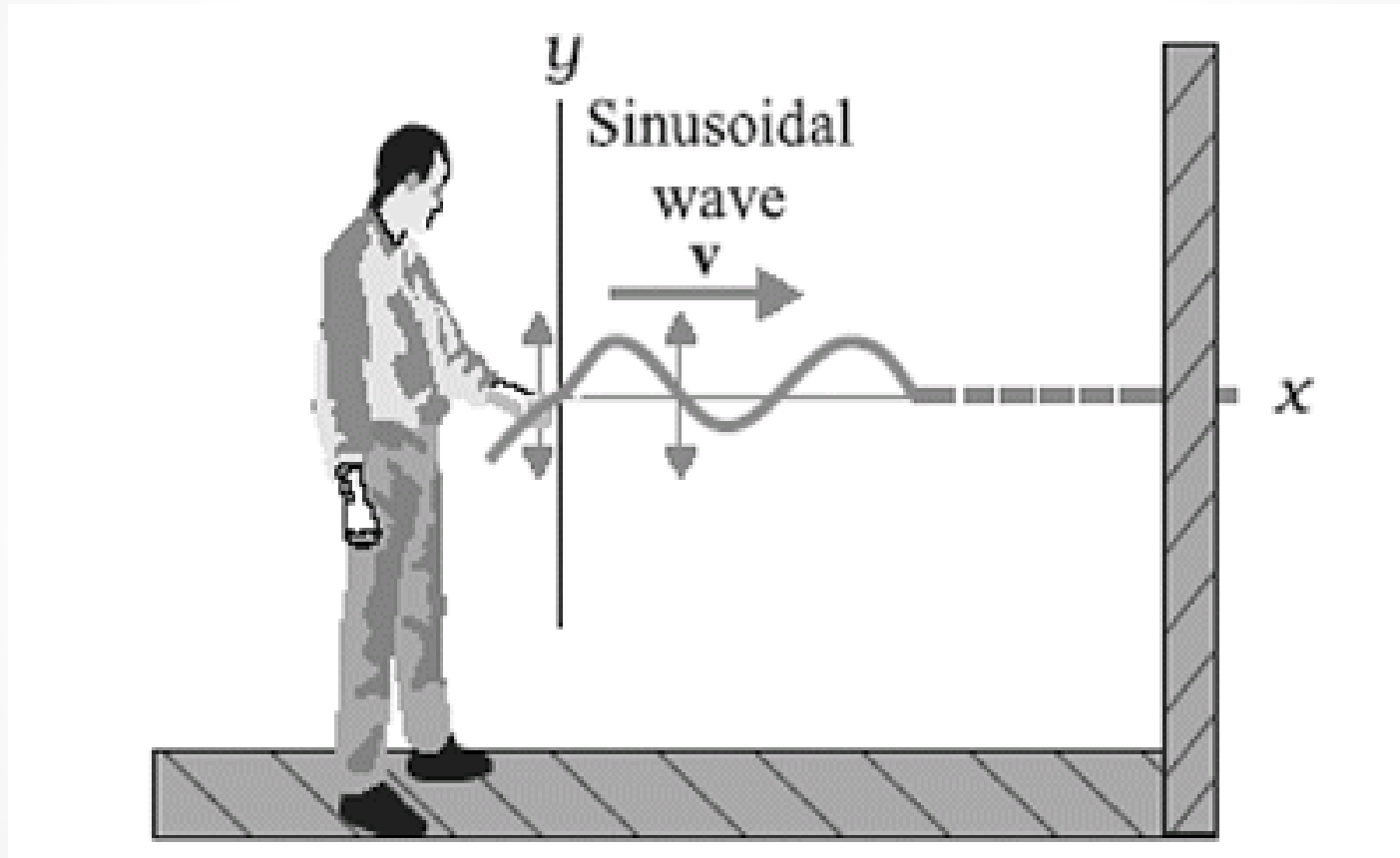
1. Волновое уравнение

Используемые для анализа приближения:

- Тонкая однородная струна с постоянной линейной плотностью ρ .
- Модуль силы натяжения F_H одинаков в любом сечении струны.
- Смещение частиц струны от положения равновесия происходит в направлении, перпендикулярном струне, в одной и той же плоскости.
- Отклонения струны от положения равновесия достаточно малы и можно использовать равенство $\sin(\theta) \approx \tan(\theta)$.
- Отсутствуют потери энергии.
- Не учитывается гравитация.

1. Волновое уравнение

Возбуждение поперечной упругой бегущей волны



На каждый участок струны, выведенный из положения равновесия, оказывается возвращающее воздействие за счет сил натяжения.

1. Волновое уравнение

Используем 2-й закон Ньютона для произвольного малого участка струны.

В проекциях на ось “y”:

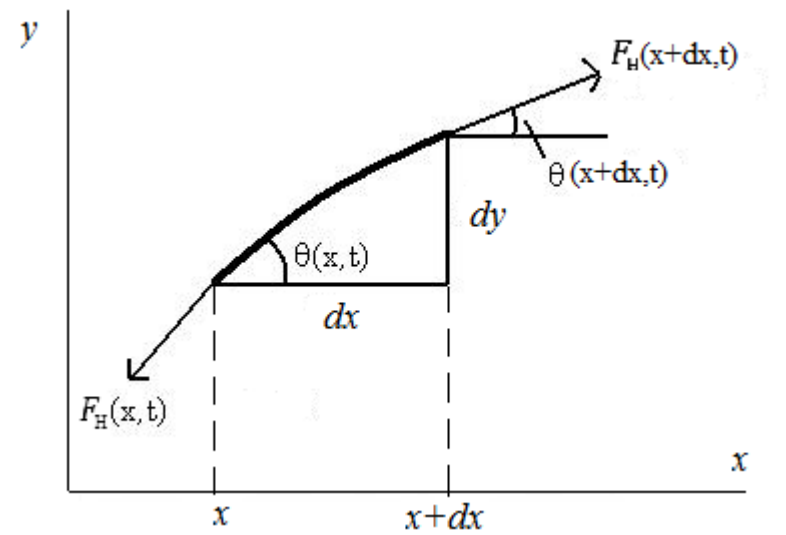
$$(\rho dx) \frac{d^2 y}{dt^2} = F_H \frac{dy}{dx_{x+dx}} - F_H \frac{dy}{dx_x} = F_H \frac{d^2 y}{dx^2} dx .$$

Получили волновое уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\rho}{F_H} \frac{d^2 y}{dt^2} .$$

Фазовая скорость:

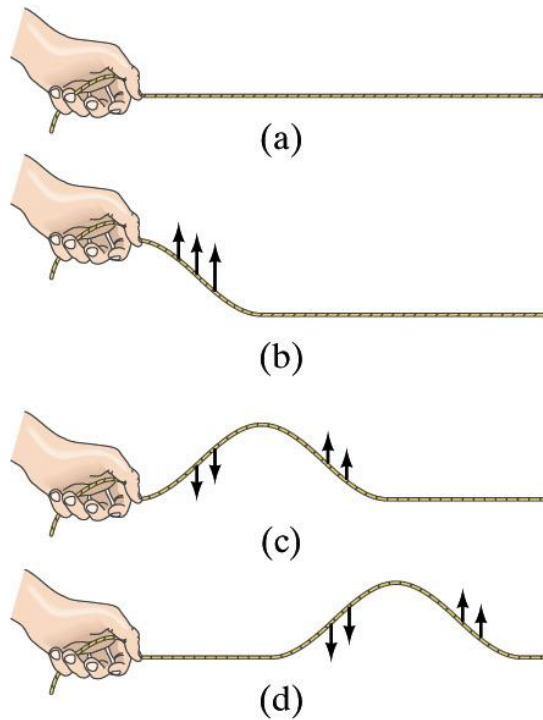
$$V_{\phi}^2 = \frac{F_H}{\rho} = \frac{\text{возвр. воздействие}}{\text{инертность}}$$



По струне могут распространяться волны. Для непрерывной однородной струны нет дисперсии !

1. Волновое уравнение

Волновой пакет не меняет форму и $V_{\text{гр}} = V_{\text{ф}}$.



1. Волновое уравнение

Два параметра определяют величину фазовой скорости волн на струне.

- Упругая сила F_H связана с возвращающим воздействием и накоплением элементами струны потенциальной энергии.
- Линейная плотность ρ определяет инертность элементов струны и накопление ими кинетической энергии в процессе распространения по струне колебаний.

Чем больше сила натяжения струны F_H и меньше её плотность ρ , тем быстрее по струне распространяется поперечное упругое возмущение.

2. Волновое сопротивление (характеристический импеданс) струны

Внешнее воздействие на струну:

$$\vec{F} = -\vec{F}_H, \quad F_y = -F_{Hy} = -F_H \frac{dy}{dx}.$$

Если на струне гармоническая волна

$$y = A \cos(\omega t - kx),$$

то $F_y = -F_H \frac{dy}{dx} = -kF_H A \sin(\omega t)$

в точке $x=0$.

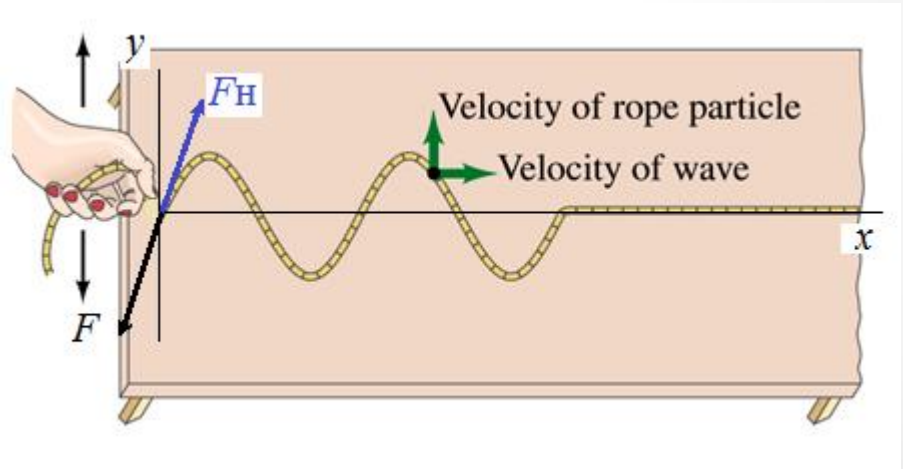
**Определим скорость колебаний
частиц струны в точке $x=0$:**

$$v_y = -\omega A \sin(\omega t).$$

Импеданс:

$$Z = \frac{F_y}{v_y} = \frac{kF_H A}{\omega A} = \frac{F_H}{V_\phi} = \sqrt{F_H \rho}$$

Импеданс действительная величина!!!



2. Волновое сопротивление (характеристический импеданс) струны

Импеданс непрерывной однородной струны является действительной величиной и определяется теми же параметрами струны, что и фазовая скорость, но в другой комбинации.

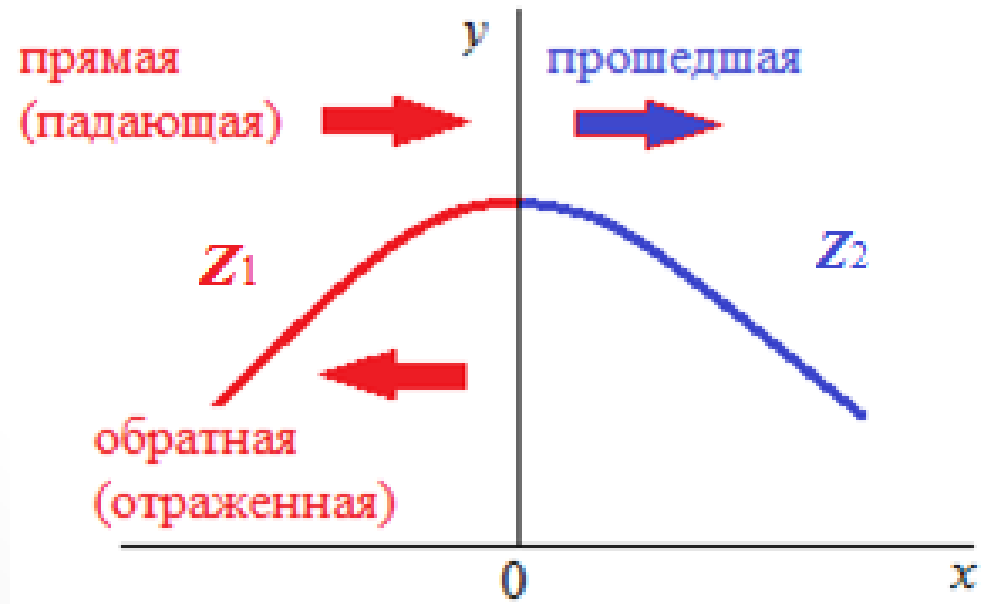
Чем больше сила натяжения струны F_H и её линейная плотность ρ , тем больше величина импеданса Z и тем меньше реакция струны на воздействие. И тем меньше амплитуда поперечной гармонической волны на струне:

$$A = \frac{F_{y0}}{\omega Z}$$

3. Волны на границе раздела

Знание импеданса позволяет рассчитать амплитуду волны в данной среде и определить амплитуды прошедшей и отражённой волн на границе раздела сред. Рассмотрим на примере двух связанных струн с разными значениями импеданса.

Соотношения будут иметь общий характер для волн любой природы!



3. Волны на границе раздела

Если $Z_1 \neq Z_2$, то в точке соединения ($x = 0$) кроме прошедшей должна образоваться отражённая волна.

Иначе разная реакция струн на воздействие приведет к разным смещениям от положения равновесия, что означало бы разрыв соединения. Смещения струн слева и справа должны быть одинаковыми, что возможно только при образовании отражённой волны. Кроме того, целостность соединения требует равенства dy/dx слева и справа в точке $x = 0$. Это означает отсутствие не только разрыва струн, но и отсутствия излома.

3. Волны на границе раздела

Воспользуемся комплексной формой:

падающая волна $y_{1\text{пад}} = A_1 \exp(i(\omega t - k_1 x)),$

отражённая волна $y_{1\text{отр}} = B_1 \exp(i(\omega t + k_1 x)),$

прошедшая волна $y_{2\text{пр}} = A_2 \exp(i(\omega t - k_2 x)),$

A_1, B_1, A_2 – комплексные амплитуды волн.

Колебания точек первой струны будут определяться суммой падающей и отражённой волн, а второй струны – только прошедшей волной.

Из условий непрерывности струны и отсутствия излома на границе раздела следует :

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 , \\ -k_1 A_1 + k_1 B_1 &= -k_2 A_2 . \end{aligned}$$

3. Волны на границе раздела

Умножая первое уравнение на k_1 или k_2 , после преобразований получаем:

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1+k_2}$ - амплитудный коэффициент прохождения,

$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$ - амплитудный коэффициент отражения .

3. Волны на границе раздела

Умножая числитель и знаменатель на $\frac{F_H}{\omega}$, получаем:

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$ - амплитудный коэффициент
прохождения (пропускания),

$\frac{B_1}{A_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ — амплитудный коэффициент
отражения .

3. Волны на границе раздела

Значения полученных коэффициентов однозначно определяются соотношением импедансов.

Очевидно:

$$-1 < \frac{B_1}{A_1} < 1, \quad 0 < \frac{A_2}{A_1} < 2.$$

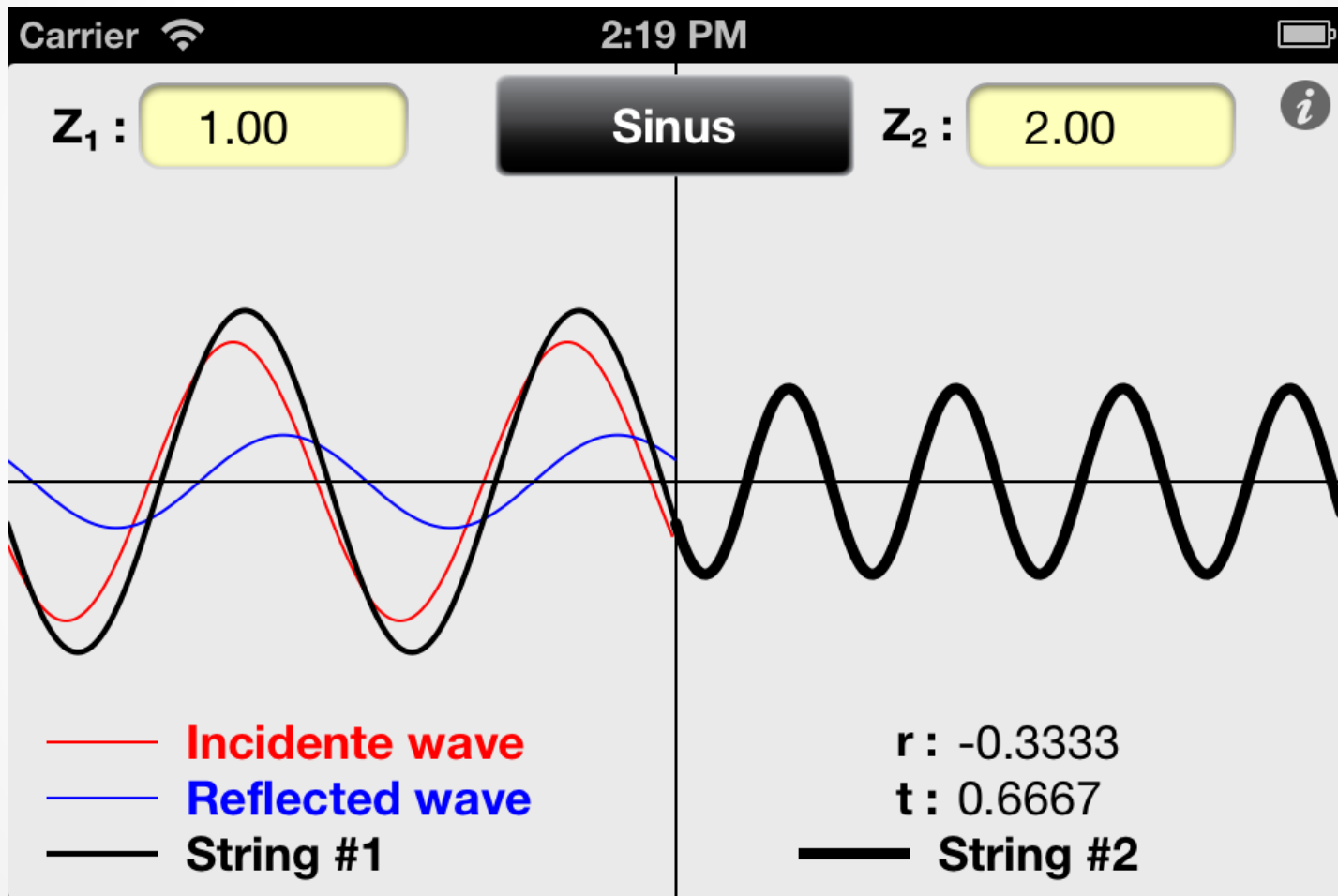
Если $Z_1 = Z_2$ (реакция струн на воздействие одинакова), то $B_1/A_1 = 0$ - отражённой волны нет. Имеет место согласование импедансов.

Если $Z_1 \neq Z_2$ - есть отражённая волна.

$Z_1 > Z_2$ - волна отражается в фазе с падающей $\left(\frac{B_1}{A_1} > 0\right)$.

$Z_1 < Z_2$ - волна отражается в противофазе $\left(\frac{B_1}{A_1} < 0\right)$.

3. Волны на границе раздела



3. Волны на границе раздела

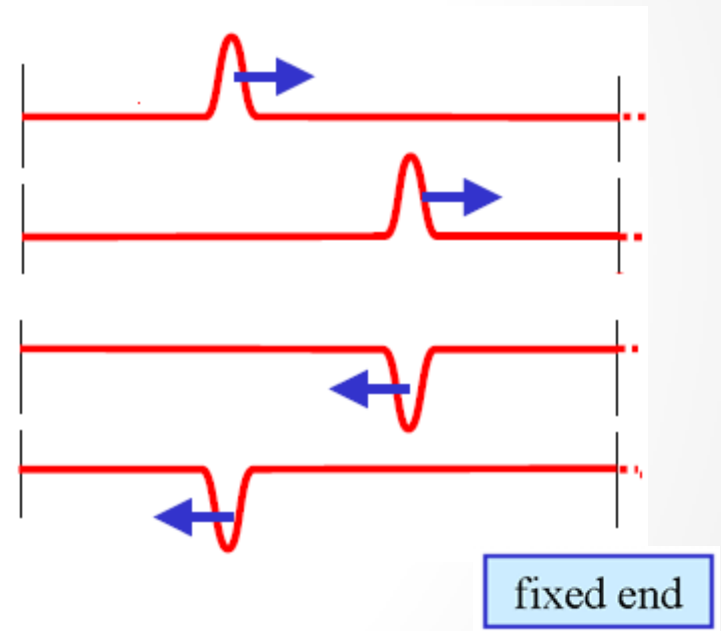
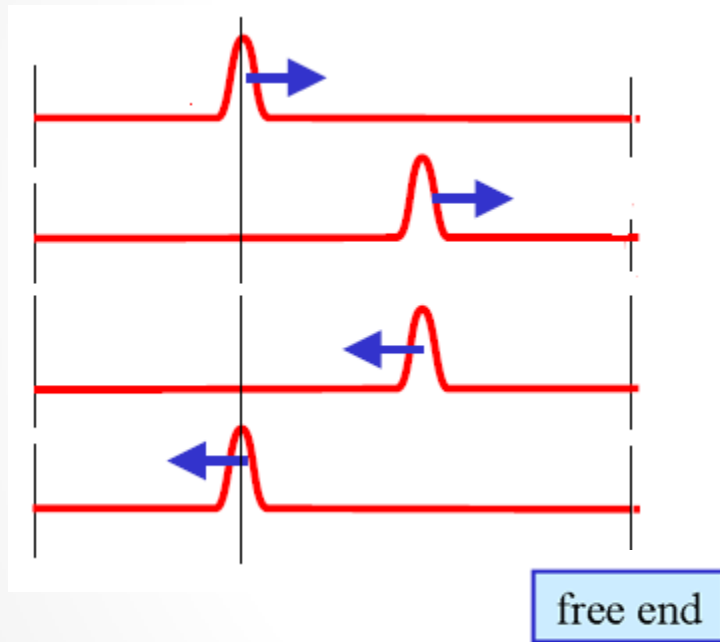
Амплитуда отражённой волны меньше амплитуды падающей.

Исключение случай $Z_2 = \infty$ и волна не может распространяться по второй струне.

Это соответствует условию закрепления конца первой струны (точка $x = 0$). Волна отражается от точки закрепления в противофазе с амплитудой, равной амплитуде падающей волны.

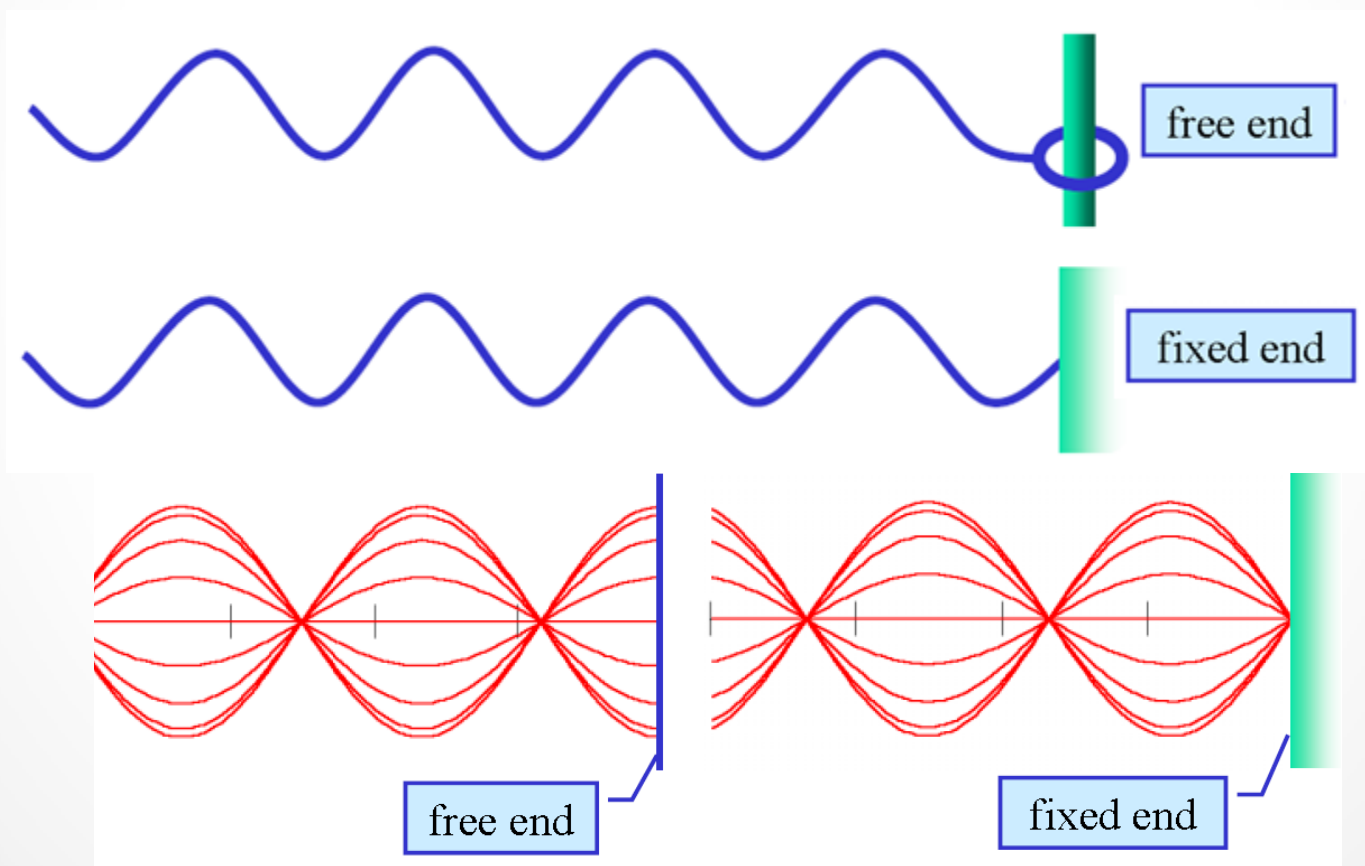
3. Волны на границе раздела

Отражения волн в фазе и противофазе



4. Стоячие волны на струне

С отражением волн от границ раздела сред связано образование стоячих волн, представляющих собой суперпозицию падающих и отраженных волн.

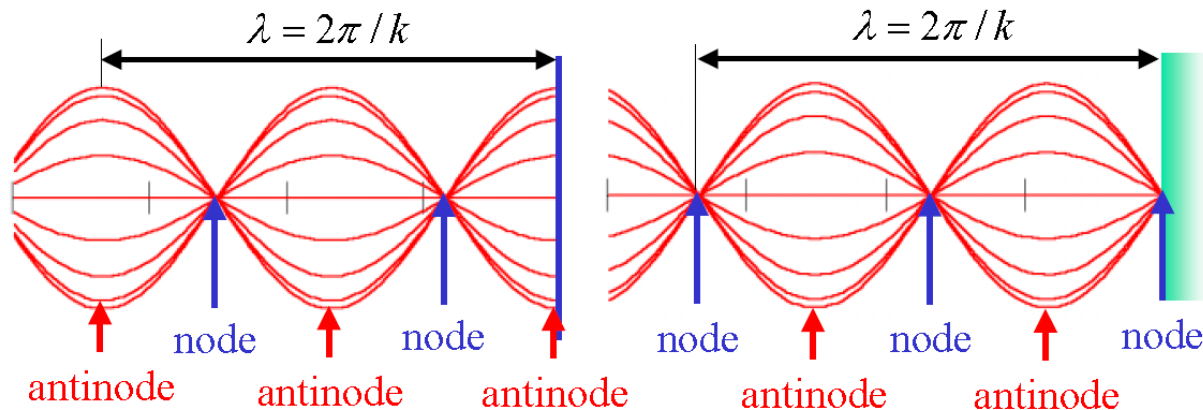


4. Стоячие волны на струне

Wavelength

$$\begin{cases} \xi_0 \cos kx \cos \omega t \\ \xi_0 \sin kx \sin \omega t \end{cases}$$

- Standing waves have **nodes** and **antinodes**



- There are two nodes (antinodes) in one wavelength

Узлы и пучности стоячих волн на струне

В узлах прямая и обратная волны **в противофазе**.

В пучностях прямая и обратная волны **в фазе**.

4. Стоячие волны на струне

Установившиеся свободные гармонические колебания струны, концы которой закреплены, являются примером стоячих волн. Уравнение стоячей волны в этом случае:

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

Из уравнения следует, что точки струны совершают гармонические колебания, амплитуда и фаза которых зависят от координаты “ x ” точек струны.

Условие существования стоячих волн на струне:

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{V_{\phi}}{2\nu}.$$

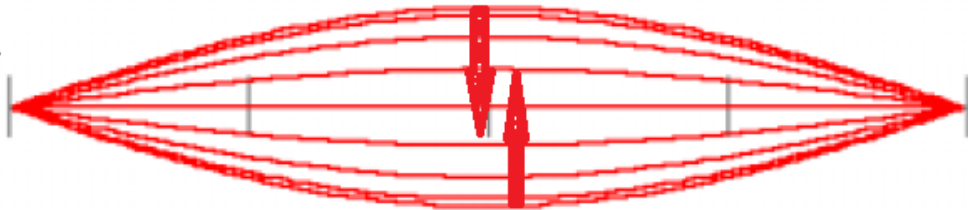
Отсюда собственные частоты колебаний струны:

$$\nu = n \frac{\sqrt{\frac{F_H}{\rho}}}{2L}$$

4. Стоячие волны на струне

Fundamental

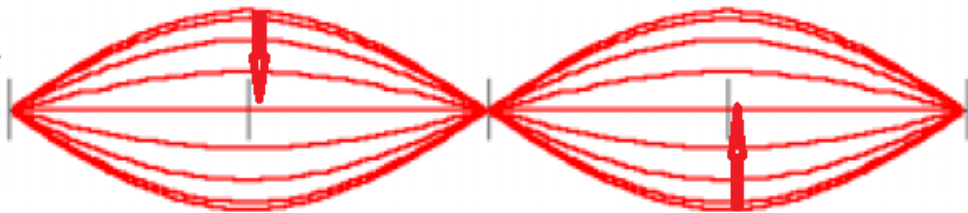
$n = 1$



$$\lambda = 2L$$

2nd harmonic

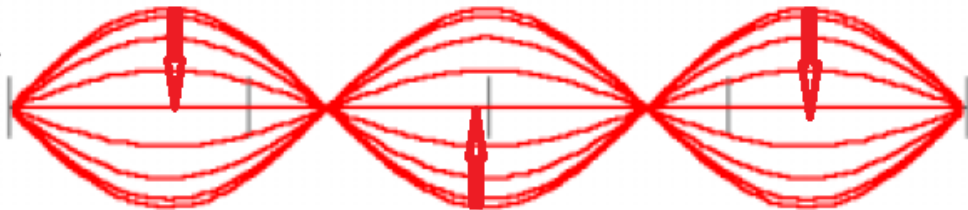
$n = 2$



$$\lambda = L$$

3rd harmonic

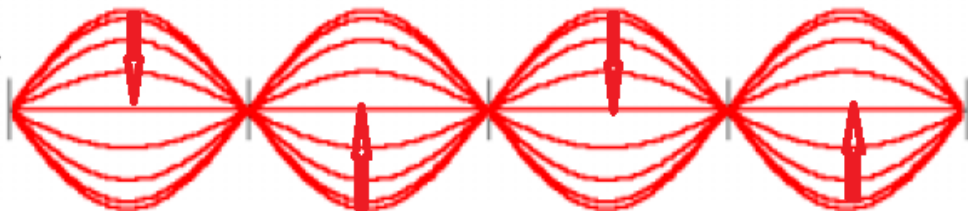
$n = 3$



$$\lambda = \frac{2}{3}L$$

4th harmonic

$n = 4$



$$\lambda = \frac{1}{2}L$$

4. Стоячие волны на струне

Флажолеты на струнных инструментах.

«Четвертая касательная»:

- одним пальцем зажимается струна и получается основная нота за счет определенной длины струны,
- другим пальцем легко касаются струны там, где «располагается» нота на 4 тона выше.

Образуется 4-я гармоника базовой частоты, т.е. получается интервал в две октавы.



Спасибо за внимание !