

Министерство образования Российской Федерации  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.В. ДАВЫДКОВ

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ИДО

Часть III

## ВОЛНОВАЯ ОПТИКА КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Утверждено  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК  
2003

УДК 53(075.8)  
Д 138

Рецензент: кандидат физико-математических наук, доцент  
*А.А.Харьков*

Работа подготовлена на кафедре общей физики

**Давыдков В.В.**  
Д 138 Курс общей физики для студентов ИДО. – Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – Ч. 3: Волновая оптика. Квантовая механика. – 92 с.

Учебное пособие представляет собой курс лекций по общей физике и предназначено для студентов института дистанционного образования, изучающих вторую часть общего курса физики. В книге изложен теоретический материал по интерференции, дифракции и поляризации волн, квантовой механике. Учебное пособие соответствует программе изучения курса общей физики, рассчитанного на три учебных семестра.

**УДК 53(075.8)**

© Новосибирский государственный  
технический университет, 2003  
© В.В. Давыдков, 2003

## 1. Волновая оптика

### 1.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

В середине XVII в. итальянский ученый Франческо Мария Гримальди описал следующее явление.

Если пропустить свет через два близко расположенных отверстия небольшого диаметра, то на экране, там, где перекрываются световые пучки, прошедшие сквозь разные отверстия, возникают чередующиеся яркие и темные полосы.

Опыт Гримальди показал, что наложение световых волн от разных источников может вызвать не только усиление интенсивности света (что кажется естественным), но и ее ослабление!

Другими словами, в опыте Гримальди наложение световых волн привело к перераспределению энергии, переносимой светом. Энергия концентрируется в некоторых точках экрана (эти точки образуют яркие полосы). В другие точки свет практически не попадает (эти точки образуют темные полосы).

Открытое Гримальди явление было названо **интерференцией**.

Таким образом, интерференцией называют перераспределение энергии волн, вызванное их наложением.

Часто в качестве характеристики волн используется **интенсивность**. Это среднее по времени количество энергии, переносимое волной через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Интенсивность, как и энергия волны, прямо пропорциональна квадрату амплитуды волны. Следовательно, в результате интерференции интенсивность волн, идущих в разных направлениях, будет различной.

### 1.1.1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН ОТ ДВУХ СИНФАЗНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Пусть имеются два точечных источника волн одинаковой частоты, колеблющихся синфазно (т.е. начальные фазы колебаний источников одинаковы).

Пусть направления колебаний источников совпадают.

Пусть эти волны накладываются друг на друга.

В области перекрытия волн в каждой точке будут возбуждены два колебания (одно возбуждено волной, идущей от первого источника, а второе – волной от второго источника).

Из уравнения бегущей волны  $\xi = A(x)\cos(\omega t - kx)$ \* видно, что фаза колебания, возбужденного волной в какой-либо точке, зависит от расстояния между источником волны и интересующей нас точкой ( $x$ ).

Это значит, что фазы колебаний  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , возбуждаемых источниками в одной и той же точке, в общем случае различны.

Соответственно и разность фаз колебаний  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , возбуждаемых источниками, в разных точках области перекрытия волн будет различной.

Известно, что результатом сложения одинаково направленных колебаний одной частоты является колебание, амплитуда которого зависит от разности фаз складываемых колебаний (см. раздел 6.3.1 второй части курса):

$$A_{\Sigma}^2 = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}),$$

где  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  – амплитуды складываемых колебаний,  $\varphi_{01}$ ,  $\varphi_{02}$  – начальные фазы складываемых колебаний.

Если амплитуды колебаний источников волн одинаковы, то в точках, расстояние до которых много больше расстояния между источниками,  $A_1 = A_2$ , и результирующая амплитуда

$$\begin{aligned} A_{\Sigma} &= \sqrt{2A^2 + 2A^2 \cos \Delta\varphi} = \\ &= \sqrt{2A^2 (1 + \cos \Delta\varphi)} = \sqrt{2A^2 2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

---

\* Амплитуда волны, идущей от точечного источника, зависит от расстояния между источником и интересующей нас точкой; поэтому амплитуда записана в виде  $A(x)$ .

Извлекая корень, получаем

$$A_{\Sigma} = 2A \cos \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Далее для расчета амплитуды результирующего колебания будем использовать именно это выражение.

Из выражения для расчета  $A_{\Sigma}$  следует, что при  $\Delta\varphi = \pm 0, 2\pi, 4\pi \dots 2m\pi$  ( $m = 0, 1, 2 \dots$ ) результирующая амплитуда будет максимальной:

$$A_{\Sigma} = 2A.$$

При  $\Delta\varphi = \pm\pi, 3\pi, 5\pi \dots (2m + 1)\pi$  результирующая амплитуда будет минимальной:

$$A_{\Sigma} = 0.$$

При прочих значениях разности фаз результирующая амплитуда будет меньше максимальной, но больше минимальной. Конкретное значение амплитуды легко рассчитывается по приведенной выше формуле.

Вернемся к условиям возникновения интерференционных максимумов и минимумов.

Как отмечено выше, фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  есть фазы складывающихся волн в интересующей нас точке. Следовательно, разность фаз  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega t - kx_1 - \omega t + kx_2 = k(x_2 - x_1) = k\Delta x$ . Здесь  $\omega$  – циклическая частота складывающихся волн,  $k$  – волновое число складывающихся волн,  $x_1, x_2$  – пути, проходимые каждой из волн от своего источника до точки наблюдения.

Величина  $\Delta x = (x_2 - x_1)$  называется **геометрической разностью хода**.

Как вы видели ранее, суммарная амплитуда максимальна при  $\Delta\varphi = \pm 0, 2\pi, 4\pi, 2m\pi \dots$  Такая разность фаз складываемых колебаний возникает, если геометрическая разность хода\*

$$\Delta x_{\max} = \Delta\varphi/k = \pm 0, \lambda, 2\lambda, \dots m\lambda,$$

где  $m = 0, 1, 2 \dots$

---

\* Здесь учтено, что волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Аналогично можно показать, что амплитуда будет минимальной при

$$\Delta x_{\min} = \pm \Delta \varphi / k = \lambda / 2, 3\lambda / 2, 5\lambda / 2 \dots (2m' + 1)\lambda / 2,$$

где  $m' = 0, 1, 2 \dots$

Другими словами, интерференционные максимумы возникают в тех точках пространства, для которых геометрическая разность хода кратна длине волны.

Если же на геометрической разности хода до точки укладывается нечетное число полуволен, то в такой точке амплитуда будет минимальной.

Все приведенные выше рассуждения относятся к ситуации, в которой складываемые волны распространялись в одной среде.

Если складываемые волны приходят в интересующую нас точку через разные среды, то проявляется еще один фактор, влияющий на разность фаз складываемых колебаний.

Дело в том, что скорость распространения волн в разных средах может быть различной даже для волн одной частоты. В этом случае\*

$$\Delta \varphi = k_2 x_2 - k_1 x_1 = \frac{\omega}{v_2} x_2 - \frac{\omega}{v_1} x_1 = \omega \left( \frac{x_2}{v_2} - \frac{x_1}{v_1} \right)$$

(здесь  $k_1$  – волновое число волны, пришедшей в точку через первую среду;  $k_2$  – волновое число волны, пришедшей эту же точку через вторую среду;  $v_1$  – скорость волны в первой среде;  $v_2$  – скорость волны во второй среде).

Если речь идет о электромагнитных волнах, то последнее выражение можно привести к более удобному виду. Для этого умножим и разделим правую часть последнего уравнения на скорость света в вакууме:

$$\Delta \varphi = \frac{\omega}{c} \left( \frac{c}{v_2} x_2 - \frac{c}{v_1} x_1 \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 x_2 - n_1 x_1),$$

где  $n_1, n_2$  – показатели преломления первой и второй сред соответственно.

---

\* По определению волновое число  $k = \frac{\omega}{v}$ .

Величина  $nx$  называется **оптической длиной пути**, а разность оптических длин пути  $\Delta = n_2x_2 - n_1x_1$  называют **оптической разностью хода**.

Величина  $\frac{\omega}{c}$  есть волновое число световой волны в вакууме (так как  $c$  – скорость света в вакууме).

Волновое число для световой волны в вакууме можно записать и как  $\frac{2\pi}{\lambda_0}$ , где  $\lambda_0$  – длина электромагнитной волны в вакууме.

Использование оптической разности хода позволяет сформулировать условия возникновения интерференционных максимумов и минимумов следующим образом:

– интерференционные максимумы возникает в тех точках, для которых оптическая разность хода кратна целому числу длин волн в вакууме

$$\Delta_{\max} = \frac{\Delta\varphi}{k_0} = \pm 0, \lambda_0, 2\lambda_0, \dots, m\lambda_0,$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;

– интерференционные минимумы возникают в тех точках, для которых оптическая разность хода кратна нечетному числу полу-волн в вакууме

$$\Delta_{\min} = \pm \frac{\Delta\varphi}{k_0} = \frac{\lambda_0}{2}, \frac{3\lambda_0}{2}, \frac{5\lambda_0}{2} \dots (2m' + 1) \frac{\lambda_0}{2},$$

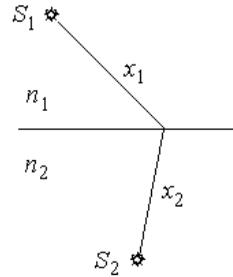
где  $m' = 0, 1, 2, \dots$

Полученные условия интерференционных минимумов и максимумов не содержат информации о координатах точек, в которых будут находиться минимумы и максимумы.

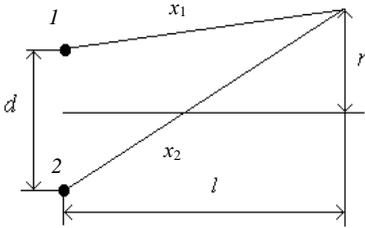
Найдем координаты этих точек на плоскости, расположенной на расстоянии  $l$  от источников.

Пусть источники волн расположены на расстоянии  $d$  друг от друга.

Выберем произвольную точку на выбранной плоскости.



Пусть она расположена на расстоянии  $r$  от оси, проходящей через середину расстояния между источниками (см. рисунок).



Расстояния от источников до точки обозначим соответственно  $x_1$  и  $x_2$ .

Колебания, возбужденные в этой точке источниками, будут иметь разность фаз

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{V}(x_2 - x_1) = k\Delta x.$$

Как уже отмечалось, амплитуда результирующего колебания будет максимальной там, где  $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ , и минимальной там, где  $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$

Разность хода до этих точек соответственно равна

$$\Delta x_{\max} = \frac{\Delta\varphi}{k} = \pm 0, \lambda, 2\lambda, \dots m\lambda$$

$$\Delta x_{\min} = \frac{\Delta\varphi}{k} = \pm \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots (2m' + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Из рисунка видно, что

$$x_1^2 = l^2 + \left(r - \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$x_2^2 = l^2 + \left(r + \frac{d}{2}\right)^2.$$

Тогда

$$x_2^2 - x_1^2 = 2rd.$$

С другой стороны,

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Вблизи от оси системы  $x_1 + x_2 \approx 2l$ , следовательно,  $\Delta x =$   
 $= x_2 - x_1 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 + x_1} = \frac{2rd}{2l} = \frac{rd}{l}$ .

Отсюда легко получить координаты точек, в которых будут возникать максимумы и минимумы:

$$\frac{r_{\max}d}{l} = \pm 0, \lambda, 2\lambda, \dots m\lambda \Rightarrow r_{\max} = \pm 0, \frac{\lambda l}{d}, \frac{2\lambda l}{d}, \dots \frac{m\lambda l}{d};$$

$$\frac{r_{\min}d}{l} = \pm \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots (2m' + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{\min} = \pm \frac{\lambda l}{2d}, \frac{3\lambda l}{d}, \dots (2m' + 1)\frac{\lambda l}{2d}.$$

Условия возникновения интерференционных максимумов и минимумов справедливы для волн любой природы.

Так, если имеются несколько синфазных источников звуковых волн, то громкость звука (т.е. амплитуда звуковых колебаний) в разных точках области перекрытия звука будет различной.

Если в какой-либо области пространства накладываются синфазные световые волны, то яркость света в разных точках области перекрытия также будет различной.

Следует отметить, что условие синфазности источников волн не является обязательным. Разность фаз колебаний источников может иметь любое постоянное значение. При других значениях разности фаз координаты максимумов и минимумов будут отличаться от полученных выше, но энергия складывающихся волн все равно будет перераспределяться, т.е. интерференция сохранится.

### **1.1.2. КОГЕРЕНТНОСТЬ**

Условия минимумов и максимумов, возникающих при наложении волн, были получены для синфазных источников.

Рассмотрим иную ситуацию. Пусть начальные фазы колебаний источников волн изменяются с течением времени, причем независимо друг от друга.

В этом случае разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в интересующей нас точке  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k\Delta x + \varphi_{02} - \varphi_{01}$ , бу-

дет зависеть не только от разности хода  $\Delta x$ , но и от начальных фаз колебаний источников волн  $\varphi_{02}$  и  $\varphi_{01}$ .

Поскольку по условию начальные фазы колебаний источников постоянно изменяются, причем по-разному, постольку и разность фаз колебаний, возбужденных в интересующей нас точке, будет постоянно изменяться.

Следовательно, амплитуда результирующего колебания в этой точке также будет изменяться с течением времени. Перераспределение энергии складывающихся волн будет неустойчивым.

Наблюдаемая картина будет устойчивой, если начальные фазы источников волн не изменяются во времени или изменяются одновременно и одинаково. В этом случае разность фаз складывающихся волн становится независимой от времени (т.е. постоянной), а интерференция – устойчивой.

Источники волн, для которых разность фаз не зависит от времени, называют **когерентными источниками**.

Волны, испускаемые когерентными источниками, называют **когерентными волнами**.

Таким образом, **устойчивая интерференция возникает в случае наложения когерентных волн**.

Обратите внимание на особенность, присущую интерференции световых волн.

Из предыдущего раздела следует, что если экран осветить двумя источниками света, то на нем должны быть видны яркие и темные полосы (как в опыте Гримальди). Но обычно этого не бывает! Интерференции света не наблюдается. Почему?

Известно, что световые волны испускаются атомами при переходе электронов с более высоких энергетических уровней на более низкие.

Этот переход осуществляется за  $10^{-8}$  с. Поэтому атом излучает свет в течение именно этого времени (эту световую волну принято называть **цугом**). Причем начальные фазы цугов, испускаемых разными атомами, различны.

Это значит, что если в интересующую нас точку будут приходить по два цуга одновременно (на самом деле приходит огромное количество цугов с самыми разными начальными фазами), то разность фаз световых волн в интересующей нас точке будет изменяться  $10^8$  раз за каждую секунду.

Столько же раз изменится и интенсивность света в интересующей нас точке ( $10^8 = 100\,000\,000$ ). Человек не способен различить столь быстрое изменение яркости, поэтому мы воспринимаем усредненное значение интенсивности света и экран кажется нам освещенным равномерно.

Таким образом, световые волны, испускаемые разными источниками света, являются некогерентными.

Получить когерентные световые волны можно, разделив один световой луч на две части.

Если такие лучи провести по разным путям, а затем наложить их друг на друга, то можно получить устойчивую интерференцию световых волн.

### 1.1.3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ

Пусть на тонкую плоскопараллельную пластинку падает параллельный пучок света, длина волны которого равна  $\lambda^*$ . Угол падения лучей равен  $i$ . Показатель преломления вещества пластинки равен  $n$ . Показатель преломления среды над пластинкой и под ней равен 1.

Световой луч, падая на верхнюю поверхность пластинки, разделится: часть луча отразится (луч 1), часть преломится и пройдет внутрь пластинки под углом преломления  $\beta$ .

Прошедший внутрь луч частично отразится от нижней поверхности и затем выйдет наружу (луч 2).

Поскольку лучи 1 и 2 получены делением одного падающего луча, они когерентны. Следовательно, интерференция лучей 1 и 2 будет устойчивой.

Оценим результат интерференции.

Из рисунка видно, что отраженные лучи до  $AB$  распространяются в разных средах.

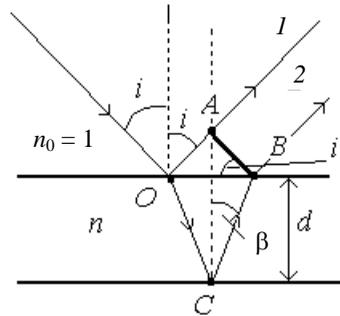
Оптическая длина пути от точки  $O$  до точки  $A$  (т.е. оптическая длина пути первого луча) равна  $OA$  (показатель преломления для него равен 1).

Оптическая длина пути второго луча равна  $(OC + CB)n$ .

Следовательно, оптическая разность хода лучей 1 и 2 равна

$$\Delta = (OC + CB)n - OA.$$

Из рисунка также видно, что



\* Если пучок света образован волнами одной длины, его называют монохроматическим.

$$OC = CB = \frac{d}{\cos \beta};$$

$$OB = 2d \operatorname{tg} \beta;$$

$$OA = OB \sin i = 2d \operatorname{tg} \beta \sin i.$$

Из закона преломления света  $\left( n = \frac{\sin i}{\sin \beta} \right)$  следует, что  $\sin i = n \sin \beta$ . Тогда

$$OA = \frac{2dn}{\cos \beta} \sin^2 \beta.$$

Подставляя выражения для  $OA$ ,  $OC$  и  $CB$  в выражение для расчета оптической разности хода отраженных лучей, получаем

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos \beta} - \frac{2dn}{\cos \beta} \sin^2 \beta = \frac{2dn}{\cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) = 2dn \cos \beta.$$

Учитывая, что  $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$  и  $\sin \beta = \frac{\sin i}{n}$ , получаем выражение для расчета оптической разности хода через угол падения лучей:

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}.$$

Однако здесь необходимо учесть еще одну особенность отражения световых волн: при отражении волны от оптически более плотной\* среды фаза отраженной волны скачком меняется на  $\pi$  радиан.

Изменение фазы отраженной волны на  $\pi$  радиан эквивалентно приращению оптической разности хода на  $\frac{\Delta \varphi}{k_o} = \pi \frac{\lambda_o}{2\pi} = \frac{\lambda_o}{2}$ .

---

\* Оптически более плотной средой называют среду с большим показателем преломления.

В данном случае первый луч отражается от оптически более плотной среды, поэтому его фаза изменится на  $\pi$ .

Второй луч отражается от оптически менее плотной среды (под пленкой по условию  $n_0 = 1$ ), поэтому его фаза не изменится.

Следовательно\*, в рассматриваемом случае оптическая разность хода равна\*

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

(в выражении использован знак  $\pm$ , так как и добавление, и вычитание  $\frac{\lambda_0}{2}$  вызывает изменение фазы на  $\pi$  радиан).

Интерференция отраженных лучей даст максимум, если на оптической разности хода уложится целое число длин волн света в вакууме:

$$\Delta_{\max} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = \pm m\lambda_0$$

или

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}.$$

Если на оптической разности хода уложится нечетное число полуволен, возникнет минимум:

$$\Delta_{\min} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = \pm(2m'+1)\frac{\lambda_0}{2}$$

или

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \pm m'\lambda_0.$$

Из выражения  $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$  можно видеть следующее.

---

\* Обратите внимание: если бы под пластинкой находилось вещество с еще бóльшим показателем преломления, то добавлять  $\lambda_0/2$  не нужно; это приращение получат оба отраженных луча, добавлять следует  $\lambda_0$ , а это не влияет на результат интерференции.

1. Если на пленку падает узкий луч монохроматического света, то при изменении угла падения интенсивность отраженного луча будет изменяться. При значениях угла  $i$ , отвечающих условию максимума, луч отразится полностью. При значениях  $i$ , отвечающих условию минимума, луч не отразится вообще.

2. При падении на пластину расходящегося пучка монохроматического света разные лучи имеют неодинаковую величину угла падения.

Поэтому для некоторых лучей будет выполняться условие максимума для отраженного света и они максимально отразятся от пленки.

Если эти лучи попадут в глаз наблюдателя, то наблюдатель в точках, от которых лучи отражаются, увидит яркие полосы.

Некоторые лучи будут падать под углом, отвечающим условию минимума. Точки падения этих лучей образуют темные полосы.

Поскольку каждая из полос образована лучами, падающими под одним углом, постольку эти линии называют **линиями равного наклона**.

3. Если изменять угол падения узкого луча белого света (т.е. суммы всех цветов), то условия максимума отражения для разных цветов будут выполняться при разных углах падения.

Свет, для которого выполняется условие максимума при данном угле падения, отразится максимально. Световые волны с другой  $\lambda$  отразятся частично.

Поэтому отраженный свет будет окрашенным. Его цвет будет соответствовать той длине волны, для которой выполняется условие максимума.

4. Если на пластинку падает расходящийся пучок белого света, то для лучей, отвечающих условию максимума отражения какого-либо цвета, отраженные лучи будут окрашиваться в этот цвет.

Для лучей, падающих под другим углом, условие максимума отражения выполняется для другого цвета.

Поэтому наблюдатель отраженного света будет воспринимать пластинку, как раскрашенную линиями всех цветов спектра (вспомните мыльные пузыри или бензиновую пленку на воде).

5. Если пленка имеет переменную толщину, то при падении на нее плоскопараллельного пучка монохроматического света в местах, где толщина отвечает условию максимума отражения, наблюдатель будет видеть яркие полосы. Эти полосы принято называть **линиями равной толщины**.

Частным случаем полос равной толщины являются кольца Ньютона.

Если лучи света падают перпендикулярно поверхности пленки, то угол падения равен  $0^\circ$ .

В этом случае условия максимумов и минимумов для отраженных лучей более простую форму:

$$\text{max: } 2dn = \pm\lambda_0 \left( m + \frac{1}{2} \right), \text{ где } m = 0, 1, 2, 3\dots$$

и

$$\text{min: } 2dn = \pm m'\lambda_0 \text{ где } m' = 1, 2, 3\dots$$

Обратите внимание на важную особенность интерференции света в тонких пленках.

Если мы рассмотрим интерференцию прошедших сквозь пластину лучей, то условия минимума и максимума должны стать обратными.

Этот результат можно получить аналитически, используя тот же алгоритм анализа, а можно увидеть исходя из простых соображений.

Что физически означает минимум интерференции в отраженном свете?

Ответ прост – падающий свет **не отражается**.

Но, следовательно, весь свет пройдет сквозь пленку. Ему просто больше некуда деться.

А это в свою очередь означает, что выполняется условие максимума интерференции для проходящего света. Поэтому **условие минимума в отраженном свете эквивалентно условию максимума в проходящем свете**.

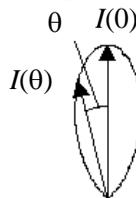
Соответственно **условие максимума в отраженном свете эквивалентно условию минимума в проходящем свете**.

#### *1.1.4. ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ*

Удобной формой представления зависимости интенсивности волн от направления является **диаграмма направленности**.

Диаграмма направленности – это график зависимости интенсивности излучения от направления (направление характеризуется углом  $\theta$ , отсчитанным от выбранной оси), построенный в полярных координатах.

На диаграмме направленности интенсивность волн, идущих в каком-либо направлении, прямо пропорциональна длине вектора, проведенного под соответствующим углом  $\theta$  из центра диаграммы до пересечения с диаграммой.



Если перераспределения энергии волн нет, т.е. интенсивность волн, идущих в любом направлении, одинакова, то диаграмма направленности

сти представляет собой окружность. Если же интенсивность волн зависит от направления, то диаграмма может иметь вид, подобный показанному на рисунке.

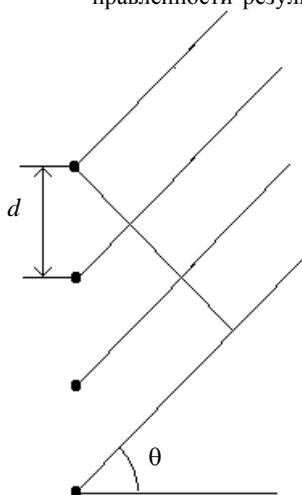
Как видно из приведенной на рисунке диаграммы, интенсивность волн, идущих вдоль вертикального (на рисунке  $I(0)$ ) направления, больше интенсивности волн, идущих под углом  $\theta$ .

### 1.1.5. МНОГОЛУЧЕВАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

Рассмотрим систему из  $n$  одинаковых точечных когерентных источников волн, лежащих в одной плоскости.

Интенсивность волн, идущих от каждого источника, не зависит от направления. Диаграмма направленности для каждого из источников представляет собой окружность.

Наложение волн, идущих от разных когерентных источников, вызывает перераспределение энергии волн. Следовательно, диаграмма направленности результирующего излучения нескольких источников будет более сложной.



Необходимо выяснить, как именно перераспределяется энергия источников в рассматриваемом случае и какие факторы влияют на форму диаграммы направленности системы из нескольких когерентных источников.

Пусть расстояние между соседними источниками равно  $d$ , амплитуды и начальные фазы колебаний источников одинаковы.

Пусть волны от этих источников попадают на бесконечно удаленный экран.

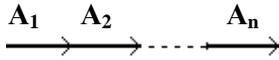
Вычислим амплитуду результирующего колебания, возбужденного в произвольной точке экрана всеми источниками. Воспользуемся для этого методом векторных диаграмм.

Поскольку расстояние до экрана много больше расстояния между источниками, амплитуды колебаний, возбужденных

на экране разными источниками, будем считать одинаковыми:  $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_0$  (здесь  $A_1, A_2 \dots$  представляют собой амплитуды колебаний, возбужденных на экране волнами, пришедшими от первого, второго и т.д. источников).

Колебания, возбужденные на экране волнами, пришедшими от двух соседних источников, будут отличаться по фазе на  $\Delta\varphi = kd \sin \theta$  (здесь  $\theta$  – угол между нормалью к плоскости, в ко-

торой лежат источники, и направлением распространения волн,  $k$  – волновое число).



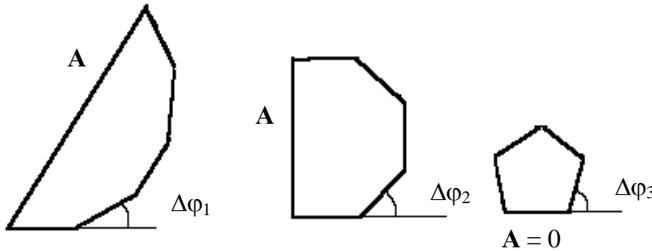
Для центра экрана  $\theta = 0$ . Следовательно, и разность фаз  $\Delta\varphi = 0$ .

Векторная диаграмма в этом случае имеет вид, показанный на рисунке.

Поэтому результирующая амплитуда колебаний в центре экрана максимальна:  $A = nA_0$ .

Интенсивность прямо пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому интенсивность волн в центре экрана также максимальна:  $I = n^2 I_0$  (здесь  $I_0$  – интенсивность волны, пришедшей на экран от одного источника). Отметим, что максимум с такой интенсивностью называют **главным максимумом**.

С увеличением  $\theta$   $\Delta\varphi$  тоже растет ( $\Delta\varphi = kd \sin \theta$ ). При этом меняется вид векторной диаграммы:



Как видите, результирующая амплитуда с ростом  $\Delta\varphi$  уменьшается, достигая при определенном значении  $\Delta\varphi$  минимума  $A = 0$  (когда конец последнего вектора совпадет с началом первого).

Другими словами, интенсивность волны, максимальная в центре экрана, по мере удаления от центра постепенно уменьшается до нуля.

По мере дальнейшего увеличения  $\theta$  разность фаз  $\Delta\varphi$  также растет.

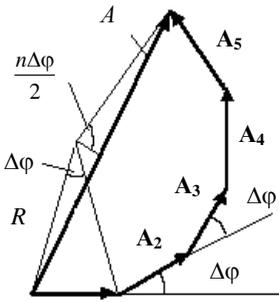
Это значит, что конец последнего вектора переместится дальше начала первого вектора. Следовательно, амплитуда результирующего колебания станет отличной от нуля.

Другими словами, при дальнейшем росте  $\theta$  амплитуда начнет возрастать. На определенном расстоянии от центра экрана она вновь достигнет максимума (отметим, что этот максимум называют **вторичным максимумом**), после чего вновь начнет

уменьшаться, и т.д. Нетрудно догадаться, что интенсивность вторичного максимума будет намного меньше интенсивности главного максимума (далее это утверждение будет доказано).

Таким образом, центральный главный максимум будет окружен системой минимумов и слабых максимумов.

Если угол  $\theta$  увеличить так, что  $\Delta\varphi$  станет равной  $\pm 2\pi$  (или  $\pm 2m\pi$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ ), то векторы на диаграмме вновь выстроятся вдоль одной прямой. Результирующая амплитуда вновь станет равной  $nA_0$ , а интенсивность  $n^2 I_0$ .



Следовательно, на экране будет наблюдаться несколько главных максимумов. Между ними будут расположены вторичные максимумы.

Однако проведенный анализ не позволил точно описать распределение интенсивности по направлениям.

Поэтому необходимо получить аналитическое выражение, описывающее интерференцию волн, идущих от нескольких синфазных источников.

Как уже отмечалось, рассматриваемые источники возбуждают на экране колебания, амплитуды которых одинаковы, а начальные фазы различны.

В произвольной точке экрана разность фаз колебаний, возбужденных на экране соседними источниками, равна  $\Delta\varphi$ .

Поэтому вектор  $A_2$  расположен под углом  $\Delta\varphi$  к вектору  $A_1$ , вектор  $A_3$  – под углом  $\Delta\varphi$  к вектору  $A_2$  и т.д.

Амплитуда результирующего колебания равна  $A$  (см. рисунок).

Поскольку все углы  $\Delta\varphi$  одинаковы, концы векторов  $A_1 \dots A_n$  лежат на окружности.

Боковая сторона в равнобедренном треугольнике, построенном на  $A_1$  с вершиной в центре окружности, равна радиусу этой окружности  $R$ .

Угол при вершине в этом треугольнике равен  $\Delta\varphi$ .

Следовательно, радиус окружности  $R$

$$R = \frac{A_1}{2 \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} = \frac{A_0}{2 \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}.$$

С другой стороны, из равнобедренного треугольника, построенного на результирующей амплитуде  $A$ , как видно из рисунка,

$$A = 2R \sin\left(\frac{n\Delta\varphi}{2}\right).$$

Отсюда, подставляя выражение для  $R$ , получаем

$$A = 2A_0 \frac{\sin n\Delta\varphi/2}{2 \sin \Delta\varphi/2} = A_0 \frac{\sin n\Delta\varphi/2}{\sin \Delta\varphi/2}.$$

Интенсивность волн на экране, в свою очередь равна

$$I = I_0 \frac{\sin^2 n\Delta\varphi/2}{\sin^2 \Delta\varphi/2}.$$

Рассмотрим эту зависимость подробнее.

При  $\theta = 0$  выражение для расчета  $I$  приводит к неопределенности типа  $0/0$ .

Учитывая, что при малых углах синус равен углу, измеренному в радианах, и используя правило Лопиталю, получаем, что интенсивность главного максимума в центре экрана  $I = n^2 I_0$  (такой же результат был получен ранее).

С увеличением  $\theta$  разность фаз  $\Delta\varphi$  растет ( $\Delta\varphi = kd \sin \theta$ ). При некотором  $\theta$   $\left(\frac{n\Delta\varphi}{2}\right) = \pi$ . Но это значит, что  $I = 0$ . Это значение  $\theta$  отвечает условию интерференционного минимума. Вдоль этого направления энергия результирующей волной не переносится.

Условие возникновения этого минимума можно записать в таком виде:

$$\Delta\varphi_{\min} = \pm \frac{2\pi}{n}.$$

Учитывая, что  $\Delta\varphi = kdsin\theta$ , условие минимума можно привести к следующему виду:

$$\theta_{\min} = \arcsin \frac{\Delta\varphi}{kd} = \arcsin \frac{2\pi}{nkd} = \arcsin \frac{\lambda}{nd}.$$

Если продолжать увеличение  $\theta$ ,  $\Delta\varphi$  тоже будет расти.

При некотором  $\Delta\varphi$  величина  $\sin^2 \frac{n\Delta\varphi}{2}$  достигает значения 1.

Поскольку по условию  $n\Delta\varphi \gg \Delta\varphi$ , значение  $\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$  остается достаточно малым и условие  $\sin^2 \frac{n\Delta\varphi}{2} = 1$  является условием вторичного максимума.

Это условие выполняется при  $\frac{n\Delta\varphi}{2} = \pm \frac{3\pi}{2}$  и  $\Delta\varphi_{\max} = \pm \frac{3\pi}{n}$ .

Амплитуда результирующего колебания при этом

$$A = A_0 \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{2n}} = A_0 \frac{-1}{\frac{3\pi}{2n}} = -A_0 \frac{2n}{3\pi}.$$

В свою очередь интенсивность

$$I = I_0 \frac{4n^2}{9\pi^2}.$$

Учитывая, что  $I_0 n^2$  есть величина интенсивности в центральном максимуме, получаем, что интенсивность первого вторичного максимума

$$I_{2\max} = \frac{4I_{1\max}}{9\pi^2} = 0,047I_{1\max}.$$

Таким образом, первый вторичный максимум слабее центрального более чем в 20 раз.

Дальнейшее отклонение от центра экрана вызывает дальнейший рост  $\Delta\varphi$ , поэтому будут существовать и другие вторичные максимумы. Амплитуда этих максимумов будет еще меньше.

Легко видеть, что между максимумами будут располагаться минимумы (там, где  $\sin^2 \frac{n\Delta\varphi}{2} = 0$ ).

Таким образом, на экране будет наблюдаться очень яркий главный максимум в центре, по обеим сторонам которого будет ряд слабых вторичных максимумов.

Продолжим анализ соотношения

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{n\Delta\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}.$$

Мы уже видели, что при  $\Delta\varphi = 0$  интерференция дает яркий главный максимум с  $I = n^2 I_0$ .

Увеличение  $\Delta\varphi$  на  $\pm 2\pi m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) не изменит отношения  $\frac{\sin^2 n\Delta\varphi/2}{\sin^2 \Delta\varphi/2}$ . Следовательно, для всех  $\Delta\varphi = \pm 2\pi m$  будут существовать главные максимумы с интенсивностью  $I = n^2 I_0$ . Положение этих максимумов на экране можно найти из следующих соображений.

Ранее было отмечено, что  $\Delta\varphi = kd \sin \theta$ . Поэтому

$$\Delta\varphi_{\max} = kd \sin \theta_{\max} = \pm m 2\pi.$$

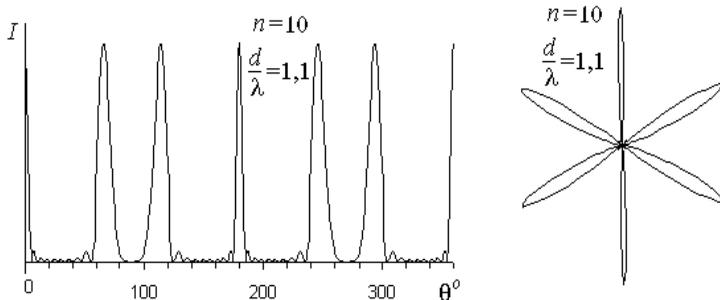
Следовательно, угол  $\theta_{\max}$ , под которым будет виден главный максимум, определяется из условия  $d \sin \theta_{\max} = \pm m \lambda$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$

(здесь учтено, что волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ).

Значение  $m$  называют **порядком главного максимума**. Поэтому центральный главный максимум называют главным максимумом нулевого порядка, следующий – первого и т.д.

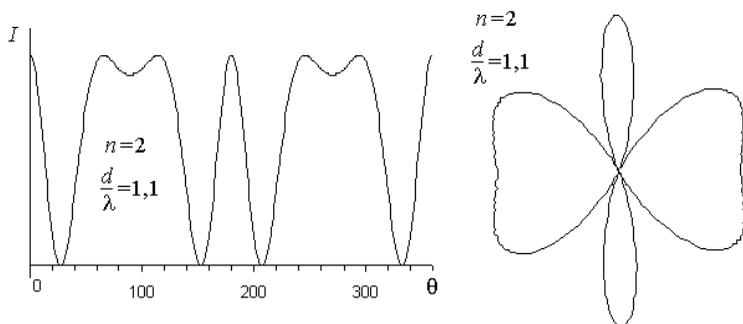
Используя полученное выражение для расчета интенсивности волн, идущих в различных направлениях от системы из  $n$  когерентных источников, легко построить как график зависимости интенсивности результирующей волны от значения  $\theta$ , так и диаграмму направленности.

Для десяти синфазных источников, расстояние между которыми больше, чем длина излучаемой волны, они имеют следующий вид:



И график зависимости  $I(\theta)$ , и диаграмма направленности в представленном на рисунках частном случае показывают, что в результате интерференции волн, идущих от десяти источников, волны будут распространяться в виде довольно узких лучей под углами  $\theta$ , равными  $0^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 180^\circ, 250^\circ, 290^\circ$  и  $360^\circ$ . Причем лучи, идущие под углами  $0^\circ$  и  $180^\circ$ , будут более узкими, чем остальные.

Изменение количества источников волн влияет на перераспределение энергии испускаемых волн.



Сравните приведенные выше рисунки с графиком зависимости  $I(\theta)$  и диаграммой направленности для двух синфазно колеблющихся источников, расстояние между которыми такое же, как и для десяти источников:

Сравнение показывает: чем больше источников одновременно испускают когерентные волны, тем значительнее проявляет себя перераспределение энергии волн, тем уже максимумы излучения.

Необходимо отметить и такую деталь: если  $d < \lambda$ , то уравнение  $\sin \theta_{\max} = m \frac{\lambda}{d}$  имеет решение только для  $m = 0$  (если  $m = 1$ , то синус должен стать больше 1, что невозможно).

Это значит, что при  $d < \lambda$  волны сконцентрируются в узкий пучок, идущий вдоль направления  $\theta = 0^\circ$  и  $180^\circ$ .

В этих лучах будет сконцентрирована практически вся энергия, испущенная всеми источниками.

На рисунке в качестве примера показаны диаграммы направленности для двух и десяти синфазных источников, расположенных на расстоянии  $d < \lambda$ .

Видно, что и в этом случае увеличение количества источников приводит к усилению концентрации энергии, переносимой результирующей волной.

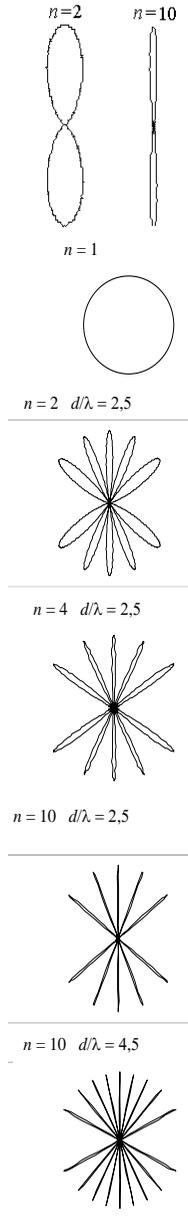
Следует отметить, что уменьшение  $d$  (при условии  $d < \lambda$ ) приближает систему из нескольких источников к точечному. Поэтому ширина лепестков диаграммы направленности будет увеличиваться (подразумевается, что количество источников не изменяется). Диаграмма направленности системы из нескольких источников будет приближаться к форме диаграммы направленности для точечного источника.

Обобщая полученные выше результаты анализа, отметим следующее.

На рисунке изображены диаграммы направленности для нескольких расположенных на одном расстоянии одинаковых синфазных источников (первая диаграмма построена для одного источника)

Сравнение диаграмм показывает, что от одного источника волны во все стороны распространяются одинаково.

Если одновременно излучают два или более источников, волны распространяются по-разному.



Энергия, переносимая волнами, концентрируется вдоль некоторых направлений.

Вдоль других направлений энергия вообще не переносится, хотя каждый из источников излучает равные количества энергии во все стороны (см. диаграмму для одного источника).

Увеличение количества источников при неизменном расстоянии между ними приводит к усилению концентрации энергии вдоль некоторых направлений (сравните ширину лепестков диаграмм направленности для разного количества источников).

Если зафиксировать количество источников и увеличить расстояние между ними, то возрастет количество лепестков диаграммы направленности.

Следовательно, увеличение расстояния между источниками приводит к увеличению количества главных максимумов интерференционной картины (сравните диаграммы направленности для 10 источников, расположенных на разных расстояниях друг от друга – при  $d/\lambda = 2,5$  и  $d/\lambda = 4,5$ ).

## 1.2. ДИФРАКЦИЯ

С древних времен было известно, что свет распространяется вдоль прямой линии. Световой луч считался ее эталоном.

Это означает, что световой луч не может проникнуть в область геометрической тени.

В 1665 г. была опубликована работа итальянского физика Гримальди, в которой он отметил, что тень от предмета на экране может быть размытой. При этом в области размытия тени видна радужная полоска.

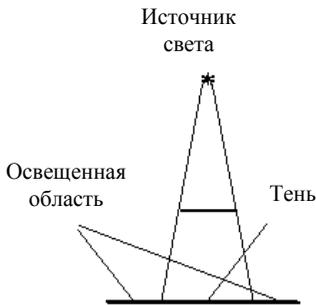
Открытое им явление Гримальди назвал **дифракцией**.

В настоящее время дифракцией называют любое отклонение в распространении волн от законов геометрической оптики. В частности, это проникновение волн в область геометрической тени.

Дифрагировать могут не только световые волны, но и волны другой природы (например, звуковые волны).

Следует отметить, что дифракция волн заметна, если размеры препятствий на пути волн сопоставимы с длиной волны.

Поэтому дифракция света становится заметной, если на его пути встречаются препятствия, размеры которых имеют величину



порядка микрона. На более крупных препятствиях дифракцию света заметить трудно.

В то же время звуковые волны легко проникают за препятствия, размеры которых порядка метров (например, можно слышать звук, испускаемый источником, находящимся за углом дома). Это объясняется тем, что размеры препятствия и длина звуковой волны сопоставимы.

### 1.2.1. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА–ФРЕНЕЛЯ

Представьте себе упругую волну, распространяющуюся в некоторой среде вдоль оси  $x$ .

Появление этой волны обусловлено колебаниями некоторой частицы среды  $S$ , именуемой источником.

Если волна не затухает, то колебания любой другой частицы среды, например  $S_1$ , происходят по тому же закону, что и колебания источника. Отличие лишь в начальной фазе.

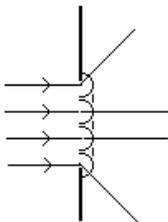
Изменится ли волна, идущая правее частицы  $S_1$ , если в качестве источника использовать эту частицу  $S_1$ ?

Нет, не изменится. Ведь частицы, расположенные за частицей  $S_1$ , не «знают», какая именно частица является источником.

Это позволяет сказать: каждую частицу, участвующую в волновом процессе, можно считать источником волны.

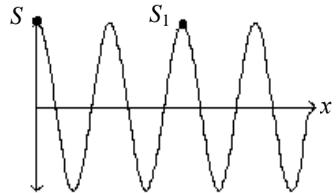
То же самое можно сказать и о электромагнитной волне: каждую точку пространства, в котором существует электромагнитная волна, можно считать ее источником.

Примерно к такому выводу в конце XVII в. пришел голландский ученый Христиан Гюйгенс, изучавший проблемы распространения света. Сформулированный им принцип гласит: **каждая точка, до которой дошла волна, представляет собой источник вторичной сферической волны; огибающая вторичных волн представляет собой фронт волны.**



Если следовать логике Гюйгенса, то легко объяснить явление проникновения света в область геометрической тени – ведь если каждая освещенная точка испускает свет во все стороны (а это и есть сферическая волна), то лучи обязательно попадут и в область тени!

Примерно через сто лет молодой французский физик Огюстен Жан Френель дополнил принцип Гюйгенса.



Он отметил, что волны, испускаемые вторичными источниками, интерферируют. Причем, поскольку колебания вторичных источников возбуждены одним первичным источником, вторичные источники когерентны. Если же в качестве вторичных выбрать источники, лежащие на волновой поверхности, то их колебания будут синфазными. Поэтому интерференция идущих от них волн устойчива и энергия волн, прошедших за препятствие, перераспределяется.

Это фундаментальное для волновой оптики положение носит название **принципа Гюйгенса–Френеля**.

Сформулированный Френелем принцип позволил ему объяснить природу явления дифракции.

### 1.2.2. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ. МЕТОД ЗОН ФРЕНЕЛЯ

Дифракцией Френеля называют дифракцию сферических световых волн.

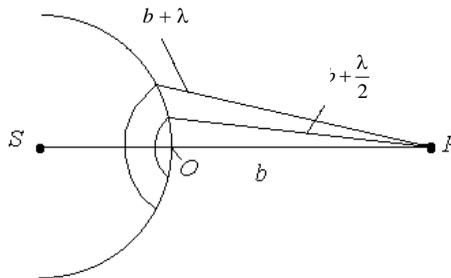
Рассмотрим это явление более подробно.

Итак, пусть в точке  $S$  расположен точечный источник света.

Рассчитаем амплитуду и интенсивность волны, дошедшей от источника в точку  $P$ .

Если источник света точечный, то испускаемая им волна является сферической. Любая волновая поверхность такой волны – сфера с центром в точке  $S$ .

Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны так, чтобы расстояние от точки  $P$  до краев соседних зон отличалось на  $\lambda/2$ .



Для этого увеличим длину  $b$  отрезка  $OP$  на  $\lambda/2$  и проведем новым отрезком окружность на волновой поверхности. В результате получим первую зону Френеля.

Затем увеличим длину этого отрезка еще на  $\lambda/2$  и вновь проведем окружность на волновой поверхности. Получим вторую зону Френеля.

Продолжая построение, получим совокупность зон Френеля.

В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля каждая точка волновой поверхности представляет собой источник волн, причем эти источники синфазны.

Расстояние от точек, расположенных на внешнем крае соседних зон, до точки  $P$  отличаются на  $\lambda/2$ , поэтому они возбуждают в точке  $P$  противофазные колебания.

Точно так же будут соотноситься по фазе колебания, возбужденные источниками, одинаково удаленными от внешнего края соседних зон.

Поэтому можно сказать, что соседние зоны возбуждают в точке наблюдения противофазные колебания.

Последнее утверждение означает, что амплитуда результирующего колебания в точке  $P$  может быть найдена как

$$A_i = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots,$$

где  $A_i$  – амплитуда колебаний, возбуждаемых  $i$ -й зоной в точке наблюдения.

Френелем было доказано, что амплитуда колебаний, возбуждаемых  $i$ -й зоной в точке наблюдения, монотонно уменьшается по мере увеличения номера зоны.

Следовательно,  $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_n$ .

Поскольку амплитуда убывает монотонно, можно считать,

что  $A_i = \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{2}$ , т.е. амплитуда колебаний, возбужденных на экране какой-либо зоной Френеля, равна полусумме амплитуд, возбужденных там же соседними зонами.

С учетом этого результирующая амплитуда колебаний, возбужденных на экране полностью открытой волновой поверхностью, равна

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2}^*.$$

Таким образом, полностью открытая волновая поверхность возбуждает в точке наблюдения колебания, амплитуда которых равна половине амплитуды колебаний, возбужденных первой зоной Френеля.

Если на пути волны поставить непрозрачный экран с круглым отверстием, радиус которого равен радиусу первой зоны Френе-

---

\* Поскольку амплитуда колебаний, возбуждаемых  $i$ -й зоной, в точке наблюдения равна среднему арифметическому от амплитуд колебаний, возбужденных соседними с ней зонами, сумма членов, заключенных в скобки, равна нулю.

ля, то амплитуда результирующего колебания равна амплитуде колебаний, возбуждаемых в точке наблюдения только первой зоной Френеля (все остальные зоны закрыты и не возбуждают колебаний в точке наблюдения):

$$A = A_1.$$

Это означает, что амплитуда колебаний в точке  $P$  возросла в два раза по сравнению с предыдущей ситуацией. Интенсивность же возросла в четыре раза\*!

Этот вывод не означает, что, поставив препятствие на пути света, мы сильнее осветили весь экран.

Лучи, прошедшие через отверстие, будут интерферировать. Это приведет к перераспределению энергии волны, прошедшей на экран.

В результате против центра отверстия будет максимум интерференции и точка  $P$  окажется освещенной гораздо ярче соседних. По мере удаления от точки  $P$  яркость света будет уменьшаться, так что точка  $P$  будет окружена темным кольцом. За темным кольцом будет расположено более яркое и т.д.

Если увеличить радиус отверстия до радиуса второй зоны Френеля, то

$$A = A_1 - A_2.$$

Можно показать, что амплитуды колебаний, возбужденных соседними зонами Френеля, очень мало отличаются по величине, поэтому  $A_1 - A_2 \approx 0$ .

Следовательно, при таком отверстии точка  $P$  практически не освещена.

Обратите внимание: вывод касается только точки  $P$ . Вокруг точки, как и в предыдущем примере, будут расположены дифракционные максимумы и минимумы кольцевой формы.

Если в отверстии укладывается целое число зон Френеля, то амплитуда колебаний в точке  $P$  рассчитывается по формуле

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_i}{2},$$

где  $A_i$  – амплитуда колебаний, возбужденных на экране последней открытой зоной Френеля; знак «плюс» используется, если открыто нечетное число зон, «минус» – если четное.

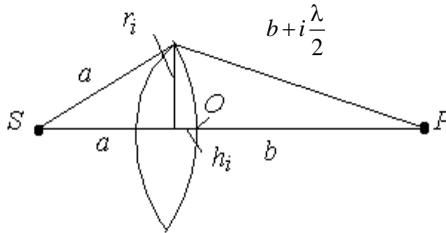
---

\* Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды.

Из сказанного выше следует простой вывод: точка  $P$  будет ярко освещена, если в отверстии укладывается нечетное число зон Френеля, и, наоборот, точка  $P$  практически не будет освещена, если в отверстии уложится четное число зон Френеля.

Для того чтобы определить, сколько зон уложится в круглом отверстии, необходимо уметь рассчитывать радиус зон Френеля.

Найдем выражение для его расчета.



На рисунке изображена  $i$ -я зона Френеля. Символами обозначены следующие величины:  $S$  – источник света,  $a$  – радиус волновой поверхности,  $b$  – расстояние от точки  $P$  до волновой поверхности,  $r_i$  – радиус  $i$ -й зоны Френеля,  $h_i$  – длина отрезка, соединяющего точку  $O$  и точку пересечения перпендикуляра, опущенного от края зоны Френеля на отрезок  $SP$ .

Из рисунка видно, что

$$r_i^2 = a^2 - (a - h_i)^2 = \left(b + i \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_i)^2;$$

$$a^2 - a^2 + 2ah_i - h_i^2 = b^2 + bi\lambda + \frac{i^2\lambda^2}{4} - b^2 - 2bh_i - h_i^2;$$

$$2ah_i = bi\lambda - 2bh_i + \frac{i^2\lambda^2}{4};$$

$$h_i = \frac{bi\lambda}{2(a+b)};^*$$

$$r_i^2 = 2ah_i - h_i^2 \approx 2ah_i = \frac{2ab}{2(a+b)}i\lambda;$$

$$r_i = \sqrt{\frac{ab}{a+b}}i\lambda.$$

Полученное выражение позволяет найти радиус любой зоны Френеля и оценить результат дифракции на различных препятствиях круглой формы (экран с круглым отверстием, непрозрачный диск).

Например, если  $a = b = 1$  м,  $\lambda = 0,5$  мкм, то радиус первой зоны Френеля  $r_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м. Следова-

тельно, если в непрозрачном экране сделать отверстие радиусом  $0,5 \cdot 10^{-3}$  м, то точка  $P$  будет ярко освещена (максимум дифракции). Если же радиус отверстия увеличить в  $\sqrt{2}$  раз, то точка  $P$  будет практически не освещена.

И еще одна деталь.

Поскольку полностью открытая волновая поверхность оказывает действие, эквивалентное действию половины первой зоны Френеля, то можно сказать, что свет, идущий от точечного источника  $S$ , воспринимается нами как тонкий прямой луч (в рассмотренном выше примере радиус луча  $0,5 \cdot 10^{-3}$  м). Этим и объясняется эффект, который принято называть прямолинейностью распространения света. Хотя в соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля свет от точечного источника идет во все стороны, мы воспринимаем его как узкий прямолинейный луч.

### 1.2.3. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА ЩЕЛИ

Дифракцией Фраунгофера называют дифракцию в параллельных лучах.

Другими словами, это дифракция плоских волн (т.е. волн с плоской волновой поверхностью).

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на узкой длинной щели.

---

\* Здесь учтено, что  $\frac{i^2\lambda^2}{4} \ll bi\lambda$ .

Пусть имеется узкая длинная щель, на которую перпендикулярно ее плоскости падает пучок параллельных лучей с длиной волны  $\lambda$ .

Если разбить щель на  $n$  узких зон, параллельных краям щели, то каждая зона, в соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля, является источником вторичных волн.

Поскольку зон много, мы встречаемся с рассмотренным ранее случаем – многолучевой интерференцией.

Результирующую амплитуду в этом случае можно найти по формуле

$$A = A_0 \frac{\sin n\Delta\varphi/2}{\sin \Delta\varphi/2}$$

(здесь  $A_0$  – амплитуда колебаний, возбужденных на экране одним источником волн), а интенсивность по формуле

$$I = I_0 \frac{\sin^2 n\Delta\varphi/2}{\sin^2 \Delta\varphi/2}.$$

В данном случае известна длина цепочки из  $n$  осцилляторов – это ширина щели  $b$ . Поэтому

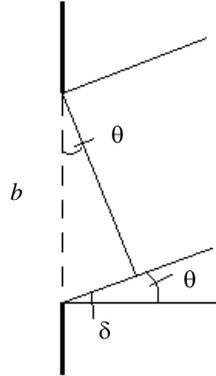
$$\frac{n\Delta\varphi}{2} = \frac{1}{2} k\delta = \frac{2\pi}{2\lambda} b \sin \theta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta,$$

где  $b$  – ширина щели;  $n$  – число источников вторичных волн, выделенных нами на ширине щели;  $\delta$  – разность хода лучей, идущих от краев щели;  $\theta$  – угол между нормалью к плоскости щели и направлением распространения волн.

Следовательно, для щели

$$I_\theta = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{n\lambda} b \sin \theta \right)}$$

(поскольку интенсивность в произвольной точке экрана зависит от угла  $\theta$ , результирующая интенсивность здесь обозначена  $I_\theta$ ).



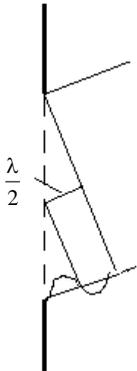
Если  $n$  велико, то  $\sin\left(\frac{\pi}{n\lambda}b\sin\theta\right) \approx \frac{\pi}{n\lambda}b\sin\theta$  и

$$I_{\theta} = n^2 I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}b\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}b\sin\theta\right)^2} = n^2 I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2},$$

где  $\alpha = \frac{\pi}{\lambda}b\sin\theta$ , т.е. половина разности фаз колебаний, возбужденных на экране первой и последней  $n$ -й зонами.

При  $\alpha = 0$  (это условие выполняется при  $\theta = 0$ , т.е. напротив центра щели) интенсивность света максимальна и равна  $n^2 I_0$ . Значит, напротив центра щели расположен максимум, интенсивность которого в  $n^2$  раз ярче света, приходящего от одной зоны.

При  $\alpha = \pm\pi, 2\pi, \dots, m\pi$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )  $\sin^2 \alpha = 0$ . Следовательно,  $I_{\theta} = 0$ , т.е. равенство  $\alpha = \pm m\pi$  есть условие минимума дифракции на щели.



Поскольку  $\alpha = \frac{\pi}{\lambda}b\sin\theta$ , условие минимума можно записать и в таком виде

$$\frac{\pi}{\lambda}b\sin\theta_{\min} = \pm m\pi$$

или

$$b\sin\theta_{\min} = \pm m\lambda.$$

Внешне это условие совпадает с условием максимума при интерференции двух лучей. Здесь же это выражение является условием минимума. Попробуем объяснить этот факт.

Пусть на разности хода лучей, идущих от краев щели  $\delta$ , укладывается одна длина волны (т.е.  $m = 1$ ).

Разделим щель на две области так, чтобы разность хода от краев областей до экрана отличалась на  $\frac{\lambda}{2}$ .

Тогда лучи, пришедшие на экран от верхнего края первой и второй областей, возбуждают на экране противофазные колебания. Складываясь, они взаимно гасятся.

Такие же колебания возбуждают лучи, приходящие на экран от всех равноудаленных от верхних краев областей точек.

Таким образом, колебания, возбужденные на экране первой областью, будут скомпенсированы колебаниями, возбужденными второй. Поэтому и возникает дифракционный минимум (его называют первым минимумом, так как он соответствует  $m = 1$ ).

Если угол  $\theta$  увеличить так, что на оптической разности хода уложится три полуволны, то щель будет разделена на три области.

Колебания, возбужденные первой областью, будут скомпенсированы колебаниями, возбужденными второй.

Колебания, возбужденные третьей областью, скомпенсированы не будут.

Поэтому на экране возникнет максимум.

Этот максимум будет гораздо слабее центрального (при  $\theta = 0$ ), так как центральный максимум образуется в результате сложения колебаний, возбужденных всеми зонами, а рассматриваемый – волнами, пришедшими от  $1/3$  ширины щели.

Дальнейшее увеличение  $\theta$  может привести к тому, что на ширине щели уложится четыре области ( $m = 2$ ). Опять возникнет минимум, так как колебания, возбужденные на экране соседними зонами, скомпенсируют друг друга. Свет от щели под этим углом не пойдет.

Когда на разности хода уложится пять полуволн, опять возникнет максимум (так как колебания, возбужденные пятой областью, не будут скомпенсированы). Яркость этого максимума будет еще меньше, чем яркость предыдущего.

Из сказанного можно сделать следующие выводы:

1) против центра щели всегда располагается яркий максимум, интенсивность света в котором равна  $n^2 I_0$ ;

2) по мере удаления от центра экрана (т.е. при увеличении  $\theta$ ) интенсивность света уменьшается;

3) при значении  $\theta$ , отвечающем условию  $b \sin \theta_{\min} = \pm \lambda$ , яркость уменьшится до нуля, на экране будут наблюдаться минимумы (слева и справа от центрального максимума);

4) по мере удаления от минимумов яркость света опять начнет возрастать и при углах  $\theta$ , отвечающих условию

$b \sin \theta_{\max} = \pm (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$  достигнет максимума (так как при этом на ширине щели уложится нечетное число областей).

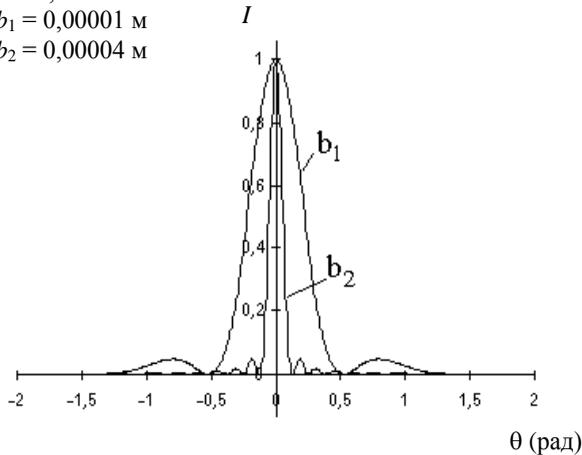
Таким образом, на экране, расположенном за щелью, возникает яркая полоса, по обе стороны от которой располагаются минимумы; далее следуют гораздо менее яркие полосы, также разделенные минимумами.

Отметим еще несколько особенностей, присущих дифракции на одной щели.

Первый минимум возникает при условии  $b \sin \theta = \pm \lambda$ . Из этого условия следует, что если уменьшать ширину щели, то  $\sin \theta = \frac{\lambda}{b}$  увеличивается. Следовательно, чем уже щель, тем шире центральный максимум.

На рисунке вы можете видеть зависимость интенсивности света на экране за щелью для двух значений ширины щели.

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,000005 \text{ м} \\ b_1 &= 0,00001 \text{ м} \\ b_2 &= 0,00004 \text{ м} \end{aligned}$$



При освещении щели некогерентным (например, белым) светом мы получим на экране сумму дифракционных картин для всех длин волн, имеющих в падающем излучении.

Центральный максимум для всех длин волн будет лежать против центра щели, следовательно, он будет белым.

Но положение первых минимумов уже зависит от длины волны, поэтому минимумы для разных длин волн будут расположены в разных точках экрана. Это означает, что центральный максимум по краям будет разноцветным.

Положение вторичных максимумов также зависит от длины волны. Поэтому на экране будут видны слабые (по сравнению с главным) цветные вторичные максимумы, причем максимумы, соответствующие меньшей длине волны, будут расположены ближе к центру.

Если ширина щели будет меньше длины волны падающего излучения, то проявляется еще одна важная особенность.

Из условия минимума  $b \sin \theta = \pm m \lambda$  при  $b < \lambda$  следует, что даже при  $n = 1$  значение синуса должно превышать единицу.

Физически это означает, что при такой ширине щели минимумы не возникают. Центральный максимум имеет ширину от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Его яркость по мере удаления от центра экрана постепенно уменьшается.

Обратите внимание на то, что и при  $b > \lambda$  количество возникающих минимумов ограничено:  $|m_{\max}| \leq \frac{b}{\lambda}$  (бóльшие значения  $m$  невозможны, так как значение синуса не может превышать единицу).

#### 1.2.4. ДИФРАКЦИЯ НА ДВУХ ЩЕЛЯХ

Рассматривая дифракцию на одной щели, мы предполагали, что экран расположен бесконечно далеко\*. Это, в частности, означает, что конечное изменение положения щели (смещение параллельно самой себе) практически не вызовет смещения дифракционной картины на экране: конечное смещение щели просто исчезающе мало по сравнению с расстоянием до экрана.

Поэтому если имеются две параллельные щели, то их дифракционные картины на экране наложатся друг на друга.

Естественно, в результате наложения максимумов их яркость возрастет.

Причем на первый взгляд кажется, что поскольку через две щели пройдет в два раза больше света, чем через одну, постольку яркость максимумов должна удвоиться.

Но если волны, идущие от щелей, когерентны, они будут давать устойчивую интерференцию. Следовательно, должно произойти дополнительное перераспределение интенсивности света

---

\* На самом деле дифракционную картину наблюдают на экране, размещенном в фокальной плоскости линзы, расположенной между щелью и экраном.

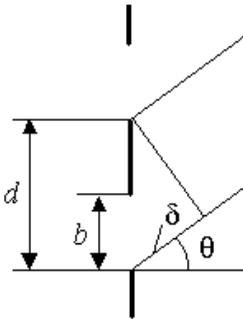
\* При прохождении света через каждую из щелей уже произошло перераспределение его энергии за счет интерференции лучей, прошедших сквозь одну щель; поэтому перераспределение за счет интерференции лучей, прошедших сквозь **разные** щели, названо дополнительным.

за щелью и яркость максимумов не просто возрастет в два раза. Результат дополнительной интерференции лучей, прошедших сквозь разные щели, будет более сложным. Проанализируем его.

Итак, имеются две одинаковые параллельные щели.

Ширина каждой из щелей  $b$ , расстояние между одноименными краями щелей  $d$  (см. рисунок).

Вы уже знаете, что свет за щелью концентрируется вдоль направлений, отвечающих условию максимума.



Вдоль направлений, отвечающих условию минимума, свет практически не идет.

Следовательно, и для двух щелей в этих направлениях (отвечающих условию минимума для одной щели) будет минимум: интерферировать просто нечему, под этими углами свет не идет.

Другими словами, на дифракционной картине сохраняются прежние минимумы, отвечающие условию

$$b \sin \theta = \pm m \lambda \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Свет, идущий вдоль других направлений, естественно, будет интерферировать. Его энергия будет перераспределяться. В результате в одних направлениях интенсивность возрастет, в других – уменьшится.

Как видно из рисунка, оптическая разность хода лучей, идущих от аналогичных точек щелей,  $\delta = d \sin \theta$ , а разность фаз волн, пришедших на экран от аналогичных точек щелей,

$$\Delta \varphi = k \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta.$$

Если  $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 0, 2\pi, \dots, 2n\pi$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то интерференция увеличивает интенсивность света, прошедшего сквозь щели в этом направлении. Следовательно,

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2n\pi$$

или

$$d \sin \theta = n \lambda,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , есть условие максимума.

Если же  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = \pi, 3\pi \dots (2m' + 1)\pi$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то интерференция ослабляет интенсивность света, прошедшего сквозь щели в соответствующем направлении.

Следовательно,

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = (2m' + 1)\pi$$

или

$$d \sin \theta = (2m' + 1) \frac{\lambda}{2},$$

где  $m' = 0, 1, 2, \dots$ , есть условие минимума.

Поскольку  $d > b$ ,

$$\sin \theta_{\max} = n \frac{\lambda}{d},$$

$$\sin \theta_{\min} = (2m' + 1) \frac{\lambda}{2d}$$

при одинаковых значениях  $n, m', m$  будут меньше, чем

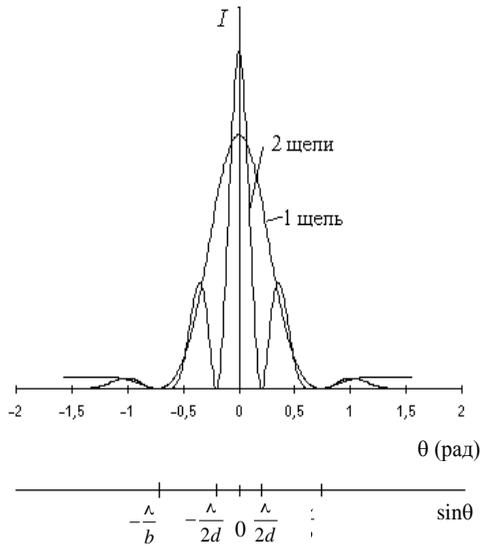
$$\sin \theta_{\min} = m \frac{\lambda}{b}.$$

Это значит, что между прежними минимумами появляется не один, а несколько более узких максимумов, разделенных дополнительными минимумами. Появление этих максимумов и минимумов обусловлено возникновением дополнительной интерференции – интерференции лучей, прошедших сквозь разные щели.

Распределение интенсивности света на экране в этом случае представлено на рисунке\*.

---

\* На данном рисунке изображены распределения интенсивности света на экране для одной щели и для двух щелей (щели одинаковы по ширине).



Количество максимумов, появившихся на месте центрального максимума от одной щели, зависит от соотношения расстояния между одноименными краями щели  $d$  и длины волны света  $\lambda$ . Наибольшее возможное значение  $n$  можно найти из условия

$$n \leq \frac{d}{\lambda}$$

(это выражение получено из условия максимума  $\sin \theta_{\max} = n \frac{\lambda}{d}$ ; предполагается, что синус имеет наибольшее возможное значение, т.е. равен 1). Если отношение  $d$  к  $\lambda$  имеет дробное значение, следует взять ближайшее меньшее целое значение. Например, если  $\frac{d}{\lambda} = 2,5$ , то  $n = 2$ .

При максимальном значении  $n = 2$  на месте максимума при дифракции на одной щели будут видны 5 максимумов – один в центре ( $n = 0$ ) и по два при  $n = \pm 1$  и  $\pm 2$ .

Если отношение расстояния между одноименными краями щелей  $d$  к ширине щели  $b$  равно целому числу, то одновременно выполняются и условие максимума для дифракции на двух щелях и

условие минимума для дифракции на одной щели. Поэтому возникает вопрос: что же будет в точках, соответствующих этим условиям? Какое из этих условий «главнее»?

«Главнее» будет условие минимума, так как под этим углом свет ни из одной щели не идет. Поэтому усиливаться, как это уже отмечено выше, нечему. И поэтому минимумы, соответствующие условию  $b \sin \theta = \pm m \lambda$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), называют главными.

Таким образом, если  $d/b$  – целое, то количество дифракционных максимумов будет меньше, чем следует из условия  $n \leq \frac{d}{\lambda}$ .

Например, если  $\lambda = 0,6$  мкм, а  $d = 2,1$  мкм, должно возникнуть 7 максимумов. Но если ширина щели будет равна 0,7 мкм, то максимумов будет 5. Максимумы, соответствующие  $n = \pm 3$ , будут уничтожены главными минимумами, соответствующими  $m = \pm 1$ .

### 1.2.5. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА

Рассмотрев дифракцию на двух щелях, вы увидели, что на месте центрального максимума появляется несколько более узких и более ярких максимумов.

Можно предположить, что увеличение числа щелей должно сделать этот эффект более заметным. Поэтому рассмотрим систему из  $N$  одинаковых параллельных узких щелей, разделенных одинаковыми промежутками, – **дифракционную решетку**.

Как мы уже отмечали, через каждую щель проходит свет, интенсивность которого зависит от угла между нормалью к щели и выбранным направлением в соответствии с выражением

$$I_{\theta} = I_{\text{оmax}} \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta \right)^2}.$$

Поскольку волны, прошедшие через разные щели, когерентны, свет, идущий от разных щелей, будет интерферировать.

Поскольку щелей много ( $N$ ), мы вновь имеем дело с многолучевой интерференцией. Ее результат известен:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)}.$$

В данном случае  $\Delta\varphi$  – разность фаз колебаний, возбужденных на экране волнами, пришедшими от одноименных краев соседних щелей (например, от левых краев).

Величина разности фаз будет равна  $\Delta\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$ . Поэтому результирующая интенсивность света, прошедшего сквозь все щели решетки под углом  $\theta$ ,

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)},$$

или, раскрывая выражение для расчета  $I_0$ ,

$$I = I_{\text{о max}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)}.$$

Множитель  $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\theta\right)^2} = 0$  при  $b \sin\theta = \pm m\lambda$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Как вы знаете,  $b \sin\theta = \pm m\lambda$  есть условие минимума для дифракции на одной щели. Следовательно, под углами  $\theta$ , отвечающими этому условию, свет не пойдет ни через одну щель.

Поэтому условие  $b \sin\theta = \pm m\lambda$  является условием минимума и для дифракционной решетки.

При  $d \sin \theta = \pm n \lambda$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) множитель  $\frac{\sin^2 \left( \frac{N \pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)} = N^2$ . Это значит, что в направлениях, отвечающих этому условию, колебания в результате интерференции усиливаются. На экране наблюдаются максимумы с интенсивностью  $I = N^2 I_0$ . Эти максимумы принято называть **главными максимумами**.

Как вы уже видели при рассмотрении дифракции на двух щелях, между главными максимумами имеются дополнительные минимумы. Условие дополнительного минимума в данном случае –

$\sin^2 \left( \frac{N \pi d}{\lambda} \sin \theta \right) = 0$ . Его можно записать и в таком виде:

$\left( \frac{N \pi d}{\lambda} \sin \theta \right) = \pm m' \pi$  ( $m' = 1, 2, \dots$ ), или окончательно,

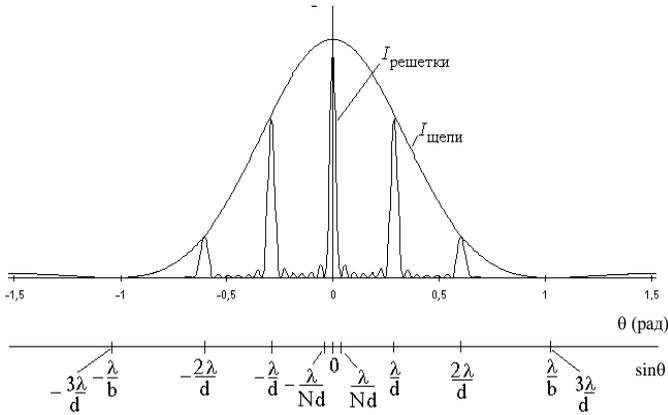
$$d \sin \theta = \pm m' \frac{\lambda}{N}.$$

Рассматривая многолучевую интерференцию, вы видели, что при  $\sin^2 \left( \frac{N \pi d}{\lambda} \sin \theta \right) = 1$  наблюдаются слабые вторичные максимумы. Следовательно,  $\left( \frac{N \pi d}{\lambda} \sin \theta \right) = (2n' + 1) \frac{\pi}{2}$  есть условие вторичного максимума. Его также можно записать в виде

$$d \sin \theta = \pm (2n' + 1) \frac{\lambda}{2N}.$$

В графической форме зависимость интенсивности света от угла  $\theta$  имеет вид, изображенный на рисунке.

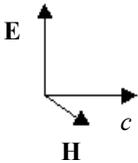
Обратите внимание на то, что графики для одной щели и для решетки изображены в разных масштабах. На самом деле яркость главных максимумов при дифракции на решетке в  $N^2$  раз выше яркости света, идущего под соответствующим углом через одну щель.



Если эти графики изобразить в одном масштабе, то график зависимости интенсивности света для одной щели будет просто не виден (даже если решетка образована сотней щелей, то этот график будет в 10 000 (десять тысяч!) раз ниже.

### 1.3. ЕСТЕСТВЕННЫЙ И ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ СВЕТ. ВИДЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Выше отмечалось, что свет испускается атомами вещества в виде цуга при переходе электронов с более высокого энергетического уровня на более низкий.



Цуг представляет собой электромагнитный волновой пакет, в котором происходят колебания взаимно перпендикулярных векторов **E** и **H** (векторы **E**, **H** и скорость цуга **c** образуют правую тройку векторов).

Поскольку взаимная ориентация векторов жестко задана (правая тройка), в дальнейшем мы будем говорить лишь о векторе **E**.

Мы уже отмечали, что один атом излучает свет в течение  $\approx 10^{-8}$  с. В любом источнике свет испускается множеством атомов. При этом в естественных условиях плоскости колебаний векторов **E** никак не связаны между собой. Поэтому естественный свет представляет собой суперпозицию волн, в которых ориентация вектора **E** хаотически меняется с течением времени. Точнее – в любой момент времени в естественном свете одновременно существуют цуги с самыми разными плоскостями колебаний вектора **E**.

Если каким-либо образом из всех цугов, испущенных нагретым телом, выбрать те, у которых вектор  $\mathbf{E}$  колеблется в одной плоскости, мы получим **поляризованный** свет.

Поскольку в таком свете колебания вектора  $\mathbf{E}$  происходят в одной плоскости, его называют **плоскополяризованным**. Стоит отметить, что любой цуг является плоскополяризованным.

Вообще поляризованным называют свет, в котором плоскость колебаний вектора  $\mathbf{E}$  либо не изменяется, либо изменяется упорядоченно.

Кроме плоскополяризованного существует поляризованный по кругу и эллиптически поляризованный свет.

**Поляризованным по кругу** называют свет, в котором вектор  $\mathbf{E}$  вращается с угловой скоростью  $\omega$ , равной циклической частоте электромагнитной волны. Модуль вектора  $\mathbf{E}$  при этом не изменяется, из-за чего вектор  $\mathbf{E}$  в плоскости, перпендикулярной лучу, описывает своим концом окружность (отсюда и название – «поляризованный по кругу»).

**Эллиптически поляризованным** называют свет, в котором вектор  $\mathbf{E}$  вращается с угловой скоростью  $\omega$ , равной циклической частоте волны. Модуль вектора  $\mathbf{E}$  при этом изменяется так, что в плоскости, перпендикулярной лучу, вектор  $\mathbf{E}$  описывает своим концом эллипс.

Принято выделять еще один вид поляризованного света – **частично поляризованный** свет. Это свет представляет собой суперпозицию естественного и плоскополяризованного света. Характеристикой частично поляризованного света является **степень поляризации**

$$p = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Способ измерения интенсивностей  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  будет рассмотрен в следующем разделе.

### **1.3.1. СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА**

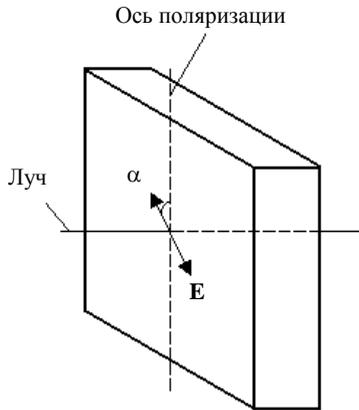
Существует класс веществ, физические свойства которых зависят от направления. Такие вещества называют анизотропными.

Анизотропными являются практически все кристаллические вещества.

В некоторых прозрачных кристаллах плоскополяризованный свет с разной ориентацией вектора  $\mathbf{E}$  распространяется по-разному. Например, в турмалине плоскополяризованный свет с

одной ориентацией плоскости колебаний вектора  $\mathbf{E}$  проходит почти без потерь, а свет, в котором вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен первому, вообще не проходит.

Направление в кристалле, параллельное плоскости колебаний вектора  $\mathbf{E}$ , при котором плоскополяризованный свет, проходящий сквозь кристалл, не ослабляется, называют **осью поляризации**.



Таким образом, свет, поляризованный параллельно оси поляризации турмалина, пройдет через кристалл без ослабления. Свет, поляризованный перпендикулярно оси поляризации, не проходит, он поглощается турмалином.

Если на кристалл падает плоскополяризованный свет, в котором плоскость колебаний вектора  $\mathbf{E}$  образует угол  $\alpha$  с осью поляризации, то составляющая  $E \cos \alpha$  пройдет сквозь кристалл без ослабления, а остальная часть падающего излучения поглотится. Следова-

тельно, амплитуда прошедшего плоскополяризованного света равна

$$E = E_0 \cos \alpha ,$$

а интенсивность

$$I = I_0 \cos^2 \alpha .$$

Последнее соотношение называют **законом Малю;са**.

С помощью пластинки из подобного кристалла можно получить плоскополяризованный свет. Поэтому такую пластинку называют **поляризатором**.

Если на поляризатор падает естественный свет, угол  $\alpha$  хаотически меняет свое значение. Поэтому доля света, прошедшего сквозь поляризатор, будет соответствовать среднему значению  $\cos^2 \alpha$ . Как известно, при равномерно распределенных значениях  $\alpha$  среднее значение квадрата косинуса равно 0,5.

Поэтому естественный свет, проходя сквозь поляризатор, ослабляется в два раза. При этом он превратится в плоскополяризованный свет, плоскость поляризации которого будет параллельна оси поляризации поляризатора.

С помощью поляризатора можно не только получить плоскополяризованный свет, но и определить, является ли пропущенный сквозь поляризатор свет плоскополяризованным (в этом случае поляризационный прибор называют **анализатором**). Для этого луч света направляют на анализатор перпендикулярно его плоскости, после чего вращают анализатор вокруг направления луча.

Если луч плоскополяризован, то при определенном положении анализатора интенсивность прошедшего света будет максимальной. При повороте анализатора на  $90^\circ$  свет сквозь него не пройдет.

Если падающий луч будет естественным, то при любом положении анализатора интенсивность прошедшего света будет одинакова (правда, такой же результат будет и в том случае, если свет поляризован по кругу).

Если на анализатор падает частично поляризованный свет, то интенсивность прошедшего света будет зависеть от положения анализатора.

Когда ось поляризации анализатора будет параллельна вектору  $\mathbf{E}$  плоскополяризованной компоненты частично поляризованного света, интенсивность прошедшего света будет максимальной ( $I_{\max}$ ). Если же поляризатор повернуть на  $90^\circ$ , интенсивность будет минимальной ( $I_{\min}$ ). Знание этих величин позволяет рассчитать степень поляризации частично поляризованного света.

Следует отметить, что результаты анализа света будут такими же, если свет будет эллиптически поляризованным. Для того чтобы отличить частично поляризованный свет от эллиптически поляризованного и естественный свет от поляризованного по кругу, существуют более сложные методы анализа.

Второй способ получения поляризованного света основан на отражении света от поверхности диэлектрика. Рассмотрим механизм этого способа поляризации света.

Пусть на поверхность диэлектрика падает плоскополяризованный свет.

Пусть плоскость колебаний вектора  $\mathbf{E}$  совпадает с плоскостью падения луча\*.

Колебания вектора  $\mathbf{E}$  вызовут колебания электронов вещества. Колебательное движение является ускоренным движением.

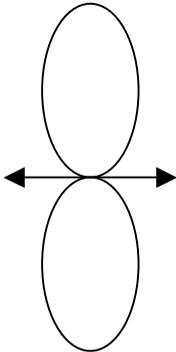
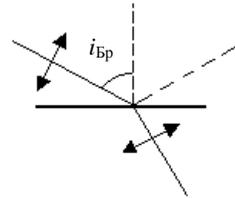
---

\* Плоскостью падения называют плоскость, образованную падающим лучом и перпендикуляром к поверхности в точке падения.

Как известно, электромагнитные волны испускаются зарядами, движущимися ускоренно. Следовательно, начавшиеся колебания электронов в веществе породят электромагнитные волны.

Примерный вид диаграммы направленности излучения колеблющегося заряда показан на расположенном рядом рисунке (стрелкой показано направление колебаний заряда).

По диаграмме видно, что максимальное излучение электромагнитных волн будет происходить в направлении, перпендикулярном направлению колебаний электрона. В направлении же, совпадающем с направлением колебаний, энергия не излучается.



Именно так возникает отраженный свет.

Если выбрать такой угол падения  $i$ , при котором направление отраженного луча совпадает с направлением колебаний электронов, то отраженного света не будет.

Шотландский физик Дэвид Брюстер экспериментально обнаружил этот эффект в 1815 г.

Угол падения, при котором наблюдается этот эффект, отвечает выражению

$$\operatorname{tg} i_{\text{Бр}} = n ,$$

где  $i_{\text{Бр}}$  – угол падения света (угол Брюстера);  $n$  – показатель преломления диэлектрика.

Это соотношение называют **законом Брюстера**.

Отметим, что при падении света под углом Брюстера угол между отраженным и преломленным лучом равен ровно  $90^\circ$ .

Вернемся к анализу рассматриваемой ситуации.

Пусть теперь плоскость колебаний вектора  $\mathbf{E}$  перпендикулярна плоскости падения. В этом случае отраженный луч возникает при любом угле падения света – любое направление отраженного луча будет перпендикулярно направлению колебаний электронов в диэлектрике.

Поэтому при отражении естественного света от диэлектрика возникает частично поляризованный свет. В отраженном свете будет преобладать свет с вектором  $\mathbf{E}$ , колеблющимся в плоскости, перпендикулярной плоскости падения.

Если же естественный свет падает на диэлектрик под углом Брюстера, отраженный свет будет плоскополяризованным.

Существуют и другие способы получения поляризованного света. Один из них, основанный на явлении двойного лучепреломления, будет рассмотрен в следующем разделе.

### **1.3.2. ЯВЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ**

В 1669 г. датский ученый Эразм Бартолин обнаружил, что если смотреть на какой-либо предмет сквозь кристалл исландского шпата, то при определенных положениях кристалла и предмета видны сразу два изображения предмета. Это явление назвали **явлением двойного лучепреломления**.

Объяснение природы этого явления дал в 1690 г. Христиан Гюйгенс в своей работе «Трактат о свете».

В современной трактовке объяснение природы явления следующее.

Свет, попадающий в двулучепреломляющее вещество, делится на два плоскополяризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях луча.

В общем случае эти лучи по-разному распространяются в различных направлениях.

Однако в любом двулучепреломляющем веществе существует одно или два направления, вдоль которых оба луча распространяются с одной скоростью.

Эти направления принято называть **оптическими осями**. В зависимости от количества осей двулучепреломляющие вещества делят на одноосные и двуосные. Мы будем рассматривать только одноосные двулучепреломляющие вещества.

Важно отметить, что направления колебаний векторов **E** плоскополяризованных лучей, возникающих внутри двулучепреломляющего вещества, всегда ориентированы определенным образом. У одного из них колебания вектора **E** перпендикулярны плоскости, в которой лежат падающий луч и оптическая ось (эту плоскость принято называть **главным сечением**). У второго – параллельны главному сечению.

Скорости распространения этих лучей зависят от угла между вектором **E** и оптической осью.

В луче с вектором **E**, перпендикулярным главному сечению, угол между **E** и оптической осью не зависит от угла падения луча. При любых углах падения вектор **E** перпендикулярен оптической оси.

Это значит, что при любом угле падения он имеет одну и ту же скорость.

Поскольку скорость света в веществе связана с показателем преломления этого вещества, постольку показатель преломления двулучепреломляющего вещества для этого луча также не зависит от угла падения. Другими словами, этот луч ведет себя как в обыкновенной изотропной среде.

Поэтому его принято называть **обыкновенным**. Далее вектор  $\mathbf{E}$  обыкновенного луча будет обозначаться  $\mathbf{E}_o$ .



Второй луч называется **необыкновенным**, поскольку для него угол между направлением колебаний вектора  $\mathbf{E}_e$  (далее вектор  $\mathbf{E}$  необыкновенного луча будет обозначаться  $\mathbf{E}_e$ ) и оптической осью зависит от угла падения (см. рисунок). Следовательно, при разных углах падения он распространяется с разной скоростью и имеет разный показатель преломления, что, в общем, необыкновенно.

Пусть на плоскопараллельную пластинку двулучепреломляющего вещества падает плоскополяризованный свет.

Будем считать, что луч света перпендикулярен поверхности пластинки, а плоскость колебаний вектора  $\mathbf{E}$  образует с оптической осью угол  $\alpha = 45^\circ$ .

В этом случае плоскость главного сечения перпендикулярна поверхности пластинки.

Внутри пластинки падающий луч разделится на два плоскополяризованных луча, один из которых поляризован перпендикулярно оптической оси (обыкновенный луч), а второй – параллельно (необыкновенный луч).

Естественно, что на входе в пластинку эти лучи будут синфазны.

Внутри пластинки показатели преломления для этих лучей имеют разные значения ( $n_o$  и  $n_e$ ).

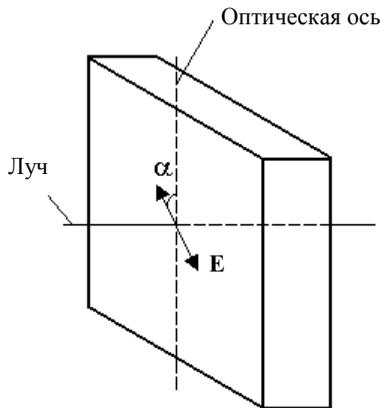
Значит, если обыкновенный и необыкновенный лучи пройдут внутри пластинки одинаковое расстояние (например,  $d$  – толщину пластинки), то они уже не будут синфазными. Они будут иметь разность фаз  $\Delta\varphi$ , равную  $k_o(n_o d - n_e d)$ . Здесь  $k_o$  – волновое число для вакуума.

Если разность фаз лучей, выходящих из пластинки, будет кратна  $2\pi$ , ориентация плоскости колебаний вектора  $\mathbf{E}$  не изменится. Свет за пластинкой будет поляризован так же, как перед ней.

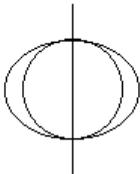
Если разность фаз кратна нечетному числу  $\pi$ , плоскость колебаний вектора  $\mathbf{E}$  за пластинкой повернется на  $90^\circ$ , но свет по-прежнему будет плоскополяризованным.

Если разность фаз окажется равной  $\pi/2$ , то свет за пластинкой окажется поляризованным по кругу. Пластинки такой толщины называют **четвертьволновыми**.

Пропускание поляризованного по кругу света через вторую четвертьволновую пластинку приводит к добавке дополнительной разности фаз в  $\pi/2$ . Это вызовет превращение поляризованного по кругу света в плоскополяризованный, плоскость поляризации которого повернута на  $90^\circ$  по сравнению со светом, падающим на первую пластинку\*.



Оптическая ось



Волновые поверхности обыкновенного и необыкновенного лучей имеют различную форму.

У обыкновенного луча это, естественно, сфера – обыкновенный луч во все стороны распространяется с одной скоростью.

У необыкновенного же волновая поверхность представляет собой эллипсоид – его скорость для разных направлений различна.

Поскольку вдоль оптической оси и обыкновенная, и необыкновенная световые волны распространяются с одной скоростью, в точках пересечения с оптической осью их волновые поверхности соприкасаются.

Рассмотрим естественную световую волну, падающую на поверхность кристаллической двулучепреломляющей пластинки.

---

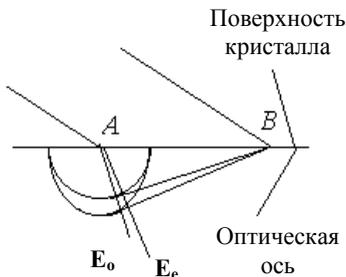
\* С помощью четвертьволновой пластины можно отличить свет, поляризованный по кругу, от естественного света; естественный свет, пропущенный через четвертьволновую пластинку, не превратится в плоскополяризованный.

Пусть оптическая ось пластинки параллельна поверхности пластинки.

Луч естественного света, попадая в точку  $A$ , возбуждает две вторичные световые волны – обыкновенную и необыкновенную.

Их фронты имеют вид, показанный на рисунке.

Лучи вторичных волн, возбужденных между точками  $A$  и  $B$ , перпендикулярны волновым



поверхностям обыкновенной и необыкновенной волн, которые можно построить, проводя из точки  $B$  касательную к каждой из волновой поверхности, образованной обыкновенным и необыкновенным лучами, прошедшими через точку  $A$ .

Из показанного на рисунке построения видно, что обыкновенная и необыкновенная волны распространяются внутри кристалла в разные стороны. На этом свойстве основан ряд методов получения поляризационных устройств – отсекая один из лучей (обыкновенный или необыкновенный), можно получить плоскополяризованный свет.

В заключение отметим, что двулучепреломляющими бывают кристаллические вещества, такие как кварц, исландский шпат.

Кроме этого, двулучепреломляющими могут быть вещества с несимметричными молекулами, ориентированными упорядочено вдоль какого-либо направления. Это могут быть жидкости и аморфные тела, в которых ориентация молекул возникает вследствие внешнего воздействия (механического напряжения, воздействия внешнего электрического или магнитного поля).

## 2. Квантовая механика

### 2.1. КРИЗИС КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В конце XIX в. в физике сложилась интересная ситуация. Ученые полагали, что стройное здание классической физики близко к завершению. Казалось, осталось объяснить некоторые незначительные эффекты... и развитие физики будет закончено.

Однако на рубеже XIX–XX вв. было сделано несколько открытий, которые не удавалось объяснить с позиции классической физики. Эти открытия породили кризис классической физики, который, в свою очередь, произвел революционный переворот в науке и вызвал появление квантовой физики.

### 2.2. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Тепловым называется электромагнитное излучение, испускаемое веществом за счет его внутренней энергии.

Тепловое излучение испускается всеми телами, температура которых отлична от абсолютного нуля.

Тепловое излучение представляет собой суперпозицию электромагнитных волн, длины которых лежат в широком диапазоне. Спектр теплового излучения непрерывен.

Спектральный состав теплового излучения зависит от температуры – чем выше температура тела, тем больше в нем доля коротковолнового излучения.

Вы прекрасно знаете, что раскаленные тела могут светиться. Это значит, что тепловое излучение такого тела содержит волны видимого диапазона.

Цвет свечения будет зависеть от температуры. Например, тело можно раскалить добела. Остывая, тело изменит цвет на красный, затем перестанет светиться вообще, хотя будет еще довольно горячим.

Тело перестанет светиться, но будет излучать энергию – вы можете ощущать тепло, идущее от него. Это значит, что тело излучает в инфракрасном диапазоне.

Более холодные тела в основном излучают в диапазоне, не воспринимаемом нашими органами чувств, поэтому мы его не ощущаем.

### 2.2.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Количественной характеристикой теплового излучения является **испускаемая способность** тела

$$r_\nu = \frac{dW_{\text{изл}}}{d\nu},$$

где  $r_\nu$  – испускаемая способность тела,  $dW_{\text{изл}}$  – энергия, испускаемая единицей поверхности за единицу времени в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ .

Другими словами,  $r_\nu$  есть мощность излучения единицы поверхности в единичном интервале частот.

Любое тело может поглощать излучение, падающее на его поверхность. Количественной мерой этого свойства является **поглощательная способность** тела

$$a_\nu = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW},$$

где  $a_\nu$  – поглощательная способность,  $dW$  – энергия электромагнитных волн, падающая на единицу поверхности в единицу времени в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ ,  $dW_{\text{погл}}$  – поглощенная телом часть энергии  $dW$ .

Поглощательная способность показывает, какая доля падающего излучения поглощается телом.

Опыты показывают, что испускаемая и поглощательная способности тел зависят от частоты электромагнитных волн, температуры тела, его химического состава, состояния поверхности.

Кроме дифференциальных характеристик теплового излучения используется интегральная характеристика. Это **энергетическая светимость**. Она представляет собой энергию, испущенную единицей поверхности тела за единицу времени в интервале длин волн от 0 до  $\infty$ .

Энергетическая светимость  $R$  и испускающая способность связаны соотношением  $R = \int_0^{\infty} r_{\nu} d\nu$ .

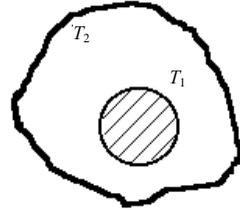
### 2.2.2. РАВНОВЕСНЫЙ ХАРАКТЕР ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Тепловое излучение происходит за счет внутренней энергии тела. Следовательно, по мере излучения внутренняя энергия тела и его температура должны уменьшаться. Но это означает, что уменьшается и само тепловое излучение.

Если каким-либо образом восполнять потери энергии излучающего тела, то его температура и тепловое излучение с течением времени не изменяются.

Рассмотрим некоторое тело с температурой  $T_1$ , находящееся в полости, температура стенок которой  $T_2$ .

Если  $T_1 > T_2$ , то тепловое излучение тела будет больше теплового излучения полости. Следовательно, внутренняя энергия тела будет уменьшаться, а полости – увеличиваться. Но это значит, что температура тела будет снижаться, а полости – расти. Естественно, продолжаться это будет до тех пор, пока температуры тела и полости не станут одинаковыми.

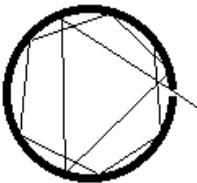


Такое состояние системы называют равновесным, а тепловое излучение в равновесном состоянии – **равновесным излучением**.

Тепловое излучение – единственный вид излучения, способный находиться в термодинамическом равновесии с веществом.

### 2.2.3. АБСОЛЮТНО ЧЕРНОЕ ТЕЛО

Рассмотрим непрозрачную полость, имеющую небольшое отверстие в стенке.



Излучение, проникающее внутрь полости, будет многократно отражаться ее стенками.

При каждом отражении часть энергии поглощается стенкой полости.

Если диаметр отверстия намного меньше диаметра полости, то падающее излучение вообще не выйдет наружу, а целиком поглотится внутренней поверхностью полости.

Кстати, вы ежедневно наблюдаете этот эффект – окна домов снаружи кажутся темными, хотя внутри комнат достаточно светло.

Таким образом, рассматриваемое тело полностью поглощает падающее излучение.

Тело, полностью поглощающее падающее излучение при любой температуре, называют **абсолютно черным телом** (АЧТ).

Поглощающая способность абсолютно черного тела равна 1.

В природе абсолютно черные тела не встречаются. Реальные тела не способны полностью поглощать падающее излучение на всех длинах волн (такие тела принято называть серыми<sup>\*</sup>).

Некоторые из реальных тел соответствуют понятию абсолютно черного тела в определенном интервале частот (например, в видимом диапазоне сажа практически ничего не отражает, т.е. ведет себя как АЧТ, но в других диапазонах длин волн она далека от абсолютно черного тела).

Абсолютно черное тело не только поглощает падающее излучение, но и испускает электромагнитные волны (иначе оно быстро нагрелось бы до бесконечно высокой температуры).

Поскольку АЧТ поглощает больше, чем любое другое тело, то для того, чтобы находиться в состоянии термодинамического равновесия, АЧТ должно и излучать больше любого другого тела. Следовательно, испускательная способность абсолютно черного тела больше испускательной способности любого реального тела.

Испускательную способность АЧТ в дальнейшем будем обозначать как  $r_{\text{АЧТ}}$ .

#### **2.2.4. ЗАКОН КИРХГОФА**

Рассмотрим полость, в которой находятся несколько тел, имеющих разную испускательную способность. Поглощательные способности этих тел также различны.

Если эта система находится в термодинамическом равновесии, температуры тел и стенок полости одинаковы.

Пусть у одного из тел испускательная способность  $r_1$  больше, чем у остальных.

Это значит, что в единицу времени оно испускает больше энергии, чем остальные тела.

Поскольку температура этого тела неизменна, оно должно и поглощать энергии больше, чем другие тела.

И, наоборот, тело с меньшей испускательной способностью должно меньше и поглощать.

---

<sup>\*</sup> Цвет тела не имеет значения, важно лишь то, что поглощается не всё упавшее на тело излучение.

Детальный анализ позволил Кирхгофу выявить следующую закономерность:

$$\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2} = \dots$$

Если одно из этих тел является абсолютно черным, то

$$\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_{\text{АЧТ}}}{a_{\text{АЧТ}}} = r_{\text{АЧТ}}.$$

Таким образом, отношение испускательной способности тела к его поглотательной способности не зависит от свойств и природы тела и равно испускательной способности абсолютно черного тела:

$$\frac{r}{a} = r_{\text{АЧТ}}.$$

Это выражение и называется **законом Кирхгофа для теплового излучения**.

Поскольку количество энергии, испускаемой и поглощаемой в единицу времени любым телом на частоте  $\nu$ , зависит от частоты излучения, поглотательную и испускательную способность принято обозначать как  $r_\nu$  и  $a_\nu$ .

Поскольку количество энергии, испускаемой или поглощаемой телом на данной частоте, зависит от температуры  $T$  тела, в обозначения испускательной и поглотательной способности принято добавлять индекс  $T$ :  $r_{\nu T}$  и  $a_{\nu T}$ .

С учетом всего сказанного, закон Кирхгофа принимает вид

$$\frac{r_{\nu T}}{a_{\nu T}} = r_{\nu \text{АЧТ}}.$$

Величина  $r_{\nu \text{АЧТ}}$  является функцией только частоты и температуры.

### 2.2.5. ЗАКОН СТЕФАНА–БОЛЬЦМАНА

Следующая (в хронологическом смысле) закономерность была выявлена физиками Йозефом Стефаном и Людвиком Больцманом. Им удалось установить зависимость энергии, испускаемой телом на всех длинах волн, от его температуры. Точнее, Стефан выявил пропорциональность энергии, испускаемой единицей поверхности тела в единицу времени четвертой степени абсолют-

ной температуры тела, а Больцман показал, что для абсолютно черного тела

$$R_{\text{АЧТ}} = \sigma T^4,$$

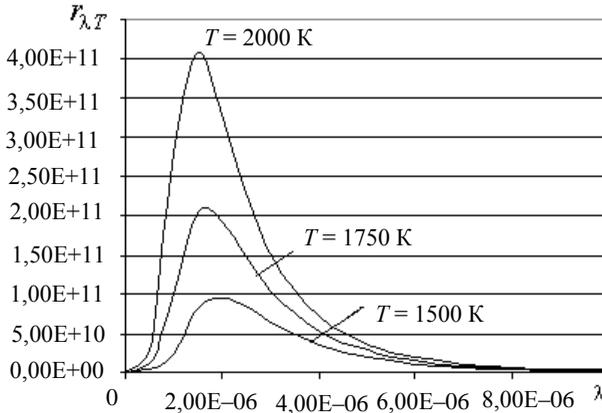
где  $R_{\text{АЧТ}}$  – энергетическая светимость АЧТ,  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана ( $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ).

Для нечерных тел энергетическая светимость этой закономерности не подчиняется. Для них коэффициент при  $T^4$  не равен  $\sigma$

Таким образом, закон Стефана–Больцмана имеет силу лишь для абсолютно черных тел.

### 2.2.6. ЗАКОН СМЕЩЕНИЯ ВИНА

Экспериментальные данные показывают, что распределение энергии излучения нагретого тела по частотам имеет сложный вид (см. рисунок).



Теоретический анализ позволил немецкому физiku Вину установить, что испускательная способность максимальна на длине волны, определяемой соотношением

$$T\lambda_{\text{max}} = b,$$

где  $T$  – абсолютная температура тела,  $\lambda_{\text{max}}$  – длина волны, на которую приходится максимум излучения абсолютно черного тела,  $b$  – постоянная Вина ( $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ ).

Это соотношение называют **законом смещения Вина**.

Закон смещения позволяет определить, на какой длине волны будет испускаться максимальное количество энергии, и показывает, что по мере роста температуры максимум излучения будет смещаться в коротковолновую область. Кстати, это объясняет изменение цвета нагретого тела при изменении его температуры.

### 2.2.7. ФОРМУЛЫ РЭЛЕЯ–ДЖИНСА И ПЛАНКА

Как отмечено в предыдущем разделе, зависимость испускательной способности от частоты была установлена экспериментально.

Естественно стремление физиков получить эту зависимость в аналитической форме.

В самом начале XX в. английские физики Рэлей и Джинс предприняли попытку сделать это.

Они исходили из достаточно хорошо развитых в термодинамике и статистической физике положений и, основываясь на классических представлениях о природе теплового излучения (т.е. полагая, что тепловое излучение представляет собой электромагнитные волны), получили, что

$$r_{\nu \text{ ТАЧТ}} = kT2\pi\nu^2/c^2,$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Формула Рэлей–Джинса довольно хорошо совпадает с результатами эксперимента в области низких частот, но в области более высоких частот дает резко отличную от результатов эксперимента зависимость: интегрирование этого выражения дает бесконечно большое значение энергетической светимости абсолютно черного тела, что противоречит эксперименту.

В то же время с классической точки зрения вывод формулы Рэлей–Джинса был безупречным. Это указывало на то, что существуют закономерности, несовместимые с классической физикой.

Преодолеть это противоречие удалось немецкому физику Макс Планку.

Планк предположил, что тепловое излучение испускается в виде отдельных порций энергии – квантов. Величина этой порции прямо пропорциональна частоте излучения:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{h}{2\pi} \omega,$$



где  $h$  – постоянная Планка.

Эта гипотеза позволила ему получить выражение

$$r_{\text{ТАЧТ}} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

которое точно согласуется с экспериментом.

Так впервые возникло революционное предположение о том, что электромагнитное излучение по своей природе двойственно – ему присущи как волновые, так и корпускулярные свойства.

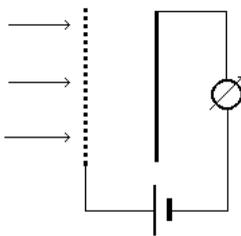
### 2.3. ЯВЛЕНИЕ ВНЕШНЕГО ФОТОЭФФЕКТА

В 1887 г. немецкий физик Генрих Герц экспериментально обнаружил, что при освещении металла ультрафиолетовыми лучами наблюдается эффект вырывания из металла заряженных частиц.

Это явление назвали **внешним фотоэффектом**.

В 1888–1889 гг. русский физик Александр Григорьевич Столетов тщательно исследовал этот эффект.

В своих экспериментах Столетов использовал прибор, состоящий из конденсатора, одна обкладка которого была сплошной



металлической пластиной, а вторая – металлической сеткой. Свет от электрической дуги, проходя сквозь сетку (далее будем называть ее анодом), попадал на металлическую пластину (будем называть ее катодом).

Если на катоде был отрицательный потенциал, в цепи возникал электрический ток.

Если же на катоде был положительный потенциал, тока не было.

Это позволило Столетову сделать вывод: свет вырывает из вещества катода отрицательные частицы.

Меня интенсивность падающего излучения, Столетов установил, что с увеличением интенсивности света возрастает сила тока в цепи.

Кроме этого, Столетов обнаружил, что если увеличивать разность потенциалов между анодом и катодом, то сила тока в цепи вначале возрастает, но после того, как разность потенциалов достигнет определенного значения, дальнейшее ее увеличение не вызывает роста тока в цепи. Максимальное значение тока в цепи установки Столетова получило название **тока насыщения**.

В 1899 г. английский физик Джозеф Томсон установил, что отрицательные частицы, вырывающиеся светом из катода, являются электронами.

Так было открыто и предварительно исследовано явление фотоэффекта.

Исходя из того что свет представляет собой электромагнитную волну, механизм возникновения фотоэффекта можно объяснить следующим образом.

Если на вещество падает электромагнитная волна, то за счет взаимодействия с электрической составляющей волны электроны в веществе начинают колебаться. Это означает, что энергия электронов увеличивается.

Чем больше интенсивность света, тем больше энергии передается электронам. Следовательно, увеличивая интенсивность света, можно добиться такого увеличения энергии электронов, что они смогут вырваться из вещества.

Кроме этого, чем больше энергии сообщает электронам световая волна, тем больше электронов сможет вырваться из пластины. Поэтому с увеличением интенсивности света возрастает ток насыщения.

Часть энергии, полученной от световой волны, будет истрачена на вырывание электрона из вещества. Эту энергию принято называть **работой выхода**.

Величина работы выхода зависит от материала, из которого изготовлен освещаемый образец, и не зависит от интенсивности и частоты света.

Остаток энергии существует в виде кинетической энергии электронов. Это значит, что с увеличением интенсивности света кинетическая энергия фотоэлектронов\* должна возрастать.

В 1900 г. немецкий физик Филипп Ленард обнаружил, что кинетическая энергия фотоэлектронов (точнее – максимальная кинетическая энергия электронов, вырванных из вещества при постоянной интенсивности света) не зависит от интенсивности света, но зависит от его частоты.

Кроме этого, было обнаружено, что фотоэффект наблюдается лишь в том случае, если длина волны падающего излучения не превышает определенную величину. Свет любой интенсивности с длиной волны, превышающей  $\lambda_0$ , фотоэффекта не вызывает. И, наоборот, свет малой интенсивности вызывает фотоэффект, если его длина волны меньше  $\lambda_0$ .

---

\* Так называют электроны, вырванные светом из металла.

Величину  $\lambda_0$  принято называть **красной границей фотоэффекта** (это не значит, что цвет света с длиной волны  $\lambda_0$  обязательно красный).

Объяснить эти особенности фотоэффекта на основе волновых представлений о природе света невозможно.

В 1905 г. это удалось Альберту Эйнштейну. Он смог устранить все противоречия в понимании механизма фотоэффекта. Для этого оказалось достаточно предположить, что свет поглощается порциями – квантами, энергия которых равна  $h\nu$  (здесь  $h$  – постоянная Планка,  $\nu$  – частота света).

Исходя из того что электрон поглощает квант энергии электромагнитного излучения только целиком, Эйнштейн получил выражение, объясняющее все особенности фотоэффекта. Это выражение имеет следующий вид:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + mV^2/2,$$

где  $h\nu$  – энергия кванта электромагнитного излучения,  $A_{\text{вых}}$  – работа выхода;  $mV^2/2$  – максимальная энергия фотоэлектрона.

Предложенный Эйнштейном подход позволяет объяснить природу фотоэффекта следующим образом.

Электрон поглощает квант с энергией  $h\nu$ .

За счет этой энергии он совершает работу выхода и покидает вещество.

Остаток полученной энергии переходит в кинетическую энергию электрона.

Следует отметить, что такую энергию будут иметь не все фотоэлектроны. Если квант  $h\nu$  поглощается электроном, который находится в глубине вещества, то он должен совершить не только работу выхода, но и истратить часть полученной энергии на преодоление сопротивления по пути к его поверхности. Поэтому максимальную кинетическую энергию будут иметь лишь те электроны, которые поглотили квант, находясь у поверхности вещества.

Увеличение интенсивности света означает увеличение количества квантов электромагнитной энергии, падающих на поверхность металла. Следовательно, с ростом интенсивности должно расти и количество электронов, поглотивших квант энергии, т.е. количество фотоэлектронов. Поэтому фототок растет с ростом интенсивности падающего излучения.

Уменьшение интенсивности света не влияет на величину энергии кванта. Уменьшается лишь количество квантов. Поэтому фотоэффект существует и при малых интенсивностях света. Естественно, величина фототока при этом мала.

Увеличение длины волны падающего излучения означает уменьшение его частоты. Это значит, что энергия кванта излучения уменьшается.

Естественно, энергия кванта никак не влияет на свойства облучаемого вещества. Другими словами, работа выхода электрона не зависит от энергии кванта падающего излучения.

Из этого следует, что с увеличением длины волны падающего излучения кинетическая энергия фотоэлектронов должна уменьшаться.

Если же длина волны падающего излучения станет больше, чем  $\lambda_0$ , то энергия кванта станет меньше работы выхода и ни один электрон не сможет вырваться из вещества. Фотоэффекта не будет.

Отсюда легко получить значение  $\lambda_0$ :

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}},$$

$$\lambda_0 = c/\nu_0 = ch/A_{\text{вых}}.$$

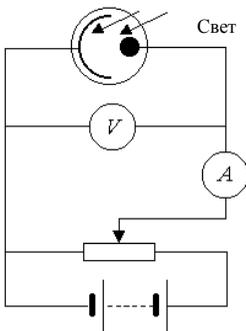
#### 2.4. ЗАВИСИМОСТЬ ФОТОТОКА ОТ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ МЕЖДУ КАТОДОМ И АНОДОМ

Рассмотрим график зависимости тока через фотоэлемент (будем так называть прибор, работающий на основе фотоэффекта) от напряжения на его аноде при постоянной интенсивности света, падающего на катод.

Если на катод фотоэлемента падает свет, длина волны которого меньше, чем красная граница фотоэффекта, то из катода вылетают электроны.

Начальные скорости вылетающих электронов направлены случайным образом, поэтому при нулевом напряжении на аноде на него попадут лишь те электроны, у которых скорость была направлена в сторону анода. Электроны, летевшие в других направлениях, на анод не попадут.

Если на анод подать небольшое положительное напряжение, то на него дополнительно попадут еще и те электроны, скорости которых направлены немного в сторону от анода. Следовательно, при увеличении положительного напряжения на аноде, ток через фотоэлемент возрастет.

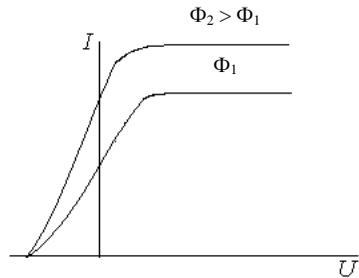


При определенном положительном напряжении на аноде на него попадут все электроны, выбитые из катода светом. Поэтому дальнейшее увеличение анодного напряжения не вызывает возрастания тока.

Максимальное значение тока через фотоэлемент, как уже отмечено в предыдущем разделе, называют **током насыщения**.

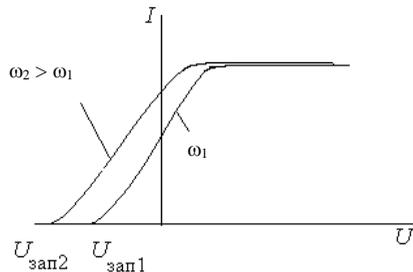
Обратите внимание на важную деталь: увеличение интенсивности света, падающего на катод, означает увеличение количества падающих на него фотонов.

Это значит, что увеличится количество электронов, поглотивших фотон, и соответственно возрастет количество электронов, вылетевших из фотокатода.



Следовательно, увеличение интенсивности света вызовет увеличение тока насыщения.

Если на анод подать небольшое отрицательное напряжение, то он будет отталкивать летящие в его сторону электроны. Поэтому электроны, летевшие с малой скоростью, не смогут преодолеть отталкивание и не попадут на анод, значит, анодный ток уменьшится.



Дальнейшее увеличение отрицательного напряжения на аноде вызовет отталкивание все большего количества электронов и дальнейшее уменьшение тока в цепи.

При определенном отрицательном напряжении на анод не попадут электроны, летевшие с максимальной скоростью. Это отрицательное напряжение называют **запирающим напряжением**.

Рассчитать значение запирающего напряжения можно достаточно просто.

Как известно, работа по перемещению заряда в электрическом поле равна произведению заряда на разность потенциалов между начальной и конечной точками. Следовательно, над электроном, летящим к отрицательному аноду, электрическое поле совершает работу, равную  $qU_a$  (потенциал катода равен нулю,

поэтому разность потенциалов между катодом и анодом равна напряжению на аноде).

Электрическое поле препятствует движению электрона в сторону анода, поэтому электрон тратит на преодоление сопротивления поля свою кинетическую энергию. Убыль кинетической энергии электрона равна работе электрического поля.

При запирающем напряжении на анод попадут лишь электроны с максимальной кинетической энергией, поэтому можно записать следующее соотношение:

$$eU_{\text{зап}} = mV^2 / 2 ,$$

где  $e$  – заряд электрона,  $U_{\text{зап}}$  – значение запирающего напряжения,  $mV^2 / 2$  – максимальная кинетическая энергия электронов.

Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта следует, что максимальная кинетическая энергия электрона равна

$$mV^2 / 2 = h\nu - A_{\text{вых}} .$$

Следовательно, величина запирающего напряжения может быть найдена с помощью следующего выражения:

$$U_{\text{зап}} = (h\nu - A_{\text{вых}}) / e .$$

Из последнего выражения видно, что значение запирающего напряжения зависит от частоты света. Чем выше частота падающего на катод света, тем больше запирающее напряжение.

## 2.5. ФОТОНЫ

Итак, в начале XX в. в результате анализа свойств теплового излучения и фотоэффекта стало ясно, что свет испускается и поглощается порциями – квантами с энергией  $h\nu$ .

Эйнштейн предположил, что свет и распространяется в виде точно таких же квантов. Это предположение получило ряд убедительных экспериментальных доказательств.

Таким образом, было доказано, что свет есть поток особых частиц. Эти частицы были названы **фотонами**.

Фотоны обладают энергией  $E = h\nu = \hbar\omega$ .

С другой стороны, в специальной теории относительности показано, что полная энергия любой частицы равна произведению массы частицы на квадрат скорости света в вакууме:  $E = mc^2$ .

Следовательно,  $h\nu = mc^2$ . Отсюда масса фотона

$$m = E/c^2 = h\nu/c^2.$$

Как и любая другая движущаяся частица, фотон обладает импульсом, который равен произведению его массы на скорость:

$$p = mc = h\nu/c.$$

Но все же фотон – не обычная частица. Это единственная из известных частица, которая движется со скоростью света. Противоречия со специальной теорией относительности не возникает – считается, что масса покоя фотона равна нулю. Но это означает и то, что фотон просто не может двигаться со скоростью, меньшей скорости света.

Вернемся к выражению для импульса фотона. Его можно записать в такой форме:

$$p = \frac{h2\pi\nu}{c2\pi}.$$

Учитывая, что  $2\pi/\lambda = k$ , импульс фотона равен

$$p = \frac{hk}{2\pi}.$$

В векторной форме

$$\mathbf{p} = \frac{h\mathbf{k}}{2\pi}.$$

Следовательно, импульс фотона и волновой вектор совпадают по направлению (в соответствии с правилом векторной алгебры произведение вектора на положительный скаляр дает вектор того же направления). Но волновой вектор показывает направление распространения электромагнитной волны.

Отсюда следует вывод: направление движения фотонов и есть направление распространения света.

В 1905 г., когда Эйнштейн опубликовал свою гипотезу о квантовой природе света, большинство физиков категорически отвергло ее, так как и экспериментально, и теоретически было доказано, что свет имеет волновую природу.

Лишь годы примирили оба взгляда на природу света.

Дело в том, что свет двойствен по своей природе. Ему присущи как волновые, так и корпускулярные\* свойства.

Эта двойственность – неотъемлемое свойство света. В некоторых явлениях заметнее волновые свойства света (интерференция, дифракция), а в некоторых – корпускулярные (фотоэффект, эффект Комптона).

Естественно, все сказанное относится не только к световой, но и любой электромагнитной волне, т.е. фотон есть квант любого электромагнитного излучения.

## 2.6. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ. ГИПОТЕЗА ДЕ БРОЙЛЯ

Двойственность природы света побудила французского физика Луи Виктора де Бройля высказать предположение о том, что дуализм свойствен не только электромагнитным волнам, но и частицам вещества. Это значит, что и любое материальное тело, материальная частица обладают не только корпускулярными, но и волновыми свойствами.

В соответствии с гипотезой де Бройля, длина волны, свойственной частице массой  $m$ , движущейся со скоростью  $v$ , равна

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p},$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $p$  – импульс частицы.

Полная энергия частицы связана с частотой волны:

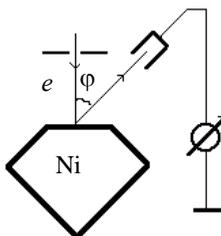
$$E = hv,$$

где  $v = \frac{v}{\lambda}$ .

Столь нетрадиционный взгляд на природу вещества требовал веских экспериментальных доказательств.

В 1927 г. американцы Клинтон Джозеф Дэвиссон и Лестер Альберт Джермер в эксперименте по отражению электронов от поверхности металла обнаружили дифракцию электронов, что полностью подтвердило гипотезу де Бройля.

Рассмотрим эксперимент Дэвиссона и Джермера (один из его вариантов).



В этом эксперименте исследовалось отражение электронов от монокристалла никелевого на русский – частица.

ля. Схематически установка изображена на рисунке.

Пучок электронов, имеющих одинаковую скорость, направлялся на поверхность монокристалла никеля.

Отраженные от поверхности электроны улавливались цилиндрическим электродом, соединенным с гальванометром.

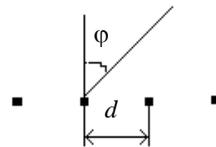
Положение электрода (угол  $\varphi$ ) можно было менять, т.е. измерялась интенсивность отраженного пучка электронов для разных значений угла отражения (угол падения был постоянным).

По классическим представлениям угол отражения должен быть равен углу падения.

Эксперимент же показал, что интенсивность отраженного пучка не равна нулю и при других значениях угла отражения, а для некоторых значений  $\varphi$  интенсивность отраженного пучка была максимальной.

Объяснить столь неожиданные (по классическим представлениям) результаты удалось следующим образом.

Поверхность кристалла представляет собой упорядоченную решетку атомов, находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга.



Если электрон – волна, то каждый атом решетки рассеивает падающую волну электронов, рассеянные же волны интерферируют между собой.

Для некоторых направлений должно выполняться условие интерференционных максимумов:  $2d\sin\varphi = n\lambda$ .

Расстояние между атомами  $d$  было известно, значения  $\varphi$ , под которыми возникали максимумы, были измерены в эксперименте. Рассчитанная же по этим данным длина волны электрона точно соответствовала гипотезе де Бройля, тем самым неопровержимо подтверждая ее.

В 1949 г. советский физик Валентин Александрович Фабрикант обнаружил дифракцию отдельных электронов (это то же, что дифракция выпускаемых по одному фотонов). Это окончательно доказало, что волновые свойства действительно присущи микрочастицам.

Следует отметить, что подобные эксперименты проводились не только с электронами, но и с другими элементарными частицами. Все они подтвердили наличие волновых свойств у материальных частиц. Гипотеза де Бройля действительно универсальна, любая микрочастица имеет и заметно проявляет волновые свойства.

Причем волновые свойства микрочастиц не только проявляют себя, но и существенно влияют на их поведение.

## 2.7. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

В соответствии с гипотезой де Бройля, каждый материальный объект имеет волновые свойства и, следовательно, его можно описать волновой функцией вида  $\psi = \Psi \cos(\omega t - kx)$ .

Циклическая частота  $\omega$  и волновое число  $k$  в этом уравнении связаны с энергией и импульсом материальной частицы и могут быть найдены с помощью формул де Бройля.

Но каков смысл  $\psi$  и  $\Psi$ ? Какова их природа? Это мгновенное значение и амплитуда чего?

Де Бройль на эти вопросы не дал определенного ответа.

Ученые пытались давать различные объяснения природы волн де Бройля. Сейчас общепринятой является концепция, предложенная немецким физиком Максом Борном. В соответствии с ней физическим смыслом обладает не волновая функция  $\psi$ , а квадрат ее модуля  $|\psi|^2$ . Смысл  $|\psi|^2$  в том, что квадрат модуля волновой функции определяет вероятность  $dp$  нахождения частицы в некотором элементарном объеме  $dV$ :

$$dp = |\psi|^2 dV.$$

Вероятность нахождения частицы в некотором конечном объеме  $V$  рассчитывается следующим образом:

$$p = \int_V |\psi|^2 dV.$$

Если же  $V$  – объем всего пространства, в котором находится рассматриваемая частица, то  $p = \int_V |\psi|^2 dV = 1$ .

Таким образом, квадрат модуля волновой функции представляет собой **плотность вероятности** нахождения частицы в какой-то точке пространства.

Знание волновой функции не позволяет нам **точно** определить положение микрочастицы и траекторию ее движения. Можно лишь определить **вероятность** нахождения частицы в интересующей нас точке пространства.

Это означает, что если волновые свойства частиц проявляют себя, то точное решение даже, казалось бы, простой задачи о расчете траектории движения частицы, невозможно.

## 2.8. СВОЙСТВА ВОЛН ДЕ БРОЙЛЯ

Длина волны, свойственной микрочастице, равна  $\lambda = h/mv = h/p$ .

Импульс частицы  $p = h/\lambda = hk/2\pi$ , или, в векторной форме,  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}/2\pi$ , где  $\mathbf{k}$  – волновой вектор.

Так может быть описана любая частица.

Любая волна характеризуется, в частности, фазовой  $v$  и групповой  $u$  скоростями. Следовательно, и любая частица должна иметь эти характеристики. Найдем их для некоторой частицы.

Пусть некоторая частица массой  $m$  движется в свободном пространстве со скоростью  $v'$ .

По определению фазовая скорость равна отношению циклической частоты волны к ее волновому числу:  $v = \omega/k$ .

Если умножить и разделить последнее выражение на постоянную Планка, то выражение для расчета фазовой скорости принимает иной вид:

$$v = \hbar\omega/\hbar k = \varepsilon/p$$

(здесь учтено, что полная энергия частицы равна произведению постоянной Планка на циклическую частоту частицы, а ее импульс – произведению волнового числа на постоянную Планка).

С другой стороны, в соответствии со специальной теорией относительности, полная энергия частицы равна произведению ее массы на квадрат скорости света:  $\varepsilon = mc^2$ .

В свою очередь импульс частицы равен произведению ее массы на скорость частицы:  $p = mv'$ .

Следовательно, фазовая скорость частицы равна

$$v = \varepsilon/p = mc^2/mv' = c^2/v'.$$

Поскольку скорость движения частиц всегда меньше скорости света в вакууме, постольку фазовая скорость волны де Бройля больше скорости света в вакууме.

Из формулы де Бройля для расчета длины волны частицы легко получить следующее выражение для скорости частицы:

$v' = h/m\lambda$ . Подставляя его в формулу для расчета фазовой скорости, получаем

$$v = c^2 m \lambda / h.$$

Из последнего выражения видно, что фазовая скорость  $v$  прямо пропорциональна длине волны де Бройля  $\lambda$ . Следовательно, изменение скорости движения частицы вызывает изменение ее фазовой скорости.

Групповая скорость частицы по определению равна  $u = d\omega/dk$ .

Умножив и разделив правую часть равенства на постоянную Планка, получаем

$$u = d(\hbar\omega)/d(\hbar k) = d\varepsilon/dp.$$

Из теории относительности известно, что полная энергия частицы  $\varepsilon$  равна

$$\varepsilon = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2},$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы.

Тогда

$$\begin{aligned} u &= \frac{d(c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2})}{dp} = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} = \\ &= \frac{c^2 p}{\varepsilon} = \frac{c^2 p}{mc^2} = \frac{mv'}{m} = v'. \end{aligned}$$

Это означает, что групповая скорость частицы равна скорости движения частицы.

## 2.9. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Для нас естественно знать (или иметь возможность узнать), где находится какой-либо предмет, какова его скорость.

Естественно также, что, измеряя расстояние до какого-то предмета, мы не изменим его положения или скорости.

Тем не менее рассмотрим проблему измерения координаты и скорости какого-либо тела внимательнее.

Как осуществляется измерение координаты?

В простейшем случае – с помощью линейки. Если точность измерения с помощью линейки недостаточна, можно использо-

вать более точные приборы (например, оптический дальномер). Понятно, что точность измерения координаты может быть очень высокой и, казалось бы, принципиальных ограничений точности измерения координаты не существует.

Понятно также, что прикосновение линейки и тем более луча света оптического дальномера к телу ни в коем случае не вызовет изменения положения этого тела.

Но если уменьшить массу и размеры тела, то прикосновение линейки может заметно повлиять на него. Покоящееся тело из-за толчка линейки начнет двигаться, следовательно, изменятся его и положение, и скорость. Значит, в этом случае точное измерение координаты станет невозможным.

На уровне элементарных частиц даже измерения с помощью светового луча приводят к такому же результату. Удар фотона об электрон вызовет изменения в его положении и скорости. Следовательно, измерение координаты (или скорости) элементарной частицы вызывает изменение их значений. Таким образом, измерение координаты или скорости микрочастицы вызовет появление неопределенности в значении измеряемых величин.

В 1927 г. немецкий физик-теоретик Вернер Карл Гейзенберг нашел этот предел.

Он показал, что произведение неопределенности в значении координаты частицы на неопределенность в значении ее импульса\* не может быть меньше половины постоянной Планка:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2};$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2};$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Эти выражения называют соотношениями неопределенностей. Они представляют собой математическое выражение принципа неопределенности Гейзенберга.

Принцип неопределенностей гласит, что нельзя одновременно измерить координату и импульс частицы с бесконечной точностью. Абсолютно точное определение одной из величин возмож-

---

\* Точнее – проекции неопределенности в значении импульса частицы на соответствующую ось координат.

но, но это означает, что погрешность в значении второй будет бесконечно велика.

Соотношения неопределенностей можно трактовать и иначе.

Если измерить координату микрочастицы с заданной точностью  $\Delta x$ , то это измерение вызовет изменение импульса частицы на величину, которая не может быть меньше, чем  $\Delta p_x \geq \hbar/2\Delta x$ .

И, наоборот, измерение импульса частицы вызывает изменение ее координаты.

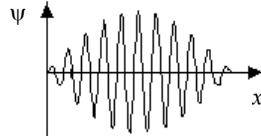
Таким образом, соотношение неопределенностей показывает, что измерения воздействуют на микрочастицы. Определение состояния системы микрочастиц вызовет изменение состояния этой системы.

Кроме того, соотношение неопределенностей раскрывает еще одну специфическую особенность мира микрочастиц.

Поскольку невозможно точно определить скорость и координату микрочастицы, постольку невозможно точно описать ее движение.

В частности, это означает, что понятие траектории неприменимо по отношению к микрочастице! Микрочастицы как бы «размазываются» в пространстве, поэтому невозможно провести линию, вдоль которой двигалась частица.

В макромире такое «размазывание» тел немыслимо, но для микромира это вполне естественно, что видно из следующего рассуждения.



Любая микрочастица описывается волновой функцией. Ее вид может быть, например, таким, какой приведен на рисунке.

Как можно **точно** определить положение волны (т.е. микрочастицы)? Ведь частица может быть обнаружена в любой точке внутри волнового пакета, изображенного на рисунке. Она находится где-то в интервале координат  $\Delta x$ , где  $\Delta x$  – длина волнового пакета. Именно поэтому частицы, проявляющие волновые свойства, не имеют траектории.

Соотношение неопределенностей действительно и для макромира, но в силу малости постоянной Планка оно себя практически не проявляет.

Например, если измерить координату частицы массой 1 кг с точностью  $10^{-4}$  м, то импульс частицы изменится на  $5,27 \cdot 10^{-32}$  кг·м/с. Это значит, что скорость частицы изменится на  $5,27 \cdot 10^{-32}$  м/с. Обнаружить такое изменение скорости невозможно.

Гейзенберг также показал, что подобным соотношением связаны не только координаты и импульс, но и энергия и время. Это соотношение имеет следующий вид:

$$\Delta E \Delta t \geq h.$$

Оно означает, что нельзя одновременно абсолютно точно определить энергию частицы, и время, в течение которого частица имеет эту энергию.

Если известно, что частица существует в состоянии с некоторой энергией в течение времени  $\Delta t$ , то эту энергию нельзя определить с погрешностью, меньшей чем  $\hbar/2\Delta t$ .

Таким образом, в микромире существуют объективные ограничения на точность предсказания событий с микрочастицами. В отличие от макрочастиц, для которых мы можем делать точные прогнозы (например, можно рассчитать траекторию космического корабля так, что он точно попадет на Марс или Юпитер), в микромире возможно лишь оценить вероятность конкретного события. Рассчитать точную траекторию микрочастицы нельзя.

## 2.10. УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

В разд. 2.6 показано, что любая частица обладает волновыми свойствами и, следовательно, может быть описана некоторой волновой функцией  $\psi$ .

Знание волновой функции позволяет рассчитать вероятность нахождения частицы в интересующей нас области пространства в любой момент времени.

Но как найти эту волновую функцию?

В классической механике подобная задача решается на основе второго закона Ньютона. Зная начальное положение, начальную скорость, массу тела и силу, действующую на него, мы можем найти координаты тела в любой момент времени путем интегрирования уравнения движения тела.

В квантовой механике существует подобное уравнение, позволяющее найти волновую функцию  $\psi$  и тем самым определить вероятность нахождения частицы в какой-либо точке пространства. Оно было получено австрийским физиком-теоретиком Эрвином Шрёдингером в 1926 г.

Уравнение Шрёдингера – основное уравнение нерелятивистской квантовой механики. Оно является фундаментальным, т.е. не вытекает из других законов. Единственным доказательством его правильности является эксперимент. До настоящего времени

все вытекающие из него следствия полностью подтверждаются на практике.

Это фундаментальное соотношение имеет следующий вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + U\psi ,$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $\psi$  – волновая функция частицы,  $m$  – масса частицы,  $U$  – энергия взаимодействия частицы с силовым полем, в котором она движется\*.

Часто уравнение Шредингера записывают в иной форме:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi ,$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

Если известны масса частицы, ее скорость и волновая функция частицы в начальный момент времени, то, решив уравнение Шредингера, можно найти  $\psi$  для любой точки пространства в любой последующий момент времени.

Другими словами, решение уравнения Шредингера позволяет предсказать вероятное поведение частицы в пространстве и во времени.

## 2.11. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Если силовое поле, в котором движется частица, не зависит от времени, то энергия  $U$  зависит только от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  частицы и называется, как отмечено чуть выше, потенциальной.

Такое не зависящее от времени поле принято называть стационарным.

В стационарном поле решение уравнения Шредингера заметно упрощается. Это обусловлено тем, что волновую функцию удобно представлять в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от времени  $t$ , а вторая – от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t\right)} ,$$

---

\* Если  $U$  не зависит от времени, то эту энергию называют потенциальной.

где  $E$  – полная энергия рассматриваемой частицы; в стационарных состояниях она остается постоянной.

Подставим это выражение в уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)\psi e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t\right)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t\right)} + U\psi e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t\right)}.$$

Сократив  $e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t\right)}$ , получим:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi,$$

или

$$(E - U)\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = 0.$$

Полученное уравнение называют **уравнением Шрёдингера для стационарных состояний**. Это уравнение не содержит членов, явно зависящих от времени, и позволяет найти функцию  $\psi(x, y, z)^*$ .

Волновую функцию частицы можно найти, просто умножая стационарную волновую функцию  $\psi(x, y, z)$  на множитель  $e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t\right)}$ .

Как отмечено в разд. 2.7 физическим смыслом обладает не  $\psi(x, y, z, t)$ , а квадрат модуля волновой функции  $|\psi|^2$ .

Следует отметить, что в общем случае волновая функция является комплексной величиной. Поэтому квадрат модуля волновой функции  $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ , где  $\psi^*$  – комплексно сопряженная волновой функции  $\psi$ .

В рассматриваемой ситуации

$$\begin{aligned} |\psi(x, y, z, t)|^2 &= \psi(x, y, z, t)\psi^*(x, y, z, t) = \\ &= \psi(x, y, z)e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t\right)}\psi^*(x, y, z)e^{i\left(\frac{E}{\hbar}t\right)} = \psi(x, y, z)\psi^*(x, y, z). \end{aligned}$$

---

\* Функцию  $\psi(x, y, z)$  принято называть стационарной волновой функцией.

Как видите, в полученном выражении осталась лишь стационарная волновая функция. Однако квадрат ее модуля **точно** равен квадрату модуля полной волновой функции.

Таким образом, для нахождения плотности вероятности нахождения частицы в интересующей нас точке стационарного поля, необходимо и достаточно решить стационарное уравнение Шрёдингера. Знание полной волновой функции в стационарных состояниях не нужно.

Необходимо отметить, что на стационарную функцию и на полную волновую функцию накладываются следующие требования:

1) волновая функция подчиняется принципу суперпозиции; это значит, что если уравнение Шрёдингера имеет несколько решений  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ , то волновая функция  $\psi$ , равная сумме любых сочетаний решений уравнения, тоже является решением этого уравнения;

2) производные  $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$  также должны подчиняться принципу суперпозиции;

3) функция  $\psi$  и ее производные должны быть конечны, непрерывны, однозначны;

4) при стремлении координат к бесконечности значение волновой функции должно стремиться к нулю.

## 2.12. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

Рассмотрим наиболее простую ситуацию: на движущуюся частицу не действуют никакие силы, т.е. она полностью свободна.

Потенциальная энергия частицы в этом случае равна 0.

Пусть частица с энергией  $E$  движется в направлении  $x$ . Тогда уравнение Шрёдингера принимает очень простой вид

$$E\psi + \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

Частным решением этого уравнения является функция  $\psi = Ae^{ikx}$  с собственным значением энергии  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  (в этом можно убедиться подстановкой), где  $k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ .

Полная волновая функция свободной частицы имеет вид

$$\Psi = \psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = A e^{-i(\omega t - kx)},$$

т.е. свободная частица на языке квантовой механики отображается как плоская монохроматическая волна с циклической частотой  $\omega = E/\hbar$  и волновым числом  $k = p/\hbar$ .

Вероятность обнаружения частицы в какой-либо области пространства определяется величиной  $|\psi|^2$ . В данном случае  $\psi = A e^{ikx}$ . Квадрат модуля функции  $\psi$  равен:

$$|\psi|^2 = \psi\psi^* = A e^{ikx} A e^{-ikx} = A^2 = \text{const.}$$

Этот результат говорит, что вероятность обнаружения частицы в любой точке оси  $x$  одинакова. Следовательно, область движения частицы вдоль оси  $x$  ничем не ограничена.

Нет для свободной частицы и ограничений на величину энергии. Ее энергия может принимать любые значения.

### 2.13. ОТРАЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ОТ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СТУПЕНЬКИ

Перейдем к рассмотрению частиц, движущихся в потенциальном поле. Начнем с простейшей ситуации.

Пусть частица движется слева направо вдоль оси  $x$ . В области  $x < 0$  ее потенциальная энергия  $U = 0$ , а в области  $x \geq 0$   $U = U_0$ .

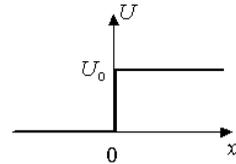
В классическом случае частица с энергией  $E < U_0$  в точке  $x = 0$  должна отразиться. Если же  $E > U_0$ , то скорость частицы должна уменьшиться, а направление движения не

должно измениться ( $\frac{mV^2}{2} = E - U_0$ ).

Для того чтобы оценить поведение квантовой частицы с энергией  $E < U_0$ , нам необходимо решить уравнение Шрёдингера и найти волновую функцию  $\psi$ . В данном случае его удобно решать для  $x < 0$  (область 1) и для  $x \geq 0$  (область 2).

Уравнения для этих областей будут иметь вид

$$1) -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = E \psi_1,$$



$$2) -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = (E - U_0) \psi_2.$$

Решения этих уравнений имеют следующий вид:

$$1) \psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x},$$

$$2) \psi_2 = A_2 e^{-\alpha x} + B_2 e^{\alpha x},$$

где  $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ,  $\alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$ .

Рассмотрим эти решения.

В выражении для расчета  $\psi_1$  первое слагаемое описывает волну, идущую слева направо, а второе – волну, распространяющуюся справа налево. Это позволяет сделать вывод: квантовая частица должна отразиться от барьера (точно так же, как и классическая частица).

Теперь рассмотрим уравнение для  $\psi_2$ . В этом уравнении второй член ( $B_2 e^{\alpha x}$ ) с увеличением  $x$  неограниченно растет. Но это означает, что вероятность обнаружить частицу растет по мере углубления в область 2. Это физически недопустимо. Поэтому мы полагаем, что  $B_2 = 0$ .

Первое слагаемое в  $\psi_2$  ведет себя нормально — по мере роста  $x$  оно уменьшается.

Найдем  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ .

Очевидно, вероятность обнаружения частицы не должна меняться скачком. Следовательно,  $\psi_1(0) = \psi_2(0)$  и  $\frac{\partial \psi_1(0)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(0)}{\partial x}$ .

Отсюда

$$A_1 + B_1 = A_2;$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = -\alpha A_2 = -\alpha(A_1 + B_1);$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = -\alpha A_1 - \alpha B_1;$$

$$A_1(ik_1 + \alpha) = B_1(ik_1 - \alpha);$$

$$B_1 = A_1 \frac{ik_1 + \alpha}{ik_1 - \alpha};$$

$$A_2 = A_1 + A_1 \frac{ik_1 + \alpha}{ik_1 - \alpha} = A_1 \frac{2ik_1}{ik_1 - \alpha}.$$

Таким образом, волновые функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  имеют вид

$$\psi_1 = A_1 \left( e^{ik_1x} + \frac{ik_1 + \alpha}{ik_1 - \alpha} e^{-ik_1x} \right),$$

$$\psi_2 = A_1 \frac{2ik_1}{ik_1 - \alpha} e^{-\alpha x}.$$

Оценим вероятность нахождения частицы в первой и второй областях.

Функция  $\psi_1$  содержит два слагаемых – с  $A_1$  и с  $B_1$ , описывающих соответственно падающую и отраженную волны.

Квадрат модуля первого слагаемого равен  $|A_1|^2$ .

Квадрат модуля второго слагаемого  $|B_1|^2 = \left| A_1 \frac{ik_1 + \alpha}{ik_1 - \alpha} \right|^2 = |A_1|^2$ .

Таким образом, амплитуды падающей и отраженной волн одинаковы. Это значит, что частица с энергией  $E < U_0$  обязательно отразится от потенциальной ступеньки.

Для  $\psi_2$

$$|\psi_2|^2 = |B_2 e^{-\alpha x}|^2 = \left| A_1 \frac{2ik_1}{ik_1 - \alpha} e^{-\alpha x} \right|^2,$$

$$|\psi_2|^2 = A_1^2 \frac{4k_1^2}{k_1^2 + \alpha^2} e^{-2\alpha x}$$

Из выражения для расчета  $|\psi_2|^2$  видно, что вероятность обнаружения частицы во второй области экспоненциально уменьшается с ростом  $x$ .

Но это означает, что частица может проникать на некоторую глубину за потенциальную ступеньку!

Классическая частица с энергией  $E < U_0$ , ни при каких условиях не может оказаться за потенциальным барьером.

Квантовая частица с такой же энергией вполне может оказаться за непреодолимым барьером. Исключено это лишь в том случае, когда потенциальный барьер бесконечно высок ( $\alpha$  с ростом  $U_0$  увеличивается, поэтому глубина проникновения за потенциальный барьер с ростом  $U_0$  уменьшается; при  $U_0 = \infty \psi_2(x) = 0$ ).

Таким образом, поведение квантовой частицы существенно отличается от поведения классической частицы.

Если энергия частицы больше высоты потенциальной ступеньки (т.е.  $E > U_0$ ), то решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x},$$

$$\psi_2 = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x},$$

где  $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ , и  $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$ .

Смысл слагаемых в  $\psi_1$  тот же, что и в предыдущем случае.

Во второй области отраженной волне взяться неоткуда. Поэтому полагаем  $B_2 = 0$  и  $\psi_2 = A_2 e^{ik_2 x}$ .

Используя условия непрерывности, можем записать

$$A_1 + B_1 = A_2;$$

$$k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2;$$

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_1;$$

$$A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_1.$$

Поскольку  $B_1 \neq 0$ , и в этом случае в области  $I$  имеется отраженная волна (хотя ступенька низкая, т.е.  $E > U_0$ ).

Это означает, что квантовая частица может отразиться от потенциальной ступеньки, хотя ее энергии вполне достаточно для его преодоления. Классическая частица в таких условиях не отразится никогда (представьте себе артиллерийский снаряд, попавший в оконную раму и отскочивший назад из-за удара о оконное стекло).

Для количественной характеристики барьеров удобно пользоваться так называемым **коэффициентом отражения**  $R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2$ .

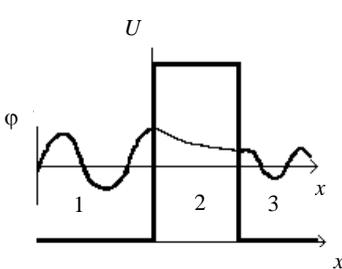
Этот коэффициент показывает, какова средняя вероятность отражения частицы от барьера.

$$\text{В данном случае } R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}} \right|^2.$$

Из полученного выражения следует, что вероятность отражения квантовой частицы от барьера зависит от соотношения энергии частицы и высоты потенциальной ступеньки.

При увеличении энергии частицы вероятность отражения от потенциальной ступеньки высотой  $U_0$  снижается.

## 2.14. ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ



Как мы уже видели, волновая функция частицы с  $E < U_0$  в области 2 не уменьшается скачком до 0, а экспоненциально затухает.

Если область 2 будет иметь конечную протяженность, то вполне возможно, что на выходе из области 2 волновая функция квантовой частицы не уменьшится до нуля.

Но это означает, что квантовая частица может оказаться за потенциальным барьером, несмотря на то что энергии ее совершенно недостаточно для преодоления этого барьера!

Для классической частицы такой эффект немислим (представьте себе, что пыль, подхваченная порывом ветра, проникает за оконное стекло внутрь помещения).

Тем не менее для квантовых частиц этот эффект вполне естествен.

В настоящее время он используется во многих серийно выпускаемых полупроводниковых приборах.

Эффект проникновения частицы с энергией  $E < U_0$  сквозь потенциальный барьер высотой  $U_0$  называется **туннельным эффектом**.

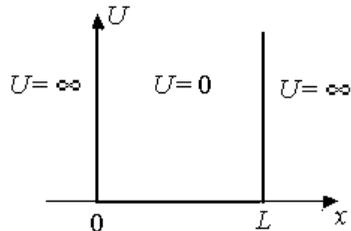
## 2.15. ЧАСТИЦА В БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

Потенциальной ямой называют область пространства, в которой потенциальная энергия меньше, чем в соседних областях.

Пусть частица находится в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме.

В такой яме частица может двигаться вдоль оси  $x$  от точки  $x = 0$  до точки  $x = L$ . В области  $x < 0$  и  $x > L$  частица проникнуть не может.

График зависимости потенциальной энергии от координаты изображен на рисунке (происхождение названия «потенциальная яма» связано с видом графика зависимости  $U(x)$ ).



Классическая частица в такой ситуации может двигаться внутри ямы совершенно свободно, но за стенки ямы проникнуть не может. Ее скорость в яме может быть любой. В частности, энергия может равняться нулю, т.е. частица может просто покоиться в какой-либо точке с координатой  $L > x > 0$ .

Если скорость классической частицы отлична от нуля, то частица должна совершать колебания между точками  $x = 0$  и  $x = L$  — долетев до какой-либо стенки ямы, частица отразится от нее и полетит в противоположную сторону.

Поведение квантовой частицы, в отличие от классической, более сложно, хотя есть и некоторое сходство. Сходство заключается в том, что в такой ситуации квантовая частица тоже не может проникнуть за стенки потенциальной ямы (так как они бесконечно высоки). На языке квантовой механики это означает, что  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(L) = 0$ .

Все остальные особенности поведения квантовой частицы можно найти, решив уравнение Шрёдингера для этой ситуации.

Поскольку яма бесконечно глубока, уравнение записываем лишь для области  $0 < x < L$ . Уравнение здесь имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + E\Psi = 0.$$

Общее решение уравнения выглядит следующим образом:

$$\Psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

где  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ .

Полная волновая функция

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = \Psi(x) e^{-i\omega t} = \\ &= Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)}, \end{aligned}$$

т.е. частица в этой ситуации представлена в виде суперпозиции двух встречных бегущих волн.

Найдем связь амплитуд падающей  $A$  и отраженной  $B$  волн.

Так как  $\Psi(0) = 0$ , то

$$Ae^{ik0} + Be^{-ik0} = A + B = 0,$$

$$A = -B$$

и

$$\Psi = A(e^{ikx} - e^{-ikx}).$$

Поскольку  $e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$ , выражение для волновой функции можно привести к виду

$$\Psi = 2iA\sin kx = C\sin kx.$$

Так как  $\Psi(L) = 0$ ,

$$C\sin kL = 0.$$

Поскольку  $C \neq 0$ , нулю должен равняться синус:  $\sin kL = 0$ .

Отсюда следует, что  $kL=n\pi$ , т.е.  $k$  не может принимать произвольные значения, ему разрешены лишь значения из ряда  $k = \frac{n\pi}{L}$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Это означает, что волновая функция может иметь лишь такой вид, при котором на ширине ямы укладывается целое число полуволен де Бройля:  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$  и  $L = n \frac{\lambda}{2}$ .

Как известно, наложение встречных волн, отвечающих такому условию, вызывает возникновение стоячей волны.

Следовательно, в бесконечно глубокой потенциальной яме волновая функция может иметь такой вид, при котором на ширине ямы возникают стоячие волны де Бройля.

Таким образом, волновая функция, описывающая квантовую частицу в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме, имеет следующий вид:

$$\psi(x) = C \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

По условию частица **обязательно** находится внутри потенциальной ямы. Это значит, что

$$\int_0^L |\psi|^2 dx = 1.$$

Тогда

$$|C|^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} x dx = 1.$$

Учитывая, что  $\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$ , мы можем получить,

что  $C = \sqrt{\frac{2}{L}}$ .

Поэтому функция  $\psi(x)$  принимает окончательный вид

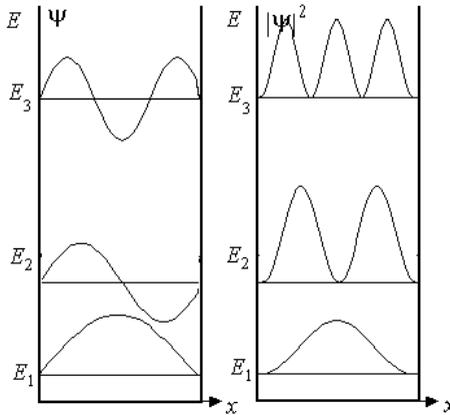
$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Отметим еще одну важную особенность.

Поскольку  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  и  $k$  может принимать лишь дискретные значения, полная энергия квантовой частицы также может принимать лишь некоторые значения, определяемые соотношением  $E_n = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2m}$ , где  $n = 1, 2, 3 \dots$

Таким образом, квантовая частица в яме не может «лежать на дне» – значение энергии  $E = 0$  запрещено для квантовой частицы.

Квантовая частица в такой яме может существовать лишь в движении, причем в движении, отвечающем волновому числу  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  и энергии  $E_n = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2m}$ .



Вид волновых функций, соответствующих разрешенным состояниям, схематически изображен на рисунке.

Итак, квантовой частице в потенциальной яме разрешены лишь такие состояния, для которых на ширине ямы укладывается целое число полуволен де Бройля (т.е. разрешены состояния, для которых возможно возникновение стоячей волны де Бройля).

Как видно из рисунка, вероятность обнаружения частицы в разных точках ямы различна (у классической частицы она одинакова). Вероятность обнаружения частицы в той или иной точке зависит от координаты.

В состоянии с минимальной возможной энергией наиболее вероятно обнаружить частицу в центре ямы и практически не вероятно обнаружить частицу у краев ямы.

Если частица имеет более высокую энергию ( $E_2$ ,  $E_3$  и т.д.), то вероятность обнаружения частицы в нескольких точках ямы максимальна. Между этими точками обязательно имеются такие, в которых квантовая частица не будет обнаружена никогда (точки, в которых квадрат модуля волновой функции равен нулю).

Квантовая частица может находиться на дискретных энергетических уровнях, разделенных интервалом  $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2 2m} (2n + 1)$ .

Величина интервала зависит от массы частицы  $m$ , ширины потенциальной ямы  $L$ , значения квантового числа  $n$ .

Анализ выражения для расчета  $\Delta E_n$  показывает, что интервал между соседними разрешенными значениями энергии квантовой частицы увеличивается по мере увеличения номера энергетического уровня  $n$ .

Чем больше масса квантовой частицы, тем ближе разрешенные уровни энергии частицы, тем ближе к непрерывному (классическому) спектр разрешенных значений энергии частицы. И, наоборот, уменьшение массы частицы приводит к увеличению дискретности энергетических уровней. Другими словами, уменьшение массы частицы вызывает усиление проявления ее квантовых свойств.

С уменьшением ширины ямы дискретность энергетических уровней возрастает. Следовательно, чем точнее задается положение частицы, тем заметнее ее квантовый характер.

Следовательно, различия между квантовой и классической механикой становятся все менее заметными по мере увеличения массы частиц и ширины потенциальных ям, ограничивающих свободу перемещения частиц. Таким образом, квантовая механика ни в коей мере не перечеркивает классическую механику.

## 2.16. ЧАСТИЦА В БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ

## ДВУМЕРНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ. ВЫРОЖДЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ

Рассмотрим несколько более сложную по сравнению с предыдущей ситуацией. Пусть яма двумерна ( $0 < x < L_x$ ,  $0 < y < L_y$ ).

Волновую функцию частицы в такой яме можно представить в виде произведения волновых функций частицы в одномерных ямах:

$$\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y),$$

где  $\psi(x)$  и  $\psi(y)$  – волновые функции частицы в одномерных ямах.

Подставляя выражения для волновых функций в одномерных ямах, получаем

$$\psi(x, y) = C \sin \frac{n_x \pi}{L_x} x \sin \frac{n_y \pi}{L_y} y,$$

где  $n_x$  – квантовое число, определяющее волновую функцию вдоль оси  $x$ ;  $n_y$  – квантовое число, определяющее волновую функцию вдоль оси  $y$ .

Таким образом, решение уравнения Шредингера для такой ямы представляет собой двумерную стоячую волну. На краях ямы волновая функция обращается в ноль. Внутри же ямы существуют максимумы и минимумы волновой функции.

Энергия частицы в двумерной яме будет равна

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m} k_y^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right).$$

Из этого выражения видно, что энергия зависит от квантовых чисел  $n_x$  и  $n_y$ .

$$\text{Если } L_x = L_y = L, \text{ то } E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2).$$

Из этого выражения видно, что одно и то же значение энергии может соответствовать разным состояниям, состояниям с разными  $n_x$  и  $n_y$ , но с одним значением их суммы.

Разные квантовые состояния, имеющие одно значение энергии, называют **вырожденными**.

Обратите внимание: вырождение уровней возникает в том случае, если двумерная яма квадратная.

Нетрудно догадаться, что примерно то же мы получим для трехмерной ямы. Если частица находится в трехмерной яме, ее состояние определяется тремя квантовыми числами  $n_x, n_y, n_z$ . Если же  $L_x = L_y = L_z = L$ , то возможно вырождение энергетических уровней.

Подводя итоги, отметим следующее.

Все квантовые системы обладают общими свойствами:

Если движение частицы в пространстве ограничено какими-либо потенциальными барьерами, то количество барьеров равно количеству квантовых чисел, описывающих состояние частицы (например, для трехмерной потенциальной ямы необходимы три квантовых числа).

Если квантовая система симметрична (точнее, если симметричны потенциальные барьеры, ограничивающие движение квантовых частиц), то система может иметь вырожденные энергетические уровни.

## 2.17. КВАНТОВЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

В классической физике широко распространено понятие **гармонического осциллятора**.

Гармонический осциллятор используется для описания поведения множества систем, где возможны гармонические колебания.

Характерная особенность гармонического осциллятора – движение материальной точки под воздействием квазиупругой силы  $F = -kx$ .

Потенциальная энергия частицы в такой системе

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}.$$

Поскольку зависимость потенциальной энергии осциллятора от координаты квадратичная, можно сказать, что гармонический осциллятор – это частица в параболической потенциальной яме.

Если волновые свойства колеблющейся частицы заметны, то гармонический осциллятор является квантовым.

Особенности поведения квантового гармонического осциллятора, т.е. квантовой частицы в параболической потенциальной яме, можно узнать, решив уравнение Шрёдингера для этой системы:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

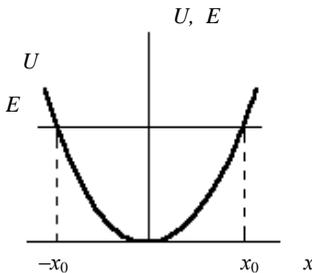
Общий вид решения довольно сложен. Поэтому решение рассматриваться не будет. Рассмотрим лишь выводы, сделанные на основе анализа решения.

Квантовому гармоническому осциллятору разрешены лишь значения энергии, отвечающие уравнению

$$E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0 = \left( n + \frac{1}{2} \right) h\nu_0,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Таким образом, энергия квантового гармонического осциллятора квантуется.

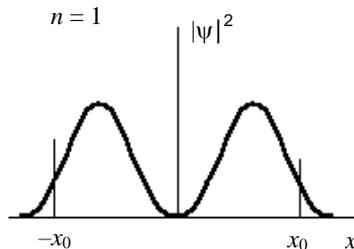


Минимальная возможная энергия квантового гармонического осциллятора не равна нулю ( $E_{\min} = h\nu_0/2$ ), т.е. квантовый гармонический осциллятор не может покоиться. Он всегда должен двигаться.

Более тщательный анализ может выявить еще одно интересное свойство квантового гармонического осциллятора – оказывается, квантовый гармонический осциллятор не может менять свою энергию произвольно. Ему разрешен лишь переход на один из соседних уровней энергии, т.е.  $n$  может измениться только на единицу:  $\Delta n = \pm 1$ . Другими словами, энергия квантового гармонического осциллятора может изменяться только порциями, равными  $h\nu_0$ .

Следует отметить важную особенность волновой функции, описывающей квантовый гармонический осциллятор.

Эта особенность заключается в том, что волновая функция за пределами ямы отлична от нуля. Другими словами, квантовый гармонический осциллятор может оказаться за стенками потенциальной ямы, чего классический осциллятор не может.



На рисунке в качестве примера показан график квадрата модуля волновой функции квантовой частицы от координаты (точки  $\pm x_0$  – координаты краев ямы; классический осциллятор за этими точками не может оказаться никогда).

Следует отметить, что примеры, рассмотренные в трех последних разделах, абстрактны. В реальном мире такие ситуации не встречаются.

Но анализ этих частных примеров позволил выявить некоторые особенности, присущие реальным квантовым системам. Поэтому анализ этих примеров следует расценивать как первый шаг в направлении к анализу реальных ситуаций (они будут рассмотрены в следующей части).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Арсентьев В.В., Кирпиченков В.Я. и др.* Курс физики. – СПб.: Лань, 2000. – Т. 2.
2. *Баранов А.В., Невская Г.Е. и др.* Колебания и волны. Оптика. Квантовая механика. – Новосибирск, 1994.
3. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. – М.: ГИТТЛ, 1950.
4. *Джанколи.* Физика. – М.: Мир, 1989. – Т. 1, 2.
5. *Ландсберг Г.С.* Оптика. – М.: Наука, 1976.
6. *Орир.* Физика. – М.: Мир, 1981. – Т. 1, 2.
7. *Путилов К.А.* Курс физики. – М.: ОГИЗ, 1945.
8. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – М.: Наука, 1978. – Т. 2.
9. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. – М.: Наука, 1977. – Т. 3.
10. *Спасский Б.И.* История физики. – М.: Высш. шк., 1977. – Т.1, 2.
11. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Высш. шк., 1990.
12. Физика. Большой энциклопедический словарь. – М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Волновая оптика .....	3
1.1. Интерференция волн.....	3
1.1.1. Интерференция волн от двух синфазных источни- ков .....	4
1.1.2. Когерентность .....	9
1.1.3. Интерференция света в тонких пленках .....	11
1.1.4. Диаграмма направленности .....	15
1.1.5. Многолучевая интерференция .....	16
1.2. Дифракция.....	24
1.2.1. Принцип Гюйгенса–Френеля .....	25
1.2.2. Дифракция Френеля. Метод зон Френеля.....	26
1.2.3. Дифракция Фраунгофера на щели .....	30
1.2.4. Дифракция на двух щелях .....	35
1.2.5. Дифракционная решетка .....	39
1.3. Естественный и поляризованный свет. Виды поляриза- ции.....	42
1.3.1. Способы получения поляризованного света .....	43
1.3.2. Явление двойного лучепреломления .....	47
2. Квантовая механика .....	51
2.1. Кризис классической физики.....	51
2.2. Тепловое излучение .....	51
2.2.1. Характеристики теплового излучения .....	52
2.2.2. Равновесный характер теплового излучения .....	53
2.2.3. Абсолютно черное тело .....	53
2.2.4. Закон Кирхгофа .....	54
2.2.5. Закон Стефана–Больцмана .....	55
2.2.6. Закон смещения Вина .....	56
2.2.7. Формулы Рэлея–Джинса и Планка .....	57

2.3. Явление внешнего фотоэффекта .....	58
2.4. Зависимость фототока от разности потенциалов между катодом и анодом .....	61
2.5. Фотоны .....	63
2.6. Корпускулярно-волновой дуализм. Гипотеза де Бройля .....	65
2.7. Волновая функция и ее физический смысл .....	67
2.8. Свойства волн де Бройля .....	68
2.9. Соотношение неопределенностей .....	70
2.10. Уравнение Шрёдингера .....	72
2.11. Уравнение Шрёдингера для стационарных состояний	74
2.12. Движение свободной частицы .....	75
2.13. Отражение частицы от потенциальной ступеньки....	76
2.14. Туннельный эффект .....	80
2.15. Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме	81
2.16. Частица в бесконечно глубокой двумерной потенци- альной яме. Вырождение энергетических уровней .....	86
2.17. Квантовый гармонический осциллятор .....	87
Литература.....	89

**Владимир Викторович Давыдкин**

**КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ИДО**

**Часть III**

**Учебное пособие**

Редактор *Н.В. Городник*  
Технический редактор *Г.Е. Телятникова*  
Компьютерная верстка *Н.В. Белова*

---

Подписано в печать 12.11.2003. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 500 экз.  
Уч.-изд. л. 5,5. Печ. л. 5,75. Изд. № 142. Заказ № . Цена договорная.

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20