

Лабораторная работа №1 Численное интегрирование

Введение. Для приближенного вычисления определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

могут использоваться квадратурные формулы:

а) левых прямоугольников

$$I^h = h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i), \quad (1)$$

б) правых прямоугольников

$$I^h = h \sum_{i=2}^N f(x_i) \quad (2)$$

в) центральных прямоугольников

$$I^h = h \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \quad (3)$$

г) трапеций

$$I^h = h \left\{ \frac{f(x_1) + f(x_N)}{2} + \sum_{i=2}^{N-1} f(x_i) \right\}, \quad (4)$$

д) Симпсона

$$I^h = \frac{h}{3} \{ f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + f(x_N) \} \quad (N - \text{нечетное}) \quad (5)$$

е) типа Гаусса

$$I^h = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^N A_k f(x_k), \quad x_k = \frac{b-a}{2} t_k + \frac{b+a}{2} \quad (6)$$

Здесь N – число узлов, для формул (1) – (5) $h = (b - a)/(N - 1)$ – шаг интегрирования, $x_i = a + (i - 1)h$ – координаты узлов, $i = 1, 2, \dots, N$. Параметры квадратурных формул Гаусса приведены в табл. 1.

Табл. 1.

N	t_k	A_k
3	$t_2 = 0$ $t_3 = -t_1 = 0.7745966692$	$A_2 = 8/9$ $A_1 = A_3 = 5/9$
4	$t_3 = -t_2 = 0.3399810436$ $t_4 = -t_1 = 0.8611363116$	$A_2 = A_3 = 0.6521451549$ $A_1 = A_4 = 0.3478548451$
5	$t_3 = 0$ $t_4 = -t_2 = 0.5384693101$ $t_5 = -t_1 = 0.9061798459$	$A_3 = 0.5688888889$ $A_2 = A_4 = 0.4786286705$ $A_1 = A_5 = 0.2369268851$
6	$t_4 = -t_3 = 0.2386191861$ $t_5 = -t_2 = 0.6612093865$ $t_6 = -t_1 = 0.9324695142$	$A_3 = A_4 = 0.4679139346$ $A_2 = A_5 = 0.3607615730$ $A_1 = A_6 = 0.1713244924$

Задание. Рассчитать приближенное значение интеграла по заданным квадратурным формулам, причем для формул (1) – (5) использовать число узлов $N = 21, 41$ и 81 . Расчет значений подинтегральной функции $f(x)$ и

приближенных значений интеграла оформить в виде соответствующих функций. Формальными параметрами функций для расчета приближенного значения интеграла должны быть пределы интегрирования a и b , имя подинтегральной функции f , число узлов N . Результаты сравнить со значениями, полученными с помощью модуля `scipy.integrate` и в пакете Mathcad. Сделать вывод о сравнительной точности используемых формул. Варианты исходных данных приведены в табл. 2.

Табл. 2.

№ вар.	$f(x), [a, b]$	Методы	№ вар.	$f(x), [a, b]$	Методы
1	$e^{0.3/x^2}, [-2, -1]$	(1), (5)	2	$2^x / \sqrt{2x^2 + 1}, [1, 2]$	(3), (6) при $N=6$
3	$\sin(0.5x^2), [0, 1]$	(1), (4)	4	$\ln(1 + x^2), [1, 3]$	(1), (6) при $N=3$
5	$\cos x / (1 + x^3), [0, 1]$	(2), (6) при $N=4$	6	$\sqrt{2x^2 + 3}, [2, 3]$	(2), (4)
7	$\sin x / (x + 2), [1, 3]$	(2), (5)	8	$e^{\sin \sqrt{x}}, [1, 2]$	(2), (6) при $N=4$
9	$e^{-0.1/x}, [1, 2]$	(1), (6) при $N=5$	10	$\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}, [0, \pi/2]$	(5), (6) при $N=6$
11	$\sin(x\sqrt{x}), [0, 2]$	(2), (6) при $N=5$	12	$e^{-\cos(2x)}, [0, 1]$	(4), (5)
13	$\sin^3(1/x), [2, 3]$	(3), (6) при $N=4$	14	$x/3 + x^4, [1, 2]$	(4), (6) при $N=6$
15	$2 \cos(0.2x^2), [0, 1]$	(1), (3)	16	$e^{-0.02x\sqrt{x}}, [1, 2]$	(1), (4)
17	$e^x / \sqrt{x^3 + 3}, [1, 2]$	(4), (6) при $N=3$	18	$\sin(1/x^2), [2, 3]$	(3), (5)
19	$4 \cos(0.02x^3), [0, 1]$	(2), (3)	20	$e^{1/x}, [1, 2]$	(2), (4)
21	$e^{-0.5x^2}, [0, 1]$	(2), (5)	22	$\cos(x^2 - 1), [0, 1]$	(2), (3)
23	$\sqrt{1 + \cos^2 x}, [0, \pi/2]$	(3), (4)	24	$\frac{1}{1-x+x^2}, [0, 1]$	(3), (5)
25	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}, [1, 2]$	(1), (5)	26	$\frac{x^4+1}{x^6+1}, [0, 1]$	(4), (5)
27	$\sqrt{e^x - 1}, [0, \ln 2]$	(3), (4)	28	$\frac{1}{1+\sqrt{\ln x}}, [2, 3]$	(4), (1)