Лабораторная работа №3
«Математическое моделирование»

Математическое моделирование – решение физической задачи с помощью математической модели явления/процесса. Уравнения математической модели решаются численно и/или аналитически (где это возможно).

В качестве примера рассмотрим математическое моделирование движения неуправляемого снаряда в атмосфере.

Математическая модель. Движение снаряда в вертикальной плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = -cuV \equiv a_x(u,v),\ \ \frac{dv}{dt} = -cvV - g \equiv a_y(u,v),\ \ \frac{dx}{dt} = u,\ \ \frac{dy}{dt} = v \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$x(0)=0,\quad y(0)=0,\quad u(0)=u_0=V_0\cos\theta_0,\quad v(0)=v_0=V_0\sin\theta_0. \qquad (2)$$

Здесь x и y – горизонтальная и вертикальная координаты, u, v и $V=\sqrt{u^2+v^2}$ – горизонтальная, вертикальная и полная скорости снаряда, θ_0 – угол бросания; $c=(\rho SC_x)/(2m)$, $\rho=\rho(y)$ – плотность воздуха на высоте y,

$$\rho=\begin{cases}1.225(1-y/44300)^{4.256}, & y<11000\\ 0.365\exp[-(y-11000)/6340], & y\ge 11000\end{cases},$$

$m=10^3C_md^3$, $S=\pi d^2/4$, d и C_m – соответственно масса, площадь поперечного сечения, калибр (в метрах) и коэффициент массы снаряда,
$C_x=C_x(M)$ – коэффициент лобового сопротивления снаряда,
$M=V/a$ – число Маха, $a=20\sqrt{T}$ – скорость звука,
$T=T(y)$ – температура воздуха,

$$T=\begin{cases}288-0.0065y, & y<11000\\ 216.5, & y\ge 11000.\end{cases}$$

Аналитическое решение. Задача (1) – (2) имеет точное (аналитическое) решение в частном случае полета снаряда в пустоте (нулевая сила сопротивления или $c=0$). Получите его самостоятельно в виде зависимостей от времени координат и скоростей снаряда $x=x_{ex}(t)$, $y=y_{ex}(t)$, $u=u_{ex}(t)$, $v=v_{ex}(t)$.

Численный алгоритм. Задачу Коши (1) – (2) можно решить численно, например, методом Эйлера:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+u(t)\Delta t,\quad y(t+\Delta t)=y(t)+v(t)\Delta t,$$

$$u(t+\Delta t)=u(t)+a_x(t)\Delta t,\ \ v(t+\Delta t)=v(t)+a_y(t)\Delta t, \qquad (3)$$

где $\Delta t=t_к/N$ и N – величина и число шагов интегрирования, $t_к$ – конечное время. Расчеты по формулам (3) начинаются при $t=0$ с учетом начальных данных (2):

$$x(\Delta t) = x(0) + u(0)\Delta t, \quad y(\Delta t) = y(0) + v(0)\Delta t,$$
$$u(\Delta t) = u(0) + a_x(0)\Delta t, \quad v(\Delta t) = v(0) + a_y(0)\Delta t,$$

$$x(2\Delta t) = x(\Delta t) + u(\Delta t)\Delta t, \quad y(2\Delta t) = y(\Delta t) + v(\Delta t)\Delta t,$$
$$u(2\Delta t) = u(\Delta t) + a_x(\Delta t)\Delta t, \quad v(2\Delta t) = v(\Delta t) + a_y(\Delta t)\Delta t$$

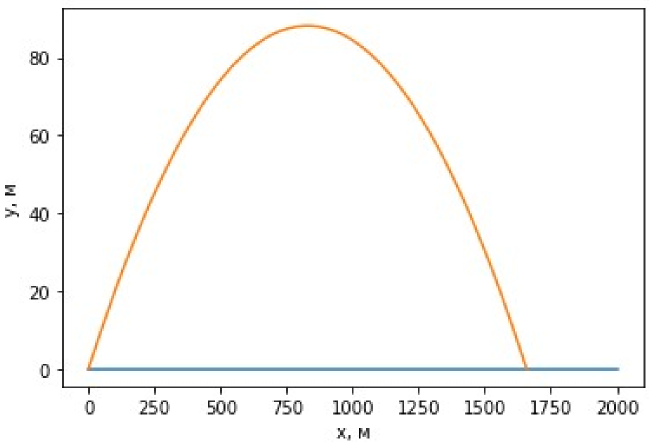
и т.д. до момента времени $t_к = N\Delta t$. Шаг интегрирования можно подобрать, например, в частном случае движения снаряда в пустоте, имеющем аналитическое решение, сравнивая с ним численное.

Python-программа. Для случая полета снаряда в пустоте ниже приведены текст программы и результат ее запуска.

```
#  полет неуправляемого снаряда
from math import pi,cos,sin,sqrt
import matplotlib.pyplot as plt

N=10000 # число шагов инт-ния
x=[0]*(N+1)
y=[0]*(N+1)
u=[0]*(N+1)
v=[0]*(N+1)
# константы
g=9.81                # ускорение свободного
падения
# характеристики орудия
w=200         # начальная скорость
Rb=2                  # радиус поражения
боеприпаса
# координаты цели
xc=2000
yc=0
while True:
   teta0=float(input('input teta0:'))
   teta0=(teta0/180.)*pi
   t=0; x[0]=0; y[0]=0   # начальные условия
   u[0]=w*cos(teta0)
   v[0]=w*sin(teta0)
# хар-ки траектории над гориз. рельефом
   tmax=(2*abs(v[0]))/g       #  длительность
полета
   xmax=u[0]*tmax       # дальность полета
   Hmax=(w*w)/(2*g)          #  макс. высота
траектории
# численные параметры
   tk=1.*tmax          # конечное время
   dt=tk/N            # шаг интегрирования
# расчет траектории
   ip=0               # индикатор попадания
   for i in range (1,N+1):
      x[i]=x[i-1]+dt*u[i-1] # новые координаты
      y[i]=y[i-1]+dt*v[i-1]
      ax=0.; ay=-g        # ускорения от внешних сил
      u[i]=u[i-1]+dt*ax     # новые скорости по (3)
      v[i]=v[i-1]+dt*ay
      drc=sqrt((x[i]-xc)**2+(y[i]-yc)**2)
      if  ip==0  and  drc<=Rb:  #  проверка  условия
попадания
         ip=1; print('Popali !')
# графика
   plt.plot([0,xc],[0,yc])
   plt.plot(x,y)
   plt.xlabel('x, м')
   plt.ylabel('y, м')
   plt.show()
   if ip==1:  break
plt.savefig('polet.png')

input teta0:12
```



Указания

Рекомендуется следующая последовательность выполнения работы:

1. Формулировка математической модели.
2. Качественное исследование модели. Получение аналитического решения.

3. Выбор метода численного решения ОДУ, разработка алгоритма.
4. Написание и отладка программы с текстовым и графическим выводом результатов.
5. Задание исходных данных. Выполнение расчетов.
6. Обработка и анализ результатов. Сравнение результатов численного и аналитического решения задачи.
7. Написание отчета.
8. Представление результатов исследования в виде электронной презентации.

Задачи

1. Высота подъема ракеты

Ракета с начальной массой m_0 запускается вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Масса ракеты уменьшается с постоянной скоростью и в момент t составляет $m=m_0-kt$, где k — постоянный коэффициент. Предполагается, что убывающая масса движется назад с постоянной скоростью u относительно ракеты. Найти высоту подъема ракеты в любое время t, учитывая лишь ее силу тяжести mg.

Решение. Движение ракеты происходит путем выброса струи горящего газа назад с определенной скоростью относительно ракеты. Это образует реактивную силу F_R в направлении движения ракеты.

Если F_H — внешняя сила, действующая на ракету, то суммарная сила F_H+F_R и дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d}{dt}(mv)=F_H+F_R, \quad F_R=\frac{dm}{dt}(v-u)$$

...

2. Динамика парашютиста

Сила тяжести летчика с парашютом 80 *кГ*. Сопротивление воздуха при спуске парашюта пропорционально квадрату его скорости v (коэффициент пропорциональности $k=400$). Определить скорость спуска в зависимости от времени и установить максимальную скорость спуска.

Решение. При спуске действует сила тяжести парашютиста с парашютом $P=mg$ (направлена книзу) и сопротивление воздуха, оказываемое этому спуску $F=-kv^2$ (направлено кверху)...

3. Падение тела при сопротивлении среды, пропорциональном скорости

С некоторой высоты брошено вертикально вниз тело массой m. Найти закон изменения скорости v падения этого тела, если на него действуют сила тяжести и тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности k).

4. Истечение жидкости из сосуда

В дне котла, имеющего форму полушара радиуса $R = 1$ *м* и наполненного водой, образовалась щель площадью $\sigma = 0{,}25$ *см*^{2}. Найти время истечения воды из котла.

Решение. Пусть в момент t глубина погружения щели x (рис. 36). За короткое время dt эта глубина изменится на величину $-dx$, так как процесс убывающий.

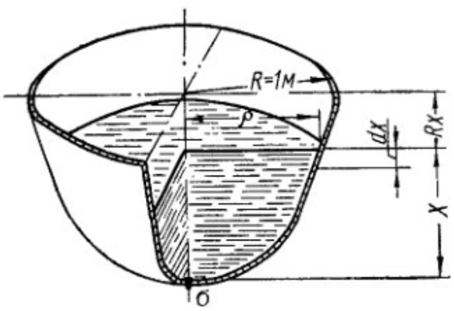


Рис.

За время dt вытечет вода, объем которой равен

$$-\pi\rho^2\,dx, \tag{1}$$

где ρ — радиус сечения котла на уровне x.

С другой стороны, тот же расход воды равен объему столбика воды с основанием σ и высотой vdt, где v — скорость истечения. $v = \sqrt{2gx}$, где x — высота столба воды над отверстием в данный момент, g — ускорение силы тяжести.

...

5. Посадка самолета

Самолет на лыжах приземляется на горизонтальное поле; летчик подводит самолет к посадочной площадке без вертикальной скорости в момент приземления (рис. 74). Коэффициент

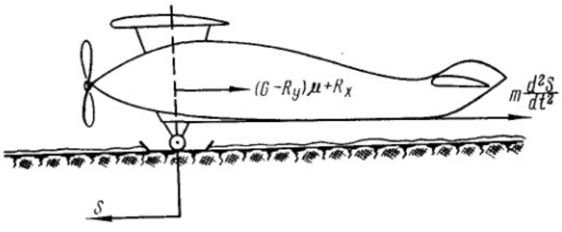


Рис. 74

трения лыж самолета о снег $\mu = 0{,}08$. Сила сопротивления воздуха движению самолета пропорциональна квадрату скорости. При скорости, равной 1 *м/сек*, горизонтальная составляющая силы сопротивления $R_x = 0{,}09$ *кГ*, а вертикальная составляющая, направленная вверх, $R_y = 0{,}7$ *кГ*. Сила тяжести самолета 2000 *кГ*. Найти длину и время пробега самолета до остановки.

Решение. Горизонтальная составляющая силы сопротивления

$$R_x = k_x v^2,$$

где

$$k_x = 0{,}09\ \text{кГ}\cdot\text{сек}^2/\text{м}^2.$$

Вертикальная составляющая силы сопротивления

$$R_y = k_y v^2,$$

где

$$k_y = 0{,}7\ \text{кГ}\cdot\text{сек}^2/\text{м}^2 \ldots$$

6. Наполнение резервуара

В резервуар глубиной $H = 4$ м, имеющий поперечное сечение $S = 36$ м^2, поступает жидкость с расходом $Q = 10$ м^3/мин. Найти время наполнения $t_{\text{нап}}$ резервуара, если одновременно из него вытекает жидкость через отверстие в дне площадью $S_{\text{отв}} = S/5000$. Расчеты проводить аналитическим и численным методами. При формулировке математической модели использовать:

– формулу для приращения $dW = Sdh$ объема жидкости в резервуаре за счет притока $dW_+ = Qdt$ и вытекания $dW_- = Q_{\text{отв}}dt$ (для отрезка времени $[t, t + dt]$):

$$dW = dW_+ - dW_-$$

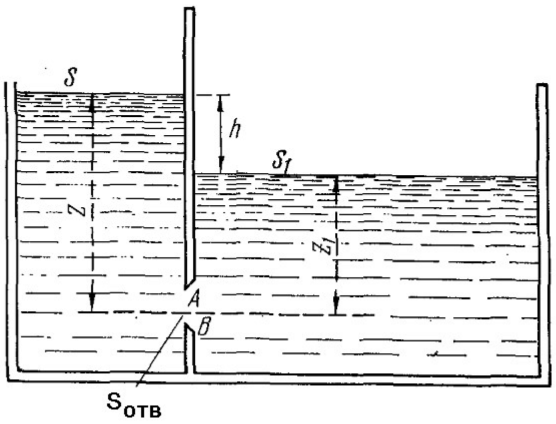
– формулу для расхода жидкости через отверстие:

$$Q_{\text{отв}} = \mu S_{\text{отв}} \sqrt{2gh},$$

где h – текущий уровень жидкости, $dh = h(t + dt) - h(t)$ – повышение уровня, $\mu = 0.6$ – коэффициент расхода.

7. Сообщающиеся сосуды

Два сообщающихся сосуда имеют форму параллелепипедов, у которых площади оснований S и S_1. Найти время установления одинаковых уровней жидкости в сосудах, если $S = S_1 = 100$ м^2, начальная разность уровней $h =$ 2.5 м, площадь отверстия $S_{\text{отв}} = 0{,}5$ м^2, коэффициент расхода $\mu = 0.62$.



Расчеты проводить аналитическим и численным методами. При формулировке математической модели использовать:

– формулу для уменьшения $dW = -Sdz$ объема жидкости в левом резервуаре за счет вытекания через отверстие $dW_- = Q_{\text{отв}}dt$ (для отрезка времени $[t, t + dt]$): $dW = dW_-$;

– закон сохранения общего объема жидкости: $dW + dW_1 = 0$;

– формулу для расхода жидкости через отверстие: $Q_{\text{отв}} = \mu S_{\text{отв}} \sqrt{2g(z - z_1)}$.

8. Подъем снаряда

Снаряд калибром $d = 50$ мм и массой $m = 10$ кг запущен вертикально вверх с начальной скоростью $V_0 = 100$ м/с. Сопротивление воздуха замедлит его движение, сообщая снаряду отрицательное ускорение, равное $-kV^2$.

Здесь V – мгновенная скорость тела, $k=\frac{\pi}{8}c\rho d^2/m$, $c=0.2$ – коэффициент лобового сопротивления, $\rho=1$ кг/м^3 – средняя плотность воздуха. Определить время достижения снарядом наивысшего положения.

9. Движение испаряющейся капли

Капля воды, имеющая начальную массу m_0 г и равномерно испаряющаяся со скоростью m_1 г/сек, движется по инерции с начальной скоростью v_0 см/сек. Сопротивление среды пропорционально скорости движения капли и ее радиусу. В начальный момент ($t=0$) оно равно f_0 . Найти зависимость скорости движения капли от времени.

Решение. По второму закону Ньютона

$$F=m\frac{dv}{dt},$$

где F — сила, m — масса, v — скорость, t — время.

Для решения этой задачи надо учесть, что масса m — переменная величина, зависящая от времени t; v — искомая функция.

Так как капля воды испаряется со скоростью m_1 г/сек, то в момент времени t масса капли будет равна

$$m=m_0-m_1t. \tag{1}$$

Сила, действующая на каплю, есть сопротивление среды, которое по условию задачи пропорционально vR, т. е.

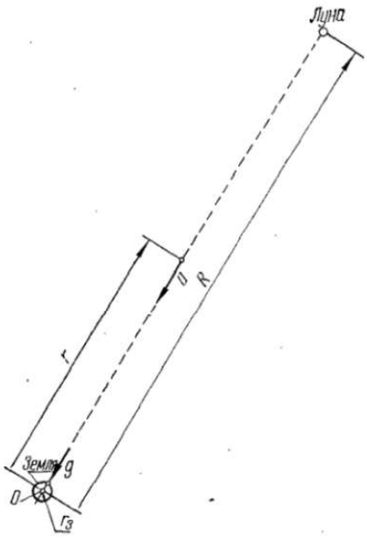
$$F=kvR, \tag{2}$$

где k — коэффициент пропорциональности…

10. Падение тела при сопротивлении среды, пропорциональном квадрату скорости

Задание аналогично варианту 3, но с учетом квадратичной зависимости силы сопротивления от скорости тела.

11. Время падения тела на Землю*



Падающее под действием силы тяжести тело (рис.) получает ускорение $a=\frac{k}{r^2}$, где k — коэффициент пропорциональности, r — расстояние падающего тела от центра Земли. Найти время падения тела, если оно находится от Земли на расстоянии $R=60{,}27r_з$, равном удалению Земли от Луны. Радиус Земли $r_з=6377$ км $=6{,}377\cdot10^6$ м.

Решение. Пусть R — расстояние Луны от центра Земли; g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли.
Общее выражение для ускорения примет вид

$$a=-\frac{gr_з^2}{r^2}.$$

С другой стороны, предполагая, что тело падает к центру Земли O прямолинейно (рис.), имеем

$$v=\frac{dr}{dt},\quad a=\frac{dv}{dt},$$

откуда

$$\frac{a}{v}=\frac{dv}{dr};\quad a=\frac{vdv}{dr}.$$

…

12. Полет снаряда «земля-вода»*

Провести численное моделирование полета неуправляемого снаряда при наземном старте с поражением подводной цели. Учесть силу лобового сопротивления в обеих средах.

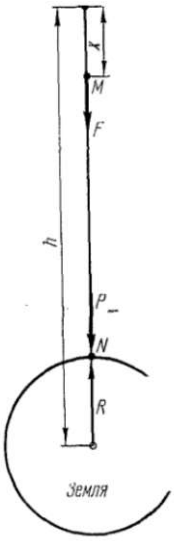
13. Полет метеоракеты*

Провести численное моделирование вертикального полета метеорологической ракеты. Учесть силы лобового сопротивления и тяги ракетного двигателя, ограниченность массы топлива.

14. Полет снаряда «вода-земля»*

Провести численное моделирование полета неуправляемого снаряда при подводном старте с поражением наземной цели. Учесть силу лобового сопротивления в обеих средах.

15. Скорость падения метеора на Землю*



Метеор, находящийся под исключительным влиянием земного притяжения, из состояния покоя начинает прямолинейно падать на Землю с неограниченно большого расстояния h. С какой скоростью он ударился бы о Землю при отсутствии земной атмосферы? Длина радиуса Земли $R = 6377$ *км* $= 6{,}377 \cdot 10^6$ *м*.

Решение. В точке M (рис.), находящейся на неограниченно большом расстоянии от Земли, на тело действует сила тяжести

$$F = ma, \qquad (1)$$

где m — масса тела, a — ускорение.

На поверхности Земли в точке N на тело действует сила тяжести

$$P = mg, \qquad (2)$$

где g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

По закону Ньютона эти силы обратно пропорциональны квадратам расстояний падающего тела от центра Земли:

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(h-x)^2}. \qquad (3)$$

С другой стороны, учитывая соотношения (1) и (2),

$$\frac{F}{P} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}. \qquad (4)$$

Ввиду равенства левых частей уравнений (3) и (4) приравнием их правые части, откуда

$$\frac{a}{g} = \frac{R^2}{(h-x)^2}$$

ли

$$a = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}. \qquad (5)$$

16*. Из пушки на Луну

На основании закона всемирного тяготения исследовать возможность достижения Луны путем выстрела снаряда космического корабля из гигантского орудия. Определить начальную скорость, которую необходимо сообщить снаряду для достижения Луны. Среднее расстояние от Земли до Луны $a = 384\,395$ *км*; радиус Земли $R_З = 6377$ *км*; ускорение силы тяжести Земли $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}; ускорение силы тяжести Луны $g_Л = 1{,}62$ *м/сек*^{2} (около $1/6\,g$); масса Земли $m_З = 81{,}53 m_Л$, где $m_Л$ — масса Луны.

Решение.

Сила взаимодействия F любых двух тел во Вселенной прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = \frac{k m_1 m_2}{d^2}, \tag{1}$$

где m_1, m_2 — массы тел, d — расстояние между ними, k — коэффициент пропорциональности (постоянная тяготения).

В основу исследования положим следующие предпосылки:

1) Земля и Луна являются шарообразными телами с радиусами соответственно $R_З$ и $R_Л$ и массами $m_З$ и $m_Л$;

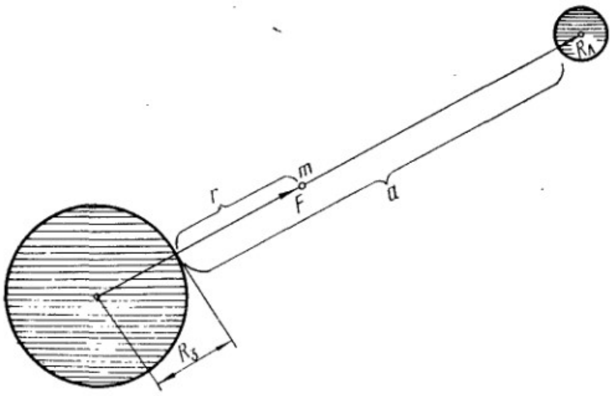
2) снаряд (или космический корабль) массы m выпускается из вертикально расположенного ствола к центру Луны с начальной скоростью v_0;

3) вращение Земли и Луны не принимается во внимание;

4) влияние Солнца и других планет не учитывается;

5) сопротивление атмосферы не принимается во внимание.

Согласно рис. 28, принимая направление от центра Земли к Луне за положительное, на основании закона всемирного тяготения и соотношения (1), имеем ...



17*. Движение звезды в галактике

Движение звезды в галактике может быть описано уравнениями динамики материальной точки на плоскости (x, y) в силовом поле (F_x, F_y) с потенциалом Энона-Хейлеса

$$U(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)/2 + x^2 y - y^3/3 \quad (F_x = -\partial U/\partial x, F_y = -\partial U/\partial y).$$

Численно методом 2-го порядка точности исследовать два случая движения со следующими начальными данными:

1) $x_0 = 0.2,\ y_0 = 0.3,\ W_0 = 0.1,\ v_0 = 0;$

2) $x_0 = 0.001,\ y_0 = 0.06,\ W_0 = 0.002,\ v_0 = 0.$

Здесь $W = (u^2 + v^2)/2$ – кинетическая энергия, u и v – проекции скорости на оси x и y соответственно. Шаг интегрирования подобрать таким, чтобы максимальное изменение полной энергии $W + U$ не превышало 1%.

18*. Структура белого карлика

Равновесие сферически-симметричной холодной звезды – белого карлика описывается системой уравнений

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{m\rho}{\gamma(\rho) r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = r^2 \rho$$

и начальных условий

$$\rho = \rho_c, \quad m = 0 \quad \text{при } r = 0.$$

Здесь r – относительный радиус, ρ и m – безразмерные плотность и масса, заключенная внутри сферы радиуса r, $\gamma(\rho) = \frac{\rho^{2/3}}{3\left[1+\rho^{2/3}\right]^{1/2}}$. Радиус звезды R определяется по профилю плотности $\rho(r)$ как расстояние, на котором плотность уменьшается до нуля. Общая масса звезды тогда определяется как $M = m(R)$.

Рассчитать профили плотности, полные массу и радиус звезды для значений безразмерной плотности в центре $\rho_c = 10^{-1}$, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 10^6.

19*. Динамика экосистемы «хищник-жертва»

Изменения численности жертв N_1 и хищников N_2 во времени описываются системой ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = N_2(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) \end{cases},$$

где все коэффициенты положительные и постоянные. Найти равновесное состояние системы. Получить общие интеграл и уравнение траектории на фазовой плоскости. Провести компьютерные эксперименты для различных случаев соотношения начальных численностей N_{10} и N_{20}, а также коэффициентов.

20*. Моделирование боевых действий

Построить математическую модель боевых действий между регулярными войсками. Пусть текущие численности сторон равны x и y. Принять, что на отрезке времени [t,t+dt] потери dx пропорциональны dt и y с коэффициентом a, потери dy – пропорциональны dt и x с коэффициентом b. Построить фазовую траекторию системы. Получить условия победы/поражения одной из сторон, и проиллюстрировать их соответствующими компьютерными экспериментами.

21. Динамика погружения

Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую отрицательную плавучесть P (равнодействующая сил Архимеда и тяжести), погружается на глубину из состояния покоя, двигаясь поступательно. Сопротивление воды принимается пропорциональным скорости погружения v и площади горизонтальной проекции лодки S. Масса лодки равна m. Найти скорость погружения v в зависимости от времени t, путь пройденный лодкой за время T.

22. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, в среде с линейным по скорости сопротивлением

23*. Изотермическое течение в простом газопроводе

24*. Адиабатическое течение в простом газопроводе

25*. Математическое моделирование эпидемии

26*. Изменение давления в пневмосистеме

27*. Динамика человека в летной камере вертикальной аэродинамической трубы