ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДУ

Задание. Методом стрельбы решить краевую задачу для поля температуры $T(x)$ плоского слоя

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + S(x) = 0, \quad 0 < x < l,$$
$$T = T_{\text{л}} \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{1}$$
$$T = T_{\text{п}} \quad \text{при} \quad x = l.$$

Здесь x – координата, l – толщина слоя, λ – коэффициент теплопроводности материала, S – источник тепла, $T_{\text{л}}$ и $T_{\text{п}}$ – граничные температуры. Провести сравнение приближенного и точного решений задачи.

Варианты заданий приведены в таблице.

№ варианта	материал	l, м	$T_{\text{л}}$, °C	$T_{\text{п}}$, °C	S, МВт/м^3
1	медь	0.05	200	10	$10\cos(\pi x/l)$
2	сталь	0.10	20	300	$9\sqrt{x/l}$
3	титан	0.15	500	10	$8e^{-2x/l}$
4	никель	0.20	100	600	$7\cos(5\pi x/l)$
5	медь	0.25	50	100	$6\sqrt[3]{x/l}$
6	сталь	0.20	150	10	$5e^{-x/l}$
7	титан	0.15	15	200	$6\sin(2\pi x/l)$
8	никель	0.10	400	15	$7\sqrt[4]{x/l}$
9	медь	0.05	30	350	$8e^{-3x/l}$
10	сталь	0.10	200	20	$9\cos(3\pi x/l)$
11	титан	0.15	10	250	$10\sqrt[5]{x/l}$
12	никель	0.20	300	30	$9\sin(0.5\pi x/l)$
13	медь	0.24	450	20	$8\sqrt{1+3x/l}$
14	сталь	0.22	120	570	$7e^{1-3x/l}$
15	титан	0.16	60	90	$6\cos(1+4\pi x/l)$
16	никель	0.11	140	20	$5\sqrt[3]{2+x/l}$
17	медь	0.07	30	230	$6e^{1-2x/l}$
18	сталь	0.12	330	25	$7\sin(1+2\pi x/l)$
19	титан	0.14	50	340	$8\sqrt[4]{1+x/l}$
20	никель	0.18	220	15	$9e^{1-x/l}$
21	медь	0.10	70	300	$5\left(2+\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)\right)$

Указания

Точное решение задачи (1) имеет вид:

$$T_e(x) = T_л - r_2(0) + \left[T_п - T_л + r_2(0) - r_2(l)\right]\frac{x}{l} + r_2(x),$$
$$r_2(x) = \int dx \int r(x)dx, \quad r(x) = -S(x)/\lambda \qquad (2)$$

Задача (1) является частным случаем линейной краевой задачи для ОДУ 2-го порядка

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = r(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u_л, \quad u(b) = u_п. \qquad (3)$$

В методе стрельбы решение задачи (3) сводится к решению задачи Коши

$$\begin{aligned} &u' = v, \quad u(a) = u_л \\ &v' = -p(x)v - q(x)u + r(x), \quad v(a) = v_л \end{aligned}. \qquad (4)$$

Здесь $u_л$ – пристрелочный параметр, подбираемый так, чтобы приближенно выполнялось условие на правой границе: $|u(b) - u_п| < \varepsilon$. Для интегрирования (4) использовать явный метод Эйлера с числом шагов не менее 20 и $\varepsilon = 10^{-1}$.

Сравнить результаты с численным решением, полученным с помощью модуля scipy.integrate, реализующего метод коллокации. Пример использования функции solve_bvp приведен ниже для задачи u'' + exp(u) = 0, u(0) = u(1) = 0.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_bvp
import matplotlib.pyplot as plt

def fun(x, u): # u" + k * exp(u) = 0
   return  np.vstack((u[1],  -np.exp(u[0])))  #  u1'=u2,
u2'=-exp(u1)

def bc(ua, ub): # u(0) = u(1) = 0
   return np.array([ua[0], ub[0]])

x = np.linspace(0, 1, 5)
u = np.zeros((2, x.size))

res = solve_bvp(fun, bc, x, u)

x_plot = np.linspace(0, 1, 100)
u_plot = res.sol(x_plot)[0]
plt.plot(x_plot, u_plot)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("u")
plt.show()
```